1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$50 + \frac{165}{7} = 50 + 2$

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 & \to & \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq & 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 & \leq & 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$\frac{150}{7} + \frac{550}{7} = 10$

Die Variablen des Primalen Problems (P) sind x_1, x_2, x_3, x_4, die Variablen des dazugehörigen Dualen Problems (D) bezeichnen wir als y_1, y_2, y_3

(a) Welche der folgenden Punkte sind **zulässige** Lösungen des primalen Problems (P)?

- ☑ $x_1 = \frac{50}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{55}{7}, x_4 = 0$
- ☑ $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$
- ☐ $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 9, x_4 = 11$
- ☑ $x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$

2 Punkte 2

(b) Welche der folgenden Punkte sind **zulässige** Lösungen des dualen Problems (D)?

- ✓ ☐ $y_1 = \frac{13}{7}, y_2 = 0, y_3 = \frac{5}{7}$
- ☐ $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$
- ✓ ☐ $y_1 = 15, y_2 = 120, y_3 = 100$
- ✓ ☑ $y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 1$

4 Punkte

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \to \max$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$x_1 = \frac{50}{7}$ $x_3 = \frac{55}{7}$

a) 1. $\frac{50}{7} + \frac{55}{7} = \frac{105}{7} = 15 +$

$105 : 7 = 15$, -7, 35

$55 \cdot 3 = 165$; $165 : 7 = 2$, -14, 25

2. $\frac{7 \cdot 50}{7} + \frac{3 \cdot 55}{7} = 50 + \frac{165}{7} = \frac{350 + 165}{7} = \frac{515}{7}$

$350 + 165 = 515$; $515 : 7$

5

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 & \to & \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq & 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 & \leq & 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Standart Form:

ZF: $c^T x \to \max!$

NB: $Ax \leq b$

$x \geq 0$

P(primales)

ZF: $b^T y \to \min!$

NB: $A^T y \geq c$

$y \geq 0$

D(Duales)

Primal:

$c^T = (4, 5, 9, 11)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 15 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Dual

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

$b^T = (15, 120, 100)$

$$\begin{array}{rcl} 15y_1 + 120y_2 + 100y_3 & \to & \min \\ y_1 + 7y_2 + 3y_3 & \geq & 4 \\ y_1 + 5y_2 + 5y_3 & \geq & 5 \\ y_1 + 3y_2 + 10y_3 & \geq & 9 \\ y_1 + 2y_2 + 15y_3 & \geq & 11 \end{array}$$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

2. Gegeben sei die Aufgabe:

$0 - \ln 1 \leq 0$ ✓
$1 \leq 2$ ✓
$y \geq 0$ ✓

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = x^2 + y^2 \quad &\rightarrow \quad \min \\
y - \ln x &\leq 0 \\
x &\leq 2 \\
y &\geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Welche Nebenbedingungen sind bei den folgenden Punkten aktiv? Bitte kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Punkt	$y - \ln x \leq 0$ ist aktiv (g_1)	$x \leq 2$ ist aktiv (g_2)	$y \geq 0$ ist aktiv (g_3)
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	✓		✓
$\begin{pmatrix}2\\\ln 2\end{pmatrix}$	✓	✓	
$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$		✓	✓
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	✗	✗	✗

$\ln 2 - \ln 1 \leq 0$
$x \leq 2$ ✓
$y \geq 0$ ✓

$0 - \ln 2 \leq 0$ ✓
$x \leq 2$ ✓
$y \geq 0$ ✓

4 Punkte ✓

$1 - \ln 1 \leq$
$1 \leq 2$ ✓
$1 \geq 0$

(b) Kreuzen Sie bei den folgenden Punkten alle Karush-Kuhn-Tucker Punkte an:

✓ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ✗ $\begin{pmatrix}2\\\ln 2\end{pmatrix}$ ✗ $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

4 Punkte ✓

(c) Welcher der folgenden Werte, kann der optimale Zielfunktionswert obiger Aufgabe sein?

- ☑ $f(x,y) = 1$
- ☐ $f(x,y) = 6$
- ☑ $f(x,y) = 4$
- ☐ $f(x,y) = 0$

4 Punkte 0

1 $\underline{\nabla F(\bar{x})^T + \sum u_i \nabla g_i(\bar{x})^T = 0}$

$f(x,y)^T = x^2 + y^2\,{}^T$

$F\begin{pmatrix}x^2\\y^2\end{pmatrix} \Rightarrow \nabla F\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$

g_1 1. $-\ln x + y \leq 0$
g_2 2. $x - 2 \leq 0$
g_3 3 $-y \leq 0$

$g_1\begin{pmatrix}-\ln x\\y\end{pmatrix} \rightarrow \nabla g_1 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{x}\\1\end{pmatrix}$

$g_2 = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \rightarrow \nabla g_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$g_3 = \begin{pmatrix}0\\ \end{pmatrix} \rightarrow \nabla g_3 = \begin{pmatrix}0\\ \end{pmatrix}$

$g_3 \; \begin{pmatrix} \\ -y \end{pmatrix} \qquad g_3 \; \begin{pmatrix} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aktiv: g_1, g_3 $\qquad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

lin. unabhängig.

