EMM-Prüfung 30.6.2020 Lösungen

Nikolas Hauschka

1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$$2x - y \to \max$$
$$y - x \leq 2$$
$$5x - 2y \leq 20$$
$$x, y \geq 0$$

Lösen Sie das oben angegebene lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus und beantworten Sie die folgenden Fragen.

Bevor wir uns die Fragen anschauen, wenden wir den Simplex Tableau-Algorithmus an. Wir lesen zuerst die Matrix A ab. Diese besteht aus den Koeffizienten auf den linken Seiten der Ungleichungen. Wir haben zwei Ungleichungen und zwei Unbekannte, also ist A eine 2×2-Matrix. Sie schaut so aus:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Der Vektor b besteht aus den rechten Seiten der Ungleichungen.

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Der Vektor c besteht aus den Koeffizienten der Zielfunktion.

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix I ist einfach die Einheitsmatrix. Da wir zwei Ungleichungen haben, benötigen wir die 2×2 Einheitsmatrix.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit basteln wir uns das Tableau zusammen:

$$\begin{array}{cc|c} \text{-c}^T & 0 & 0 \\ \hline \text{A} & \text{I} & \text{b} \end{array} = \begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 & 1 & 20 \end{array}$$

Jetzt suchen wir in der ersten Zeile das kleinste Element. Dieses ist -2. Da -2 negativ ist, sind wir noch nicht fertig. Die Spalte mit diesem Eintrag ist unsere Pivot-Spalte (das ist die x-Spalte).

In dieser Pivot-Spalte suchen wir unser Pivot-Element. Infrage kommen also -1 und 5. Da -1 negativ ist, kann es kein Pivot-Element sein. Somit ist 5 das Pivot-Element. Wir dividieren jetzt die Zeile durch das Pivot-Element.

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 & 1 & 20 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -0.4 & 0 & 0.2 & 4 \end{array}$$

Jetzt verwenden wir Gauß, um alle Elemente in der Pivot-Spalte (bis auf das Pivot-Element) zu eliminieren.

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -0.4 & 0 & 0.2 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 0 & 0.2 & 0 & 0.4 & 8 \\ \hline 0 & 0.6 & 1 & 0.2 & 6 \\ 1 & -0.4 & 0 & 0.2 & 4 \end{array}$$

In der obersten Spalte befinden sich keine negativen Werte mehr. Also terminiert der Algorithmus.

(a) Welche Spalte wird als Pivot-Spalte im ersten Schritt verwendet (2 Punkte)

- ☒ x-Spalte
- ☐ y-Spalte
- ☐ keine Spalte

(b) Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an (2 Punkte):

5

(c) Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an (3 Punkte):

Schauen wir uns das letzte Tableau an. Es gibt genau zwei Spalten, die als Eintragungen genau einen Einser und sonst nur Nuller haben. In diesem Fall sind es die erste und dritte Spalte. Die erste Spalte repräsentiert die Variable x und die dritte repräsentiert die erste Schlupfvariable u_1. Die anderen Variablen (nicht-Basisvariablen), also y und u_2 nehmen den Wert 0 an. Den Wert von x können wir ablesen, indem wir schauen, wo der Einser in der Spalte ist. Hier befindet er sich in der dritten Zeile. Wir schauen also, welcher Wert ganz rechts in der dritten Zeile ist. Dort steht die Zahl 4. Also nimmt x den Wert 4 an.

$\overrightarrow{x_P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an (2 Punkte):

Diesen Wert kann man oben rechts im Tableau ablesen.

$f(\overrightarrow{x_P}) = 8$

(e) Um wieviel erhöht bzw. erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P), wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Aufgabe (P) der Wert der rechten Seite vom Wert 20 auf den Wert 21 erhöht (2 Punkte)?

Das Optimum wird bei $x = 4$ und $y = 0$ angenommen. Dadurch ist die zweite Ungleichung aktiv, denn

$$5x - 2y = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 20.$$

Erhöht man die Rechte Seite von 20 auf 21, ist es am sinnvollsten, das x so zu erhöhen, dass die Ungleichung wieder aktiv ist. Das erreichen wir, wenn wir x von 4 auf 4.2 erhöhen. Setzen wir das neue x in die Zielfunktion ein, erhalten wir.

$$2x - y = 2 \cdot 4.2 - 0 = 8.4$$

Der Wert hat sich um 0.4 erhöht, was die Lösung ist.

