

公理化的表述，实际上是一种抽象。

线性映射 (Linear Mapping)



- $f: V \rightarrow W$
 - V, W 均为向量空间
 - $f(u + v) = f(u) + f(v)$
 - $f(\alpha v) = \alpha f(v)$
 - 推论 (如何证明?)
 - $f(0) = 0$
 - $f(au + bv) = af(u) + bf(v)$

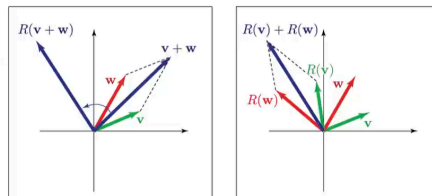


Figure 2.10: Rotation is a linear operator.

- 低维空间的线性映射
 - 缩放、旋转是线性映射
 - 平移不是线性映射
 - ** 仿射变换 (affine transformation) = 缩放、旋转 + 平移



仿射变换在 games101 听过。

至于矩阵乘法就是线性变换的观点，emmm，只能说非常有必要了解，但不能奉为唯一真理。

矩阵单目运算



- 转置 (Transpose) A^T : A 的所有元素的下标行、列互换
 - 意义: 矩阵对应的线性变换在对偶空间里的逆变换对应的矩阵
 - 性质: $(AB)^T = B^T A^T$
- 行列式 (Determinant) $\det A = |A|$
 - 意义: 矩阵对应的线性变换对空间的拉伸程度的度量 (物体经过变换前后的体积比)
 - 定义: 在 n 阶方阵中选 n 个元素使得每行每列各有一个元素被选出, 求其乘积
 - 再将不同选择方案的乘积乘以正负 1 (由选择方法的奇偶性决定) 相加
 - 计算方法
 - 低维矩阵: n 条主对角线分别计算乘积的和, 减去 n 条次对角线分别计算乘积的和
 - 高维矩阵: 高斯消元后取对角线元素的和
 - 性质: 转置不变; 交换行 (列) 取反

复数域上的共轭矩阵: 转置 + 共轭
记为 A^H

对复数域矩阵提的这个非常有启发性。

行列式与体积的关系.....之后再说。

- 迹 (Trace) $\text{tr } A$: 矩阵的对角线元素之和
 - 意义: 矩阵的特征值之和
 - 性质: $\text{tr } A = \text{tr}(A^T)$; $\text{tr } AB = \text{tr } BA$; $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(B + A)$
- 逆 (Inversed) A^{-1} : 满足 $AA^{-1} = E$ 的矩阵
 - 意义: 矩阵对应的线性变换的逆变换的矩阵; 矩阵的特征值之积
 - 求解: 伴随矩阵法; 高斯消元法
 - 性质: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $|A||A^{-1}| = 1$
- 伴随 (Adjugated) A^* : 由 A 的每个元素的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵
 - 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$; M_{ij} 为余子式, 即删去第 i 行第 j 列后的行列式值
 - 性质: $AA^* = A^*A = |A|E$

特征值 (Eigenvalue)



- 对于某些向量 \mathbf{u} 满足 $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}$ 的数 λ 称为特征值 (\mathbf{A} 为 n 阶方阵)
 - 这些向量 \mathbf{u} 称为特征向量, 每个特征值对应的特征向量构成向量子空间
 - $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v} \Rightarrow \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$
 - 求解特征值: $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$
 - 想得到关于 \mathbf{u} 的非零解, 则 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, 该行列式对应于一元 n 次方程组
 - 特征值的意义: 对于某些向量, 特定线性变换的作用效果与数乘等价
- 矩阵多项式的特征值
 - $f(\mathbf{A}) = c_k \mathbf{A}^k + c_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + \dots + c_1 \mathbf{A} + c_0 \mathbf{E}$
 - 若 λ 是 \mathbf{A} 的特征值, 则 $f(\lambda)$ 必为 $f(\mathbf{A})$ 的特征值
 - 设 \mathbf{A} 的特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$; 则 $f(\mathbf{A})$ 的全部特征值由 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 给出
 - 重要应用: 最大特征值称为谱半径 (spectral radius); 最大最小特征值之比称为条件数

