UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Relazione
di
Metodi Numerici per la Grafica

Di

Federico Schipani

A.A. 2017-2018

Indice

1 La Base delle B-Spline

Dato un vettore esteso dei nodi

$$\mathbf{t} = \left\{ \underbrace{t_0, \ldots, t_{k-2}}_{k-1}, \underbrace{t_{k-1}, \ldots, t_{n+1}}_{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_L}, \underbrace{t_{n+2}, \ldots, t_{n+k}}_{k-1} \right\}$$

con

$$\mathbf{t_0} \leq t_1 \leq \ldots t_{k+1} < t_k \cdots < t_{n+1} \leq t_{n+2} \leq \cdots \leq t_{n+k}$$

possiamo definire la base delle B-Spline su nodi semplici tramite la relazione ricorrente di *Cox - Boor*.

Definizione 1. *Le B-Spline di ordine* 1*, oppure grado* 0 *sono definite come:*

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & se\ t \in [t_i, t_{i+1}] i = 0, \ldots, n+k-1 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Altrimenti le B-Spline di ordine $r \leq k$ *sono definite ricorsivamente, per* $r > 1$*, come:*

$$N_{i,r}(t) = \omega_{i,r}(t) N_{i,r-1}(t) + [1 - \omega_{i+1,r}(t)] N_{i+1,r-1}$$

dove

$$\omega_{i,r}(t) = \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+r-1} - t_i}, & se\ t < t_{i+r-1} \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Le B-Spline possono anche essere definite su una partizione nodale la cui molteplicità m_i di un generico nodo τ_i è più alta di 1, quindi su nodi multipli. In questo caso il vettore esteso dei nodi diventa:

$$\mathbf{t} = \left\{ \underbrace{t_0, \ldots, t_{k-2}}_{k-1}, \underbrace{t_{k-1}, \ldots, t_{n+1}}_{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_1 \ldots, \tau_L}, \underbrace{t_{n+2}, \ldots, t_{n+k}}_{k-1} \right\}$$

con τ_i ripetuto a seconda della sua molteplicità m_i con $i = 1, \ldots, L-1$ in $\mathbf{t}$, e

$$\mathbf{t_0} \leq t_1 \leq \ldots t_{k+1} \leq t_k \cdots \leq t_{n+1} \leq t_{n+2} \leq \cdots \leq t_{n+k}$$

La definizione della base delle B-Spline di *Cox - De Boor* non cambia, ma bisogna stare attenti in quanto $\omega_{i,r}(t)$ può diventare nullo per qualche valore r a causa dei nodi multipli. In Codice 1 sono mostrate le due funzioni che calcolano le basi di *Cox - De Boor*, realizzate senza l'utilizzo delle funzioni del *Curve Fitting Toolbox*.

Codice 1: Calcolo delle basi di Cox De Boor

```
function [omega] = calc_omega (i, r, t_star, t)
    if t(i) == t(i+r-1)
        omega = 0;
        return;
    elseif t_star <= t(i+r-1)
        omega = (t_star-t(i)) / (t(i+r-1)-t(i));
        return;
    else
        omega = 0;
        return;
    end
```

```
12 end
13
14 function [y] = de_boor_basis (i, r, t, t_star, k)
15     if r == 1
16         if (t_star >= t(i) && t_star < t(i+1)) || ...
17             ((t_star >= t(i) && t_star <= t(i+1) && ...
18         t_star == t(end) && i == length(t)-k))
19
20             y = 1;
21             return;
22         else
23             y = 0;
24             return;
25         end
26     else
27         omega1 = calc_omega(i, r, t_star, t);
28         omega2 = (1 - calc_omega(i+1, r, t_star, t));
29         db1 = de_boor_basis(i, r-1, t, t_star, k);
30         db2 = de_boor_basis(i+1, r-1, t, t_star, k);
31         y = omega1 * db1 + omega2 * db2;
32         return;
33     end
34 end
```

