Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2020/2021

Тема № СИ21-П-10

13.06.2021

София

Изготвил: Искра Николова Божкова

Ф. No. 62410

Група 1

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по "Диференциални уравнения и приложения"
спец. Софтуерно инженерство,
2 курс, летен семесътр, уч. год. 2020-2021

Име...,
Ф.No..........., група ....

Тема СИ21-П-10. Дадена е системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = x(x-1) \\ \dot{y} = 2x - y. \end{array} \right.$$

1. Намерете нейните равновесни точки. Напишете линейното приближение на системата в околност на една от намерените равновесни точки.

2. Начертайте фазов портрет на написанта линейна система в подточка (1). Към всяка една от изобразените фазови криви (без равновесната точка) начертайте по един тангенциален вектор. Маркирайте със символа звезда положението на равновесие.

2. Решение на Задачата

2.1. Теоретична част

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1) \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

Намиране равновесните точки:

$$\begin{cases} x(x-1)=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \longrightarrow \quad x=0 \quad 2.0-y=0 \quad y=0 \qquad\qquad x=1 \quad 2.1-y=0 \quad y=2$$

=> Равновесните точки на дадената система са: $(0;0)$ и $(1;2)$

Линейното приближение на дадената система в околност на равнов. точка (a,b) е:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}, \text{ където } J(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = x^2 - x \quad => \quad f'_x = 2x-1 \qquad f'_y = 0$$
$$g(x,y) = 2x - y \qquad\quad g'_x = 2 \qquad g'_y = -1$$

Следователно $J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

① За точката $(0;0)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} => \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

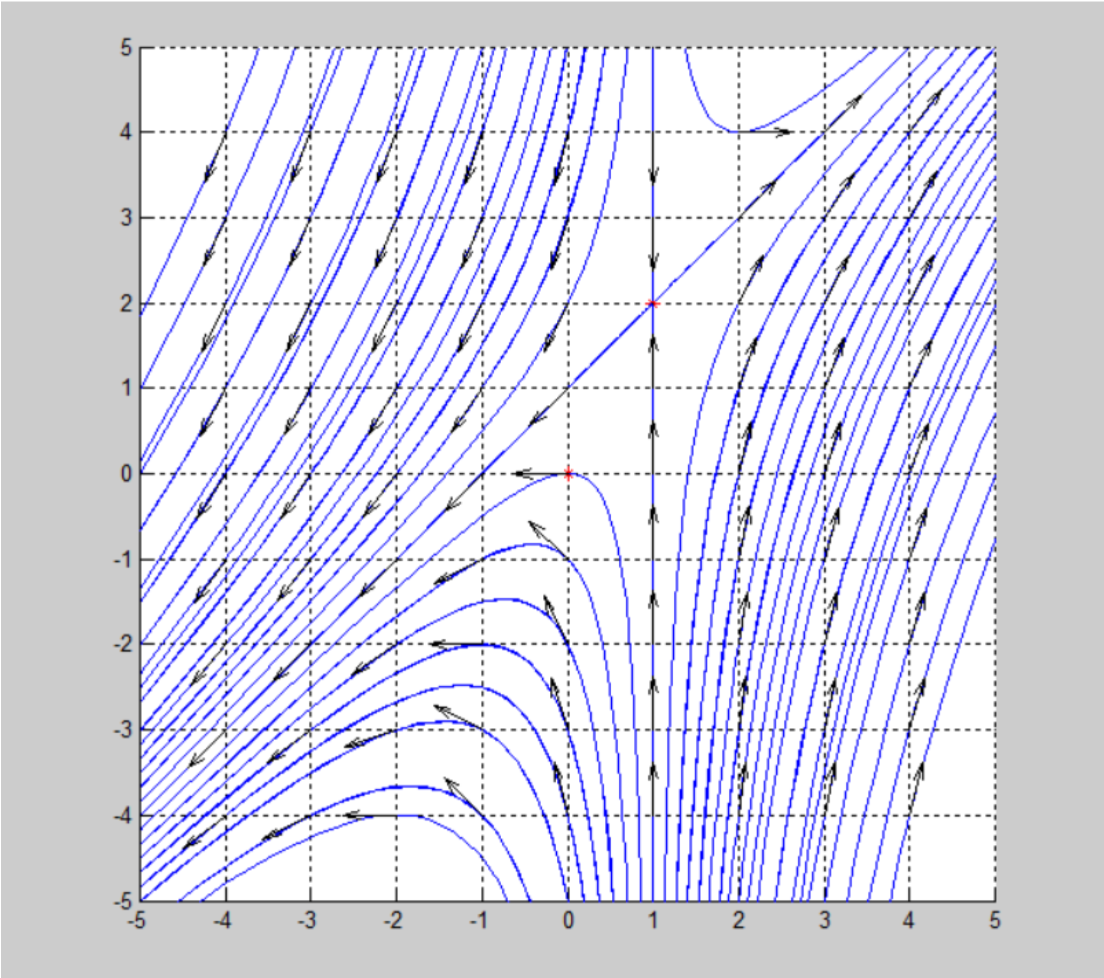
② За точката $(1;2)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} => \begin{cases} \dot{x} = x-1 \\ \dot{y} = 2(x-1) - y + 2 = \\ \quad = 2x - y \end{cases}$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

```
function tema10
    function z=ff(t,y)
       z=[y(1) - 1; 2*y(1)-y(2)];
    end

    clf;clc
    tmax=5;
    hold on
    grid on
    daspect([1 1 1])

    x=-4:1:4
    y=-4:1:4

    [X,Y]=meshgrid(x,y);

    %chertaem ravnovesnite tochki na sistemata
    plot(0,0,'r*', 1, 2, 'r*');

    %chertaem fazoviq portret
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
            [T,Z]=ode45(@ff, [0,tmax], [X(i,j),Y(i,j)]);
            [T1,Z1]=ode45(@ff,[0, -tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
            plot(Z(:,1),Z(:,2),Z1(:,1),Z1(:,2), 'b');
            axis([-5,5,-5,5]);
        end
    end

    %tangencialni vektori
    DX=X-1;
    DY=2*X-Y;
    D=sqrt(DX.^2+DY.^2);
    quiver(X,Y,DX./D,DY./D,0.5,'k')
end
```

2.3. Графики (включително от анимация)



2.4. Коментари към получените с MatLab резултати

От получения чертеж можем да видим, че равновесните точки наистина са (0,0) и (1,2). Те са маркирани с червена звезда. Можем да определим и какъв е техният тип – точката (0,0) е асимптотично устойчива, а пък (1, 2) е неустойчива:

$$* \text{т.}(0;0) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = -1 < 0$ -> асимптотично устойчива

$$* \text{т.}(1;2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$\lambda = 1 \quad \lambda = -1$

=> неустойчива

На графиката с черен цвят са изобразени и тангенциалните вектори към всяка от фазовите криви.