矩阵收敛.....我幼小的心灵受到了震撼。好在之前了解过幂级数的收敛性, 思维打开了不少。

赋范 (Normed) 向量空间

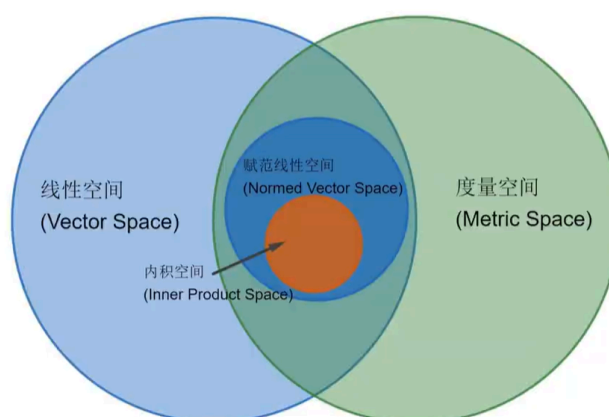


- 度量空间 vs. 向量空间
 - 向量空间中的元素不能比大小
 - 对于集合 V , 定义度量函数 $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x, y, z \in V$
 - $d(x, y) \geq 0$ (非负性)
 - $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ (不可区分者的同一性)
 - $d(x, y) = d(y, x)$ (对称性)
 - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)
 - 定义了度量函数的集合 V 称为度量空间 (metric space), 度量函数 d 又称为“距离”
- 赋范向量空间 = 向量空间 + 度量函数 ($d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$)
 - 定义范数 $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
 - $\|\mathbf{u}\| \geq 0, \|\mathbf{u}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (正定性); $\|a\mathbf{u}\| = |a| \|\mathbf{u}\|$ ($a \in \mathbb{R}$) (正齐次性)
 - $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (次可加性, 三角不等式)

内积空间 (Inner Product Space)



- 内积: $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 - \mathbf{u} 与 \mathbf{v} 的内积记作 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
 - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$
 - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
 - $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} \rangle = a \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
 - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$
- 赋范线性空间 vs. 内积空间
 - $d(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$
 - 范数只给出了向量的长度
 - 内积还给出了向量的夹角



注意, 点积是内积的一种特殊情况。

内积与正交



• 正交 (orthogonal) 与单位正交基底

- 定义两向量的夹角 $\theta_{uv} = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\sqrt{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle}}$, 当 $\cos \theta_{uv} = 0$ 时称为两向量正交
- 正交基底: 一组两两之间互相正交的向量基底; 单位基底: 模长均为 1 的向量基底
 - 通过施密特正交化加规范化可以使任意一组基底成为单位正交基底
- 单位正交基底的性质 (设 $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$)
 - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3, v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

• 单位正交变换: 不改变任意两个向量的内积的变换 (保持单位正交基底)

- 单位正交矩阵: 变换对应的矩阵 \mathbf{R} , 满足 $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$; 对应于旋转与镜像空间内的旋

• 笛卡尔坐标系 (Cartesian coordinates)

- 一组 \mathbb{R}^n 中的单位正交基底加上原点构成的坐标系; 成立 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$

嗯, 我也只知道笛卡尔坐标系这个特例了。不过紧接着就给出了酉空间的例子, 哈哈, 看不太懂, 似乎是泛函分析的内容。

么正空间与么正变换



• 么正 (unitary) 空间, 数学上又译为酉空间

- 定义了内积的复数域 \mathbb{C} 上的线性空间, 内积通过埃尔米特 (Hermite) 函数给出

• 么正变换, 数学上又译为酉变换

- 将么正空间中的单位正交基底变换为单位正交基底的变换
 - 单位正交基: 亦称为规范正交基、标准正交基
- 单位正交变换可视为么正变换在实数域 \mathbb{R} 上的特例

• 么正空间/变换的应用

- 量子力学: 波函数在复数域上定义
- 么正性: 算子 (operator) 保内积
- 线性算子: 无限维空间 (函数空间) 上的线性变换, 也存在特征值、内积等概念

后面的跟 games101 讲的差不多。

矩阵的变换



• 矩阵的变换 vs. 线性变换

- 矩阵就是线性变换的表示, 所以矩阵的变换其实是线性变换的“变换”

• 相似变换

- 存在可逆矩阵 \mathbf{P} 使得 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}$, 称为矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 相似, 记作 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$
- 意义: \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 可以看作同一个线性变换在不同基底下的表象
- 相似对角化: 当存在 n 个线性无关的特征向量时, 可以将矩阵相似为一个对角矩阵
 - 在某个特殊的基底, 矩阵对应的线性变换等价于纯缩放变换

• 合同变换

- 存在可逆矩阵 \mathbf{C} 使得 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$, 称为矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 合同, 记作 $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$
- 意义: \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 可以看作同一个二次型在不同基底下的表象

相似变换可以用类似上一张 ppt 讲的理解:

- 绕任意轴旋转

- $R^T \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R$
- R 为将旋转轴转为 z 轴的变换矩阵
- 参见第三讲

也就是先改变基底，再变换，再把基底改回来。

二次型



- 二次型 (quadratic form): n 个变量的二次多项式

- 示例: 圆锥曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

- 矩阵表示 $(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

- 一般形式: $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$

- 合同变换后: $\mathbf{x}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \Rightarrow (\mathbf{C} \mathbf{x})^T \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{x}) = 0$

- 意义: 变换基底后的二次型系数

- 应用

- 将某任意朝向的椭圆方程转换为标准形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- $(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

唉，听不懂，必须狂补知识了，下篇博客就干这件事。