UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Relazione
di
Metodi Numerici per la Grafica

Di

Federico Schipani

A.A. 2017-2018

Indice

1 La Base delle B-Spline

Dato un vettore esteso dei nodi

$$\mathbf{t} = \left\{ \underbrace{t_0, \dots, t_{k-2}}_{k-1}, \underbrace{t_{k-1}, \dots, t_{n+1}}_{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_L}, \underbrace{t_{n+2}, \dots, t_{n+k}}_{k-1} \right\}$$

con

$$\mathbf{t_0} \leq t_1 \leq \dots t_{k+1} < t_k \dots < t_{n+1} \leq t_{n+2} \leq \dots \leq t_{n+k}$$

possiamo definire la base delle B-Spline su nodi semplici tramite la relazione ricorrente di *Cox-De Boor*.

Definizione 1. *Le B-Spline di ordine* 1*, oppure grado* 0 *sono definite come:*

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & se\ t \in [t_i, t_{i+1}] i = 0, \dots, n+k-1 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Altrimenti le B-Spline di ordine $r \leq k$ *sono definite ricorsivamente, per* $r > 1$*, come:*

$$N_{i,r}(t) = \omega_{i,r}(t) N_{i,r-1}(t) + [1 - \omega_{i+1,r}(t)] N_{i+1,r-1}$$

dove

$$\omega_{i,r}(t) = \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+r-1} - t_i}, & se\ t < t_{i+r-1} \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Le B-Spline possono anche essere definite su una partizione nodale la cui molteplicità m_i di un generico nodo τ_i è più alta di 1, quindi su nodi multipli. In questo caso il vettore esteso dei nodi diventa:

$$\mathbf{t} = \left\{ \underbrace{t_0, \dots, t_{k-2}}_{k-1}, \underbrace{t_{k-1}, \dots, t_{n+1}}_{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_1 \dots, \tau_L}, \underbrace{t_{n+2}, \dots, t_{n+k}}_{k-1} \right\}$$

con τ_i ripetuto a seconda della sua molteplicità m_i con $i = 1, \dots, L-1$ in $\mathbf{t}$, e

$$\mathbf{t_0} \leq t_1 \leq \dots t_{k+1} \leq t_k \dots \leq t_{n+1} \leq t_{n+2} \leq \dots \leq t_{n+k}$$

. La definizione della base delle B-Spline di *Cox-De Boor* non cambia, ma bisogna stare attenti in quanto $\omega_{i,r}(t)$ può diventare nullo per qualche valore r a causa dei nodi multipli.