La funzione `calc_omega` di Codice 1 è di facile comprensione. Dati in input l'indice i, l'ordine r, il punto in cui si vuole calcolare la spline *t_star* ed il vettore esteso dei nodi **t** si occupa di calcolare i valori $\omega_{i,r}(t)$. Il controllo iniziale `t`i `==` `t`$i + r - 1$ serve a gestire il caso di nodi multipli. In questa particolare condizione possiamo trovarci a gestire casi in cui il denominatore di $\frac{t-t_i}{t_{i+1-r}-t_i}$ è uguale a 0; quindi $\omega_{i,r}(t)$ dev'essere posto a 0. La seconda funzione in Codice 1 è `de_boor_basis` che effettua il calcolo delle basi delle B-Spline. La condizione booleana a riga 16, 17 e 18 serve a verificare che, nel caso in cui l'ordine della spline sia 1, ci si trovi all'interno dell'intervallo $[t_i, t_{i+1})$. Bisogna però fare attenzione al caso in cui il punto $t = t\_star$ di $N_{i,k}(t)$ si trovi nell'ultimo intervallo. Questo ha reso necessario introdurre un ulteriore controllo per fare in modo che venga preso in considerazione anche l'ultimo valore dell'ultimo intervallo.

1.1 Esempi di basi

L'esempio più immediato di base è quello dove il vettore esteso dei nodi è uniforme, in questo caso abbiamo preso $\mathbf{t} = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ e $k = 5$, otterremo quindi 5 funzioni di base visualizzate in Figura 1.

Cambiando il vettore esteso dei nodi **t** otteniamo basi per le B-Spline con regolarità diversa. In Figura 2 viene mostrato cosa succede tenendo fissato il numero di nodi e l'ordine e aumentato la molteplicità del nodo 4.

Un caso particolare della base delle B-Spline sono i polinomi di Bernstein. Questi ultimi si ottengono quando, dato $[a, b] = [\tau_0, \tau_L]$, la partizione nodale estesa è formata solamente da a ripetuto k volte e b ripetuto altrettante k volte. In Figura 3 è mostrato un esempio di base ottenuta con i polinomi di Bernstein di grado 5.

1.2 Proprietà della base delle B-Spline

La base delle B-Spline gode di diverse proprietà:

1. Supporto locale: $N_{i,r}(t) = 0$ se $t \notin [t_i, t_{i+r}]$
2. Non negatività: $N_{i,r}(t) \geq 0 \; \forall \; t \; \in \mathbb{R}$

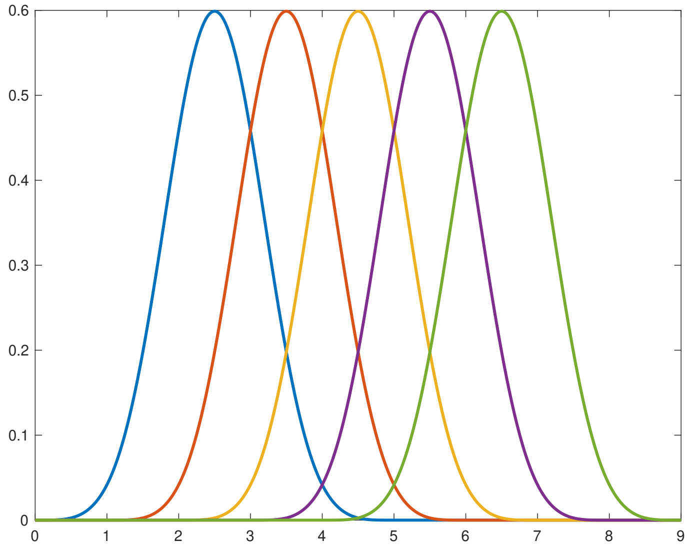


Figura 1: Base con $\mathbf{t} = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ e $k = 5$

3. Partizione dell'unità: $\sum_{i=0}^{n+k-r} = 1 \ \forall \ t \ \in [t_{r-1}, t_{n+1+k-r}]$ con $r = 1 \dots k$

Supporto locale Questa proprietà ci dice che la spline $N_{i,r}(t)$ è diversa da zero solamente nell'intervallo di nodi che va da t_i a t_{i+r}. Prendiamo ad esempio le B-Spline di ordine $k = 4$ e con $\mathbf{t} = [0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3]$. Le splines saranno le seguenti:

