1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$50 + \frac{165}{7} = 50 + 20{,}$

$$\begin{array}{lcl} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 & \rightarrow & \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq & 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 & \leq & 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$\frac{150}{7} + \frac{550}{7} = 100$

Die Variablen des Primalen Problems (P) sind x_1, x_2, x_3, x_4, die Variablen des dazugehörigen Dualen Problems (D) bezeichnen wir als y_1, y_2, y_3

(a) Welche der folgenden Punkte sind **zulässige** Lösungen des primalen Problems (P)?

1 X $x_1 = \frac{50}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{55}{7}, x_4 = 0$

2 X $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$

3 $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 9, x_4 = 11$ –

4 X $x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$

2 Punkte 2

1) • $\frac{50}{7} + \frac{55}{7} \leq 15$

$\frac{105}{7} = 15 \leq 15$

$15 \times 7 = 105$

• $\cancel{7} \cdot \frac{50}{\cancel{7}} + 3\,\frac{55}{7} = 50 + \frac{165}{7} \approx 74$ ✓

$55 \times 3 = 165$

$165 : 7 = 23$
-14
25
-21
4

• $3\,\frac{50}{7} + 10\,\frac{55}{7} = \frac{150}{7} + \frac{550}{7} = \frac{680}{7} \leq 100$

$650 : 7 = 92$
63
20
-14

(b) Welche der folgenden Punkte sind **zulässige** Lösungen des dualen Problems (D)?

① ✓ $y_1 = \frac{13}{7}, y_2 = 0, y_3 = \frac{5}{7}$ +

$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$

✓ $y_1 = 15, y_2 = 120, y_3 = 100$ +

✓ $y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 1$ +

4 Punkte ✓

Primal

$$\begin{array}{lcl} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 & \rightarrow & \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq & 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 & \leq & 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$15y_1 + 120y_2 + 100y_3 \rightarrow \min$

NB1 $y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 4$

NB2 $y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq 5$

NB3 $y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 9$

$\longrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

NB4 $\quad y_1 + 2y_2 + 15y_3 \geq 11$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 15 \end{pmatrix} \downarrow$$

(1) NB1: $\frac{13}{7} + 3\frac{5}{7} = \frac{13}{7} + \frac{15}{7} = \frac{28}{7} = 4$ ✓

NB2: $\frac{13}{7} + 5\,\frac{5}{7} = \frac{13+25}{7} = \frac{38}{7} \geq 5$ oder $\frac{35}{5}$ ✓

NB3: $\frac{13}{7} + 10 \cdot \frac{5}{7} = \frac{13+50}{7} = \frac{63}{7} = 9 \geq 9$ ✓

NB4: $\frac{13}{7} + 15 \cdot \frac{5}{7} = \frac{13+75}{7} = \frac{88}{7} \geq 11 \left(\frac{77}{7}\right)$ ✓

c)

(c) Welche der folgenden Punkte (primal und dual) können **optimale** Lösungen von (P) und dem dazugehörigen (D) sein?

- ✓ $x_1 = \frac{50}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{55}{7}, x_4 = 0, y_1 = \frac{13}{7}, y_2 = 0, y_3 = \frac{5}{7}$
- ☐ $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$
- ☐ $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 9, x_4 = 11, y_1 = 15, y_2 = 120, y_3 = 100$
- ✓ $x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 1$

6 Punkte ✓

d)

(d) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_P}) =$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 &\to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

1 ✗ $x_1 = \frac{50}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{55}{7}, x_4 = 0$

2 ✗ $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$

$x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 9, x_4 = 11$ –

3 ✗ $x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$

1) $4 \cdot \frac{50}{7} + 9 \cdot \frac{55}{7} =$

$\Leftrightarrow \frac{200 + 495}{7} = \frac{695}{7} = \underline{95}$

2) ✗ $= 0$

3) $4 \cdot 10 = 40$

$55 \cdot 9 = 495$

$695 : 7 = 95$
-63
35

e)

(e) Welche der folgenden Nebenbedingungen von (P) sind für den Punkt $x_1 = \frac{50}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{55}{7}, x_4 = 0$ aktiv?