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $2 - u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 2$ ✓

$0 + u_1 - u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = 2$

• $\begin{pmatrix} 2 \\ \ln 2 \end{pmatrix}$ aktiv: g_1, g_2

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \cdot \ln 2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 - \frac{1}{2} u_1 + u_2 = 0 \\ 2 \cdot \ln 2 + u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = -2\ln 2 \end{cases} \quad ↯$$

$$4 - \frac{-\cancel{2}\ln 2}{\cancel{2}} + u_2 = 0 \qquad 4 + \ln 2 + u_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2 = -4 - \ln 2 \quad ↯$$

• $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aktiv: g_2, g_3

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2 + u_2 = 0 \qquad u_2 = -2$ ↯

$-u_3 = 0$

• $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2 = 0$ ↯

$2 = 0$

1 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2$$

$y(x) = c$

$y'(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{x} \cdot c + x^2$$

$\underline{x > 0}$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

$x = 1$

$$0 = \frac{2}{1} \cdot c + 1$$

$$0 = 2c + 1 \qquad c = -\frac{1}{2}$$

$$0 = -1 + 1$$

Bsp Betrachte die folgende DGL 2. Ord:

$$y'' - y' - 2y = x^2$$ → inhomogene, linear.

a) Bestimme die Lösung der homogenen Gleichung

$$y'' - y' - 2y = 0$$

a) Bestimme die Lösung der homogenen Gleichung

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ und } \lambda_2 = -1$$

$$\underline{y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}}$$

$$y'' - y' - 2y = x^2$$

a) y_h : $y'' - y' - 2y = 0$

$$\boxed{\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

↓ charakteristische Polynom

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

↓ Homogene DGL 2. Ordnung mit Konst. Koeff.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

1. Fall $a_1^2 - 4a_0 > 0$: $\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} \qquad f_2 = C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. Fall $a_1^2 - 4a_0 = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{-a_1}{2}$

$\Rightarrow f_1 = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$

$$y_h = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$$

3. Fall $a_1^2 - 4a_0 < 0$

Allg. Lösung $y(x) = e^{ax} [c_1 \cdot \cos(bx) + c_2 \sin(bx)]$,

$a = -\frac{a_1}{2}$ $b = \sqrt{\left|\frac{a_1^2}{4}\right| - a_0}$

$y'' - y' - 2y = x^2$ $b(x) = x^2$

$y'' - y' - 2y = 0$

$\lambda^2 - \underset{a_1}{\lambda} - \underset{a_0}{2} = 0$

$a_1 = 1$

$a_0 = -2$

$a_1^2 - 4a_0 = 1 + 8 = 9$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

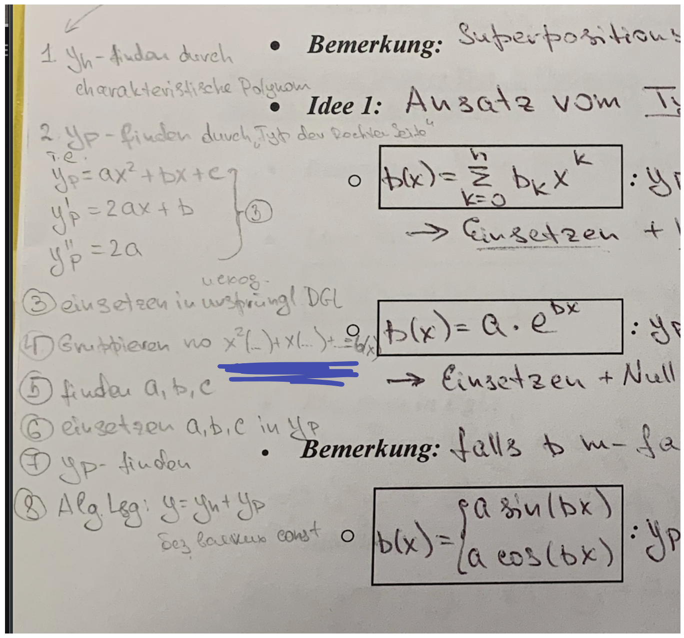
$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 1$

$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$

$y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$



1. y_h - finden durch charakteristische Polynom

2. y_p - finden durch „Typ der Rechten Seite"

i.e.

$y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

③ einsetzen in ursprüngl. DGL

④ Gruppieren wo $x^2(\ldots) + x(\ldots) + \ldots = b(x)$

⑤ finden a, b, c

⑥ einsetzen a, b, c in y_p

⑦ y_p - finden

⑧ Alg. Lsg: $y = y_h + y_p$

bez. bekannte const

- **Bemerkung:** Superposition

- **Idee 1:** Ansatz vom Ty

  - $\boxed{b(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k}$: y

    → Einsetzen +

  - $\boxed{b(x) = a \cdot e^{bx}}$: y_p

    → Einsetzen + Null

- **Bemerkung:** falls b m-fa

  - $\boxed{b(x) = \begin{cases} a \sin(bx) \\ a \cos(bx) \end{cases}}$: y_p

$$\underbrace{y'' - y' - 2y = x^2}$$

ursprüngliche Dgl.

