Resolução – Prova III (Matemática II)

10 de Agosto / Isabella B. Amaral – 11810773

Questão 1

Suponha que $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e prove que a EDO $y'' - y = f(x)$ tem no máximo uma solução limitada.

Resolução:

Nota: Essa solução foi inspirada por colegas.

Teorema 1.1. *Se $\varphi_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ compõe uma solução de $y'' - y = f(x)$ então $\varphi_1 - \varphi_2$ é solução de $y'' - y = 0$.*

Demonstração. Pela linearidade do operador diferencial, segue que $(\varphi_1 - \varphi_2)'' = \varphi_1'' - \varphi_2''$ de tal forma que, tomando a diferença

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'' - (\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_1'' - \varphi_1 - (\varphi_2'' - \varphi_2) = f(x) - f(x) = 0.$$

□

Lema 1.2. *$\varphi(x) = a\,\mathrm{e}^{x} + b\,\mathrm{e}^{-x}$ é limitada se, e somente se, $a = b = 0$.*

Demonstração. Para $a = b = 0$ a expressão é limitada trivialmente (i.e. é constante e igual à zero). Para provar a volta, notamos primeiramente que φ pode ser escrita como

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{x}\left(a + \frac{b}{\mathrm{e}^{2x}}\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(b + a\,\mathrm{e}^{2x}\right),$$

de tal forma que, avaliando os limites da expressão

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \varphi(x) &= \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x}\left(a + \frac{b}{\mathrm{e}^{2x}}\right) \\ \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) &= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-x}\left(b + a\,\mathrm{e}^{2x}\right), \end{aligned}$$

notamos que, para o primeiro limite, será $\pm\infty$ de acordo com o sinal de a, assim como no segundo caso, de acordo com o sinal de b, implicando que φ não é limitada para $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. □

Caso a equação admita duas soluções limitadas f e g, por 1.1 temos que $f - g$ também é solução limitada da equação homogênea associada. $y'' - y = 0$. Pelo teorema 8.6 do Apostol, toda solução da equação homogênea é da forma $a\,\mathrm{e}^{x} + b\,\mathrm{e}^{-x}$, com $a, b \in \mathrm{R}$, então, por 1.2, a única solução limitada dessa equação é a função identicamente nula. Dessa forma, temos $f - g = 0 \implies f = g$, i.e. deve existir somente uma solução limitada.

Questão 2

Determine a família de curvas ortogonais às circunferências do plano que passam pelos pontos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$.

Resolução:

Sendo a circunferência simétrica, temos que seu centro deve estar localizado entre os pontos $(4, 0)$ e

$(-4, 0)$ e, portanto, no eixo y. Seja, então, $P = (0, C)$ o centro da circunferência, devemos ter um raio que obedeça $R^2 = 4^2 + C^2$ e, também a equação da circunferência a seguir

$$x^2 + (y - C)^2 = 16 + C^2. \tag{2.1}$$

A partir desta podemos encontrar as retas tangentes à circunferência, utilizando sua derivada

$$\frac{\mathrm{d}\left[x^2 + (y-C)^2\right]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left[16 + C^2\right]}{\mathrm{d}x} \implies 2x + 2(y - C)y' = 0, \tag{2.2}$$

e, isolando C em 2.1, temos

$$x^2 + (y - C)^2 = 16 + C^2 \implies C = \frac{x^2 + y^2 - 16}{2y}. \tag{2.3}$$

O que nos permite resolver 2.2 em termos mais gerais:

$$\begin{aligned} x + y\,y' - \left(\frac{x^2 + y^2 - 16}{2y}\right) y' &= 0 \\ \implies \left(x^2 - y^2 - 16\right) y' - 2x\,y &= 0. \end{aligned}$$

De tal forma que as trajetórias ortogonais devem obedecer

$$y' = \frac{2x\,y}{y^2 - x^2 + 16}$$

e, por frações parciais, temos

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 - 16}{2x\,y} - \frac{y}{2x} \\ \implies y' + \frac{1}{2x} y &= \frac{x^2 - 16}{2x} y^{-1}. \end{aligned}$$

É sabido que uma EDO como a acima, da forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n + q\,n \neq 0$ e $n \neq 1$ (i.e. de Bernoulli) pode ser transformada em uma equação linear de primeira ordem por uma substituição em y: $v = y^k$, com $k = 1 - n$, como foi visto na questão 13 da seção 8.5 do Apostol (veja 10.1).

