1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$$-x + 2y \to \max$$
$$x - y \leq 2$$
$$-2x + 5y \leq 20 \quad 21$$
$$x, y \geq 0$$

	x	y	s_1	s_2			
I.	1	-1	1	0	2	I+II	
II.	-2	5	0	1	20	:5	21/5
ZF	1	-2	0	0	0	ZF+2·II	
		↑					
I.	3/5	0	1	1/5	6	31/5	
II.	-2/5	1	0	1/5	4	21/5	
III.	1/5	0	0	2/5	$\boxed{8}$	42/5	

Lösen Sie das oben angegebene lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus und beantworten Sie folgende Fragen.

(a) Welche Spalte wird als Pivot-Spalte im ersten Schritt verwendet

- ☐ x-Spalte
- ☒ y-Spalte
- ☐ keine Spalte

2 Punkte ✓

(b) Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an: $\boxed{5}$ 2 Punkte ✓

(c) Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an:

$$\vec{x_P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3 Punkte ✓

(d) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_P}) = \boxed{8}$ 2 Punkte ✓

(e) Um wieviel erhöht bzw. erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P), wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Aufgabe (P) der Wert der rechten Seite vom Wert 20 auf den Wert 21 erhöht ? $\boxed{0{,}4}$ von 8 auf $8{,}4 \equiv \frac{42}{5}$ 2 Punkte ✓

Erstellen Sie das zur Aufgabe (P) gehörige **duale** Problem (D) und beantworten Sie folgende Fragen:

(f) Welche Dimension hat das **duale** Problem (D) ? $\boxed{2}$ 2 Punkte ✓

(g) Wieviele Nebenbedingungen (zusätzlich zu den Nicht-Negativitätsbedingungen) hat das **duale** Problem (D) ? $\boxed{2}$ 2 Punkte ✓

(h) Geben Sie den Lösungsvektor von (D) an:

$$\vec{x_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

3 Punkte ✓

(i) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (D) an: $f(\vec{x_D}) = \boxed{8}$ 2 Punkte ✓

20

2. Gegeben sei die Aufgabe:

$$f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 \to \min$$
$$0 \le x \le 2$$
$$0 \le y \le 2$$
$$0 \le z \le 2$$

(a) Kreuzen Sie bei den folgenden Punkten alle Karush-Kuhn-Tucker Punkte an:

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4 ~~Punkte~~

(b) Um ein Minimum für die Funktion $g(x,y,z) = -f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ zu bestimmen, ist für die Funktion g ausgehend vom Startpunkt $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Methode des steilsten Abstiegs der nächste Punkt der Iteration zu bestimmen.

Tragen Sie diesen hier ein: $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5 ~~Punkte~~

(c) Bestimmen Sie den Funktionswert von $\vec{x_1}$:

$g(\vec{x_1}) = \boxed{0{,}5}$ 3 ~~Punkte~~

(d) Ist dieser neue Punkt auch schon das Optimum? (Bitte ankreuzen)

☐ ja ☒ nein 3 ~~Punkte~~

0

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen)

(e) Wenn **x** und **y** ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) zulässige Lösungen eines LP sind, dann ist auch $0.4\mathbf{x} + 0.6\mathbf{y}$ eine zulässige Lösung

☒ richtig ☐ falsch 1 Punkt ✓

(f) Fügt man einem Optimierungsproblem eine zusätzliche Nebenbedingung hinzu, verkleinert sich die zulässige Menge oder bleibt gleich

☒ richtig ☐ falsch 1 Punkt ✓

(g) Die Menge $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + z \ge 2\}$ ist konvex.

☐ richtig ☒ falsch 1 ~~Punkt~~

(h) Der Gradient einer Funktion zeigt immer in Richtung des steilsten Abstiegs

☐ richtig ☒ falsch 1 Punkt ✓

(i) Es ist möglich, dass sowohl ein gegebenes Lineares Programm (LP) als auch das zugehörige duale LP eindeutig lösbar sind

☒ richtig ☐ falsch 1 Punkt ✓

4

4

1. Gegeben sei die Differentialgleichung $x^2y' - y^2 = 0$ für $x > 0$.

5,5

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung! (2 P.)

Gewöhnliche Dgl, Erster Ordnung, Nichtlinear, implizit, inhomogen

2

(b) Handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung? Begründung! (2 P.)

Bernoullische DGL: $y' + a(x)y + b(x)\,y^{(k)} = 0$

allgemeine form

Es ist nicht Bernoullische Dgl. weil y' steht nicht alleine.

1

(c) Existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $y(x) = C$ eine Lösung der Differentialgleichung ist? Begründung! (2 P.)

