Provinha #4

Isabella B. — 11810773

---

1. Seja uma função $f(x) = 1$. Temos que, para quaisquer valores do domínio $x \in [a, b]$, $f(x)$ é constante e igual à 1, o que nos indica que seu polinômio interpolador $p_n(x) = f(x)$, de tal forma que escrevendo

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

como se queria demonstrar.

2. Sendo $f(x) = x^k$ um polinômio, sabemos que deve ser idêntica ao seu polinômio interpolador equivalente, pela unicidade do mesmo. Escrevendo, então

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} x^k L_i(x) \\ \implies p_n(0) &= f(0) \\ \implies \sum_{i=0}^{n} x^k L_i(0) &= 0^k = 0, \end{aligned}$$

como se queria demonstrar.

3. Sendo a fórmula do erro para a interpolação polinomial

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t')}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

para algum $t' \in \mathbb{R}$. Dessa forma, seja uma $f(x) = x^{n+1}$ (e, portanto, $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$), segue que

$$x^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} x_j^{n+1} L_j(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para $x = 0$ temos, então, que

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^{n+1} L_j(0) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} x_i,$$

como se queria demonstrar.