1

1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$$x - 2y \to \max$$
$$x + y \leq 5$$
$$5x - y \leq 5$$
$$x, y \geq 0$$

Lösen Sie das oben angegebene lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus und beantworten Sie folgende Fragen.

(a) Welche Spalte wird als Pivot-Spalte im ersten Schritt verwendet

- X x-Spalte
- y-Spalte
- irgendeine Spalte
- keine Spalte

2 Punkte ✓

(b) Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an: $\boxed{5}$ 2 Punkte ✓

(c) Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an:

$$\vec{x_P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 Punkte ✓

(d) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_P}) = \boxed{1}$ 2 Punkte ✓

(e) Um wieviel erhöht bzw. erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P), wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Aufgabe (P) der Wert der rechten Seite vom Wert 5 auf den Wert 6 erhöht ? $\boxed{0{,}2}$ 2 Punkte ✓

Erstellen Sie das zur Aufgabe (P) gehörige duale Problem (D) und beantworten Sie folgende Fragen:

(f) Welche Dimension hat das duale Problem (D) ? $\boxed{2}$ Anzahl der NB 2 Punkte ✓

(g) Wieviele Nebenbedingungen (zusätzlich zu den Nicht-Negativitätsbedingungen) hat das duale Problem (D) ? $\boxed{2}$ Anzahl der Var. von Simplex 2 Punkte ✓

(h) Geben Sie den Lösungsvektor von (D) an:

$$\vec{x_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$ aus Simplex

~~3 Punkte~~ ?

(i) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (D) an: $f(\vec{x_D}) = \boxed{1}$ aus Simplex 2 Punkte ✓

17

$$x - 2y \to \max$$
$$x + y \leq 5$$
$$5x - y \leq 5$$
$$x, y \geq 0$$

St. Form:

$$x - 2y \to \max \qquad \cdot(-1)$$
$$x + y + u_1 = 5$$
$$5x - y + u_2 = 5$$

$x, y \geq 0$

x	y	u_1	u_2	
1	1	1	0	5 $:1=5$
5	-1	0	1	5 $:5=1$ (6)
-1	2	0	0	0

$\frac{6}{5} = 1{,}\frac{1}{5}$

$1{,}2$

x	y	u_1	u_2		
1	1	1	0	5	$\mathrm{I} - \underline{\mathrm{II}}$
1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1	$(1{,}2)$
-1	2	0	0		$ZF + \underline{\mathrm{II}}$

x	y	u_1	u_2	
0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	4
1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1
0	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1

$ZF = 1 \quad (ZF = 1{,}2)$

um $\underline{0{,}2}$

→ Lösung für Dual

$(1, 0, 4, 0)$
$\;\; x \;\; y \;\; u_1 \;\; u_2$

②

2. Gegeben sei die Funktion: $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

(a) Bestimmen Sie für f den Gradienten an der Stelle $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und tragen ihn hier ein: $\nabla f(\vec{x_0}) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cdot(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$ $\quad \nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 2\cdot(2-1) \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 Punkte ✓

(b) Um ein Minimum zu bestimmen, ist für die Funktion f ausgehend vom Startpunkt $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Methode des steilsten Abstiegs der nächste Punkt der Iteration zu bestimmen.

Tragen Sie diesen hier ein: $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix}$

$(2-2\lambda-1)^2 + (1-2\lambda)^2$

$(1-2\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2$

6 Punkte ✓

(c) Bestimmen Sie den Funktionswert von $\vec{x_1}$:

$f(\vec{x_1}) = \boxed{0}$

$\frac{\partial}{\partial \lambda} \quad \lambda = 0{,}5$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 Punkte ✓

(d) Ist dieser neue Punkt auch schon das Optimum? (Bitte ankreuzen)

X ja

nein

3 Punkte ✓

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen)

(e) Der Gradient einer Funktion zeigt immer in Richtung des steilsten Abstiegs

falsch

1 Punkt ✓

(f) Es ist möglich, daß für ein lineares Optimierungsproblem, die zulässige Menge ein Dreieck ist

richtig

1 Punkt ✓

(g) Das zu einem linearen Optimierungsproblem duale Problem hat immer gleiche Dimension wie das primale Problem

falsch

1 Punkt ✓

(h) Wenn x und y (x ≠ y) zulässige Lösungen eines Linearen Programms (LP) sind, dann ist auch $0.1x + 0.9y$ eine zulässige Lösung

1 Punkt ✓

richtig

(i) Der Durchschnitt der Mengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 5\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x - y \le 0\}$ ist konvex

1 Punkt ✓

richtig

a) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 \qquad \vec{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nabla f(\bar{x_0}) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(2-1) \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $x_{k+1} = x_k - \lambda \cdot \nabla g(x_k)$

