1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem (P):

$$x + y + 2z \to \max$$
$$2x + y + z \leq 1$$
$$-x - 2y + z \leq 2 \quad \boxed{3}$$
$$x, y, z \geq 0$$

Lösen Sie das oben angegebene lineare Optimierungsproblem (P) mit dem Simplex-Tableau-Algorithmus und beantworten Sie folgende Fragen.

(a) Welche Spalte wird als Pivot-Spalte im ersten Schritt verwendet 2

- ☐ x-Spalte
- ☐ y-Spalte
- ☒ z-Spalte
- ☐ keine Spalte

2 Punkte 2

(b) Geben Sie den Wert des ersten Pivot-Elements an: $\boxed{1}$ 2 Punkte 2 2

(c) Geben Sie den Lösungsvektor von (P) nach Abschluss des Simplex-Algorithmus an:

$$\vec{x_P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Punkte 3 3

(d) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (P) an: $f(\vec{x_P}) = \boxed{2}$ 2 Punkte 2 2

(e) Um wieviel erhöht bzw. erniedrigt sich der Zielfunktionswert von (P), wenn sich in der zweiten Nebenbedingung der Aufgabe (P) der Wert der rechten Seite vom Wert 2 auf den Wert 3 erhöht ? $\boxed{0}$ 2 Punkte 2 2

Erstellen Sie das zur Aufgabe (P) gehörige **duale** Problem (D) und beantworten Sie folgende Fragen:

(f) Welche Dimension hat das **duale** Problem (D)? $\boxed{\cancel{2}\ 4}$ 2 Punkte 2 0

(g) Wieviele Nebenbedingungen (zusätzlich zu den Nicht-Negativitätsbedingungen) hat das **duale** Problem (D) ? $\boxed{3}$ 3+1 2 Punkte 2 2

(h) Geben Sie den Lösungsvektor von (D) an:

$$\vec{x_D} = \cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 Punkte 3 3

(i) Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert von (D) an: $f(\vec{x_D}) = \boxed{2}$ 2 Punkte 2 2

18

20

Zahl

Landeskliniken-Holding

2. Gegeben sei die Funktion: $f(x,y) = (x+1)^2 + (y+1)^2$

(a) Bestimmen Sie für f den Gradienten an der Stelle $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und tragen ihn hier

ein: $\nabla f(\vec{x_0}) = \boxed{2}$ 2 ? — 3 Punkte — 0

(b) Um ein Minimum zu bestimmen, ist für die Funktion f ausgehend vom Startpunkt $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Methode des steilsten Abstiegs der nächste Punkt der Iteration zu bestimmen.

Tragen Sie diesen hier ein: $\vec{x_1} = (\ 2\ )$? — 6 Punkte — 0

(c) Bestimmen Sie den Funktionswert von $\vec{x_1}$:

$f(\vec{x_1}) = \boxed{18}$ — 3 Punkte — 0

(d) Ist dieser neue Punkt auch schon das Optimum? (Bitte ankreuzen)

- ☐ ja
- ☒ nein

3 Punkte — 0

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Bitte ankreuzen)

(e) Die Menge $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -x + 4y + z \leq 2\}$ ist konvex.

☐ richtig ☒ falsch — 1 Punkt — 0

(f) Fügt man einem Optimierungsproblem eine zusätzliche Nebenbedingung hinzu, verkleinert sich die zulässige Menge oder bleibt gleich

☒ richtig ☐ falsch — 1 Punkt — 1

(g) Es ist nicht möglich, dass für ein Lineares Programm (LP), dessen zulässige Menge ein Dreieck ist, die einzige optimale Lösung in der Mitte des Dreiecks liegt

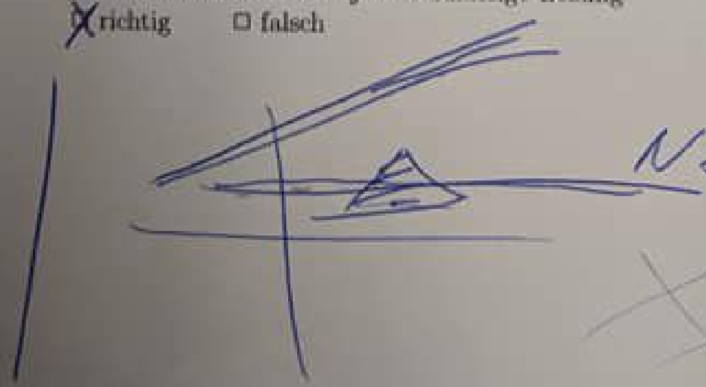
☒ richtig ☐ falsch — 1 Punkt — 1

(h) Es gibt lineare Optimierungsprobleme mit genau zwei optimalen Lösungen.