1 X $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15$

2 $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120$

3 X $3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100$

4 $x_1 \ge 0$

5 X $x_2 \ge 0$

6 $x_3 \ge 0$

7 X $x_4 \ge 0$

1. $\frac{50}{7} + \frac{55}{7} = \frac{105}{7} = 15$

2) $\cancel{7} \cdot \frac{50}{\cancel{7}} + 3 \cdot \frac{55}{7} = \frac{215}{7}$ X

3) $3 \cdot \frac{50}{7} + 10 \cdot \frac{55}{7} = \frac{150 + 550}{7} = \frac{700}{7} = 100$

$105 : 7 = 15$
-7
35
-35
0

$55 \cdot 3 = 165$
$+ 50$
$215 : 7 = 3$
-21
5

2. Gegeben sei die Aufgabe:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \to \min$$

g_1 $y - \ln x \le 0$ $\quad -\ln x + y \le 0$

g_2 $x \le 2$

g_3 $y \ge 0$ $\quad -y \le 0$

$0 - \ln 1 \le 0$ ✓
$1 \le 2$ ✓
$y \ge 0$ ✓

(a) Welche Nebenbedingungen sind bei den folgenden Punkten aktiv? Bitte kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$-y \ge 0$

Punkt	$y - \ln x \le 0$ ist aktiv	$x \le 2$ ist aktiv	$y \ge 0$ ist aktiv
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	✓		✓
$\begin{pmatrix}2\\\ln 2\end{pmatrix}$	✓	✓	
$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$		✓	✓
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$			

$\ln 2 - \ln 1 \le 0$ ✗
$x \le 2$ ✓
$y \ge 0$ ✓

$0 - \ln 2 \le 0$ ✓
$x \le 2$ ✓
$y \ge 0$ ✓

$1 - \ln 1 \le$
$1 \le 2$ ✓
$1 \ge 0$

4 Punkte ✓

(b) Kreuzen Sie bei den folgenden Punkten alle Karush-Kuhn-Tucker Punkte an:

X $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\\ln 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

4 Punkte ✓

(c) Welcher der folgenden Werte, kann der optimale Zielfunktionswert obiger Aufgabe sein?

- X $f(x,y) = 1$
- $f(x,y) = 6$
- $f(x,y) = 4$
- $f(x,y) = 0$

4 Punkte 0

1) $\nabla F(\bar{x})^T + \sum u_i \nabla g_i(x)^T = 0$

2) $u_i \ge 0$

3) ∇g_i lin. unabhängig

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{x}\\1\end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \nabla g_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix} + u_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{x}\\1\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + u_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

• $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ g_1, g_3 - aktiv

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + u_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + u_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$2 - u_1 = 0 \qquad u_1 = 2$ $+$ $u \geq 0$

$u_1 - u_3 = 0 \qquad u_3 = +2$

• $\begin{pmatrix}2\\ \ln 2\end{pmatrix}$ g_1, g_2 - aktiv

$$\begin{pmatrix}4\\2\ln 2\end{pmatrix} + u_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 - \frac{1}{2}u_1 + u_2 = 0 \\ 2\ln 2 + u_1 = 0 \end{cases} \qquad u_1 = -2\ln 2 \quad \lightning$$

• $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ g_2, g_3 - aktiv

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + u_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$2 + u_2 = 0 \qquad u_2 = -2 \quad \lightning$

$u_3 = 0$

• $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ \end{pmatrix}$$

(c) Welcher der folgenden Werte, kann der optimale Zielfunktionswert obiger Aufgabe sein?

- [x] $f(x, y) = 1$
- [ ] $f(x, y) = 6$
- [x] $f(x, y) = 4$
- [ ] $f(x, y) = 0$

4 Punkte 0

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen)

(a) Wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) zulässige Lösungen eines LP sind, dann ist auch $0.5\mathbf{x} + 0.5\mathbf{y}$ eine zulässige Lösung richtig (+) ✓

(b) Fügt man einem Linearen Optimierungsproblem eine zusätzliche Nebenbedingung hinzu, vergrössert sich die zulässige Menge falsch (+) ✓

(c) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z \geq -2 \right\}$ ist konvex ✓

richtig ~~falsch~~ (−)

(d) Der Gradient einer Funktion zeigt immer in Richtung des steilsten Abstiegs ✓

falsch (+)

