Januar 2019

1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 & \to & \max \\ -3x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lösen Sie das oben angegebene lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus und beantworten Sie folgende Fragen.

(a) Welche Pivot-Spalte wird im ersten Schritt verwendet ?

- ☒ x_1-Spalte
- ☐ x_2-Spalte
- ☐ keine Spalte

2 Punkte ✓

(b) Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an: $\boxed{1}$ 2 Punkte ✓

(c) Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an:

$\vec{x_P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2 Punkte ✓

(d) Um wieviel erhöht bzw erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P) wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Wert der rechten Seite vom Wert 1 auf den Wert 1.5 erhöht : $\boxed{1,5}$ 2 Punkte ✓

(e) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_P}) = \boxed{3}$ 2 Punkte ✓

(f) Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ ist das folgende LP unbeschränkt ?

$$\begin{array}{rcl} 3x - y & \to & \max \\ -3x + y & \leq & 1 \\ x - cy & \leq & 1 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

- ☒ $c > 0$ — angekreuzt
- ☒ $c \leq 0$ — nicht angekreuzt
- ☒ $c > \frac{1}{3}$ — angekreuzt
- ☐ $c < \frac{1}{3}$ — nicht angekreuzt

4 Punkte —

(g) Welche Dimension hat das zu (P) duale Problem (D): $\boxed{2}$ 2 Punkte ✓

(h) Geben Sie den Lösungsvektor für (D) an:

$\vec{x_D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2 Punkte —

(i) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (D) an: $f(\vec{x_D}) = \boxed{3}$ 2 Punkte ✓

①

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 & \to & \max \\ -3x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$3x_1 - x_2 \to \max$

$-3x_1 + x_2 + u_1 = 1$,

$x_1 + u_2 = 1$ $\quad x_1, x_2, u_1, u_2 \geq 0$

	x_1	x_2	u_1	u_2		
	-3	1	1	0	1	I + 3 II
	1	0	0	1	1	
ZF	-3	1	0	0	0	ZF + 3 II

x_1	x_2	u_1	u_2		
0	1	1	3	4	
1	0	0	1	1	
0	1	0	3	3	→ ZF-Wert

NB$_2$

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1{,}5 - 1 = 0{,}5$

$\frac{5}{10} \cdot 3 = \frac{15}{10} = \underline{\underline{1{,}5}}$

d) um 1,5

$1 \rightarrow 1{,}5$ $\quad 1{,}5 - 1 = 0{,}5$

$\underset{3}{\text{ZF}} \rightarrow \underline{4{,}5}$

(f) Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ ist das folgende LP unbeschränkt ?

$$\begin{array}{rcl} 3x - y & \to & \max \\ -3x + y & \le & 1 \\ x - cy & \le & 1 \\ x, y & \ge & 0 \end{array}$$

~~nicht angekreuzt~~

$c > 0$ nicht angekreuzt

x	y	u_1	u_2		
-3	1	1	0	1	$I + 3II$
1	$-c$	0	1	1	
-3	1	0	0	0	$ZF + 3II$

x	y	u_1	u_2	
0	$1-3c$	1	3	3
1	$-c$	0	1	1
0	$1-3c$	0	3	3

$1 - 3c = 0$ $\qquad c = \frac{1}{3}$

c muss $> \frac{1}{3}$ sein

damit in diese Spalt alle

$-$ Werte sein

Einführung in Mathematische Modellierung
Dualität

Beispiel: Fortsetzung

Durch Multiplikatien können wir das Modell ein bißchen verschönern (ohne es inhaltlich zu verändern): Modell: Die Kosten sollen möglichst gering sein

$$
\begin{array}{llcllcl}
\text{Zielfunktion} & 250y_1 & + & 200y_2 & \to & \text{min!} \\
\text{Nebenbedingungen} & y_1 & + & 20y_2 & \geq & 1000 \\
 & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 200 \\
 & 8y_1 & + & y_2 & \geq & 400 \\
\text{Vorzeichenbedingungen} & \multicolumn{5}{l}{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0}
\end{array}
$$

Man könnte dieses LP sofort in Standardform umformen und den Simplex-Algorithmus starten, hätte dabei aber das Problem, dass die rechten Seiten der NB negativ werden und daher der Nullvektor keine zulässige Lösung ist.

Einführung in Mathematische Modellierung
Dualität

Beispiel: Fortsetzung

Es ist hier vorteilhaft zu "dualisieren" oder (was wie wir gesehen haben dasselbe ist) unser Problem als duales Programm aufzufassen und das zugehörige primale Programm zu suchen.

Dazu setzen wir: $\mathbf{b}^T = (250, 200)$, $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}$

Das Primale Programm dazu ist dann:

$$
\begin{array}{llclclcl}
\text{Zielfunktion} & 1000x_1 & + & 200x_2 & + & 400x_3 & \to & \text{max!} \\
\text{Nebenbedingungen} & x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & \leq & 250 \\
 & 20x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 200 \\
\text{Vorzeichenbedingungen} & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Einführung in Mathematische Modellierung
Ergänzungen zum Simplexalgorithmus

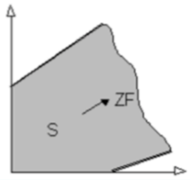
Unbeschränktheit:

Unbeschränktheit ist dann gegeben, wenn der optimale Zielfunktionswert bei $+\infty$ (für ein Maximierungsproblem) bzw. bei $-\infty$ (für ein Minimierungsproblem) liegt.
Frage: Wie erkennt man diese Situation im Simplex-Algorithmus ?

Theorem:
Falls $a_{ij} \leq 0$ für alle i (wobei j der Index der Pivotspalte ist), so ist das LP unbeschränkt (eine Auswahl der Pivotzeile ist nicht möglich).

Beispiel:

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & x_2 & \to & \text{max!} \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$



Einführung in Mathematische Modellierung
Ergänzungen zum Simplexalgorithmus

	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	x_4	r. S.
Z	$\mathbf{-2}$	-1	0	0	0
x_3	$\mathbf{-1}$	1	1	0	2
$\mathbf{x_4}$	**1**	$\mathbf{-3}$	**0**	**1**	**3**

	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	x_4	r. S.
Z	0	$\mathbf{-7}$	0	2	6
x_3	0	$\mathbf{-2}$	1	1	5
x_1	1	$\mathbf{-3}$	0	1	3

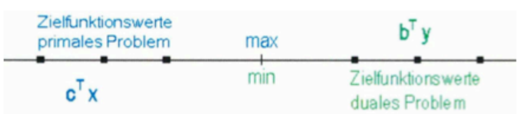
Als Pivotspalte kommt nur mehr Spalte 2 in Frage. Dort gibt es aber nur negative Einträge und daher kein Pivot möglich!
Das Problem ist also unbeschränkt.

Einführung in Mathematische Modellierung
Ergänzungen zum Simplexalgorithmus

Beziehungen primales/duales Problem: In folgender Tabelle werden alle möglichen Kombinationen angegeben

		(D)		
		endl. Lösung	unlösbar	unbeschränkt
(P)	endl. Lösung	X		
	unlösbar		X	X
	unbeschränkt		X	

Für die Zielfunktionswerte muß ja gelten:



Wenn eines der beiden Probleme (primal oder dual) unbeschränkt ist, kann das andere Problem keine Lösung haben, daher unlösbar sein.
Es ist aber möglich, dass beide Probleme unlösbar sind.