$x_1 = x_0 - \lambda \nabla f(x_0)$

$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix}$

$\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix}$

$$f(x,y) = (2-2\lambda-1)^2 + (1-2\lambda)^2 =$$

$$= (1-2\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2 = (1-2\lambda)^4 = 0$$

$$1-2\lambda = 0$$

$$2\lambda = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\cancel{2}^{1}\cdot\cancel{\frac{1}{2}} \\ 1-\cancel{2}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1) = (1-1)^2 + 0^2 = 0$$

$$\nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Optimum}$$

$$y(x) = ax + b$$

$$y'(x) = a$$

$$y''(x) = 0$$

$$\boxed{0 = (-a)^3 \qquad a \neq 0}$$

③

gewöhnlichen $y(x)$

$-\frac{y^4}{4}$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' = (-y')^3$.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind für obige Differentialgleichung (DGL) richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen) 6 Punkte 6

(+) i.	richtig	X falsch	Die DGL ist linear (+)
(+) ii.	X richtig	falsch	Die DGL ist explizit
(+) iii.	X richtig	falsch	Die DGL ist 2. Ordnung
(+) iv.	X richtig	falsch	Die DGL ist gewöhnlich
v.	richtig	falsch	Die DGL kann durch Substitution in eine DGL 1. Ordnung umgewandelt werden
(+) vi.	richtig	X falsch	Die DGL ist eine Bernoullische Differentialgleichung $y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$, $\alpha \neq 0,1$

$z' = (-z)^3$

(b) Für welche Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist $y(x) = c$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung? (Bitte ankreuzen) 4 Punkte 0

Bew ?

i. $c = 0$
ii. $c = 1$
iii. $c = -1$
iv. es gibt kein c so, dass $y(x) = c$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) Gibt es eine lineare Funktion $y(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ so, dass diese Funktion eine Lösung der Differentialgleichung ist? 2 Punkte 2

i. ja
ii. X nein

(d) Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen der Differentialgleichung? 4 Punkte 0

i. $2x^2$
ii. $\sqrt{2x+1}$
iii. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
iv. $\sqrt{2x+1} - 1$

(e) Es soll gelten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$. Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen der Differentialgleichung? 4 Punkte 0

i. $2x^2$
ii. $\sqrt{2x+1}$
iii. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
iv. $\sqrt{2x+1} - 1$

8

a) $y'' = (-y')^3$ $\qquad z = y'$

$z' = (-z)^3$ $\qquad z' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{(-z)^3} = dx$

$\int (-z)^{-3}\, dz = \int dx$

$$\frac{(-z)^{-2}}{-2} = \cancel{x}+c$$

$$\frac{-\cancel{z}^{-3+1}}{-3+1} = \frac{(-z)^{-2}}{-2} = \frac{\cancel{+}z^{-2}}{\cancel{+}2} = \frac{z^{-2}}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot z^{-2} = x+c \qquad = \frac{1}{2}\cdot z^{-2}$$

$$\frac{1}{2\cdot z^{2}} = x+c$$

$$\frac{1}{2\cdot (y')^{2}} = x+c$$

$$(y')^{-2} = 2x+c$$

$$\frac{1}{|y|} \qquad y' = (2x+c)^{-2}$$

$$y' = \frac{1}{(2x+c)^{2}} = \frac{1}{2x^{2}+4xc+c^{2}} =$$

$$y' = \qquad = \frac{1}{2x^{2}+4xc+c}$$

4

...n Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils alle richtigen Aussagen an!

(a) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - 3y' + 2y = 0$ ist (4)

$C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

$C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

$C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

x $C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

(+)

abc-Formel $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x^2 - 3x + 2$

$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1$

(b) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - 3y' + 2y = 2$ ist (4)

$C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 2$

x $C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 2$

$C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 1$

$C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + 1$

$C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 2$

(−)

$a_1 \quad a_0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$3^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$

$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

$y_p = \frac{b_x}{a_0} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = y_h + y_p$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 1$

(c) Die Lösung der Differentialgleichung $y'' - 3y' + 2y = 2$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$ ist (4)

$e^{-2x} + 2e^x + 1$

x $2e^{2x} - 2e^x + 1$

$2e^{-x} + xe^{-x} + 2$

$2e^{2x} - e^{-x} + 2$

$2e^{2x} + 2e^x + 1$

✓

(d) Das zur Differentialgleichung $y'' - 2y = 1$ gehörige charakteristische Gleichung ist gegeben durch (4)

richtige Antw.

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 - 2 = 1$

x $x^2 - 2x - 1 = 0$

(−)

$y'' - 2y = 0$

$\lambda^2 - 2 = 0$

(e) Sei die Funktion (4)

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(\sin(\tfrac{x}{2}) + \cos(\tfrac{x}{2})\right)$$

Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Welche der folgenden Differentialgleichungen haben diese Funktion als Lösung?

1) $y'' - y' + y = 0$

2) $y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$

3) $y'' + y' + 2y = 0$

4) $y'' + y' - y = \frac{1}{2}$

5) $2y'' + 2y' + y = 0$

1) $a_1^2 - 4a_0 = (-1)^2 - 4 = -3 \qquad D = \sqrt{-3} \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

2) $1 - 2 = -1 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{2}$

3) $1 - 8 = -7 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

4) $1 + 4 = 5$ X Fall $a_1^2 - 4a_0 > 0$

$\Rightarrow y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$

8

2 u 5 ...

