

行列式公式

a messy formula...

好吧，首先第一步分解是按照性质 3b，也就是 $\det \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$ ，不断分解矩阵，直到每一行都只剩下一个非零数。然后对于那些没有零列的，算出要几次行交换才能变成对角矩阵，以确定正负号，最后把对角矩阵的 \det 算出来。

为什么要每行留一个呢，因为再分解就没有意义了，产生不了更微观的形式了。

首先第一个问题是枚举所有行非零且列非零的最终被分解出来的矩阵，这个我们可以假设原矩阵所有元素都非零，因为如果矩阵的某个元素是零那么最终由于对角矩阵 \det 的计算方法这个矩阵的 \det 就是零，不会影响答案的正确性。（虽然会影响一些效率）

这个枚举过程其实就是枚举全排列的过程。

那么如何算出要奇数次还是偶数次行交换呢？（由于置换群的性质，不可能同时存在奇数次交换能排序好的方案和偶数次交换能排序好的方案）

有个结论，**冒泡排序算法的交换次数等于数列的逆序对数**，所以 $(-1)^{\text{逆序对数}}$ 就是我们需要的那个正负系数了。（虽然还有很多更快的排序算法，但架不住冒泡排序的特殊性质哈哈）

于是可以写出一个公式了。

（老师没写，我从网上抄一个）

从公式证明 $\det A^T = \det A$ 的话，其实很显然，因为在 $\det A$ 的计算过程中被枚举到的排列一定会在 $\det A^T$ 的计算过程中枚举到，而在 $\det A$ 计算过程中枚举不到的在 $\det A^T$ 的计算过程中也不会被枚举到。而正负号就更好解决了，一对逆序对的定义是： $a_i > a_j, i < j$ ，明显矩阵置换后一对逆序对还会是一对逆序对，一堆非逆序对也不会变成一对逆序对。

代数余子式

就是在行列式的计算式中，把所有包含 a_{ij} 的项放在一起提出个 a_{ij} 来写成 $a_{ij}(-\alpha + \beta - \Gamma + B - A + \dots)$ 的形式，后面那一堆就是代数余子式。

余子式可以写成 $\det(\text{sub_matrix})$ 乘以一个 ± 1 的形式（这里的 sub_matrix 就是从原矩阵去掉 i 行和 j 列的 sub_matrix ），这个 1 的正负取决于 a_{ij} 的下标， $i+j$ 为偶数就是正 1， $i+j$ 为奇数就是负 1。

but why?

考虑对原矩阵搞行交换和列交换（列交换也让矩阵 \det 取负），让 i 行 j 列变成 1 行 1 列，这个过程带来的正负系数是 $(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$ ，那么原矩阵的 \det 就能表示为 $-a_{ij} \det(\text{submatrix})$ ，证毕。