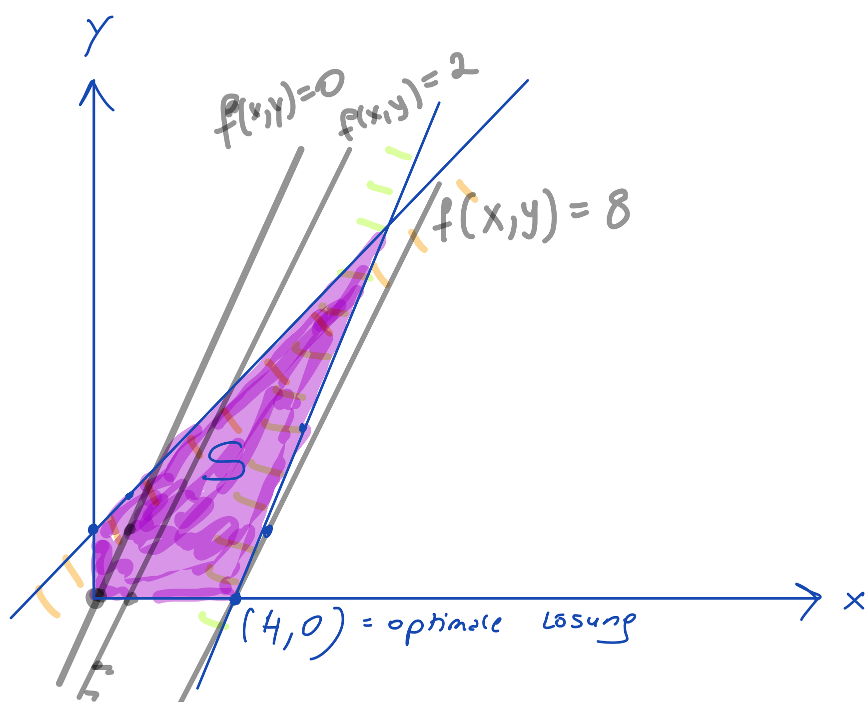
Bsp Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem:

$$2x - y \to max$$
$$y - x \leq 2$$
$$5x - 2y \leq 20$$
$$x, y \geq 0$$

a) Erstelle eine ausführliche Skizze aus der klar der zulässige Bereich, die Zielfunktionsschar und die optimale Lösung zu erkennen ist

$$2x - y \to max$$
$$y \leq 2 + x$$
$$-2y \leq 20 - 5x \quad \Rightarrow \quad y \geq -10 + \frac{5}{2}x$$



$$2x - y = 0$$
$$y = 2x$$

$$2x - y = 2$$
$$y = 2x - 2$$

$$f(4,0) = 8$$

b) Löse das lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus.

(P) ist schon in Standardform

erweiterte Standardform:

$$2x - y \to \max$$
$$y - x + u_1 = 2$$
$$5x - 2y + u_2 = 20$$
$$x, y \geq 0$$

ZF/BV	x	y	u_1	u_2	r.S.
z	-2	1	0	0	0
u_1	-1	1	1	0	2
u_2	5	-2	0	1	20

$\frac{20}{5}$

ZF/BV	x	y	u_1	u_2	r.S.
z	-2	1	0	0	0
u_1	-1	1	1	0	2
x	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	4

BV	x	y	u_1	u_2	r. S.
z	0	$1/5$	0	$2/5$	8
u_1	0	$3/5$	1	$1/5$	6
x	1	$-2/5$	0	$1/5$	4

Die optimale Lösung ist $x = 4$ und $y = 0$ und es ergibt sich ein maximaler Zielfunktionswert von 8.

c) Beantworten Sie folgende Fragen

1. Welche Spalte wird als Pivotspalte im ersten Schritt verwendet:

   ☒ x - Spalte
   ☐ y - Spalte
   ☐ keine Spalte

2. Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an: $\boxed{5}$

3. Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_p}) = 8$

5. Um wie viel erhöht bzw. erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P) wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Aufgabe (P) der Wert der rechten Seite vom Wert 20 auf den Wert 21 erhöht? $\frac{2}{5}$

6. Welche Dimension hat das duale Problem (D)? 2

(P)

$c^T x \to max$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

(D)

$b^T y \to min$

$A^T y \geq c$

$y \geq 0$

$c^T = (2, -1) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow b^T = (2 \quad 20)$

(D) $\quad 2y_1 + 20y_2 \to \min$

$$-y_1 + 5y_2 \geq 2$$
$$y_1 - 2y_2 \geq -1$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Anzahl der Nebenbedingungen (ohne die Nichtnegativitätsbedingungen) in (P) entspricht der Dimension von (D).

