Provinha #3

Isabella B. — 11810773

---

1. Sendo $p_0(x)$ um polinômio de grau zero e, portanto, igual à um $a \in \mathbb{R}$ constante, pelo enunciado temos que vale:

$$\langle p_k, p_0 \rangle = \langle p_k, a \rangle = a \langle p_k, 1 \rangle = 0,$$

o que vale para todo $k \geqslant 1$. Dessa forma, devemos ter que para todo $k \geqslant 1$, p_k possui pelo menos uma raíz no intervalo (a, b). Isso se verifica pois, suponhamos que não houvesse raíz neste intervalo, teríamos, então, que $\omega(x)p_k(x)$ seria sempre um produto positivo (e contínuo), de tal forma que

$$\int_a^b \omega(x)p_k(x)\mathrm{d}x = \langle p_k, 1 \rangle \neq 0$$

o que é claramente absurdo.

2. Fazendo $p_k(x) = (x - \bar{x})^2 q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio de grau $k - 2$, notamos que o conjunto de polinômios de grau $k' \leqslant k - 2$ é linearmente independente, de tal forma que compõe uma base para o espaço de $\mathbb{P}_{k-2}$. Dessa forma, podemos então expressar $q(x)$ em termos desta base e, por consequência, temos

$$\langle p_k, q \rangle = \alpha_0 \langle p_k, p_0 \rangle + \cdots + \alpha_{k-2} \langle p_k, p_{k-2} \rangle = 0$$

$$\implies \langle p_k, q \rangle = \int_a^b \omega(x)(x - \bar{x})^2 q(x)^2 \mathrm{d}x = 0,$$

e, como o produto do integrando é sempre não-negativo dentro do intervalo de integração, isso nos dá que $q(x)^2$ deve ser nulo, o que implica em $p_k = 0$, o que é absurdo, dado que p_k é um polinômio de grau k, dessa forma temos que, para $k \geqslant 2$ toda raíz de p_k é simples, como se queria demonstrar.

3. Sendo p_k um polinômio de grau k, é fácil notar que não deve possuir mais de k raízes. Analisamos, então, o caso onde p_k tem $m < k$ raízes. Como para $k \geqslant 2$ temos somente raízes simples, segue que

$$p_k(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m) q(x),$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau $k - m$ e que não possui raízes no intervalo (a, b) – caso contrário teríamos mais raízes em $p_k(x)$. Tomando, então, o polinômio $q_m(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m)$, temos que $q_m(x)$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômios de grau $k \leqslant m$, de tal forma que

$$\langle p_k, q_m \rangle = \alpha_0 \langle p_k, p_0 \rangle + \cdots + \alpha_{k-2} \langle p_k, p_m \rangle = 0.$$

e, também sabemos que

$$\implies \langle p_k, q_m \rangle = \int_a^b \omega(x)(x - x_1)^2 \cdots (x - x_m)^2 q_m(x) \mathrm{d}x.$$

Tendo em vista que $q(x)$ não se anula no intervalo (a, b), temos que $\omega(x)(x-x_1)^2 \cdots (x-x_m)^2 q(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então sendo $p_k(x)$ e $q_m(x)$ ortogonais entre si, temos que $\omega(x)(x - x_1)^2 \cdots (x - x_m)^2 q(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ e, sendo $\omega(x) > 0$ em (a, b) e $q(x)$ é uma função contínua, isso implica que $q = 0$, o que é um absurdo. Então para todo $k \geqslant 2$, p_k tem exatamente k raízes em (a, b).