Erstellen Sie das zur Aufgabe (P) gehörige duale Problem (D) und beantworten Sie folgende Fragen:

(f) Welche Dimension hat das duale Problem (D) (2 Punkte)?

Das primale Problem hat zwei Nebenbedingungen, also lautet die Antwort 2.

(g) Wieviele Nebenbedingungen (zusätzlich zu den Nicht-Negativitätsbedingungen) hat das duale Problem (D) (2 Punkte)?

Das primale Problem hat zwei Dimensionen, also lautet die Antwort 2.

(h) Geben Sie den Lösungsvektor von (D) an (3 Punkte):

Beim Tableau des primalen Problems beziehen sich die ersten beiden Spalten auf die Variablen x und y. Die anderen beiden Spalten beziehen sich auf die beiden Schlupfvariablen. Ganz oben in diesen beiden Spalten können wir die gesuchten Werte ablesen.

$\overrightarrow{x_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

(i) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (D) an (2 Punkte):

Dieser Wert stimmt mit dem Optimum des primalen Problems überein.

$f(\overrightarrow{x_D}) = 8$

2. Gegeben sei die Aufgabe:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = &-x^2 - y^2 - z^2 \to \min \\ 0 \le\ &x \le 2 \\ 0 \le\ &y \le 2 \\ 0 \le\ &z \le 2 \end{aligned}$$

(a) Kreuzen Sie bei den folgenden Punkten alle Karush-Kuhn-Tucker Punkte an (4 Punkte):

Wir berechnen zuerst den Gradienten von f, wobei wir nach jeder Komponente einzeln ableiten.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,z) \\ \partial_y f(x,y,z) \\ \partial_z f(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

Jetzt definieren wir die Funktionen g_i für $i = 1, \ldots, 6$. Dazu formen wir die Ungleichungen um. Aus $0 \le x \le 2$ wird $0 \le x$ und $x \le 2$. Daraus machen wir $-x \le 0$ und $x - 2 \le 0$.

Wir definieren $g_1(x,y,z) := -x$, $g_2(x,y,z) := x-2$, $g_3(x,y,z) := -y$, $g_4(x,y,z) := y-2$, $g_5(x,y,z) := -z$, $g_6(x,y,z) := z-2$.

Jetzt berechnen wir die Gradienten. $\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_6(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Jetzt berechnen wir eine gewichtete Summe der Gradienten.

$$\nabla f(x,y,z) + u_1 \nabla g_1(x,y,z) + \cdots + u_6 \nabla g_6(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x - u_1 + u_2 \\ -2y - u_3 + u_4 \\ -2z - u_5 + u_6 \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen, ob die gegebenen Punkte die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen erfüllen.

- Fangen wir mit dem Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an. Es muss gelten $u_i g_i(2,1,0) = 0$ für alle i. Wegen $g_3(2,1,0) = -1$ und $g_4(2,1,0) = 1 - 2 = -1$, muss $u_3 = u_4 = 0$ gelten. Setzen wir den Punkt in die gewichtete Summe der Gradienten ein, erhalten wir:

  $$\begin{pmatrix} -4 - u_1 + u_2 \\ -2 \\ -u_5 + u_6 \end{pmatrix}$$

  Weil hier nicht der Nullvektor herauskommt, handelt es sich nicht um einen Karush-Kuhn-Tucker Punkt.

- Machen wir mit dem Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ weiter. Man sieht, dass $g_2(2,2,2) = g_4(2,2,2) = g_6(2,2,2) = 0$, aber $g_1(2,2,2) = g_3(2,2,2) = g_5(2,2,2) \neq 0$. Wenn wir also $u_1 = u_3 = u_5 = 0$ setzen, haben wir die Bedingung $u_i g_i(2,2,2) = 0$ für alle i erfüllt. Jetzt setzen wir in die gewichtete Summe der Gradienten ein:

  $$\begin{pmatrix} -4 + u_2 \\ -4 + u_4 \\ -4 + u_6 \end{pmatrix}$$

  Wenn wir $u_2 = u_4 = u_6 = 4$ setzen, kommt der Nullvektor heraus. Da in dem Fall auch $u_i \geq 0$ für alle i gilt, handelt es sich um einen Karush-Kuhn-Tucker Punkt.

- Machen wir mit dem Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ weiter. Da wir hier wieder den Eintrag 1 haben, können wir analog zum ersten Punkt zeigen, dass es sich hierbei nicht um einen Karush-Kuhn-Tucker Punkt handelt.

