# Modelo matemático para o problema do caixeiro viajante com quotas, múltiplos passageiros, transporte incompleto e delay de permanência

Agosto de 2017

Notação:

1. $N$ é o conjunto de $n$ vértices (cidades)
2. $M$ é conjunto de arestas (vias)
3. $L$ é o conjunto de passageiros
4. $org(l)$ é a origem do passageiro $l \in L$
5. $dst(l)$ é o destino ao qual o passageiro $l \in L$ quer ir (fornecido pela instância)
6. $L_i \subset L$ é o conjunto de passageiros que desejam sair do vértice $i \in N$
7. $s$ é o vértice origem do tour

Variáveis:

1. $f_{lj} = 1$ se o passageiro $l \in L$ desembarca em $i \in N$. 0 caso contrário
2. $v_{ij}^{l} = 1$ se o passageiro $l \in L$ trafega por $(i, j) \in M$. 0 caso contrário
3. $x_{ij} = 1$ se o caixeiro trafega por $(i, j) \in M$. 0 caso contrário
4. $q_l = 1$ se $l \in L$ é embarcado. 0 caso contrário
5. $p_i = 1$ se o caixeiro coleta o bônus em $i \in N$. 0 caso contrário.

Constantes (fornecidas pela instância):

1. $c_{ij}$ é o custo de trafegar pela aresta $(i, j) \in M$
2. $h_{lj}$ é a penalidade de deixar o passageiro $l \in L$ em $j \in N$. Por definição, a instância garante que $h_{lj} = 0$ caso $dst(l) = j$.

3. $g_i$ é daylay de captura do bônus no vértice $i \in N$
   (a) O caixeiro pode capturar o bônus em $i$ mesmo que $g_i = 0$.
4. $y_{ij}$ é o tempo de trafegar pela via $(i,j) \in M$
5. $b_i$ é o bônus do vértice $i \in N$
6. $w_l$ é o tempo máximo que o passageiro $l \in L$ está disposto a ficar no carro
7. $t_l$ é a taxa máxima que passageiro $l \in L$ está apto a pagar
8. $R$ é capacidade do carro
9. $K$ é a quota mínima do caixeiro

Minimizar:

$$Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \alpha_{ij} + \sum_{l \in L} \sum_{j=1}^{n} h_{lj} f_{lj} \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in N \setminus \{s\} \tag{2}$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} x_{ji} \leq 1 \qquad \forall j \in N \setminus \{s\} \tag{3}$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{s\}} x_{si} = 1 \tag{4}$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{s\}} x_{is} = 1 \tag{5}$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} x_{ij} - \sum_{i \in N \setminus \{j\}} x_{ji} = 0 \qquad \forall j \in N \setminus \{s\} \tag{6}$$

$$u_i - u_j + (n-1) x_{ij} \leq n - 2 \qquad 2 \leq i, j \leq n, i \neq j \tag{7}$$

$$\sum_{(i,j) \in M} p_i b_i x_{ij} \geq K \tag{8}$$

$$\sum_{(i,j) \in M} v_{ij}^l y_{ij} + \sum_{(i,j) \in M} p_i g_i v_{ij}^l \leq w_l \qquad \forall l \in L \tag{9}$$

$$\sum_{l \in L} v_{ij}^l \leq R x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M \tag{10}$$

$$\sum_{j \in N} f_{lj} \leq 1 \qquad \forall l \in L \tag{11}$$

$$\sum_{(i,j) \in M} v^l_{ij} c_{ij} \alpha_{ij} \leq t_l \qquad \forall l \in L \tag{12}$$

NOVAS RESTRIÇÕES:

$$\alpha_{ij} * \left(1 + \sum_{l \in L} v^l_{ij}\right) = 1 \qquad (i,j) \in M \tag{13}$$

$$f_{li} = 0 \qquad \forall l \in L \text{ e } i = org(l) \tag{14}$$

$$v^l_{ij} \leq q_l \qquad \forall l \in L \text{ e } (i,j) \in M \tag{15}$$

$$\sum_{i \in N \backslash \{j\}} v^l_{ij} - \sum_{i \in N \backslash \{j\}} v^l_{ji} = f_{lj} \qquad \forall l \in L \text{ e } j \in N \backslash org(l) \tag{16}$$

$$\sum_{j \in N} f_{lj} = q_l \qquad \forall l \in L \tag{17}$$

$$\sum_{j \in N} v^l_{ij} = q_l \qquad \forall l \in L \text{ e } i = org(l) \tag{18}$$

$$f_{li} + \sum_{j \in N} v^l_{ij} \leq 1 \qquad \forall l \in L \text{ e } \forall i \in N \tag{19}$$

$$\sum_{i \in N} v^l_{ij} = 0 \qquad \forall l \in L \text{ e } j = org(l) \tag{20}$$

$$\sum_{j \in N \backslash \{s\}} v^l_{js} = f_{ls} \qquad \forall l \in L \tag{21}$$

$$\sum_{l \in L_s} q_l \leq \sum_{l \in L} \sum_{j \in N} v^l_{sj} \tag{22}$$

$$1 \leq u_i \leq n-1 \qquad \forall i \in N \tag{23}$$

NOVA RESTRIÇÃO (impede sequestro):

$$\sum_{j \in N} v^l_{ij} = 0 \qquad \forall l \in L \text{ e } i = dst(l) \tag{24}$$

