Funzioni generatrici

Abbiamo trovato le funzioni per i confronti del mergesort, la funzione
sul numero medio dei confronti e una funzione analoga per gli scambi.

La ricorrenza di fibonacci è detta lineare perché i coef. sono costanti.

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $F_0 = 0, F_1 = 1$

Definiamo in generale sequenza di reali:

$$(a_n)_{n \in N} \qquad a_n \in R$$

Ad esempio:
$(C_n)_n = (0, 2, 5, \frac{26}{3}, \frac{77}{6} ...)$ con $C_n \in Q$
Abbiamo trovato C_n per le soluzioni della lezione passata.

Indichiamo con G l'operatore funzione generatrice.

$G_n^t(a_n) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...$

Non essendoci una differenza sostanziale tra le sequenze e le sommatoria di espressioni
esponenziali, le associamo ad una funzione che chiameremo appunto funzione generatrice.
Facciamo questa associazione perché le funzioni generatrici sono più facili da studiare.
Se non si sono ambiguità si scriverà soltanto $G(a_n)$
t è un segnaposto e di solito non ha significato. Indica solo la posizione del valore della sommatoria. t^2 indica il secondo posto.

Proprietà di G

Linearità

$(a_n)_n, (b_n)_n$ sono due sequenze
L'insieme di due sequenze è un gruppo commutativo rispetto alla somma.

$$G(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha G(a_n) + \beta G(b_n) \quad \alpha, \beta \in R$$

Dimostrazione :
$G(\alpha a_n + \beta b_n) = \sum_{n \geq 0} (\alpha a_n + \beta b_n) t^n$
$\qquad\qquad\qquad = \alpha \sum a_n t^n + \beta \sum b_n t^n$

il prima sommatoria corrisponde a $G(a_n)$

Spostamento

$G(a_{n+1}) = \frac{G(a_n) - a_0}{t}$

$= \sum a_{n+1} t^n = a_1 + a_2 t + ..$
$= \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...}{t}$

Lo spostamento si vedrà che potrà essere generalizzata anche per altre posizioni.

Derivazione

$G(n a_n) k = tDG(a_n)$
$\qquad = \sum_{n \geq 0} n a_n t^n = 0 + a_1 t + 2a_1 t^2 + 3a_2 t^3 + ...$

> $N.B.$ Per fibonacci G è
> $G(F_n) = t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + ...$
> $nG(F_n) = t + 2t^2 + 6t^3 + 12t^4 + 25t^5 ...$

$DG(a_n) = 0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + ...$

Si moltiplica l espressione per t
$tDG(a_n) = 0 + a_1 t + 2a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + ...$

Abbiamo così la relazione

Convoluzione

$G(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = G(a_n) G(b_n)$
Permette di trasformare prodotti di funzioni generatrici note in altre funzioni generatrici.

$G(b_n) = \sum b_n t^n$ e si sviluppa come $G(a_n)$
Il prodotto:
$G(a_n) G(b_n) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ...)$
$a_0 b_0$ è il termine noto perché non ha t

si ha t^1 solo per le moltiplicazioni con a_0, b_0 con i primi t di a_1 e b_1
Il procedimento per t^2 è analogo

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + ...$$

in generale potremo scrivere questa somma con la sommatoria :

$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Ad esempio :
$(a_n) = \frac{1}{n}, (b_n) = 1$
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = H_n$
Facendo la convoluzione si ha la ricorrenza dei numeri armonici.
Per :
$(a_n) = n, (b_n) = 1$
$\sum_{k=0}^{n} n =$ Formula di Gauss

Composizione

$\sum_{n\geq 0} a_n (G(b_k))^n = G(a_n) \circ G(b_n)$
Praticamente se si mette al posto di t una altra sequenza.
$G_n^t(a_n) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$
Troviamo la composizione di due funzioni.

Per esempio:

$\sum 2^n a_n t^n = \sum a_n (2t)^n$
$= G(a_n) o G(2t)$
In questo caso 2t è la funzione generatrice (per quanto semplice) :
$2t \rightarrow (0, 2, 0, 0, 0, 0, ...)$

Principio di identità

$a_n = b_n \quad \forall n \quad <=> \quad G(a_n) = G(b_n)$
C'è una equivalenza tra funzioni generatrici e sequenze.

Metodo del rapporto

Sequenza definita da una relazione di ricorrenza
Sequenza nota $(a_n = 1 \quad \forall n)$
$G(1) = \sum t^n$
In questo metodo si va a valutare il rapporto tra due termini

della sequenza.
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \rightarrow a_{n+1} = a_n$
Dato che vale per ogni n allora si può trasformare in un uguaglianza tra funzioni generatrici.
$G(a_{n+1}) = G(a_n)$
$\frac{G(a_n) - 1}{t} = G(a_n)$

$(1 - t)G(a_n) = 1 \rightarrow G(1) = \frac{1}{1-t}$
la funzione generatrice della sequanza 1 può essere generata da $\frac{1}{1-t}$