- Machen wir mit dem Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ weiter. Man sieht, dass $g_1(0,0,0) = g_3(0,0,0) =$

$g_5(0,0,0) = 0$, aber $g_2(0,0,0) = g_4(0,0,0) = g_6(0,0,0) \neq 0$. Wenn wir $u_2 = u_4 = u_6 = 0$ setzen, haben wir die Bedingung $u_i g_i(0,0,0)$ erfüllt. Setzen wir in den Gradienten ein, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

Um den Nullvektor zu erhalten, müssen wir alle $u_i = 0$ setzen. Dadurch ist auch $u_i \geq 0$ für alle i erfüllt. Dieser Punkt ist also ein Karush-Kuhn-Tucker Punkt.

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Um ein Minimum für die Funktion $g(x,y,z) = -f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ zu bestimmen, ist für die Funktion g ausgehend vom Startpunkt $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Methode des steilsten Abstiegs der nächste Punkt der Iteration zu bestimmen. Tragen Sie diesen hier ein (5 Punkte):

Wir berechnen den Gradienten von g.

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

In diesen setzen wir unseren Startpunkt ein.

$$\nabla g(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Gradient gibt die Richtung des steilsten Anstiegs an. Ändern wir das Vorzeichen, gibt es die Richtung des steilsten Abstiegs an. Daher definieren wir:

$$d_0 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir definieren die Funktion φ mit

$$\varphi(\lambda) := g(\overrightarrow{x_0} + \lambda d_0) = g\begin{pmatrix} 1 - \lambda \cdot 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 - 2\lambda)^2$$

Wann ist dieser Wert minimal? Das Quadrat einer reellen Zahl ist immer ≥ 0. Wenn wir $\lambda = 0.5$ setzen, erhalten wir unser Minimum. Daher gilt:

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0} + 0.5 d_0 = \begin{pmatrix} 1 - 0.5 \cdot 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie den Funktionswert von $\overrightarrow{x_1}$ (3 Punkte):

$$g(\vec{x}_1) = g\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$$

(d) Ist dieser neue Punkt auch schon das Optimum (3 Punkte)? (Bitte ankreuzen)

Das Quadrat einer reellen Zahl ist immer ≥ 0. Die Summe solcher Zahlen ist auch ≥ 0. Da g keine negativen Funktionswerte annehmen kann und bei dem Punkt den Wert 0 annimmt, handelt es sich um das Optimum.
☒ ja ☐ nein

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen)

(e) Wenn x und y $(x \neq y)$ zulässige Lösungen eines LP sind, dann ist auch $0.4x + 0.6y$ eine zulässige Lösung (1 Punkt)

Die Menge der zulässigen Lösungen eines LP ist konvex, d.h. alle Punkte zwischen zulässigen Lösungen sind ebenfalls zulässig.
☒ richtig ☐ falsch

(f) Fügt man einem Optimierungsproblem eine zusätzliche Nebenbedingung hinzu, verkleinert sich die zulässige Menge oder bleibt gleich (1 Punkt)

Je mehr Nebenbedingungen gegeben sind, desto mehr Punkte werden ausgeschlossen.
☒ richtig ☐ falsch

(g) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + z \geq 2 \right\}$ ist konvex (1 Punkt).

Das rechnen wir nach. Wir betrachten die Punkte $v_1 := \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ aus der gegebenen Menge. Diese müssen nach Voraussetzung die Ungleichung $x_i - y_i + z_i \geq 2$ für $i = 1, 2$ erfüllen.

Wir überprüfen jetzt, ob $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$ die Ungleichung für $\lambda \in [0, 1]$ erfüllt. Es gilt:

$$\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 = \begin{pmatrix}\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\\ \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2\end{pmatrix}$$

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) + \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 =$
$\lambda x_1 - \lambda y_1 + \lambda z_1 + (1-\lambda)x_2 - (1-\lambda)y_2 + (1-\lambda)z_2 =$
$\lambda(x_1 - y_1 + z_1) + (1-\lambda)(x_2 - y_2 + z_2)$
$\geq \lambda \cdot 2 + (1-\lambda) \cdot 2 = 2$
☒ richtig ☐ falsch

(h) Der Gradient einer Funktion zeigt immer in Richtung des steilsten Abstiegs (1 Punkt)

Er zeigt in Richtung des Steilsten Anstiegs.
☐ richtig ☒ falsch

(i) Es ist möglich, dass sowohl ein gegebenes Lineares Programm (LP) als auch das zugehörige duale LP eindeutig lösbar sind (1 Punkt)
☒ richtig ☐ falsch

3. Gegeben sei die Funktion $a(x) = xe^x$.

   (a) Berechnen Sie die Stammfunktion $A(x) = \int xe^x dx$ mittels partieller Integration (3 Punkte).