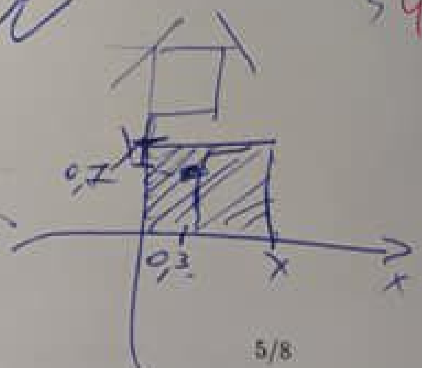
☐ richtig ☒ falsch Kann Kante sein — 1 Punkt — 1

(i) Wenn **x** und **y** ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) zulässige Lösungen eines Linearen Programms (LP) sind, dann ist auch $0.3\mathbf{x} + 0.7\mathbf{y}$ eine zulässige Lösung

☒ richtig ☐ falsch — 1 Punkt — 1



NZN



34

22P.

3

3. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' + \frac{2}{x}y' = 0$ für $x > 0$.

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung! 2 Punkte 2

(b) Wieviele Dimensionen hat das Fundamentalsystem der Differentialgleichung? Begründung! 2 Punkte 1

(c) Bestimmen Sie eine Basis für das Fundamentalsystem und überprüfen Sie die lineare Unabhängigkeit der Basisfunktionen! 8 Punkte

(d) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $x > 0$ an! 2 Punkte

(e) Transformieren Sie die Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung! 2 Punkte

a) 2-te Ordnung, Homogen, implizit

b) 2 Dimension x, y 

c)?

d)?

e) $a^2 + \frac{2}{x}a = 0 \quad x > 0$

ϕ

4. Gegeben sei die Differentialgleichung $(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$.

(a) Handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung? Begründung! 4 Punkte

(b) Bestimmen Sie einen geeigneten $\boxed{\text{Euler-Multiplikator } M(y)}$, der nur von y abhängt! 6 Punkte

(c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form! 6 Punkte

a) Ja

b)

c)

c) $(3x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy \quad / \cdot dx$

$(3x^2 - y^2)dy = \frac{2xy \cdot dx}{\cancel{dx}} \quad / : y$

$\frac{(3x-y)(3x+y)}{y} dy = \frac{2x}{\cancel{dx}} \cdot dx$

$\frac{9x^2 - y^2}{y} dy = \frac{2x}{\cancel{dx}} \cdot dx$

$\frac{9x^2}{y} - \frac{y^2}{y} dy = \frac{2x}{\cancel{dx}} dx$

$\frac{-y^2}{y} dy = 2x - \frac{9x^2}{y} dx$

$3x^2 - y^2 \frac{dy}{dx} = 2xy$

$-y^2 - \frac{dy}{dx} = 2xy - 3x$

5. Gegeben sei die Funktion $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ mit $\mathrm{sinc}(0) = 1$. Diese Funktion spielt in der Signalverarbeitung eine wichtige Rolle.

   (a) Ermitteln Sie die ersten drei nicht-verschwindenden Glieder der Taylorreihenentwicklung der Funktion $\mathrm{sinc}(x)$ in der Umgebung von $x_0 = 0$.
   Geben Sie hierzu ein geeignetes Anfangswertproblem 2. Ordnung für $y(x) = x\,\mathrm{sinc}(x)$ an und verwenden Sie die Potenzreihenmethode! 6 Punkte

   (b) Wie lautet die allgemeine Taylorreihe von $\mathrm{sinc}(x)$ in der Umgebung von $x_0 = 0$? 2 Punkte

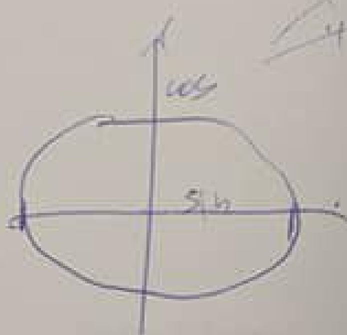
a)

1	1
2	sin1
3	$\frac{\sin(\sin 1)}{\sin 1}$

$\frac{\sin 1}{1} =$

sin(sin1)

sin1



b)