1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 & \to & \max \\ -3x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lösen Sie das oben angegebene lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus und beantworten Sie folgende Fragen.

(a) Welche Pivot-Spalte wird im ersten Schritt verwendet ?

- X x_1-Spalte
- x_2-Spalte
- keine Spalte

2 Punkte ✓

(b) Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an: $\boxed{1}$ 2 Punkte ✓

(c) Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an:

$\vec{x_P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2 Punkte ✓

(d) Um wieviel erhöht bzw erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P) wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Wert der rechten Seite vom Wert 1 auf den Wert 1.5 erhöht : $\boxed{1{,}5}$ 2 Punkte ✓

(e) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_P}) = \boxed{3}$ 2 Punkte ✓

(f) Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ ist das folgende LP unbeschränkt ?

$$\begin{array}{rcl} 3x - y & \to & \max \\ -3x + y & \leq & 1 \\ x - cy & \leq & 1 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

~~nicht angekreuzt~~

- $c > 0$ ← angekreuzt
- $c \leq 0$ ← nicht angekreuzt
- $c > \frac{1}{3}$ → richtig
- X $c < \frac{1}{3}$ ← angekreuzt, nicht angekreuzt

4 Punkte —

(g) Welche Dimension hat das zu (P) duale Problem (D): $\boxed{2}$ 2 Punkte ✓

(h) Geben Sie den Lösungsvektor für (D) an:

$\vec{x_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2 Punkte —

(i) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (D) an: $f(\vec{x_D}) = \boxed{3}$ 2 Punkte ✓

14

1)
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 & \to & \max \\ -3x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Std. Form

$3x_1 - x_2 \to \max \quad \cdot (-1)$

$$
\begin{aligned}
-3x_1 + x_2 + u_1 \quad &\le 1 \\
x_1 \quad + u_2 \quad &\le 1 \\
x_1, x_2, u_1, u_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	u_1	u_2		
	-3	1	1	0	1	I + 3II
	1	0	0	1	1	(1,5)
ZF:	-3	1	0	0		ZF + 3II

1,5
3
4,5

x_1	x_2	u_1	u_2			
0	1	1	3	4		
1	0	0	1	1		
0	1	0	3	3	ZF = 3	(4,5)

um 1,5 erhöht

Lösungsvektor für Dual

$$
\begin{array}{cccc}
x_1 & x_2 & & \\
1, & 0, & 4, & 0
\end{array}
$$

$$\bar{x}_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
3x - y &\to \max \\
-3x + y &\le 1 \\
x - cy &\le 1 \\
x, y &\ge 0
\end{aligned}
$$

x	y	u_1	u_2		
-3	1	1	0	1	I + 3II
1	-c	0	1	1	

$-3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \qquad ZF + 3\underline{II}$

x	y	u_1	u_2	
0	$1-3c$	1	3	4
1	$-c$	0	1	1
0	$1-3c$	0	3	3

$1 - 3c = 0$

$-3c = -1$

$c = \frac{1}{3}$ $\qquad c_{\min}$

значение должно получится обнуленным

2. Gegeben sei die Aufgabe:

$$\begin{aligned} -x - 5y &\to \min \\ x^2 + y^2 &\leq 25 \\ y &\leq 4 \end{aligned}$$

(a) Welche Nebenbedingungen sind bei den folgenden Punkten aktiv? Bitte kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Punkt	$x^2 + y^2 \leq 25$ ist aktiv	$y \leq 4$ ist aktiv
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	X	
$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	X	X
$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	X	

4 Punkte ✓

(b) Kreuzen Sie bei den folgenden Punkten alle Karush-Kuhn-Tucker Punkte an:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ X $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4 Punkte —

(c) Welcher der folgenden Werte, kann der optimale Zielfunktionswert obiger Aufgabe sein?

- $f(x, y) = 0$
- $f(x, y) = -5$
- $f(x, y) = 25$
- X $f(x, y) = -23$

2 Punkte —

d) KKT-Punkten:

1) $\nabla F(\bar{x})^T + \sum u_i (\nabla g_i(\bar{x}))^T = 0$

2) $u_i \geq 0$

3) $\nabla g(\bar{x})$ - lin. unabhängig

$$-x - 5y \to \min$$

$$g_1 \quad x^2 + y^2 \leq 25$$

$$g_2 \quad y \leq 4$$

$$\nabla F(x,y)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ keine aktive g_i

$$-1 = 0$$
$$-5 = 0 \quad ⚡$$

• $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ g_1 - aktiv

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-1 + 10u_1 = 0$

$-5 = 0$ ↯

• $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ g_1, g_2 - aktiv

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 + 6u_1 = 0 \\ -5 + 8u_1 + u_2 = 0 \end{cases}$$

$6u_1 = 1$ $\quad u_1 = \frac{1}{6}$

$-5 + \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_{3}} + u_2 = 0$

$-5^{\cdot 3} + \frac{4}{3} + u_2 = 0$

$\frac{-15+4}{3} = -\frac{11}{3}$ $\quad u_2 = \frac{11}{3}$

$+$

$u_1, u_2 \geq 0$

g_i: $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. unabhängig

• $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ g_1 - aktiv

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-1 + 8u_1 = 0$ $\quad u_1 = \frac{1}{8}$

$-5 + 6u_1 = 0$ $\quad u_1 = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{8} \neq \frac{5}{6}$ ↯

3

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen)

(a) Wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) zulässige Lösungen eines LP sind, dann ist auch $2\mathbf{x} + 2\mathbf{y}$ immer eine zulässige Lösung

falsch

(b) Für das Verfahren "Polytop-Methode (Nelder & Mead)" müssen erste Ableitungen bekannt sein.