- $N_{1,4}(t) \neq 0 \ t \in [t_1 = 0, t_5 = 1]$
- $N_{2,4}(t) \neq 0 \ t \in [t_2 = 0, t_6 = 2]$
- $N_{3,4}(t) \neq 0 \ t \in [t_3 = 0, t_7 = 3]$
- $N_{4,4}(t) \neq 0 \ t \in [t_4 = 1, t_8 = 3]$
- $N_{5,4}(t) \neq 0 \ t \in [t_5 = 1, t_9 = 3]$

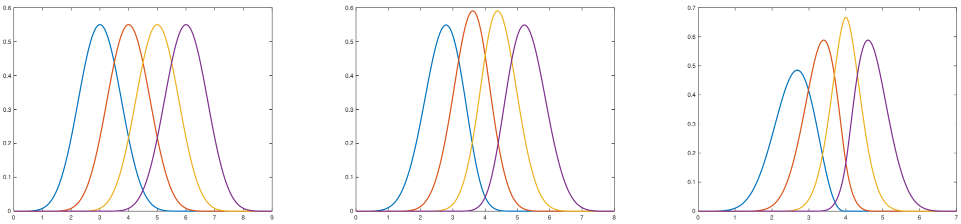
Facendo un plot di questa base possiamo vedere come la proprietà di supporto locale sia verificata, in particolare in Figura 4 sono mostrate tutte le splines della base, mentre in Figura 5 è mostrato un dettaglio della $N_{1,4}(t)$ per $t = [0.85, 1.15]$.

Non negatività In questo caso la proprietà è facilmente verificabile sfruttando uno qualunque dei plot mostrati in precedenza, ad esempio possiamo vedere che in Figura 4 nessuna delle $N_{i,r}(t)$ è negativa.

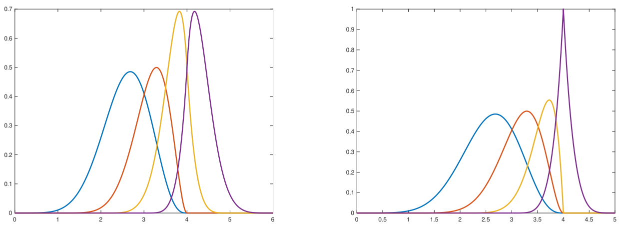
Partizione dell'unità BONA

2 Curve B-Spline

A partire dalla base delle B-Spline è possibile realizzare delle curve. Dati



(a) $\mathbf{t} = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ (b) $\mathbf{t} = [0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8]$ (c) $\mathbf{t} = [0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7]$



(d) $\mathbf{t} = [0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6]$ (e) $\mathbf{t} = [0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5]$

