Análise experimental de modelos matemáticos propostos para o problema da Árvore geradora multiobjetivo baseada no operador *OWA*

Profª. Drª. Elizabeth Ferreira Gouvêa Goldbarg
Islame Felipe da Costa Fernandes

Departamento de Informática e Matemática Aplicada - DIMAp
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Natal, 05 setembro de 2017

Agenda

Introdução

1. Abordaremos a Árvore Geradora Multiobjetivo com critério *OWA*.
2. Objetivos do trabalho: implementar, experimentar e analisar os resultados dos modelos de programação linear de Galand e Spanjaard (2012) e o de Fernández et al. (2017)
3. Serão relatados experimentos para 39 grafos completos, de 5 a 35 vértices, das classes *correlated* e *anti-correlated* para 3 e 4 objetivos.
4. O presente trabalho justifica-se, pois, diante da proposta de conduzir novos experimentos em classes de instâncias *correlated* e *anti-correlated* conforme proposto por Knowles (2002).

Notação Importante

1. $G(V,E)$, $|V| = n$, $|E| = m$
2. $P = \{1, 2, ..., p\}$ um conjunto com p objetivos
3. $c_e = (c_e^1, ..., c_e^p)^T \in \Re^p$ vetor de custos associado a cada aresta $e \in E$
4. Seja $C \in R^{p \times m}$ tal que:

$$C = \begin{pmatrix} c_{e_1}^1 & c_{e_2}^1 & \dots & c_{e_m}^1 \\ c_{e_1}^2 & c_{e_2}^2 & \dots & c_{e_m}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{e_1}^p & c_{e_2}^p & \dots & c_{e_m}^p \end{pmatrix}$$

5. $X \subseteq \{0, 1\}^m$ o conjunto de árvores geradoras de G
6. $\tau \in X$ um vetor, de dimensão m;
7. $Z \subseteq \Re^p$ o espaço objetivo
8. $f : X \to Z$ tal que $f(\tau) = C\tau$
9. $f_i(\tau) = C_i\tau$

O problema da *MoST*

Vocês já sabem que...

O problema da *MoST* visa encontrar o conjunto de árvores eficientes $X^* \subseteq X$, dito conjunto Pareto ótimo, com $f(X^*) \subseteq Z$, chamada Fronteira de Pareto.

O problema da *OWA-ST*

1. *Ordered Weighted Average* (*OWA*)
2. Seja $\forall \tau \in X, f_\sigma(\tau) \in Z$ o vetor que permuta os custos componentes do vetor $f(\tau)$ tal que $f_{\sigma_1}(\tau) \geq ... \geq f_{\sigma_p}(\tau)$.
3. Seja ainda $\omega \in \Re^p$ um vetor de pesos não negativos tais que $\sum_{i \in P} \omega_i = 1$.
4. O problema *OWA-ST* visa encontrar $\tau \in X$ que minimiza o operador $OWA_\omega(\tau) = \omega^T f_\sigma(\tau)$.
5. O problema *OWA-ST* é NP-Difícil (GALAND; SPANJAARD, 2012; FERNÁNDEZ et al., 2017)

Estado da arte do operador de *OWA*

1. Vocês já conhecem boa parte do estado da arte da *MoST*
2. O *OWA* foi introduzido por Yager (1988) e pode ser adotado como preferência em qualquer problema multicritério
3. Trabalhos de Ogryczak e Śliwiński (2003), Fernández, Pozo e Puerto (2014) e Chassein e Goerigk (2015)
4. Operador *OWA fuzzy* aplicado a classificadores: Wang, Zhang e Qian (2011) e Ramentol et al. (2015)
5. Operador *OWA fuzzy* em *engine* de pesquisas em rede De e Diaz (2011)

Modelo de Galand e Spanjaard (2012)

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a } \textit{i-ésima} \text{ função objetivo ocupa posição } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Min \sum_{j \in P} \omega_j \left(\sum_{i \in P} r_{ij} \right) \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in P} z_{ij} = 1 \quad \forall j \in P \tag{2}$$

$$\sum_{j \in P} z_{ij} = 1 \quad \forall i \in P \tag{3}$$

$$\sum_{i \in P} r_{ij} \geq \sum_{i \in P} r_{ij+1} \quad j \in P : j < p \tag{4}$$

$$r_{ij} \leq M z_{ij} \quad i, j \in P \tag{5}$$

$$\sum_{j \in P} r_{ij} = C_i \tau \quad i \in P \tag{6}$$

$$\tau \in X \tag{7}$$

$$r_{ij} \geq 0 \quad i, j \in P \tag{8}$$

$$z \in \{0, 1\}^{p \times p} \tag{9}$$

Modelo de Fernández et al. (2017)

