

# Binomiali

---

Si vuole generalizzare i binomiali sui numeri reali.

## Permutazioni

---

Per  $n$  oggetti in quanti modi si possono mescolare? Per :

$a_1, a_2, a_3, \dots$

Si indica con  $P_n$  = numero di permutazioni di lunghezza  $n$

Per esempio se  $n = 3$

$a_1, a_2, a_3$

$a_1, a_3, a_2$

$a_2, a_1, a_3$

...

$P_3 = 6$  in questo caso.

Aggiungendo un numero le permutazioni saranno

$$P_{n+1} = (n + 1)P_n$$

$$P_0 = P_1 = 1$$

Se si sviluppa fino a zero si ha:

$$(n + 1)P_n = (n + 1)n(n - 1) \dots P_0 = (n + 1)!$$

Quindi  $P_n = n!$

## Disposizioni

---

Per  $n$  oggetti quanti sono i gruppi dato  $k$ ?

Si indicano con  $D_{n,k}$  = numero di disposizioni di  $n$  oggetti in gruppi di  $k$

Per esempio  $n = 4$  e  $k = 2$  di  $a, b, c, d$  cioè  $D_{4,2} = 12$

$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)$

$$D_{n,k} = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)$$

# Combinazioni

---

Si scelgo tra  $n$  oggetti gruppi di  $k$  senza contare l'ordine.

$C_{n,k}$  = numero di combinazioni di  $k$  oggetti su  $n$  a disposizione

Si deve dividere per il numero di modi in cui si possono scambiare gli elementi nel gruppo, cioè le permutazioni di  $k$  cioè  $k!$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Le combinazioni si indicheranno con il binomiale:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 1}{k!(n-k)(n-k-1)\dots(1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## Proprietà dei binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

## Binomiale su reali

Se si guarda  $\frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$

$k$  deve essere per forza un intero ma il numeratore si può sviluppare anche sui reali

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!} \text{ con } r \text{ reale}$$

Si chiamano binomiali per la relazione che c'è tra le potenze dei binomi.

$$(a+b)^n = \sum^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

I binomi si possono anche scrivere come:

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

Si usano gli sviluppi di Taylor

$$f(z) = (1+z)^r = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

$$f(z) = (1+z)^r$$

$$f'(z) = r(1+z)^{r-1}$$

$$f''(z) = r(r-1)(1+z)^{r-2}$$

$$f^k(z) = r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)(1+z)^{r-k}$$

$$f^k(0) = r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(z) = (1+z)^r &= \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k \geq 0} \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)z^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} z^k \end{aligned}$$

Ad esempio

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \frac{1}{16}$$

## Proprietà per i reali

### Numeri Negativi

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \\ &= (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

Se ci da noia un numero negativo quindi si può trasformare

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

### Triangolo di Tartaglia

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Condizioni iniziali

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

n/k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Si può vedere che il triangolo è simmetrico e che alla riga n la somma degli elementi

corrisponde a  $2^n$ . La riga rappresenta il numero totale di sottoinsiemi in un insieme di n elementi, che è ovviamente  $2^n$ .

I numeri  $c_n = \binom{2n}{n}$  sono chiamati binomiali centrali. Ad esempio

Se  $2n = 4$  e  $n = 2$  il binomiale centrale è 6.

Per calcolare il binomio  $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$  si usano i coef. centrali.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\dots((\frac{2n-1}{2}))}{n!}$$

Si mette in evidenza il 2 dei denominatori poi si moltiplica per i pari sopra e sotto.

Si evidenzia i due dei pari.

$$\frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n!} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n (n!) 2^n (n!)}$$

$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!) (n!)} = \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}$$

In modo simile per altri valori sarà ad esempio:

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n}$$

$$\binom{3/2}{n} = \frac{(-1)^{n-3}}{4^n (2n-1)(2n-3)} \binom{2n}{n}$$