Sendo $n = -1$, temos $k = 2$, o que implica em

$$v' + 2\left(\frac{1}{2x}\right) v = 2\left(\frac{x^2 - 16}{2x}\right) \implies v' + \frac{1}{x} v = x - \frac{16}{x},$$

e, pelo teorema 8.3 do Apostol, temos que a equação $y' + P(x)y = Q(x)$ com $f(a) = b$ no intervalo aberto I tem como solução

$$f(x) = b\,\mathrm{e}^{-A(x)} + \mathrm{e}^{-A(x)} \int_a^x Q(t)\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{onde } A(x) = \int_a^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Substituindo por valores, temos que $v' + \frac{1}{x}v = x - \frac{16}{x}$, $P(x) = \frac{1}{x}$ e $Q(x) = x - \frac{16}{x}$. Assim:

$$A(x) = \int_a^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \log\left(\frac{x}{a}\right) \implies f(x) = b\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right) \int_a^x t - \frac{16}{t}\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}t$$

Portanto, temos

$$y^2 = v = \frac{b\,a}{x} + 16x\frac{\log(x/a)}{a} + \frac{a^2 - x^2}{2}.$$

Questão 3

Considere a EDO

$$y' = \frac{2y^2 + x}{3y^2 + 5}, x \in \mathbb{R},$$

e seja $\varphi(x), x \in \mathbb{R}$ a única solução desta equação tal que $\varphi(0) = 0$.

(a) Decidir se 0 é ponto de máximo, de mínimo ou não é um ponto de extremo local de φ.

Resolução:

Plugando a condição inicial na equação, temos $\varphi'(0) = 0$, o que implica em 0 ser um ponto crítico de φ. Além disso, por ser composta de duas funções deriváveis, φ' é derivável e, pela regra do quociente, temos

$$\varphi'' = \frac{(4\varphi\,\varphi' + 1)\left(3\varphi^2 + 5\right) - \left(2\varphi^2 + x\right)6\varphi\,\varphi'}{\left(3\varphi^2 + 5\right)^2}.$$

Dessa forma, temos $\varphi''(0) = 1/5 > 0$ e, portanto, 0 é ponto de mínimo local de φ.

(b) Determine reais $a > 0$ e $b > 0$ tais que $\varphi(x) > ax - b$, para todo $x \geqslant {}^{10}/_{3}$. (Mostre inicialmente que $\varphi'(x) \geqslant {}^{2}/_{3}$, se $x \geqslant {}^{10}/_{3}$.)

Resolução:

Observe que, se $x \geqslant 10/3$, então

$$2\varphi^2(x) + x \geqslant 2\varphi^2(x) + \frac{10}{3} = \frac{2}{3}\left(3\varphi^2(x) + 5\right),$$

e, portanto, $\varphi'(x) > 0$. Nessa condição, $\varphi(x)$ será estritamente maior que a reta cujo coeficiente angular é $a = 2/3$ e que possui $x = 10/3$ como raiz, já que $\varphi(10/3) > 0$ inequivocadamente, o que nos dá uma reta da forma $g(x) = 2x/3 - 20/9$ (i.e. $b = 20/9$), e temos a desigualdade $\varphi(x \geqslant 10/3) > 2x/3 - 20/9$.

$\square$

(c) Prove que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\varphi^2(x)} = 0$.

