1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$$2x - y \to \max$$
$$y - x \leq 2$$
$$5x - 2y \leq 20$$
$$x, y \geq 0$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x & y & u_1 & u_2 & \\ \hline u_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ u_2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 20 \\ & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|cccc|c} & & & & & \\ \hline u_1 & 0 & \frac{7}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 6 \\ x & 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 4 \\ -2 & 0 & \frac{9}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 8 \end{array}$$

Lösen Sie das oben angegebene lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus und beantworten Sie folgende Fragen.

(a) Welche Spalte wird als Pivot-Spalte im ersten Schritt verwendet

- ☒ x-Spalte
- ☐ y-Spalte
- ☐ keine Spalte

2 Punkte 2

(b) Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an: $\boxed{5}$ 2 Punkte 2

(c) Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an:

$$\vec{x_P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 3 Punkte 3

(d) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_P}) = \boxed{8}$ 2 Punkte 2

(e) Um wieviel erhöht bzw. erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P), wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Aufgabe (P) der Wert der rechten Seite vom Wert 20 auf den Wert 21 erhöht ? $\boxed{+0{,}4}$ 2 Punkte 2

Erstellen Sie das zur Aufgabe (P) gehörige **duale** Problem (D) und beantworten Sie folgende Fragen:

(f) Welche Dimension hat das **duale** Problem (D) ? $\boxed{2}$ 2 Punkte 2

(g) Wieviele Nebenbedingungen (zusätzlich zu den Nicht-Negativitätsbedingungen) hat das **duale** Problem (D) ? $\boxed{2}$ 2 Punkte 2

(h) Geben Sie den Lösungsvektor von (D) an:

$$\vec{x_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$ 3 Punkte 3

(i) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (D) an: $f(\vec{x_D}) = \boxed{8}$ 2 Punkte 2

20

2. Gegeben sei die Aufgabe:

$$f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 \to \min$$

$$0 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq 2$$
$$0 \leq z \leq 2$$

(a) Kreuzen Sie bei den folgenden Punkten alle Karush-Kuhn-Tucker Punkte an:

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4 Punkte —

(b) Um ein Minimum für die Funktion $g(x,y,z) = -f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ zu bestimmen, ist für die Funktion g ausgehend vom Startpunkt $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Methode des steilsten Abstiegs der nächste Punkt der Iteration zu bestimmen.

Tragen Sie diesen hier ein: $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5 Punkte 5

(c) Bestimmen Sie den Funktionswert von $\vec{x_1}$:

$g(\vec{x_1}) = \boxed{0}$ 3 Punkte 3

(d) Ist dieser neue Punkt auch schon das Optimum? (Bitte ankreuzen)

☒ ja ☐ nein 3 Punkte 3

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen)

(e) Wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) zulässige Lösungen eines LP sind, dann ist auch $0.4\mathbf{x} + 0.6\mathbf{y}$ eine zulässige Lösung

☒ richtig ☐ falsch 1 Punkt 1

(f) Fügt man einem Optimierungsproblem eine zusätzliche Nebenbedingung hinzu, verkleinert sich die zulässige Menge oder bleibt gleich 1

☒ richtig ☐ falsch 1 Punkt

(g) Die Menge $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + z \geq 2\}$ ist konvex. 1

☒ richtig ☐ falsch 1 Punkt

(h) Der Gradient einer Funktion zeigt immer in Richtung des steilsten Abstiegs

☐ richtig ☒ falsch 1 Punkt 1

(i) Es ist möglich, dass sowohl ein gegebenes Lineares Programm (LP) als auch das zugehörige duale LP eindeutig lösbar sind 1

☒ richtig ☐ falsch 1 Punkt

16

$-x^2-y^2-z^2$

$x-2 \le 0$
$-x \le 0$
$y-2 \le 0$
$-y \le 0$
$z-2 \le 0$
$-z \le 0$

$$\begin{pmatrix}-2x\\-2y\\-2z\end{pmatrix} + u_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + u_6 \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

a) $I\{1,4\}$

$-4 + u_1 \overset{!}{=} 0$

$\cancel{=0}$

$-2 + (-u_4) \overset{!}{=} 0$

$u_4 = -2$ ↯

b) $I\{1,3,5\}$

$-4 + u_1$ $\quad u_{1,3,5} = 4$

-4

$-2 + (-u_1)$

d)

$u_1 = -2$ ↯

c) $I\{6\}$

$-2 + (-u_6) \overset{!}{=} 0$

$u_6 = -2$ ↯

$g(x) = x^2 + y^2 + z^2$

$$d_0 = -\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \quad \varphi(\lambda) = g\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right) = (1-2\lambda)^2 = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2$$

$\cancel{\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{\;}{2} = \lambda_{1,2}}$

$\varphi'(\lambda) = 8\lambda - 4$

$\rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\frac{21}{5} \cdot 2 = 4{,}2 \cdot 2 \quad 8{,}4$

3. Gegeben sei die Funktion $a(x) = xe^x$.

(a) Berechnen Sie die Stammfunktion $A(x) = \int xe^x dx$ mittels partieller Integration. (3 P.)

Betrachten Sie sodann das Anfangswertproblem $y' = xe^x \cdot y$ mit $y(0) = 1$.