(e) Es gibt lineare Optimierungsprobleme mit unendlich vielen optimalen Lösungen —

richtig (+)

(f) Es gibt lineare Optimierungsprobleme mit genau zwei optimalen Lösungen ✓

falsch (+)

(g) Es ist nicht möglich, daß für ein lineares Optimierungsproblem, die zulässige Menge eine Kreisscheibe ist richtig (+) —

(h) Es ist nicht möglich, dass sowohl ein gegebenes Lineares Programm (LP) als auch das zugehörige duale LP eindeutig lösbar sind falsch (+) ✓

(i) Der Durchschnitt zweier Halbräume ist konvex richtig (+) ✓

(j) Für das Verfahren "Steilster Abstieg" müssen erste und zweite Ableitung bekannt sein. ✓

falsch (+)

10 Punkte 8

4. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = 2y/x + x^2$ mit $x > 0$ und $y(1) = 2$.

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung! (2 P.)

... inhomogen, ...

1. Ordnung, gewöhnliche, ~~exakt~~, explizit
linear, inhomogen

(b) Handelt es sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung? Begründung! (2 P.) nein

... Dgl hat ein Form ...

Bernoulli'sche Dgl

$$y' + a(x)y + b(x)y^k = 0$$

$$y' - \frac{1}{x}y + x^2 y^0 = 0 \qquad k=0 \quad \text{Spez. Fall}$$

also ja, es ist Dgl mit $k=0$

(c) Gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $y(x) = c$ eine Lösung der Differentialgleichung ist? Begründung! (2 P.)

nein,

2

$$y(x) = c \qquad 0 = \frac{2c}{x} + \underline{\underline{x^2}}$$

$$y'(x) = 0$$

nein

(d) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x \cdot y' = 2y$ durch Trennung der Variablen und machen Sie die Probe! (4 P.)

Probe

$$x \cdot (x^2 \cdot e^c)' = 2(x^2)e^c$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$x \cdot y' = 2y$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = 2y$$

$$x \cdot dy = 2y \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + c$$

$$y = e^{2\ln|x|} \cdot (e^c) \to \tilde{c}$$

$$y = e^{\ln x^2} \cdot c$$

$$y = cx^2$$

Probe: $y = cx^2$

$$y' = 2cx$$

$$x \cdot 2cx = 2 \cdot cx^2$$

$$2cx^2 = 2cx^2$$ ✓

5. Gegeben sei die Differentialgleichung $8x^3dx + x^2ydy = 0$.

(a) Handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung? Begründung! (2 P.)

$8x^3dx + x^2ydy = 0$

$$\underbrace{8x^3}_{P(x,y)}dx + \underbrace{x^2y}_{Q(x,y)}dy = 0$$

$P(x,y) = 8x^3$

$Q(x,y) = x^2y$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2xy$$

nicht exakt

(b) Bestimmen Sie einen Euler-Multiplikator $\lambda(x)$, der nur von x abhängt! Geben Sie hierzu eine geeignete Differentialgleichung für $\lambda(x)$ an und lösen Sie diese! (4 P.)

$8x^3 \cdot \lambda(x)$ $\quad Q^*(x,y) = x^2y(a(x))$

$$\lambda(x) = \exp\left[\int \frac{1}{x^2y}(0 - 2xy)\,dx\right] =$$

$$= \exp\left(\int \frac{-2xy}{x^2y}\,dx\right) = e^{-2\ln x + c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln x^{-2}} \cdot e^{c} = \underline{\frac{1}{x^2} \cdot c}$$

$$\int -\frac{2}{x}\,dx$$

$$-2\int \frac{dx}{x} = -2\ln x + c.$$

$$\lambda = \frac{1}{x^2}$$

$$\lambda\, 8x^3\,dx + \lambda x^2 y\,dy = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{x^2}}\, 8x^{\cancel{3}}\,dx + \frac{1}{\cancel{x^2}}\cancel{x^2}\, y\,dy = 0$$

Alg. L. $\quad 8x\,dx + y\,dy = 0$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 8x \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y$$

$$F(x,y) = \int (8x + y) = 8\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1$$

Alg. Lösung

$$F(x,y) = \int \left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \right) dx$$