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a } \textit{i-ésima} \text{ função objetivo ocupa posição } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Min \sum_{j \in P} \omega_j \theta_j \tag{10}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in P} z_{ij} = 1 \quad \forall j \in P \tag{11}$$

$$\sum_{j \in P} z_{ij} = 1 \quad \forall i \in P \tag{12}$$

$$C_i \tau \leq \theta_j + M \left(1 - \sum_{k \geq j} z_{ik} \right) \quad i, j \in P \tag{13}$$

$$\theta_j \geq \theta_{j+1} \quad j \in P : j < p \tag{14}$$

$$\tau \in X \tag{15}$$

$$\theta_j \geq 0 \quad j \in P \tag{16}$$

$$z \in \{0, 1\}^{p \times p} \tag{17}$$

Modelo de MST de Magnanti e Wong (1984)

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } (i,j) \in E \text{ é utilizada para transporte do fluxo} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

x_{ij} : é a quantidade de fluxo transportado do nó i ao nó j pela aresta $(i,j) \in E$.

$$Min \sum_{\{(i,j)\in E\}} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{\{j:(1,j)\in E\}} x_{1j} = n - 1 \tag{18}$$

$$\sum_{\{i:(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{k:(j,k)\in E\}} x_{jk} = 1 \quad \forall j = 2, 3, ..., n \tag{19}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \tag{20}$$

$$(n-1) y_{ij} \geq x_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \tag{21}$$

$$y_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \tag{22}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in E \tag{23}$$

Instâncias

1. 39 instâncias
2. 5 a 35 vértices
3. 3 e 4 objetivos
4. 3 grupos de instâncias: $n.1$, $n.2$, $n.3$
5. Classes: *correlated* e *anti-correlated* (KNOWLES, 2002)
    1. *correlated* Coeficientes dos respectivos grupos: 0.2, 0.5 e 0.85
    2. *anti-correlated* Coeficientes dos respectivos grupos: -0.2, -0.5 e -0.85
6. Critério do operador *OWA*
    1. Determinar $k \in P$ e gerar os pesos tais que $\omega_1 = ... = \omega_k = 1/k$ e $\omega_{k+1} = ... = \omega_p = 0$.

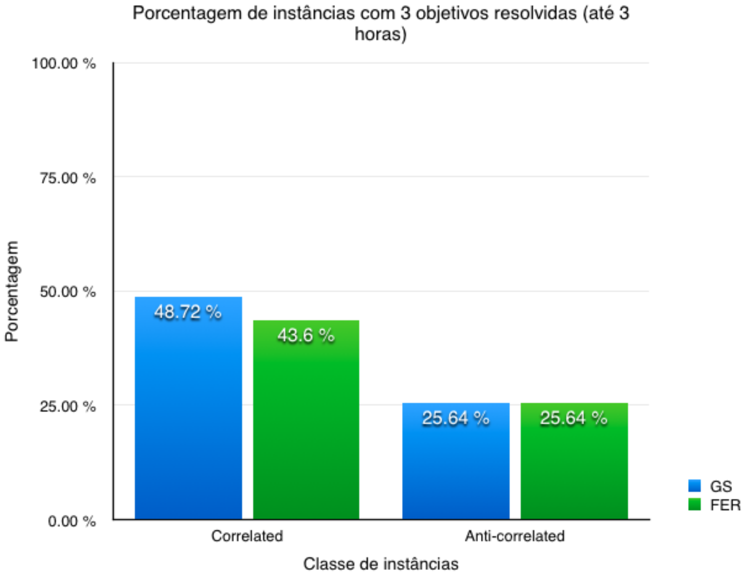
Metodologia dos experimentos

1. Limite de tempo: 10800 segundos;
2. Observação:
   1. Tempo;
   2. *gap* entre a solução relaxada inicial e a melhor solução encontrada

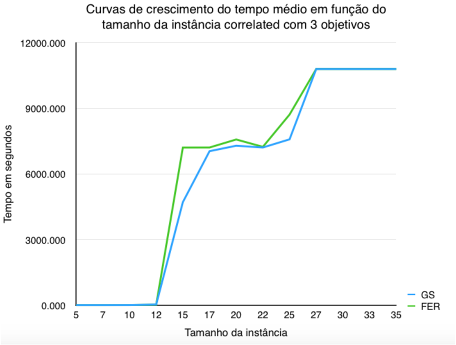
$$100(z^* - z_R)/z_R \tag{24}$$

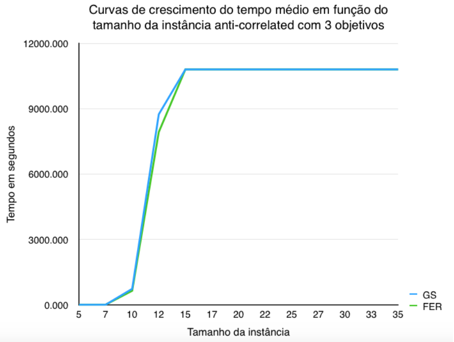
   3. Quantidade de nós do *Branch-and-bound*