(b) Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung! (2 P.)

(c) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung mittels Trennung der Variablen! (3 P.)

(d) Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems! (2 P.)

a) $x = w(x)$, $e^x = u(x)$ $\quad \int u(x) w(x) dx = u'(x) w(x) - \int u(x) w'(x) dx$

$\int xe^x dx = e^x \cdot x - \int e^x dx$

$= e^x x - e^x + c$ ✓

(3)

b) Linear, explizit, homogen, 1. Ordnung ✓

(2)

c) $y > 0$

$(y' =) \frac{dy}{dx} = x \cdot e^x \cdot y \quad | : y \; | \cdot dx$

$\frac{dy}{y} = x \cdot e^x dx \quad | \int$

$\ln y = e^x x - e^x + c$

$y = \exp(e^x x \cancel{+} e^x + c)$ $\quad y' = xe^x \cdot \exp(e^x x + e^x + c)$ ✓

(2.5)

d) $y(0) \stackrel{!}{=} 1$

$y(0) = \exp(-e^0 + c)$

$y(0) = e^{-1+c} \quad \rightarrow c = +1$

FF

$y_A = \exp(e^x x + e^x - 1)$

noch (2)

9.5

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y' + y/(1+x) = x$$

für positives x mittels Variation der Konstanten (10 P.)!

homogene Lösung

$$y' + \frac{y}{1+x} = 0$$

$$\frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{\frac{1}{1+x}}{1+x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x} = 0 \quad |:y \; |\cdot dx$$

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x} \quad |\int$$

$$-1 \ln y = \ln(1+x) + c \quad | \exp$$

$$y^{-1} = (1+x)\cdot c$$

$$y = \frac{c}{(1+x)} \checkmark \quad \rightarrow c = 1 \quad y_h = \frac{1}{(1+x)}$$

2

noch

4

Ansatz $\quad y_p = \dfrac{c(x)}{1+x}$

$$y_p' = \frac{c'(x)(1+x) - c(x)}{(1+x)^2}$$

$$\frac{c'(x)(1+x) - c(x)}{(1+x)^2} + \frac{c(x)}{(1+x)^2} = x \quad |\cdot(1+x)^2$$

$$c'(x)\,(1+x) = x\,(1+x)$$

$$\frac{dc}{dx} = x + x^2 \quad |\cdot dx$$

$$dc = x + x^2\,dx \quad |\int$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$c'(x) = x^2 + x^3$$

$$y_p' = \frac{(x^2+x^3)(1+x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{(1+x)^2} \qquad y_p = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{1+x}$$

5

$$y = \frac{1 c}{1+x} + \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{1+x} = y_h + y_p$$

$\boxed{9}$

5. Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'/x = 1 + y/x^2$ mit $y(1) = 0$ und $x > 0$.

(a) Handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung? Begründung! (3 P.)

(b) Handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung? Begründung! (2 P.)

(c) Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems (5 P.)!

a)

$$\frac{y'}{x} = 1 + \frac{y}{x^2}$$

$$y' = x + \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{y}{x}$$

$$dy = \left(x + \frac{y}{x}\right) dx \rightarrow \frac{dy}{x} = 1 + \frac{y}{x^2}$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{Q(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{P(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \qquad \frac{Q(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

Integrabilitätsbedingung erfüllt → exakte Dtg.

8

3

b)

Bern. Dtg.

$$y' + a(x)y + b(x)y^k = 0$$

$$y' - \frac{y}{x} - x = 0 \rightarrow \text{inhomogene lineare Dgl.}$$

nein

c)

homogen

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + C$$

$$y_h = x \cdot C$$

partikuläre

$$y_p = x \cdot C(x)$$

$$C(x) + xC'(x) - \frac{x C(x)}{x} = x$$

$$x C'(x) = x$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = x$$

$$y = Cx + x^2$$

$$y(1) = C + 1 \overset{!}{=} 0 \rightarrow C = -1$$

Lsg. AWP

$$y = x^2 - x$$

5

6. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 4y = 0$.

(a) Wie lautet das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung? (2P.)

(b) Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen dieser Differentialgleichung? Begründung! (4P.)

$$y_1(x) = e^{-2x}, y_2(x) = e^{2x}, y_3(x) = xe^{2x}$$

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem für obige Differentialgleichung an und überprüfen Sie die zugehörige Wronski-Determinante! (4 P.)

a)

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ 2

b)

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$

Fall $a_1^2 - 4a_0 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 4

$\rightarrow$ Lsg. sind y_2 und y_3 da eine Lösung e^{2x} andere xe^{2x}

c)

Fundamentalsystem ist y_2, y_3

$W[y_2, y_3] = \det\begin{pmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{pmatrix}$

$y_2' = 2e^{2x}$

$y_3' = 2e^{2x}x + e^{2x}$

$e^{2x} \cdot (2e^{2x} + e^{2x}) - x \cdot e^{2x} \cdot 2e^{2x} \overset{!}{\neq} 0$ 2

$e^{2x \cdot 2x}(2+1) - 2xe^{2x \cdot 2x} =$ ✓

$\rightarrow$ lin unabhängig

8