As restrições (2) e (3) garantem que o tour do caixeiro se dá num subconjunto de vértices. As restrições (4) e (5) obrigam que o tour comece e termine em $s$. A restrição (6) diz que o caixeiro deve sempre sair de uma cidade que ele entrou (deferente de $s$). A (7) impede subtour. A restrição (8) calcula a quota adquirida pelo caixeiro e obriga que o total seja pelo menos $K$. As restrições (9) garantem que cada passageiro permaneça no carro no máximo $w_l$ unidades de tempo. (10) acopla o trajeto dos passageiros ao do caixeiro, bem como garante que a capacidade $R$ máxima do carro não seja ultrapassada. (11) garante que nenhum passageiro desembarque em mais de um vértice. (12) garante o limite máximo dos gastos dos passageiros. (13) assegura o calculo da taxa de rateio. (14) impede o passageiro de desembarcar no vértice em que ele embarcou. (15) assegura que o passageiro só trafega se ele embarcar. (16) garante que, caso o passageiro chego num vértice $j \in N$, mas não saia de tal $j$, então, ele desembarca em $j$. Além disso, (16) garante que, caso o passageiro chegue em $j$ e continue seu trajeto depois de $j$, então ele não desembarcou em $j$. ANTIGA RESTRIÇÃO D. (17) garante que o passageiro desembarca, se, e somente se, ele embarca. (18) garante que o passageiro que embarcou em $i \in N$, deve prosseguir embarcado em alguma aresta $(i,j) \in M$. (19) garante que o passageiro que desembarcou em $i$, não prossegue embarcado depois de $i$. (20) garante que nenhum passageiro, nem mesmo os que jamais embarcam, deve trafegar pela aresta $(i,j) \in M$, onde $j$ é a aresta de origem do passageiro. (21) garante que o passageiro deve desembarcar caso ele chegue em $s$ (fim do tour). (22) garante que apenas os passageiros que saem de $s$ podem embarcar em $s$.

# 1 Linearização

SUBSTITUA (8) POR:

$$\sum_{(i,j)\in M} b_i \theta_{ij} \geq K \tag{25}$$

$$\theta_{ij} = x_{ij} - \beta_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M \tag{26}$$

$$\beta_{ij} \leq 1 - p_i \qquad \forall (i,j) \in M \tag{27}$$

$$\beta_{ij} \geq x_{ij} - p_i \qquad \forall (i,j) \in M \tag{28}$$

$$\theta_{ij} \in \{1, 0\} \qquad \forall (i,j) \in M \tag{29}$$

$$\beta_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in M \tag{30}$$

SUBSTITUA (9) POR:

$$\sum_{(i,j)\in M} v_{ij}^l y_{ij} + \sum_{(i,j)\in M} g_i \mu_{ij}^l \leq w_l \qquad \forall l \in L \tag{31}$$

$$\mu_{ij}^l = p_i - \zeta_{ij}^l \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{32}$$

$$\zeta_{ij}^{l} \leq 1 - v_{ij}^{l} \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{33}$$

$$\zeta_{ij}^{l} \geq p_i - v_{ij}^{l} \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{34}$$

$$\mu_{ij}^{l} \in \{1, 0\} \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{35}$$

$$\zeta_{ij}^{l} \geq 0 \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{36}$$

SUSBSTITUA (12) POR:

$$\sum_{(i,j) \in M} c_{ij} \psi_{ij}^{l} \leq t_l \qquad \forall l \in L \tag{37}$$

$$\psi_{ij}^{l} \leq v_{ij}^{l} \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{38}$$

$$\psi_{ij}^{l} \leq \alpha_{ij} \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{39}$$

$$\psi_{ij}^{l} \geq \alpha_{ij} - 1 + v_{ij}^{l} \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{40}$$

$$\psi_{ij}^{l} \geq 0 \qquad \forall l \in L \forall (i,j) \in M \tag{41}$$

SUBSTITUA (13) POR:

$$\alpha_{ij} + \sum_{l \in L} \psi_{ij}^{l} = 1 \qquad \forall (i,j) \in M \tag{42}$$