~~richtig~~ falsch

(c) Fügt man einem Linearen Optimierungsproblem eine zusätzliche Nebenbedingung hinzu, vergrössert sich die zulässige Menge

falsch +

(d) Die Menge $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$ ist konvex

richtig +

(e) Der Gradient einer Funktion ist orthogonal zur Richtung des steilsten Abstiegs

falsch +

(f) Es gibt lineare Optimierungsprobleme mit unendlich vielen optimalen Lösungen

richtig +

(g) Es ist nicht möglich, dass ein lineares Optimierungsprobleme genau zwei optimale Lösungen besitzt

~~falsch~~ richtig

(h) Es ist möglich, daß für ein lineares Optimierungsproblem, die zulässige Menge eine Einheits-Kugel ist

falsch

(i) Das zu einem linearen Optimierungsproblem duale Problem hat immer gleiche Dimension wie das primale Problem

falsch

(j) Sei folgendes Problem (P) gegeben

$$\begin{array}{rcl} 7x + 8y + 9z & \to & \max \\ 3x + 10y - 64z & \leq & 128 \\ -5x + 2y + 81z & \leq & 77 \end{array}$$

Der optimale Zielfunktionswert des zu (P) dualen Problems ist ≥ 0

richtig

10 Punkte

Nelder & Mead $\leftrightarrow$ Simplex Algorithmus

4. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' = (-y')^3$.

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung! (2 P.)

2. Ordnung, explizite, nicht lineare, gewöhnliche

b)

(b) Gibt es eine oder mehrere Konstanten $c \in \mathbb{R}$, so dass $y(x) = c$ eine Lösung der Differentialgleichung ist? Wenn ja, welche? Begründung! (2 P.)

$y(x) = c$

$y'(x) = 0$

$y''(x) = 0 = (-0)^3$

$0 = 0$ ✓

alle $c \in \mathbb{R}$ sind Lösungen

c)

(c) Gibt es eine lineare Funktion $y(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ so, dass diese Funktion eine Lösung der Differentialgleichung ist? Wenn ja, welche? Begründung! (2 P.)

keine

$y(x) = ax + b$

$y'(x) = a$

$y''(x) = 0$

$0 = (-a)^3$ wenn $a \neq 0$ →

→ gibt es keine Lösungen

d)

(d) Ermitteln Sie die allgemeine relle Lösung der Differentialgleichung durch Substitution und Trennung der Variablen, und geben Sie an, auf welchem Intervall diese reelle Lösung definiert ist. *Hinweis:* Sie können sich auf den Fall streng monoton steigender Lösungen beschränken. (6 P.)

$y'' = (-y')^3$

$t = y'$

$t' = (-t)^3$

$t' = \frac{dt}{dx}$

$\frac{dt}{dx} = (-t)^3$

$$\frac{dt}{(-t)^3} = dx$$

$$\int (-t)^{-3}\, dt = \int dx$$

$$\frac{(-t)^{-2}}{-2} = x + c$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-t)^2} = x + c$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-y')^2} = x + c$$

$$\frac{1}{(-y')^2} = -2x - 2c \qquad -2x - 2c = -2x - c$$

$$\sqrt{\frac{1}{(-y')^2}} = \sqrt{-2x - c}$$

$$\frac{1}{(-y')} = \sqrt{-2x - c}$$

$$-y' = \frac{1}{\sqrt{-2x - c}}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{-2x - c}} \qquad \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-2x - c}}$$

$$\int dy = -\int \frac{dx}{\sqrt{-2x - c}}$$

$$\int \quad {}^{-1/2} \qquad X = -2x - c$$

(y)

$$y = -2\sqrt{-2x-c} + c_1 \qquad \frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2y^{1/2} = 2\sqrt{y}$$

КАКОГО ХУЯ?

5) 5. Gegeben sei die Differentialgleichung $2y' = x/y - y/x$.

(a) Handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung? Begründung! (3 P.)

$$\underbrace{2y'}_{P(x,y)} = \underbrace{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}_{Q(x,y)} \qquad Q(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy}$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = (xy^{-1} - yx^{-1}) =$$

$$= (xy^{-1})' - (yx^{-1}) =$$

$$= -xy^{-2} - x^{-1}$$

$$(2yx^2)' = (4yx) \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2-y^2}{y^2x}$$

nicht exakt

(c) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(\sqrt{3}) = 1$ in impliziter Form. (6 P.)

$$2y' = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \quad | xy$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$2y'xy = x^2 - y^2$$

$$\underbrace{2xy}_{Q}\,dy = \underbrace{(x^2-y^2)}_{P}\,dx$$

$$Q(x,y) = 2xy$$

$$P(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -2y$$

nicht exakt

$$\mu(x+y) = \exp\left(-\int \frac{1}{P-Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx - \int \frac{1}{P-Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy\right.$$

$$\mu(x+y) = \exp\left(-\int \frac{1}{x^2-y^2-2xy}(-2y-2y)\,dx - \int \frac{1}{x^2-y^2-2xy}\cdot(-2y-2y)\,dy\right.$$

$$\mu(x+y) =$$