Resolução:

Tomamos, novamente, $a = 2/3$ e $b = 20/9$. Do item anterior, temos que $\varphi(x) > a\,x - b \geqslant 0$ para todo $x \geqslant 10/3$. Segue, então, que $\varphi^2(x \geqslant 10/3) > \left(a\,x - b\right)^2 = a^2x^2 - 2a\,b\,x + b^2$, e, dessa forma, temos

$$0 < \frac{x}{\varphi^2(x)} < \frac{x}{a^2x^2 - 2a\,b\,x + b^2},$$

e, no limite

$$0 \leqslant \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\varphi^2(x)} \leqslant \lim_{x \to \infty} \frac{1}{a^2x - 2a\,b + b^2/x} = 0,$$

e, pelo teorema do confronto, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\varphi^2(x)} = 0$.

(d) Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Resolução:

Considere $x \geqslant 10/3$ e, portanto, $\varphi(x) > 0$. Tomemos $\varphi'(x)$ na forma

$$\varphi'(x) = \frac{2 + x/\varphi^2(x)}{3 + 5/\varphi^2(x)},$$

segue daí que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \frac{2 + \lim\limits_{x\to\infty} x/\varphi^2(x)}{3 + \lim\limits_{x\to\infty} 5/\varphi^2(x)}.$$

Sendo

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} \varphi^2(x) = +\infty$$

já que $\varphi(x \geqslant 10/3) > a\,x - b$ e, então, como $\lim\limits_{x\to\infty} a\,x - b = +\infty$ segue que $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Notamos, então, que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty \implies \lim_{x\to\infty} \varphi^2(x) = +\infty.$$

Temos, então, que $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = 2/3$. Ora, como $\lim\limits_{x\to\infty}$ existe e é igual a $2/3$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$, segue-se da regra de l'hôpital que $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)/x = 2/3$.

Questão 4

Considere $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e considere u e v soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ com $u(0) = 1, u'(0) = 0, v(0) = 0, v'(0) = 1$.

(a) Prove uqe, se α e β são reais, a solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$ é $y(x) = \alpha\, u(x) + \beta\, v(x)$.

(b) Seja $a \in \mathbb{R}$. Prove que se $u(a) = 0$ então $u'(a) \neq 0$, prove também que $v(a) \neq 0$.

(c) Se $x_1 < x_2$ são tais que $u(x_1) = u(x_2) = 0$ e $u(x) \neq 0$, para todo $x \in (x_1, x_2)$, então existe um, e só um, $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tal que $v(\bar{x}) = 0$.

Questão 5

Considere $0 < a_1 \leqslant b_1$ e as sequências (a_n) e (b_n) definidas como $a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$ e $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

(a) Mostre que essas sequências convergem.

Resolução:

Provemos por indução que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tem

$$a_1 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_1.$$

A partir do caso base (i.e. $a_1 \leqslant b_1$), temos, pela desigualdade das médias, que $a_1 \leqslant \sqrt{a_1\, b_1} \leqslant (a_1 + b_1)/2 \leqslant b_1$ e segue que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

Supondo que a equação acima seja válida para algum $n \geqslant 1$ temos, pela desigualdade das médias,

$$a_{n+1} \leqslant \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} \leqslant (a_{n+1} + b_{n+1})/2 \leqslant b_{n+1}$$

uma vez que $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$, de onde concluímos que $a_1 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_1$. A partir desse fato, segue que ambas as sequências (a_n) e (b_n) são monotônicas e limitadas e, portanto, convergem.

(b) Mostre que o limite dessas sequências é o mesmo.

Resolução:

Pela definição do termo geral da sequência (b_n), temos

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

ou seja,

$$2b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Como toda subsequência de uma sequência converge para o mesmo limite, tomando $n \to \infty$ dos dois lados da igualdade segue que $2B - B = A$, isto é, $B = A$.

Questão 6

Sejam $p > 0, q > 0$ reais e considere, para os naturais $n \geqslant 1, x_n = \dfrac{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}$. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se, e só se, $q > p+1$.