   Wir müssen einen Faktor differenzieren und einen integrieren. Weil die Ableitung von x gleich 1 ist (was alles einfacher macht) und man e^x ganz leicht integrieren kann, entscheiden wir uns dafür.

   $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

   Betrachten Sie sodann das Anfangswertproblem $y' = xe^x \cdot y$ mit $y(0) = 1$.

   (b) Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung (2 Punkte)!

   Sie ist von erster Ordnung, weil die höchste Ableitung die erste Ableitung ist.
   Sie ist linear, weil alle vorkommenden Produkte die Form $f(x) \cdot y^{(k)}$ haben, wobei $f(x)$ von keinem $y^{(k)}$ abhängt. Sie ist homogen, weil jeder Summand von einem $y^{(k)}$ abhängt.
   Sie ist explizit, weil die höchste Ableitung vom isoliert ist (bzw. werden kann).

   (c) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung mittels Trennung der Variablen (3 Punkte)!

$$\begin{array}{rcll} y' &=& xe^x \cdot y & | : y \\ \frac{y'}{y} &=& xe^x & | \int \\ \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &=& \int xe^x dx & | \text{ Substituiere } y = y(x) \\ \int \frac{1}{y} dy &=& \int xe^x dx & \\ \ln(y) &=& xe^x - e^x + c & | e^{\square} \\ y(x) &=& Ce^{(xe^x - e^x)} & \end{array}$$

   (d) Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems (2 Punkte)!

   Wir bestimmen C so, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist.

   $y(0) = Ce^{\left(0e^0 - e^0\right)} = Ce^{(-1)} = 1$

   Die Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $C = e$, also erhalten wir ans Lösung:

   $y(x) = ee^{(xe^x - e^x)} = e^{(xe^x - e^x + 1)}$

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y' + y/(1 + x) = x$$

   für positives x mittels Variation der Konstanten (10 Punkte)!

   Wir haben hier eine inhomogene Differentialgleichung. Wir werden zuerst die homogene Form lösen. Dazu lassen wir das x weg.

$$\begin{array}{rcll} y' + \frac{y}{1+x} & = & 0 & \mid -\frac{y}{1+x} \\ y' & = & -\frac{y}{1+x} & \mid : y \\ \frac{y'}{y} & = & -\frac{1}{1+x} & \mid \int \\ \int \frac{1}{y} dy & = & \int -\frac{1}{1+x} dx & \\ \ln(y) & = & -\ln(1+x) + c & \mid e^{\square} \\ y_h(x) & = & \frac{C}{1+x} & \end{array}$$

Somit haben wir die allgemeine homogene Lösung gefunden. Für die Partikuläre ersetzen wir C durch eine Funktion $C(x)$, sodass die Gleichung erfüllt ist.

$y_p(x) = \frac{C(x)}{1+x}$

$y_p'(x) = \frac{C'(x)(1+x)-C(x)}{(1+x)^2}$

Das setzen wir in unsere Gleichung ein.

$$\begin{array}{rcll} \frac{C'(x)(1+x)-C(x)}{(1+x)^2} + \frac{C(x)}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} & = & x & \\ \frac{C'(x)(1+x)-C(x)}{(1+x)^2} + \frac{C(x)}{(1+x)^2} & = & x & \\ \frac{C'(x)(1+x)}{(1+x)^2} & = & x & \\ \frac{C'(x)}{1+x} & = & x & \mid \cdot (1+x) \\ C'(x) & = & x + x^2 & \mid \int \\ C(x) & = & x^2/2 + x^3/3 + k & \mid \end{array}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$y(x) = \frac{C(x)}{1+x} = \frac{x^2/2+x^3/3+k}{1+x}$

5. Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'/x = 1 + y/x^2$ mit $y(1) = 0$ und $x > 0$.

   (a) Handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung (3 Punkte)? Begründung!

   Wir ersetzen y' durch $\frac{dy}{dx}$. Dann bringen wir die Gleichung in die Gestalt $0 = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

$$\begin{array}{rcll} \frac{dy}{x \cdot dx} & = & 1 + \frac{y}{x^2} & \mid \cdot dx \\ \frac{1}{x} dy & = & \left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx & \mid -\frac{1}{x} dy \\ 0 & = & \left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(-\frac{1}{x}\right) dy & \end{array}$$

   Jetzt überprüfen wir die Integrabilitätsbedingungen. Wir schauen also, ob P nach y abgeleitet das Gleiche wie Q nach x abgeleitet ergibt.

$$\partial_y P(x,y) = \frac{1}{x^2}$$

$$\partial_x Q(x,y) = \frac{1}{x^2}$$

   Da die beiden Ableitungen gleich sind, handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung.

