Quicksort

Esempio di quicksort con pseudocodice.
Si esaminano i contronti del quicksort. La parte importante è il partizionamento perché poi si effettuano solo due chiamate
ricorsive. Ogni partizionamento dovrò confrontare il perno con tutti gli altri valori, quindi n-1 poi si dovrà aggiungere anche +2
Costo partizionamento = n-1+2 = n+1
perché si fanno una coppia di confronti arrivando allo scambio degli indici i e j.

Dimostrazione caso medio

I partizionamenti sono n.
Per come l algoritmo è sviluppato la posizione degli elementi ha un ruolo fondamentale.
Ci sono tre casi: ottimo, pessimo e medio.
Ottimo: le partizioni sono più o meno simili.
Pessimo: Una partizione è vuota e l altra è ha i restanti elementi. (Se il vettore è quasi ordinato o ordinato).

Nel caso pessimo si avrà C_n:
$C_n = C_{n-1} + n + 1 \ \rightarrow C_n = O(n^2)$

Condizione iniziale $C_0 = 0$

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-2} + n + (n+1) \\ &= C_{n-3} + n - 1 + n + (n+1) \\ &= C_{n-4} + n - 2 + n - 1 + +n + (n+1) \\ &= C_0 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1}(k) \end{aligned}$$

Cioè la somma dei primi numeri interi partendo da 2 che è

$\sum_{k=0}^{n}(k) = [n(n+1)]/2$ è la formula di Gauss normale

$\sum_{k=2}^{n+1}(k) - 1 = [(n+2)(n+1)]/2$ è la formula per k=2

QS caso medio

a vettore di dimensione n
Si ipotizza che il vettore contenga una qualsiasi permutazione di n valori, i possibili input sono n! I valori sono tutti
distinti mescolati a caso.
Si può dire che il vettore contiene i numeri da 1 a n (1,2,...,n)
Esaminiamo la versione dell algorimo in cui il perno sia l elemento a destra

$$[\qquad\qquad\qquad\qquad|j\,]$$
$$[\qquad\qquad|j|\qquad\qquad]$$
$$\quad <j \qquad\qquad >j$$

Il primo sottovettore ha dimensione j-1 il secondo sottovettore n-j
Probabilità che il perno sia j (j che divide il vettore con i partizionamenti simili) è $\frac{1}{n}$ cioè $\frac{(n-1)!}{n!}$
Il numero medio di confronti, cioè arrivare a j nel mezzo è

$$C_n = (n+1)_{costoPartizionamento} + \frac{1}{n}_{probalitaDelPerno} * \sum_{j=1}^{n}[C_{j-1} + C_{n-j}]_{costoChiamateRicorsive}$$

Condizione iniziale è $C_0 = 0$

Condizione iniziale ci porta a dire che $C_1 = 2$
Nella sommatoria ci sono le due quantità, il primo termine assumerà i valori da C_0 fino a C_{n-1}, il secondo da C_{n-1} fino a C_0
Dato che si somma due volte la stessa cosa si può scrivere
$C_n = (n+1) + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}[C_j]$ si moltiplica tutto per n
$nC_n = n(n+1) + 2\sum_{j=0}^{n-1}[C_j]$
Si vuole eliminare la somma e si parte scrivendo la ricorrenza con n-1
$(n-1)C_{n-1} = (n-1)n + 2\sum_{j=0}^{n-2}[C_j]$
Facendo la differenza

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = n(n+1) + 2\sum_{j=0}^{n-1}[C_j] - (n-1)n - 2 * \sum_{j=0}^{n-2}[C_j]$$
$$= n(n+1) - (n-1)n + 2 * C_{n-1}$$
$$= 2n + 2 * C_{n-1}$$

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2 * C_{n-1}$$

$$\Rightarrow nC_n = 2n + (n+1)C_{n-1}$$

Si vuole trasformare l espressione dividendo tutto per n(n+1)

$$\frac{nC_n}{n(n+1)} = \frac{2n}{n(n+1)} + \frac{(n+1)C_{n-1}}{n(n+1)}$$

$$\underbrace{\frac{C_n}{n+1}}_{a_n} = \frac{2}{n+1} + \underbrace{\frac{Cn-1}{n}}_{a_{n-1}}$$

L espressione è più semplice e senza la somma

Si itera su $\frac{C_{n-1}}{n}$

$\frac{2}{n+1} + \frac{Cn-1}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{C_{n-2}}{n-1}$ questo passaggio si può iterare fino ad arrivare alla condizione iniziale

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-2} \dots$$

$$= \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2}{k} + \frac{C_1}{2}$$

si sostituisce C_1 con 2 e si cambia il valore di k da cui si inizia la sommatoria $= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k}$

Si arriva a dire quindi che

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ per i numeri armonici
Essendo quasi simile alla sommatoria ripresa dai numeri amonici a meno del K che parte da 2 si inserisce l' n-esimo numero armonico meno 1

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1$$

Si toglie dal denominatore (n+1) e si ha:
$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$

Fine Dimostrazione

La formula precendente è per i confronti si dovrà studiare anche la formula per gli scambi. Si userà sempre lo stesso trucco sulle somme

Formula degli scambi

$$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j})$$