Resolução:

Nota: Essa solução foi inspirada por colegas.

Teorema 6.1. *Seja $\sum x_n$ uma série de termos positivos. Se existem $r > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1 - \frac{1+r}{n}$$

para todo $n > n_0$, então a série $\sum x_n$ converge. Por outro lado, se

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

para todo $n > n_0$, então a série $\sum x_n$ diverge.

Demonstração. Observe que $x_{n+1}/x_n \leqslant 1 - (1+r)/n$ equivale a

$$n\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant n - 1 - r,$$

isto é,

$$x_n \leqslant \frac{(n-1)x_n - n\,x_{n+1}}{r}.$$

As reduzidas da série cujo termo geral é $\left((n-1)x_n - n\,x_{n+1}\right)/r$ formam uma série telescópica, da qual segue

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} x_k \leqslant \frac{n_0 x_{n_0}}{r} - \frac{n\,x_{n+1}}{r} \leqslant \frac{n_0 x_{n_0}}{r}$$

para todo $n > n_0$. Dessa forma, $\sum x_n$ é uma série de termos positivos cujas reduzidas são limitadas e, portanto, converge. Para provar o segundo resultado, note que $x_{n+1}/x_n \geqslant 1 - 1/n$ nos diz que

$$n\,x_{n+1} \geqslant (n-1)x_n$$

se $n > n_0$, donde concluímos que $(n-1)x_n \geqslant n_0 x_{n_0} + 1$ para todo $n > n_0$. Logo, temos que

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} x_k \geqslant n_0 x_{n_0} + 1 \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k-1} = n_0 x_{n_0+1} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{n}$$

para todo $n > n_0$. Como a série harmônica é divergente, segue que $\sum x_n$ é uma série divergente nesse caso. $\square$

Sendo os termos de x_n todos positivos, e

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{p+n+1}{q+n+1} = 1 + \frac{p-q}{q+n+1} = 1 - \frac{q-p}{q+n+1},$$

ou seja,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1 - \frac{(q-p-1)+1}{n}$$

para todo $n > \lfloor q+1 \rfloor$, se $p > q+1$, então pelo teorema 6.1 a série $\sum x_n$ converge. Reciprocamente, se $\sum x_n$ converge, afirmamos que $q > p+1$. Com efeito, se $q < p+1$, teríamos $x_n > \dfrac{p+n}{q+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, então a série seria claramente divergente. No caso em que $q = p+1$, seria

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

para todo $n > \lceil q+1 \rceil$, e portanto, do teorema 6.1, teríamos $\sum x_n$ divergente, como se queria demonstrar.

Questão 7

Decidir se as séries abaixo convergem e se convergem absolutamente:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log\left(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}\right)}.$$

Resolução:

Sendo $1 > \mathrm{e}^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\mathrm{e}^n - 1 < \mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}$. Assim, visto que $\lim(\mathrm{e}^n - 1) = +\infty$, obtemos $\lim(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}) = +\infty$, o que implica $\lim \log(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}) = +\infty$. Dessa forma, $\lim \dfrac{1}{\log(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})} = 0$ e, portanto, pelo teste de Leibniz, $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{\log(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})}$ converge. Por outro lado, $\mathrm{e}^n > \mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}$, de onde $n > \log(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})$ para todo n natural, ou seja $1/n < 1/\log(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})$. Como a série harmônica é divergente, pelo teste da comparação temos que $\sum 1/\log\left(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}\right)$ diverge. Concluímos, então, que a série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{\log\left(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}\right)}$ é condicionalmente convergente.