Resultados para 3 objetivos : Limite de 3 horas

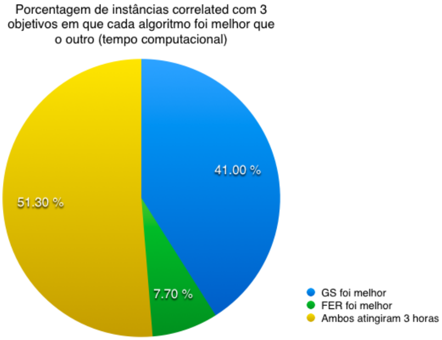


Resultados para 3 objetivos : Curva de crescimento do tempo

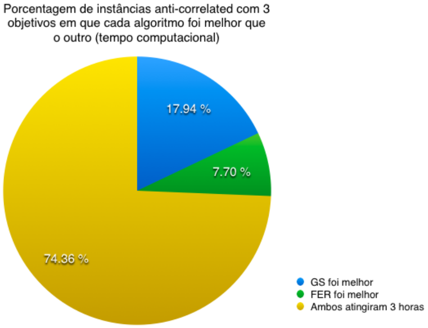




Resultados para 3 objetivos : Tempo computacional

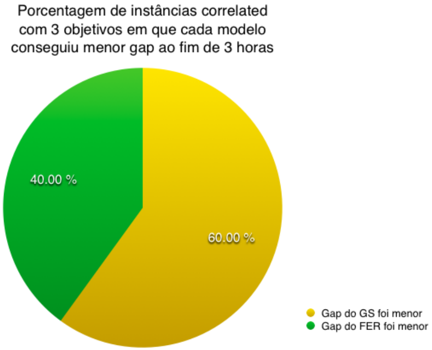


Aqui houve ainda 5.1% de instâncias correlated onde FER atingiu 3 horas, mas GS não atingiu. Todas as instâncias em que GS atingiu 3 horas, FER também atingiu.

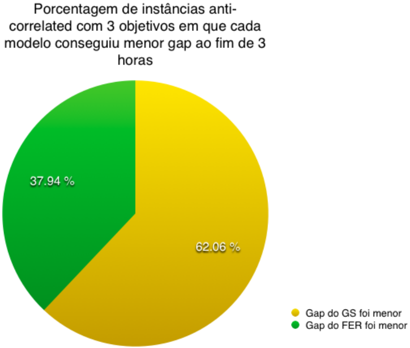


Ambos os modelos atingiram o tempo limite em exatamente as mesmas instâncias

Resultados para 3 objetivos : Gap da solução inicial

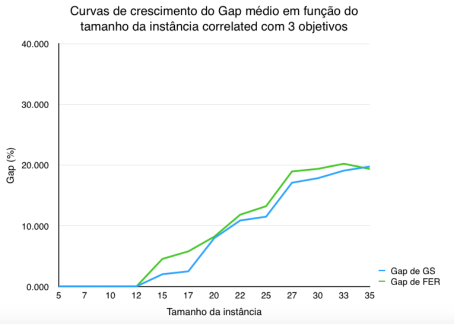


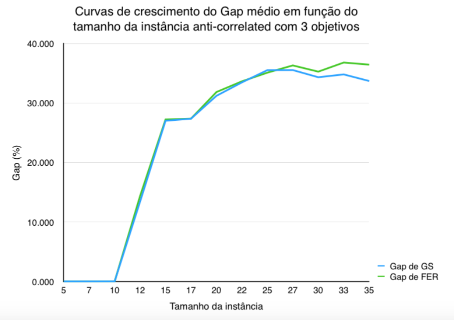
Este cálculo foi feito em cima dos 51.3 % das instâncias correlated em que ambos atingiram 3 horas