7. Wie viele Nebenbedingungen (zusätzlich zu den Nicht-Negativitätsbedingungen) hat das duale Problem? 2

8. Der Lösungsvektor von (D) ist

$$\vec{x}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

9. Gib den optimalen Zielfunktionswert von (D) an:

$$f(\vec{x}_D) = 8$$

Bsp Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

a) Bei einem linearen Optimierungsproblem ist jedes lokale Optimum

gleichzeitig ein globales Optimum.
Richtig

b) Es gibt lineare Optimierungsprobleme mit genau 3 optimalen Lösungen
FALSCH

nur entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen

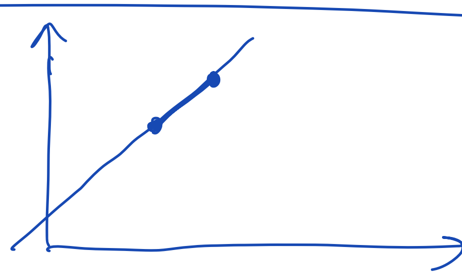
c) Es ist möglich, dass für ein lineares Optimierungsproblem dessen zulässige Menge ein gleichseitiges Dreieck ist, die einzige Lösung im Mittelpunkt des Dreiecks liegt.
FALSCH, das Optimum wird an einer Ecke oder Kante angenommen.

d) Für das Verfahren „steilster Abstieg" müssen 1. & 2. Ableitung bekannt sein.
FALSCH, nur 1. Ableitung

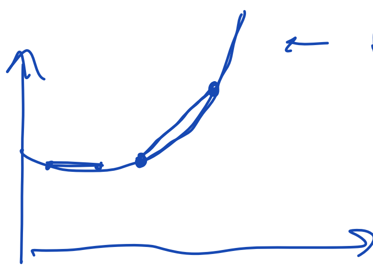
e) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \right.$

$-x + 2y - z \geq 7\}$ ist konvex.

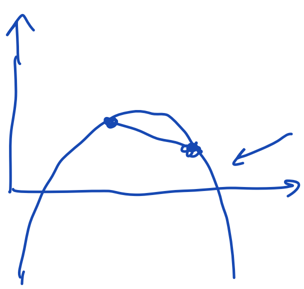
RICHTIG: Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung ist stets konvex.



Die lineare Funktion ist konvex und konkav



Diese Funktion ist strikt konvex



strikt konkav

Bsp Gegeben sei die Aufgabe:

$$f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 \to \min$$

$$0 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq 2$$
$$0 \leq z \leq 2$$

a) Kreuzen Sie bei den folgenden

Punkte alle Karush-Kuhn-Tucke Punkte an:

$\square \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cancel{\square} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\square \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cancel{\square} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

überprüfe die KKT-Optimalitätsbedingungen!

(a) $\nabla F(x)^T + \sum_{i \in I} u_i (\nabla g_i(x))^T = 0$

(b) $u_i \geq 0 \quad (i \in I)$

(c) $\nabla g_i(x) \quad (i \in I)$ linear unabhängig

$F(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$

$$\begin{matrix} 0 \leq x \\ x \leq 2 \\ 0 \leq y \\ y \leq 2 \\ 0 \leq z \\ z \leq 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x \leq 0 & \Rightarrow g_1(x) = -x \\ x-2 \leq 0 & \Rightarrow g_2(x) = x-2 \\ -y \leq 0 & \vdots \\ y-2 \leq 0 & \\ -z \leq 0 & \\ z-2 \leq 0 & \end{matrix}$$

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aktiv sind g_2 und g_5, also $I = \{2,5\}$

(a) $\nabla F(2,1,0) + u_2 \nabla g_2(2,1,0) + u_5 \nabla g_5(2,1,0) = 0$

(b) $u_2, u_5 \geq 0$

(c) $\nabla g_2(2,1,0)$ und $\nabla g_5(2,1,0)$ lin. unabhängig

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla F(2,1,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_5(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad -4 + u_2 = 0 \quad \Rightarrow u_2 = 4$

