$\sqrt{3^2} = 3$

1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösen Sie das oben angegebene lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus und beantworten Sie folgende Fragen.

(a) Welche Pivot-Spalte wird im ersten Schritt verwendet ?

- ☒ x_1-Spalte
- ☐ x_2-Spalte
- ☐ keine Spalte

2 Punkte ✓

(b) Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an: $\boxed{1}$ 2 Punkte ✓

(c) Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an:

$\vec{x_P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2 Punkte ✓

(d) Um wieviel erhöht bzw erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P) wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Wert der rechten Seite vom Wert 1 auf den Wert 1.5 erhöht : $\boxed{1,5}$ 2 Punkte ✓

(e) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_P}) = \boxed{}$ 3 2 Punkte ✓

(f) Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ ist das folgende LP unbeschränkt ?

$$\begin{aligned} 3x - y &\rightarrow \max \\ -3x + y &\leq 1 \\ x - cy &\leq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

~~nicht angekreuzt~~

- ☒ $c > 0$ angekreuzt
- ☒ $c \leq 0$ nicht angekreuzt
- ☒ $c > \frac{1}{3}$ angekreuzt
- ☐ $c < \frac{1}{3}$ nicht angekreuzt

4 Punkte —

(g) Welche Dimension hat das zu (P) duale Problem (D): $\boxed{2}$ 2 Punkte ✓

(h) Geben Sie den Lösungsvektor für (D) an:

$\vec{x_D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2 Punkte —

(i) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (D) an: $f(\vec{x_D}) = \boxed{3}$ 2 Punkte ✓

14

$f(x)=\log(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ $\log(uv)=\log(u)+\log(v)$ $\log(\frac{u}{v})=\log(u)-\log(v)$ $\log(u^v)=v\cdot\log(u)$ | Fibonacci-Suche:

2. Gegeben sei die Aufgabe:

$$\begin{aligned} -x-5y &\rightarrow \min \\ x^2+y^2 &\leq 25 \\ y &\leq 4 \end{aligned}$$

(a) Welche Nebenbedingungen sind bei den folgenden Punkten aktiv? Bitte kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Punkt	$x^2+y^2 \leq 25$ ist aktiv	$y \leq 4$ ist aktiv
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐	☐
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	☒	☐
$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	☒	☒
$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	☒	☐

4 Punkte

(b) Kreuzen Sie bei den folgenden Punkten alle Karush-Kuhn-Tucker Punkte an:

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4 Punkte

(c) Welcher der folgenden Werte, kann der optimale Zielfunktionswert obiger Aufgabe sein?

- ☒ $f(x,y)=0$
- ☒ $f(x,y)=-5$
- ☐ $f(x,y)=25$
- ☐ $f(x,y)=-23$

2 Punkte

$f(x) = \log(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ $\log(uv) = \log(u) + \log(v)$ $\log(\frac{u}{v}) = \log(u) - \log(v)$ $\log(u^v) = v \cdot \log(u)$ | Fibonacci-Suche: $\lambda_i = a_i + (b_i - a_i)(F_{n-k-1})$ 0 1 1 1 2 2 55 89

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen)

(a) Wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) zulässige Lösungen eines LP sind, dann ist auch $2\mathbf{x} + 2\mathbf{y}$ immer eine zulässige Lösung
☐ richtig ☒ falsch ✓

(b) Für das Verfahren "Polytop-Methode (Nelder & Mead)" müssen erste Ableitungen bekannt sein.
☒ richtig ☐ falsch —

(c) Fügt man einem Linearen Optimierungsproblem eine zusätzliche Nebenbedingung hinzu, vergrössert sich die zulässige Menge
☐ richtig ☒ falsch ✓

(d) Die Menge $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$ ist konvex
☒ richtig ☐ falsch ✓

(e) Der Gradient einer Funktion ist orthogonal zur Richtung des steilsten Abstiegs
☐ richtig ☒ falsch ✓

(f) Es gibt lineare Optimierungsprobleme mit unendlich vielen optimalen Lösungen
☒ richtig ☐ falsch ✓

(g) Es ist nicht möglich, dass ein lineares Optimierungsprobleme genau zwei optimale Lösungen besitzt
☐ richtig ☒ falsch —

(h) Es ist möglich, daß für ein lineares Optimierungsproblem, die zulässige Menge eine Einheits-Kugel ist
☐ richtig ☒ falsch ✓

(i) Das zu einem linearen Optimierungsproblem duale Problem hat immer gleiche Dimension wie das primale Problem
☐ richtig ☒ falsch ✓

(j) Sei folgendes Problem (P) gegeben

$$\begin{aligned} 7x + 8y + 9z &\rightarrow \max \\ 3x + 10y - 64z &\leq 128 \\ -5x + 2y + 81z &\leq 77 \end{aligned}$$

Der optimale Zielfunktionswert des zu (P) dualen Problems ist ≥ 0
☒ richtig ☐ falsch ✓

10 Punkte

8

4. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' = (-y')^3$.

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung! (2 P.)

2. Ordnung, nicht linear, homogen

1.5

(b) Gibt es eine oder mehrere Konstanten $c \in \mathbb{R}$, so dass $y(x) = c$ eine Lösung der Differentialgleichung ist? Wenn ja, welche? Begründung! (2 P.)

