

消元法就不赘述了（除了一些有意思的问题，放在本文最后），主要是矩阵的部分，也就是说，矩阵的行交换变换和列交换变换，或者广义一些，矩阵的行线性组合变换和列线性组合变换都是能写成矩阵乘法的形式。

想更好的理解一定是要按照老师说的那种以行向量线性组合（或者列向量线性组合）的角度来理解矩阵乘法结果的每一列（或者每一行）。

当然还有矩阵乘法满足结合律不满足交换律。

课程中提供的一个对特殊矩阵快速求逆矩阵的好方法，具体来说是把 $A^{-1}A = I$ 这个式子左边的矩阵乘法以矩阵的行线性组合变换的角度来看待，所以课程里求逆矩阵才这么简单（当然或许有那种类单位矩阵的特殊性质的原因）。

现在来说那个有意思的问题吧。

消元法的算法描述并不能很自然地导出其自身的可靠性。什么意思呢？你或许也考虑过，就算需要求解的方程组是一个标准的有唯一解的未知数数量与方程组数量相同的方程组，那么每次把在主元上不为零的行交换上来时，是否会 **碰巧交换上来一个不应该交换上来的行以至于让消元过程失败**？

让我来具体描述这种担心。假设主元为 $a_{k,k}$ ，我们用它消掉 $a_{k+1 \sim n,k}$ ，那么在这次消元之后，是否会存在 $k+1 \leq i \leq n$ ，满足 $a_{k+1 \sim n,i} = 0$ ？也就是说我们把 $k+1 \sim n$ 行的第 k 列的主元消掉的过程中顺便把这些行的第 i 列的主元消掉了。这种情况显然对于消元法这个算法来说是毁灭性的，反之，只要不出现这种情况，通过简单的归纳法就可以证明消元一定能正常进行。

来反证吧。对于每个具体的 $k+1 \sim n$ 的一行，假如它的第 i 列被消掉了，那么它在这次消元之前第 k 列一定不为零（因为我们这次消元就是要消掉第 k 列嘛），而且满足 $\varphi(a_{k,k}, a_{k,i}) = (a_{p,k}, a_{p,i})$ ，也就是一个方向上的向量。但这个“一个方向上的向量”的关系是有传递性的，所以说假如出现那种情况，你把 $k+1 \sim n$ 的哪个向量扔上来当 (k,k) 主元都是一样的。注意到了吗？这表示第 k 列和第 i 列的 $k \sim n$ 这两个子列向量出现了列向量的局部线性相关性。

不过接下来的东西就需要更高级的知识了，至少现在证明它还太复杂。