(b)

$$\sum_{n=2} \sin\left(n\,\pi + \frac{1}{n\,\log n}\right).$$

Resolução:

Subdividindo em casos, temos

1. Para $n = 2m$, temos

$$\sin\left(2m\pi + \frac{1}{n\log n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n\log n}\right),$$

2. e, para $n = 2m - 1$,

$$\begin{aligned}\sin\left((2m-1)\pi + \frac{1}{n\log n}\right) &= \sin\left(\frac{1}{n\log n} - \pi\right) = -\sin\pi - \frac{1}{n\log n} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\log n}\right) = \sin\left(-\frac{1}{n\log n}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{1}{n\log n}\right).\end{aligned}$$

Portanto, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n\log n}\right)$ é equivalente à série

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n\log n}\right).$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n\log n}\right) = 0$, pelo teste de Leibniz temos que a série converge. Por outro lado, como $\sum 1/(n\log n)$ diverge e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(1/(n\log n)\right)}{1/(n\log n)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1,$$

temos que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + 1/(n\log n)\right)$ é condicionalmente convergente.

Questão 8

Determine o(s) $C \in \mathbb{R}$ para o(s) qual(is) a função $f(x) = {}^{C\,x}/_{x^2+1} - {}^{1}/_{2x-1}$ é integrável em $[1, +\infty)$ e, nesse(s) caso(s), calcule sua integral nesse intervalo.

Resolução:

Queremos saber se a integral

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{C\,x}{x^2+1} - \frac{1}{2x-1}\right) \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{(2C-1)\,x^2 + C\,x - 1}{(2x-1)\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

existe. Para isso, podemos usar o critério de comparação limite (teorema 10.25 do Apostol):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{(2C-1)\,x^2 + C\,x - 1}{(2x-1)\,(x^2+1)}}{1/x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x-1}\right) \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(2C-1) + C\,x - 1}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(2C-1) + C\,x - 1}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2C - 1 + C/x - 1/x^2}{1 + 1/x^2}\right) \\ &= \frac{2C-1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, como $\int_1^{\infty} 1/x\,\mathrm{d}x$ diverge, a integral proposta certamente irá divergir para todo C tal que

$(2C-1)/2 \neq 0$. Então, o caso de convergência deve ser para $C = 1/2$. Substituindo, temos:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \left(\frac{x/2}{x^2+1} - \frac{1}{2x-1}\right) \mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2}\int_1^a \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int_1^a \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{\log(x^2+1)}{4} - \frac{\log|2x-1|}{2}\right)\Bigg|_1^a \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\left[\left(\log\left(a^2+1\right) - 2\log(2a-1)\right) - (\log 2 - 2\log 1)\right] \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\left[\log\left(\frac{a^2+1}{2(2a-1)^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\log\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+1/a^2}{8-8/a+2/a^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\cdot\log\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{-3\log 2}{4}.
\end{aligned}$$

Questão 9

Determine os $x \in \mathbb{R}$ para os quais as séries abaixo convergem:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^n\, \sin^{2n} x}{n}.$$

Resolução:

Como $\sum(-1)^{n+1}/n$ converge, pelo teste de Abel, a série

$$\sum \left((-1)^{n+1} 2^n \sin^{2n} x\right)/n$$

converge se $x_n = 2^n \sin^{2n} x$ é uma sequência não crescente. Mas $x_n = (2\sin^2 x)^n$ é não crescente se, e somente se, $2\sin^2 x \leqslant 1$, isto é, se $|\sin x| \leqslant \sqrt{2}/2$. Portanto, se

$$-\pi/4 + 2k\,\pi \leqslant x \leqslant \pi/4 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

então a série $\sum(-1)^{n+1}/n$ é convergente.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, \sin^n x}{n^2}.$$

Resolução:

Como $\sum 1/n^2$ converge, pelo teste de Abel, a série

$$\sum \left(2^n \sin^n x\right)/n^2$$

converge se $x_n = 2^n \sin^n x$ é não crescente. Mas $x_n = (2\sin x)^n$ é não crescente se, e somente se, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1/2$. Portanto, se

$$2k\,\pi \leqslant x \leqslant \pi/6 + 2k\,\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

a série $\sum \left(2^n \sin^n x\right)/n^2$ é convergente.