③ $2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2$

④ $-2ax^2 + x\underbrace{(-2a - 2b)}_{=0} + \underbrace{(2a - b - 2c)}_{=0} = x^2 + 0 \cdot x + 0$

$-2a = 1 \implies \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

$-2a - 2b = 0 \implies -2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 2b = 0 \implies 1 - 2b = 0 \implies \boxed{b = \frac{1}{2}}$

$2a - b - 2c = 0 \implies -1 - \frac{1}{2} - 2c = 0 \implies$

$\implies -\frac{3}{2} = 2c$

$c = -\frac{3}{2} : 2 = -\frac{3}{4}$

$\boxed{c = -\frac{3}{4}}$

$y_p = ax^2 + bx + c$

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\boxed{y_p = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}}$$

$$y = y_h + y_p =$$

$$= c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)}$$

$b(x) \to$ Zahl

$\neq 0$

$a_1 = -1.$

$2 \to$ Zahl.

$$y'' - y' - 2y = \cancel{x^2}$$

$$y_p = \frac{b(x)}{a_0} = \frac{2}{-1} = -2.$$

b)

$$\begin{cases} y_p(x) = ax^2 + bx + c \\ y'_p(x) = 2ax + b \\ y''_p(x) = 2a \end{cases}$$

einsetzen

в исходное

$$y'' - y' - 2y = x^2$$

$$2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2$$

$$\underbrace{-2ax^2}\ \underbrace{-2ax - 2bx}\ \underbrace{+2a - b - 2c} = x^2$$

$$-2a\cancel{x^2} = \cancel{x^2} \rightarrow -2a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$-2ax - 2bx = 0 \rightarrow -2x(a+b) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a - b = 0 \qquad -\frac{1}{2} + b = 0 \rightarrow b = +\frac{1}{2}$$

$$+2a - b - 2c = 0$$

$$+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - 2c = 0$$

$$-1 - \frac{1}{2} - 2c = 0 \rightarrow -\frac{3}{2} = 2c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = -\frac{3}{4}$$

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

---

d) AWP $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - x + \frac{1}{2}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$y'(0) = -2c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 2$$

$$c_2 = \frac{3}{4} - c_1$$

$$-2c_1 + \frac{3}{4} - c_1 + \frac{1}{2}^{12} = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3c_1 + \frac{5}{4} = 2$$

$$-3c_1 = 2^{14} - \frac{5}{4}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac \quad = 1 + 8 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \qquad \lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$$

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a \qquad\qquad y'' - y' - 2y = x^2$$

$$2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2$$

$$\underbrace{-2ax^2}\ \underbrace{-2ax - 2bx}\ + \underbrace{2a - b - 2c} = x^2$$

$$-2ax^2 = x^2 \qquad -2a = 1 \qquad a = -\frac{1}{2}$$

$$-2ax - 2bx = 0$$

$$-2x(a+b) = 0 \rightarrow a + b = 0 \qquad -\frac{1}{2} + b = 0 \qquad b = \frac{1}{2}$$

$$2a - b - 2c = 0$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} - 2c = 0$$

$$-1 - \frac{1}{2} - 2c = 0 \qquad -\frac{3}{4} - 2c = 0 \qquad -2c = \frac{3}{4} \quad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$c = -\frac{3}{8}$

$$\overbrace{y^2}^{Q} dy + \overbrace{4xy}^{P} dx = 0$$

1. $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 4x \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0$$

nicht exakt

$\underline{\underline{\lambda(y)}}$

Probe!

$$y^2 dy + 4xy\,dx = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{y}$$

$$y\,dy + 4x\,dx = 0$$

$P(x,y) = 4x$

$Q(x,y) = y$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0$$

exakt.

$$\boxed{\lambda(y) = \frac{1}{y}} \Rightarrow \text{Euler-Multiplikator.}$$

$$y^2 dy + 4xy\,dx = 0 \quad \Big| \, y^n$$

$$y^{2+n} dy + 4x y^{n+1} dx = 0$$

$$P(x,y) = 4xy^{n+1}$$

$$Q(x,y) = y^{n+2}$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 4x \cdot (n+1) y^n$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$4x(n+1)y^n + 0 = 0$$

$$4x(n+1)y^n = 0$$

$n+1=0$

$n = -1$

$n+1=0$

$$\boxed{y^{-1}} = \boxed{\frac{1}{y}}$$

Euler-Mult.

$$\frac{1}{y} \cdot y^2 dy + \frac{1}{y} \cdot 4xy\,dx = 0$$

$$(xy^2 + xye^x)dx + (2x^2y + xe^x)dy = 0$$