$y(x) = c$

$y'(x) = 0$

$y''(x) = 0$ ✓

$0 = 0 \Rightarrow$ es gibt keine Konstante ???

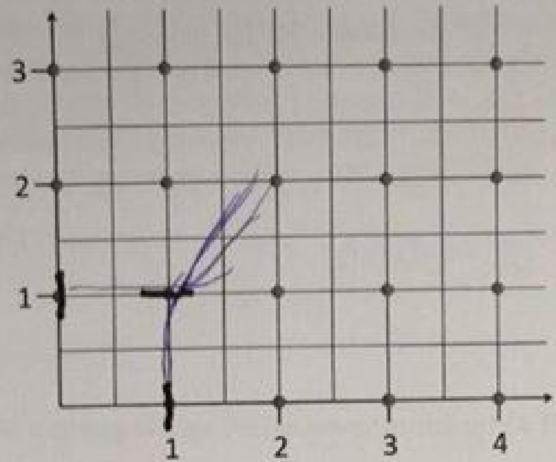
1/2

(c) Gibt es eine lineare Funktion $y(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ so, dass diese Funktion eine Lösung der Differentialgleichung ist? Wenn ja, welche? Begründung! (2 P.)

$y'' - (-y')^3 = ax + b$

(d) Ermitteln Sie die allgemeine relle Lösung der Differentialgleichung durch Substitution und Trennung der Variablen, und geben Sie an, auf welchem Intervall diese reelle Lösung definiert ist. *Hinweis:* Sie können sich auf den Fall streng monoton steigender Lösungen beschränken. (6 P.)

(e) Wie lautet die spezielle Lösung der Differentialgleichung zu den Randwerten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$? (2 P.)



5. Gegeben sei die Differentialgleichung $2y' = x/y - y/x$.

(a) Handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung? Begründung! (3 P.)

$\underbrace{2}_{Q}y' \underbrace{- \frac{x}{y} + \frac{y}{x}}_{P}$ $\qquad \frac{d}{dx}Q(x,y) = 0$

$\frac{d}{dy}P(x,y) = \frac{d}{dy}\left(-\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

$\frac{d}{dy}(-xy^{-1} + yx^{-1}) = (xy^{-2} + x^{-1})$

Ableitungen nicht gleich
=> nicht exakt!

3

(b) Skizzieren Sie mit Hilfe der obigen Grafik das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung an den markierten Stellen im Bereich $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3$! *Hinweis:* Zur Illustration sind die Steigungen an den Punkten $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ bereits eingezeichnet. (5 P.)

(c) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(\sqrt{3}) = 1$ in impliziter Form. (6 P.)

$\frac{1}{2}y^2$

$2y' - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow 2y' - x\frac{1}{y} + y\frac{1}{x} = 0$

$y(y) = \int \left(2 - \frac{d}{dy}\int -x\frac{1}{y} + y\frac{1}{x}\,dx\right)dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \left(2 + \frac{d}{dy}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{y} + \frac{y^2}{2}\cancel{\frac{1}{x}} + C\right)dy$

$\Rightarrow \int\left(2 - \frac{d}{dy} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{y} + y\ln x + C\right)dy \Rightarrow \int\left(2 - \frac{x^2}{2}y^{-2} + \ln x + C\right)dy \Rightarrow 2 + \frac{x^2}{2}\frac{y^{-1}}{1} + \ln x + C$

$= 2 + \frac{x^2y^{-1}}{2} + \ln x + C$ $\qquad \phi(x,y) = \int -x\frac{1}{y} + y\frac{1}{x}\,dx + 2 + \frac{x^2y^{-1}}{2} + \ln x + C$

$= -\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{y} + y\ln x + 2 + \frac{x^2y^{-1}}{2} + \ln x + C + d$

2

6. Ein Informatikstudent hat für eine Klausur einen gewissen Stoff intensiv gelernt. $p(t)$ bezeichnet den Prozentsatz des Stoffes, den er t Tage nach der Klausur noch beherrscht, wobei wir annehmen, er hat so gut gelernt, dass er $b = 50\%$ des Stoffes nie vergisst. Es wird ausserdem angenommen, dass zum Zeitpunkt t die Vergessensrate $p'(t)$ proportional zum Prozentsatz des noch zu vergessenden Stoffes $p(t) - b$ ist.

   (a) Wie gross ist $p(0)$? (1 P.)

   $p'(t) = p - 0{,}5$

   $0{,}5p = p(t)$

   $\underline{\underline{p(0) = 0}}$

   $p'(t) = p(t) - 0{,}5$

   (b) Formulieren Sie das zugehörige Anfangswertproblem! (4 P.)

   (c) Lösen Sie dieses Anfangswertproblem und skizzieren Sie den Verlauf der Lösungsschar! Wie lässt sich die auftretende Proportionalitätskonstante interpretieren? (5 P.)

   (d) Ein Jahr später trifft der Student seinen Professor zufällig in der U-Bahn, und sie unterhalten sich über diese Klausur. Über wieviel Prozent des Stoffes weiss der Student noch Bescheid? *Hinweis:* Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus (c). (2 P.)