

Um breve resultado sobre partições

Isabella B.

April 18, 2021

Seja N um conjunto que deve ser particionado em parcelas com, no máximo, M objetos. Denotamos a quantidade de partições atendendo esses requisitos por $p(N, M)$.

Teorema 1.

$$p(N, M) = p(N - M, M) + p(N, M - 1)$$

Proof. Podemos notar que, para qualquer $N \in \mathbb{N}$ temos $p(N, 1) = 1$, já que só existe uma soma única de N parcelas de 1. Da mesma forma, é possível notar que para qualquer $N \in \mathbb{N}$, temos $p(N, 2) = \lceil N/2 \rceil$.

Tomando nosso caso inicial de $M = 2$:

$$p(N, 2) = p(N-2, 2) + p(N, 1) \rightarrow p(N, 2) - p(N-2, 2) = \lceil N/2 \rceil - \lceil (N-2)/2 \rceil = 1 = p(N, 1),$$

o que é claramente verdadeiro.

Portanto, por indução, temos que:

$$p(N, k+1) - p(N - (k+1), k+1) = p(N, k)$$

□