$\quad -2 = 0 \quad ⚡$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kein KKT-Punkt

- $\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$ aktiv sind g_2, g_4, g_6 also $I = \{2, 4, 6\}$

$$\nabla g_4(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_6(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + u_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad -4 + u_2 = 0 \quad \Rightarrow \underline{u_2 = 4}$

$\quad -4 + u_4 = 0 \quad \Rightarrow \underline{u_4 = 4}$

$\quad -4 + u_6 = 0 \quad \Rightarrow \underline{u_6 = 4}$

(b) $u_2, u_4, u_6 \geq 0$ ✓

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein KKT-Punkt

• $\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $I = \{1, 3\}$

$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\nabla g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $-u_1 = 0$

$-u_3 = 0$

$-2 = 0$ ↯

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist kein KKT-Punkt

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad I = \{1, 3, 5\}$

$\nabla F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-u_1 = 0$
$-u_3 = 0$
$-u_5 = 0$

(b) $u_1, u_3, u_5 \geq 0$ ✓

(c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig

$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein KKT-Punkt

Bsp a) Um ein Minimum für die Funktion $g(x,y,z) = -f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ zu bestimmen, ist für die Funktion g ausgehend vom Startpunkt $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Methode des steilsten Abstiegs der nächste Punkt der

Iteration zu bestimmen. $x_1 = ?$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) := g(\vec{x}_0 - \lambda \nabla g(\vec{x}_0))$$

$$\varphi(\lambda) := g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\varphi(\lambda) := g\left(\begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\varphi(\lambda) = (1-2\lambda)^2$$

- minimiere $\varphi(\lambda)$ (d.h. $\varphi'(\lambda) = 0$)

$$\varphi'(\lambda) = 2 \cdot (1-2\lambda) \cdot (-2) = 0$$

$$1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

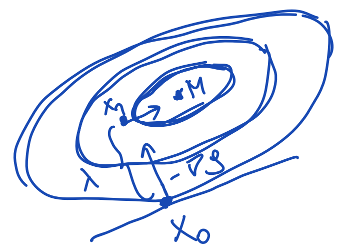
b) Bestimmen Sie den Funktionswert von $\vec{x}_1$

$$g(\vec{x}_1) = 0$$

$$g(0,0,0) = 0$$

c) Ist dieser neue Punkt auch schon das Optimum?

$$\nabla g(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Bsp Gegeben sei die Funktion

$$a(x) = xe^x$$

a) Berechnen Sie die Stammfunktion $A(x) = \int xe^x dx$ mittels partieller Integration.

partielle Integration: $\int f(x)g(x) = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$

$$f(x) = e^x$$
$$g(x) = x$$

$$\int xe^x\,dx = e^x x - \int e^x\,dx = e^x x - e^x + C$$

$$= e^x(x-1) + C$$

Betrachten Sie sodann das

Anfangswertproblem $y' = xe^x y$ mit $y(0) = 1$

b) Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung!

1. Ordnung, homogen, linear, explizit, gewöhnlich

c) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung mittels der Trennung der Variablen!

$$y' = xe^x y$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x y \quad | \cdot dx \quad | : y$$

$$\frac{dy}{y} = xe^x \cdot dx \quad | \int$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int xe^x \, dx$$

$$\ln y = e^x(x-1) + C \quad | \exp$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln y + C_1 = e^x(x-1) + C_2 \\ \ln y = e^x(x-1) + C \end{array}\right]$$

$$e^{\ln(y)} = e^{(e^x \cdot (x-1) + C)}$$

$$y = e^{(e^x(x-1))} \cdot e^C$$

$$y = e^{(e^x(x-1))} \cdot C$$

d) Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems!

$y(0) = \underbrace{e^{-1}}_{\frac{1}{e} \cdot c = 1} \cdot c = 1 \Rightarrow c = e$

$(fg)' = f'g + fg'$

$y = e^{(e^x(x-1))} \cdot e = e^{(e^x(x-1)+1)}$

Probe: l.S: $y' = \underbrace{e^{(e^x(x-1)+1)}}_{y} \cdot [e^x(x-1) + e^x]$

$y' = y \cdot e^x \cdot x$

r.S: $x e^x \cdot y$

l.S. = r.S.