Provinha #2

Isabella B. — 11810773

---

a. Sendo a matriz inversível, seu determinante deve ser não nulo. Dessa forma, pelo método de cálculo do determinante por meio dos cofatores, temos que:

$$\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} \neq 0 \implies a_{11} \neq 0,$$

como se queria demonstrar.

b. Denote a matriz A modificada por A'. Pela letra (a), sabemos que

$$\det A \neq 0 \implies \det A' = a_{11} \cdot \det A'_{11} \neq 0 \implies \det A'_{11} \neq 0,$$

de tal forma que esta é inversível, como se queria demonstrar.

c. Após um passo i qualquer, temos que o elemento $a_{(i+1)i}$ será nulo, de tal forma que

$$\alpha_i \cdot a_{ii} = a_{(i+1)i} \implies \alpha_i = a_{(i+1)i}/a_{ii},$$

portanto, o elemento da diagonal modificado será

$$a'_{(i+1)(i+1)} = a_{(i+1)(i+1)} - a_{i(i+1)} \cdot a_{(i+1)i}/a_{ii},$$

portanto

$$|a'_{(i+1)(i+1)}| + |a_{i(i+1)} \cdot a_{(i+1)i}/a_{ii}| \geqslant |a'_{(i+1)(i+1)} + a_{i(i+1)} \cdot a_{(i+1)i}/a_{ii}| = |a_{(i+1)(i+1)}| \geqslant \sum_{j \neq i+1} |a_{(i+1)j}|,$$

ou seja,

$$|a'_{(i+1)(i+1)}| \geqslant |a_{(i+1)i}| - |a_{(i+1)i} \cdot a_{i(i+1)}/a_{ii}| + \sum_{j=i+2}^{n} |a_{(i+1)j}$$

$$= |a_{(i+1)i}| \cdot |1 - |a_{i(i+1)}|/|a_{ii}| + \sum_{j=i+2}^{n} |a_{(i+1)j}|$$

Sendo a matriz original diagonal dominante, vale que

$$|a_{ii} \geqslant \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}| \geqslant |a_{i(i+1)}|,$$

então

$$|a_{i(i+1)}|/|a_{ii}| \leqslant 1,$$

logo

$$|a'_{(i+1)(i+1)} \geqslant \sum_{j=i+2}^{n} |a_{(i+1)j}|.$$

Como se queria demonstrar.

d. Como a matriz é diagonal dominante, por indução, podemos notar que sempre é possível manter o elemento da diagonal inferior $\geqslant 1$, (i.e. note pelo resultado anterior que essa nova matriz menor também será diagonal dominante).

e. Operando cada linha independentemente (tratando da matriz extendida) dividimos cada qual pelo elemento da respectiva diagonal, de tal forma que a matriz estará balanceada, e a diagonal terá os pivôs.