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2} =$

$= \frac{1}{2} \pm i$

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\lambda^2 - \underset{(a_1)}{3\lambda} + \underset{(a_0)}{2} = 0$$

$$\downarrow e \quad \downarrow 6 = 1$$

$$a_1^2 - 4a_0 = 3^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$$

$$f_1 = e^{2x} \quad f_2 = e^x$$

d) $y'' - 2y = 1 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$

$$\cancel{y'' - 2y - 1 = 0}$$

$$\cancel{x^2 - 2x - 1 = 0} \qquad \cancel{x^2 - 2x - 1 = 0}$$

! Bernoullische gilt für lineare Dgl.

a) $y'' - \underset{(a_1)}{3y'} + \underset{(a_0)}{2y} = 0$

Alg. Lsg.: $x^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$a_1^2 - 4a_0 = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$

b) $y'' - 3y' + 2y = 2$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$

$y_p = \frac{b(x)}{a_0} = \frac{2}{2} = 1$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + 1$

$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2$

$e^0 = 1$

$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 + 1 = c_1 + c_2 + 1 = 1$

$y'(0) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} = 2c_1 e^0 + c_2 e^0 =$

$= 2c_1 + c_2 = 2$

$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow c_2 = 2 - 2c_1$ $\quad c_1 + 2 - 2c_1 + 1 = 1 \Rightarrow -c_1 = -2 \quad \underline{c_1 = 2}$ $\quad \Rightarrow \underline{c_2 = -2}$

$c_1 + c_2 + 1 = 1$

$-\ 2c_1 + c_2 = 2$

$-c_1 + 1 = -1$

$-c_1 = -2$

$c_1 = 2$

$c_2 = -2.$

$$\boxed{\begin{matrix} c_1 = 2 \\ c_2 = -2 \end{matrix}}$$

$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + 1$

$= 2e^{2x} - 2e^{x} + 1$

Complexe Zahl bed.: $z = a + bi$

$\lambda_1 = a + bi$

$\lambda_2 = a - bi$

$$a = -\frac{a_1}{2}$$

$$b = \sqrt{\left|\frac{a_1^2}{4} - a_0\right|}$$

$\boxed{a_1^2 - 4a_0 < 0}$ Fall 3

Alg. Lösung:

$$y(x) = e^{ax} \cdot [c_1 \cdot \cos(bx) + c_2 \sin(bx)]$$

$$a = -\frac{a_1}{2} \qquad b = \sqrt{\left|\frac{a_1^2}{4} - a_0\right|}$$

5) $\overset{a_1}{\lambda^2 + \lambda + 1 = 0}$

$a_1 = 1$

$a_0 = 1$

$$a = -\frac{1}{2} \qquad b = \sqrt{\left|\frac{1}{4} - 1\right|} =$$

imaginär teil

$$= \sqrt{-\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} [c_1 \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2} x) + c_2 \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2} x)]$$

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(\sin(\tfrac{x}{2}) + \cos(\tfrac{x}{2})\right)$$

1) $y'' - y' + y = 0$

2) $y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$

3) $y'' + y' + 2y = 0$

4) $y'' + y' - y = \frac{1}{2}$

5) $2y'' + 2y' + y = 0$

2) $y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$

5) $2y'' + 2y' + y = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$$a = -\frac{a_1}{2} \qquad b = \sqrt{\left|\frac{a_1^2}{4} - a_0\right|}$$

X 1) $y'' - y' + y = 0 \qquad a_1^2 - 4a_0 = 1 - 4 < 0$

$a_1 = -1 \qquad a = \frac{1}{2} \qquad b = \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \sqrt{-\frac{3}{4}} =$

$a_0 = 1 \qquad$ ↯ $\qquad = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

imaginärteil

2) $y'' + y' + \frac{1}{2} y = 0 \qquad a_1^2 - 4a_0 = 1 - 2 < 0$

$a_1 = 1 \qquad a = -\frac{1}{2} \qquad b = \sqrt{\frac{1^2}{4} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$a_0 = \frac{1}{2} \qquad +$

3) $y'' + y' + 2y = 0 \qquad a_1^2 - 4a_0 = 1 - 8 < 0$

$a_1 = 1 \qquad a = -\frac{1}{2} \qquad b = \sqrt{\frac{1}{4} - 2} = \sqrt{-\frac{7}{4}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$

$a_0 = 2$

↯

4) $y'' + y' - y = \frac{1}{2} \qquad a_1^2 - 4a_0 = 1 + 4 = 5 > 0$ ↯

$a_1 = 1$

$a_0 = -1$

5) Вопрос, если это поле само, что

2) что можно ответить, если не поле,

то не отмечать