Funzioni di ricorrenza del Quicksort

$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} C_j$

$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(S_j)$

$nC_n = n(n+1)2\sum_{j=0}^{n-1} C_j$ con $C_0 = 0$ e $C_1 = 2$

Si applica la linearità
$G(nC_n) = G(n(n+1)) + 2G(\sum_{j=0}^{n-1} C_j)$ -->shift indietro poi convoluzione

> $G(a_{n+p}) = \frac{G(a_n)-a_0-a_1t-...a_{p-1}t^{p-1}}{t^p} = \sum_{k\geq 0} a_{k+p}t^k$ shift in avanti
> $G(a_{n-p}) = \sum_{k\geq p} a_{k-p}t^k = a_0t^p + a_1t^{p+1} + a_2t^{p+2} + ... =$ shift indietro
> Si deve passare da $G(a_{n-p})$ a $G(a_n)$ con $G(a_n)$
> $G(a_n) = G(a_{n-p})t^p + a_0 + a_1t + ... + a_{p-1}t^{p-1}$ quindi riprendendo $G(a_{n-p})$:
> $G(a_{n-p}) = t^p(a_0 + a_1t + a_2t^2 + ...)$
> $= t^pG(a_n)$

$tDG(C_n) = G(n^2) + G(n) + 2tG(\sum_{j=0}^{n} C_j)$
Si usa la formula di Eulero $G(\sum_{k=0}^{n} a_k) = \frac{1}{1-t}G(a_n)$

$tDG(C_n) = G(n^2) + G(n) + 2t\frac{1}{1-t}G(C_n)$
$tDG(C_n) = \frac{t+t^2}{(1-t)^3} + \frac{t}{(1-t)^2} + 2t\frac{1}{1-t}G(C_n)$

> $G(n) = G(n\cdot 1) = tDG(1) = tD\frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2}$
> $G(n^2) = G(n\cdot n) = tDG(n) = tD\frac{t}{(1-t)} = \frac{t+t^2}{(1-t)^3}$

$G(C_n) = C(t)$
$C'(t) = \frac{1+t+(1-t)}{(1-t)^3} + \frac{2}{1-t}C(t)$
$C'(t) = \frac{2}{(1-t)^3} + \frac{2}{(1-t)}C(t)$ con $C_0 = C(0) = 0$

Si deve risolvere l equazione differenziale, prendendo l equazione omogenea associata.

- eq. omogenea

$\rho'(t) = \frac{2}{(1-t)}\rho(t)$
$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{2}{1-t}$
$\log\rho(t) = -2\log(1-t) = \log\frac{1}{(1-t)^2}$
$\rho(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$

- $(\frac{C(t)}{\rho(t)})' = \frac{C'(t)\rho(t) - C(t)\rho'(t)}{\rho'(t)^2}$
  $= \frac{\rho(t)[C'(t) - C(t)\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}]}{\rho(t)^2}$ sostituisco la frazione di ρ
  $= \frac{C'(t) - C(t)\frac{2}{1-t}}{\rho(t)}$ dato che $C'(t) = \frac{2}{(1-t)^3} + \frac{2}{(1-t)}C(t)$
  $= \frac{\frac{2}{(1-t)^3}}{\frac{1}{(1-t)^2}} = \frac{2}{1-t}$
  $\frac{C(t)}{\rho(t)} = -2\log(1-t) + k$ con $k = 0$
  Si porta il meno dentro il log e si sostiuisce con il risultato trovato
  $C(t) = 2\rho(t)\log(\frac{1}{1-t}) = \frac{2}{(1-t)^2}\log(\frac{1}{1-t})$

$C(t) = \frac{2}{(1-t)^2}\log(\frac{1}{1-t})$ assomiglia ai numeri armonici
$G(H_n) = \frac{1}{1-t}\log(\frac{1}{1-t}) = G(\sum\frac{1}{k})$

$C(t) = \frac{2}{(1-t)^2}\log(\frac{1}{1-t}) = \frac{2}{(1-t)}\frac{1}{1-t}\log(\frac{1}{1-t})$ Si scompone il primo elemento
$\frac{2}{(1-t)}G(H_n) = 2G(\sum_{k=0}^{n} H_k)$

ma dato che $G(C_n) = C(t)$
allora $C_n = 2\sum_{k=0}^{n} H_k = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$
Per $f_n = g_n \forall n \leftrightarrow G(f_n) = G(g_n)$

$nS_n = \frac{n(n-2)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-1}(S_j)$
$n = 0$ si ha $0 = 0 + 0$ quindi vale per zero
$n = 1 \quad 0 = -\frac{1}{6}$ per uno invece si ha un problema
si usa il delta per aggiustare
$nS_n = \frac{n(n-2)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-1}(S_j) + \frac{1}{6}\delta_{n,1}$

$G(nS_n) = \frac{1}{6}G(n^2) - \frac{1}{3}G(n) + 2tG(\sum S_j) + \frac{1}{6}G(\delta_{n,1})$
$tS'(t) = \frac{1}{6}\frac{t+t^2}{(1-t)^3} - \frac{1}{3}\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{2t}{1-t}G(S_n) + \frac{1}{6}t$ Si applica eulero

$S'(t) = \frac{1+t-2(1-t)+(1-t)^3}{6(1-t)^3} + \frac{2}{1-t}G(S_n)$
$S'(t) = \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)^3} + \frac{2}{1-t}G(S_n)$

- eq. omogenea

$\rho'(t) = \frac{2}{1-t}\rho(t)$
$\rho(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$

- $(\frac{S(t)}{\rho(t)})' = \frac{S'(t)\rho(t)-S(t)\rho'(t)}{\rho(t)^2}$
$= \frac{\rho(t)[S'(t)-S(t)\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}]}{\rho(t)^2}$
$= \frac{S'(t)-\frac{2}{1-t}S(t)}{\rho(t)}$
$= \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)^3}(1-t)^2 = \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)}$ la parte $(1-t)^2$ è il denominatore ρ che moltiplica

$\frac{S(t)}{\rho(t)} = \int \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)}dt$
Si deve trasformare prima l espressione per usare i tratti semplici
$\frac{t^2(2+1-t)}{6(1-t)} = \frac{2t^2}{6(1-t)} + \frac{(1-t)t^2}{6(1-t)}$
$= \frac{2t^2}{6(1-t)} + \frac{1}{6}t^2$
$= \frac{2t^2-2+2}{6(1-t)} + \frac{1}{6}t^2 = \frac{2(t^2-1)}{6(1-t)} + \frac{2}{6(1-t)} + \frac{1}{6}t^2$
$= \frac{2(t-1)(t+1)}{6(1-t)} + \frac{1}{3(1-t)} + \frac{1}{6}t^2$
$= -\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3(1-t)} + \frac{1}{6}t^2$

Quindi $\int \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)}dt = \int -\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3(1-t)} + \frac{1}{6}t^2 dt$
$= -\frac{t^2}{6} - \frac{1}{3}t + \frac{t^3}{18} - \frac{1}{3}\log(1-t)$

$S(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-t)^2}\log(\frac{1}{1-t}) + \frac{t^3-3t^2-6t}{18(1-t)^2}$

l ultimo termine non è altro che:
$\frac{t^2}{18}\frac{t}{(1-t)^2} - \frac{t}{6}\frac{t}{(1-t)^2} - \frac{1}{3}\frac{t}{(1-t)^2}$ cioè
$\frac{t^2}{18}G(n-2) - \frac{t}{6}G(n-1) - \frac{1}{3}G(n)$