Questão 10

Seja, para $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ e $\alpha \in (0, +\infty)$ $f_n(x) = \dfrac{\cos n\, x}{n^\alpha}, x \in \mathbb{R}$.

(a) Prove que, se $\alpha > 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Nota: feita nos 45 do segundo tempo, espero que dê pra aproveitar algo :).

Sabemos que

$$0 \leqslant \frac{|\cos(n\, x)|}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de tal forma que o somatório $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$, já que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge para $\alpha > 1$ como fora demonstrado em aula.

(b) Mostre que se $0 < \alpha \leqslant 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ não converge em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Tomando $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

e, portanto, se x é múltiplo de 2π, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)/n^\alpha$ não converge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ diverge para $\alpha \in (0, 1]$ como mostrado em aula, o que implica que $\sum f_n(x)$ não converge para estes valores de α.

(c) Tome $\alpha > 1$ e considere $F_\alpha \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o limite de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Calcule $\int_0^\pi F_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_0^{\pi/2} F_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$.

Resolução:

Pelo teorema 11.4 do Apostol, temos que

$$\int_0^x F_\alpha(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos(nu)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nu)}{n^{\alpha+1}}.$$

Para $x = \pi$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nu)}{n^{\alpha+1}} = 0.$$

Para $x = \pi/2$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nu)}{n^{\alpha+1}}$$

convergente, já que se $\alpha > 1$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Sabemos que

$$\int_0^x \frac{\cos(nu)}{n^\alpha}\,\mathrm{d}u = \frac{\sin(nu)}{n^{\alpha+1}},$$

portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\cos(nu)}{n^\alpha}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nu)}{n^{\alpha+1}},$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ vale, então, que

$$0 \leqslant \frac{|\sin(nx)|}{n^{\alpha+1}} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

A série converge uniformemente em $\mathbb{R}$ já que $\sum 1/n^{\alpha+1}$ é convergente para $\alpha > 1$, como fora demonstrado em aula.

(d) Considere $\alpha > 2$ e prove que F_α é derivável. Calcule, nesse caso, $F'_\alpha(x)$.

Resolução:

F_α é derivável, já que para f_n de classe C^1 para todo $n \in \mathbb{N}$ onde $\sum f'_n(x)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$, F_α é derivável, e $F'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$. Demonstração: Pelo teorema fundamental do cálculo, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, vale que

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(0) + \int_0^x \sum_{k=1}^{n} f'_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tomando o limite, pelo teorema 11.3 do Apostol, temos que

$$F_\alpha(x) = F_\alpha(0) + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(t)\,\mathrm{d}t$$

já que $\sum f'_n$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Pelo teorema 11.1 do Apostol, $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ é contínua, logo F_α é derivável e $F'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$. Portanto, $F'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^{\alpha-1}}$.

Apêndice

Teorema 10.1. *Seja k uma constante não nula. Assuma que P e Q são contínuos num intervalo I. Se $a \in I$ e b é qualquer número real, seja $v = g(x)$ a única solução do problema de valor inicial dado por*

$$v' + k\,P(x)v = k\,Q(x) \tag{10.1}$$

em I, com $g(a) = b$. Se $n \neq 1$ e $k = 1 - n$, prove que uma função $y = f(x)$, que nunca é nula em I, é solução pra o problema de valor inicial dado por

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad \text{em } I, \text{ com } f(a)^k = b$$

se, e somente se, a $k-$ésima potência de f é igual à g em I.

Demonstração. Tomemos

$$v = y^k \implies v' = y'\,k\,y^{k-1},$$

substituindo na equação 10.1, temos

$$y'\,k\,y^{k-1} + k\,P\,y^k = k\,Q$$

e, como $k = 1 - n$

$$\begin{aligned} y'\, y^{-n} + P\, y^{1-n} &= Q \\ \implies y' + P\, y &= Q\, y^n \end{aligned}$$

$\square$