② b) $g(x,y,z) = -f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \cdot \nabla g(x_k)$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \lambda \nabla g(\bar{x}_0)$$

$$\nabla g(x_0) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1 - 2\lambda = 0$$

$$-2\lambda = -1$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gegeben sei die Differentialgleichung $x^2y' - y^2 = 0$ für $x > 0$.

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung! (2 P.)

Gewöhnliche Dgl. Erster Ordnung ...

1\. Ordnung, gewöhnlich, implizit, nicht linear

(b) Handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung? Begründung! (2 P.)

Bernoullische DGL: ...

Bernoullische Dgl: $y' + a(x)y + b(x)y^k = 0$

$$x^2y' - y^2 = 0$$

$$y' - \frac{1}{x^2}y^2 = 0$$

nicht Bernoullische Dgl

(c) Existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $y(x) = C$ eine Lösung der Differentialgleichung ist? Begründung! (2 P.)

Ja falls $y(x) = C$ unsere allgemeine Lösung ist ...

$y(x) = c$

$y'(x) = 0$

$$0 - \frac{1}{x^2}c^2 = 0$$

Ja, wenn $c = 0$ dann

(d) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Trennung der Variablen! (4 P.)

$x^2y' - y^2 = 0$

$x^2\frac{dy}{dx} = y^2\frac{dx}{dy}$

$$y' - \frac{1}{x^2} y^2 = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int y^{-2}\, dy = \int x^{-2}\, dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$-y^{-1} = -x^{-1} + c$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + c'$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1+xc}{x} \qquad y(1+xc) = x$$

$$y = \frac{x}{1+xc} \qquad x + \frac{1}{1+x}$$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung $y^2dy + 4xydx = 0$. 2

(a) Handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung? Begründung! (4 P.)

$$\underbrace{y^2}_{Q(x,y)} dy + \underbrace{4xy}_{P(x,y)} dx = 0$$

$$Q(x,y) = y^2$$

$$P(x,y) = 4xy$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0$$

$\neq$ nicht exakt

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 4x$$

(b) Bestimmen Sie einen geeigneten Euler-Multiplikator $m(y)$, der nur von y abhängt! (6 P.)

$m(y)$ von y

$$m(y) = \exp\left(-\int \frac{1}{4xy}\cdot(4x - 0)\,dy\right) =$$

$$= \exp\left(-\int \frac{4\cancel{x}}{4\cancel{x}y}\,dy\right) = \exp\left(-\int \frac{dy}{y}\right)$$

$$-\int \frac{dy}{y} = -\ln|y|$$

$$m(y) = e^{-\ln y} = e^{\ln y^{-1}} = \frac{1}{y}$$

$$\cancel{\frac{1}{y}}\, y^{\cancel{2}}\, dy + \cancel{\frac{1}{y}}\, 4x \cancel{y}\, dx = 0$$

$$y\, dy + 4x\, dx = 0$$

c) im implizite Form

Alg. Lösung

$$F(x,y) = \int \left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 4x \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y$$

$$F(x,y) = \int 4x + \int y = 4 \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$4 \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$