(b) Handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung (2 Punkte)? Begründung!

Eine Bernoullische Differentialgleichung hat die Gestalt

$$y' + a(x)y + b(x)y^k = 0,$$

wobei k eine natürliche Zahl ist. Wir können unsere ursprüngliche Differentialgleichung in diese Gestalt bringen.

$$\begin{aligned}
\tfrac{y'}{x} &= 1 + \tfrac{y}{x^2} \quad |-1-\tfrac{y}{x^2} \\
\tfrac{y'}{x} - 1 - \tfrac{y}{x^2} &= 0| \cdot x \\
y' - x - \tfrac{y}{x} &= 0 \\
y' + \left(-\tfrac{1}{x}\right) y + (-x)y^0 &= 0
\end{aligned}$$

Daher handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung.

(c) Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems (5 Punkte)!

Wir haben mehrere Optionen. Wir können verwenden, dass die Differentialgleichung exakt ist oder wir können sie klassisch wie eine inhomogene Differentialgleichung lösen.

Wir verwenden die Methode der exakten Differentialgleichung. Gesucht ist eine Funktion F, sodass $\partial_x F(x,y) = P(x,y)$ und $\partial_y F(x,y) = Q(x,y)$. Dazu integrieren wir $Q(x,y)$ nach y.

$$F(x,y) = \int -\frac{1}{x} dy = -\frac{y}{x} + k(x)$$

Eine Addition mit einer Konstanten reicht hier nicht aus, da jeder Term, der nicht von y abhängt, zu 0 wird, wenn man ihn nach y ableitet. Daher benötigen wir $k(x)$, das nicht von y abhängt.

Leiten wir das Integral nach x ab, muss genau $P(x,y)$ herauskommen. Daher erhalten wir folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
\tfrac{y}{x^2} + k'(x) &= 1 + \tfrac{y}{x^2} \quad |-\tfrac{y}{x^2} \\
k'(x) &= 1 \quad |\textstyle\int \\
k(x) &= x + c
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$F(x,y) = -\frac{y}{x} + x + c.$$

Um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu erhalten, muss $F(x,y)$ mit einer Konstanten C gleichgesetzt werden. Das kleine c kann man sich dabei sparen.

$$\begin{aligned}
-\tfrac{y}{x} + x &= C \quad |-x \\
-\tfrac{y}{x} &= -x + C \quad |\cdot(-x) \\
y &= x^2 + -Cx
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir $y(x) = x^2 - Cx$ als allgemeine Lösung. Wir müssen nur noch die Anfangsbedingung einsetzen.

$$y(1) = 1^2 - C = 0$$

Daraus folgt, dass $C = 1$ und $y(x) = x^2 - x$.

6. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 4y = 0$

(a) Wie lautet das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung (2 Punkte)?

Wir ersetzen y durch 1, y' durch λ und y'' durch λ^2.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

(b) Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen dieser Differentialgleichung (4 Punkte)? Begründung!

$$y_1(x) = e^{-2x}, y_2(x) = e^{2x}, y_3(x) = xe^{2x}$$

Wir können natürlich die Funktionen in die Gleichung einsetzen. Aber wir suchen stattdessen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Dazu verwenden wir die kleine Lösungsformel.

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = 2$$

Dadurch dass 2 eine doppelte Lösung ist, sind sowohl e^{2x} als auch xe^{2x} Lösungen.

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem für obige Differentialgleichung an und überprüfen Sie die zugehörige Wronski-Determinante (4 Punkte)!

Wir haben schon zwei Lösungen für unsere Differentialgleichung. Wir überprüfen mithilfe der Wronski-Determinante, ob die beiden Lösungen linear unabhängig sind.

Dazu bilden wir eine 2×2-Matrix, wobei in der oberen Zeile die Lösungen und in der unteren Zeile die Ableitungen sind. Davon berechnen wir die Determinante.

$$\det \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{pmatrix} = (1+2x)e^{4x} - 2xe^{4x} = 2xe^{4x}$$

Offensichtlich ist die Determinante nicht die Nullfunktion, daher sind die Lösungen linear unabhängig und wir haben ein Fundamentalsystem.