Figura 2: Base con nodi multipli di ordine 6

2.1 Proprietà delle curve B-Spline

2.2 Curve Chiuse

3 Superfici di Bézier

3.1 Proprietà delle superfici di Bézier

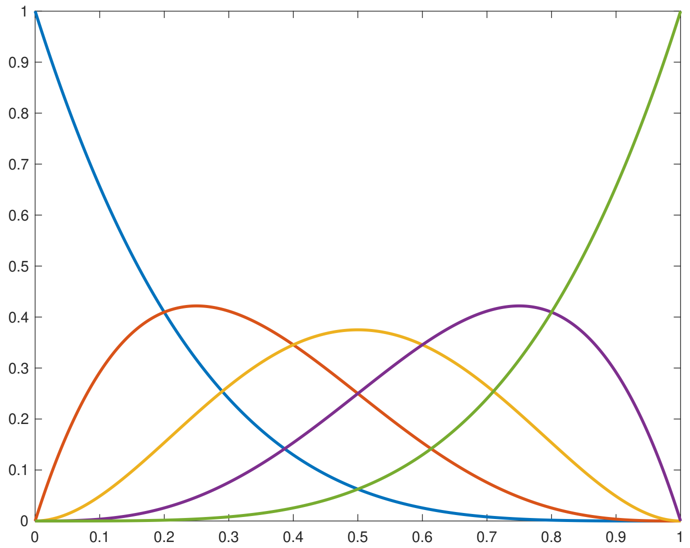


Figura 3: Base di Bernstein di ordine 5

Figura 4: Supporto locale

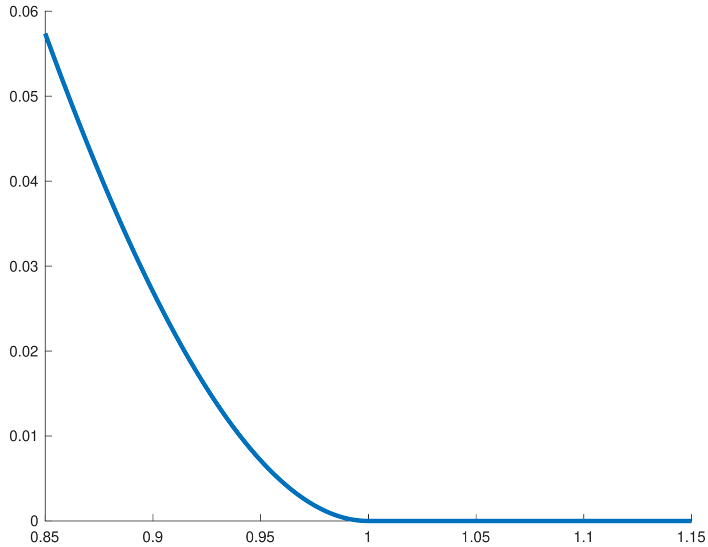


Figura 5: Dettaglio della prima splines $N_{1,4}(t)$ per $t = [0.85, 1.15]$

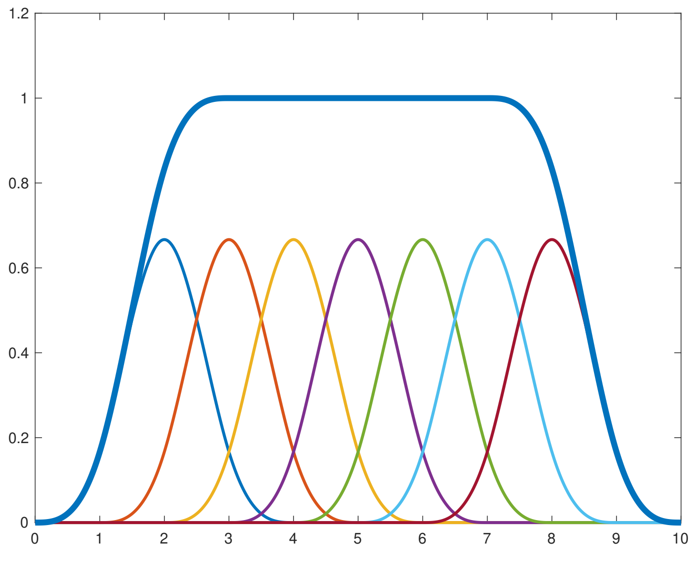


Figura 6: Partizione dell'unità con nodi uniformi

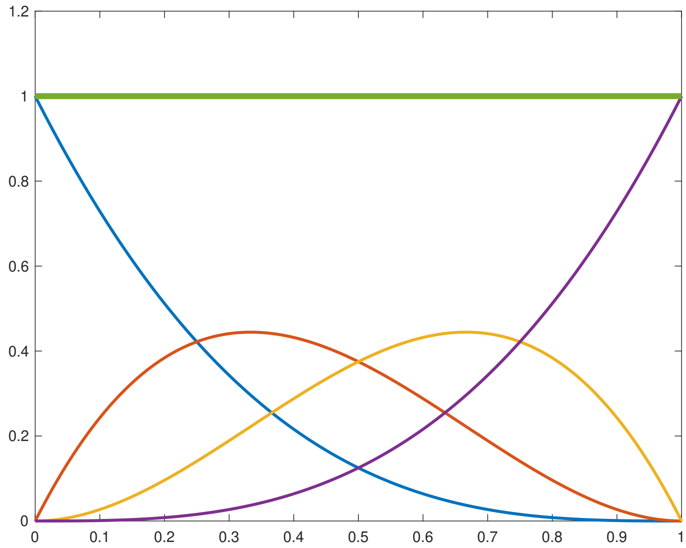


Figura 7: Partizione dell'unità nella base di Bernstein

Figura 8: Partizione dell'unità con partizione nodale *clamped*