Ja falls $y(x) = C$ unsere allgemeine lösung ist, beim suche von c wert bekomen wir partikuläre lösung.

0,5

(d) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Trennung der Variablen! (4 P.)

1

$x^2 y' - y^2 = 0$

$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \;/ \cdot \frac{1}{dx}$

$\frac{x^2}{dx} - \frac{y^2}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{x^2}{dx} = \int \frac{y^2}{dy}$

$x^2 dy = y^2 dx$

$x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 \;/ : x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$

~~$y^2 dx = x^2 dy$~~

$x^2 \cdot \frac{1}{dx}$

$z = \left(\frac{y^2}{x^2}\right)$

$\frac{dy}{dz} = z'$

$dy = \int z \cdot dz$

$y = z'$

$y^z = x \cdot z(x^z)$

$y' = z +$

$y' = z''$ $\quad \frac{z}{z} = 1$

$y' = 1 + c$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung $y^2 dy + 4xy dx = 0$.

(2)

(a) Handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung? Begründung! (4 P.)

$$4xy\,dx + y^2\,dy = 0$$

$$\downarrow P \qquad \downarrow Q$$

$$1 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial}{\partial x} = 0$$

Es handelt sich nicht um exakte DGL. Hier brauchen wir Euler Multiplikator

$Q \neq P$

(1)

(b) Bestimmen Sie einen geeigneten Euler-Multiplikator $m(y)$, der nur von y abhängt! (6 P.)

(1)

$$\frac{m'}{m} = \frac{Qx - Py}{P} = \frac{0-1}{4xy} = -\frac{1}{4xy} \Rightarrow -\frac{1}{4uy}$$

$$m(u) = e^{\int -\frac{1}{4uy} du} = e^{\int -(4uy)^{-1} du} = e^{4y \int -\frac{u^0}{0}} \Rightarrow -1/0 = 0$$

$$= e^{4y\int -\frac{u^0}{0}} = e^0 = 1x = \underline{x}$$

Probe:

$$4x^2y\,dx + xy^2dx$$

$$1 \qquad 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial}{\partial y} = 1$$

(c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form! (5 P.)

1

3. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = cos(x)$, deren Taylorentwicklung in der Umgebung von $x = 0$ durch Lösung einer geeigneten Differentialgleichung mit Hilfe der Potenzreihenmethode bestimmt werden soll.

   (a) Geben Sie hierzu zunächst ein geeignetes ~~Anfangs~~ Rand wertproblem 2. Ordnung an, das von $f(x)$ erfüllt wird! Hinweis: $cos(0) = 1$, $sin(0) = 0$. (2 P.)

   (b) Verwenden Sie sodann eine allgemeine Potenzreihe $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ als Lösungsansatz und bestimmen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung eine rekursive Beziehung zwischen den Koeffizienten der Potenzreihe. (4 P.)

   (c) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Anfangswerte die ersten drei Glieder der Taylorreihe! (2 P.)

$$\cos(0) \cancel{*} - \overset{0}{\sin(0)}(x-0) - \frac{\cos(0)(x-0)}{2}$$

1

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

   (d) Leiten Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse abschliessend die allgemeine Taylorreihe von $cos(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ her! (2 P.)

$$-\sin 0 \quad + \cos 0$$

$$1 - 0 - \frac{1}{2} - 0 + 1 \ldots$$

(e) Wie lautet die spezielle Lösung zum Anfangswert $y(1) = \frac{1}{1-\pi}$? (1 P.)

$\frac{1}{\pi}$

(f) Betrachten Sie nun die inhomogene Differentialgleichung $x^2y' - y^2 = \frac{x^4}{(1-x^2)^2}$ und ermitteln Sie eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten!
Hinweis: $\frac{1}{(1-c(x)\cdot x)^2} = (\frac{x}{1-c(x)\cdot x})^2 \cdot \frac{1}{x^2}$. (4 P.)

$x^2y' - y^2 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$ $z = \left(\frac{y^2}{x^2}\right)$

1

$\frac{dy}{d\cancel{x}} = z$

$\int dy = \int z\,dz$

$y = z'$

$y' = z''$

$\boxed{y = 1+c}$

$1+c \overset{\wedge}{=} \frac{1}{(1-c(x)\cdot x)^2}$

$1 - c^2(x)\cdot x^2$

$(1-c(x)\cdot x)^2 = 1$

$(1+c)(1-c(x)\cdot x)^2 = 1$

$(1+c)(1-2c(x)x + c^2(x)x^2 = 1$

$1 - 2c(x)x + \cancel{c^2(x)}x^2 +$

$c - \cancel{x}c^2(x)x + c^3(x)x^2 = 1$