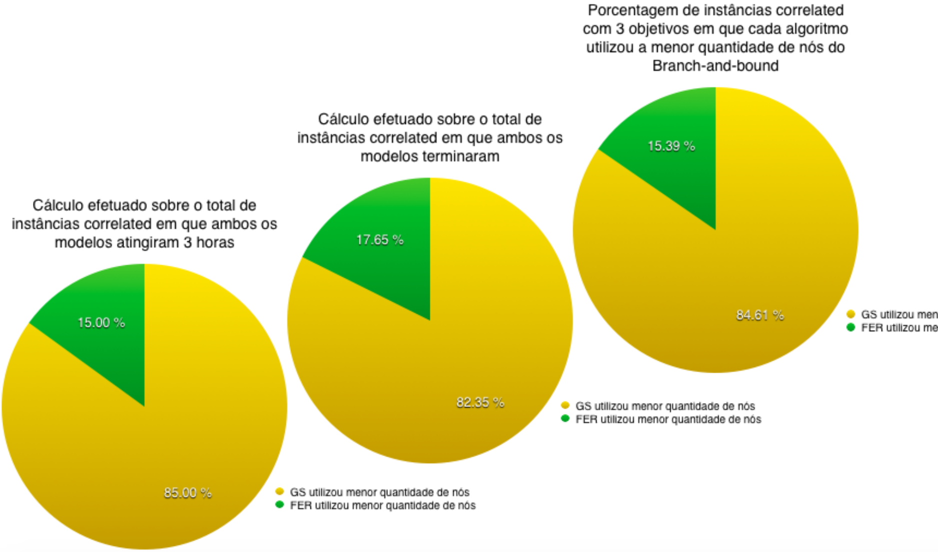
Este cálculo foi feito em cima dos 74.36 % das instâncias anti-correlated em que ambos atingiram 3 horas

Resultados para 3 objetivos : Gap da solução inicial

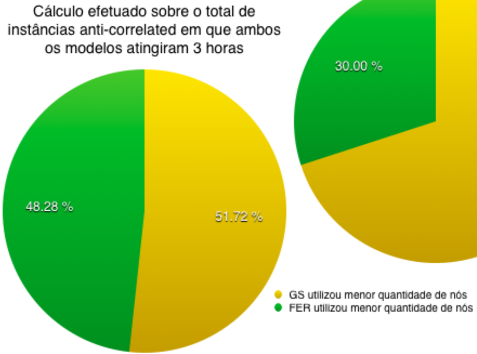


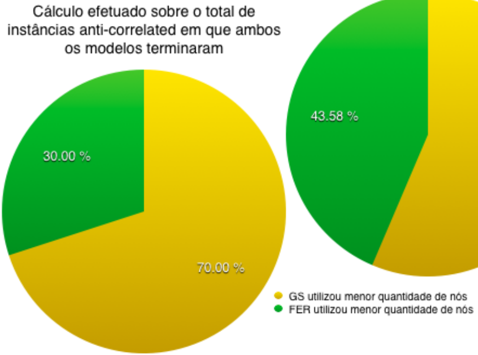


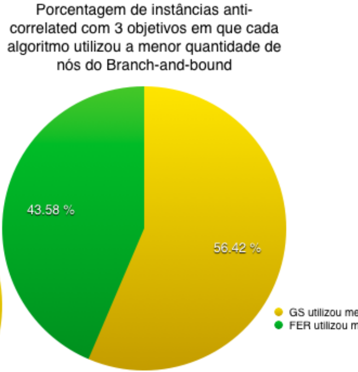
Resultados para 3 objetivos : Quantidade de nós do B&B



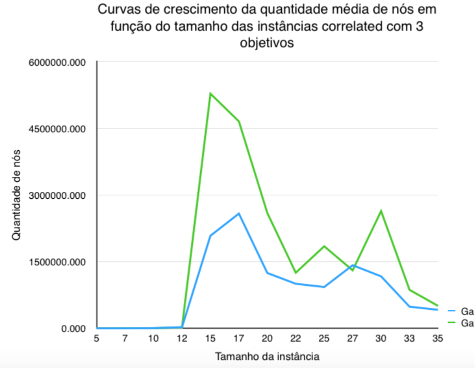
Resultados para 3 objetivos : Quantidade de nós do B&B

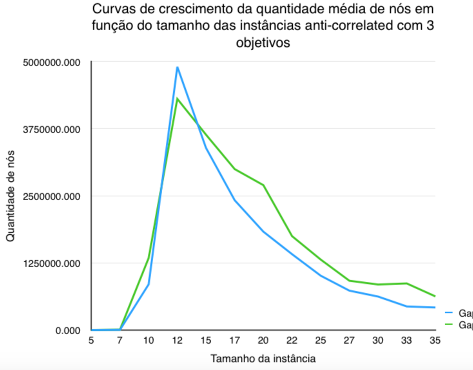




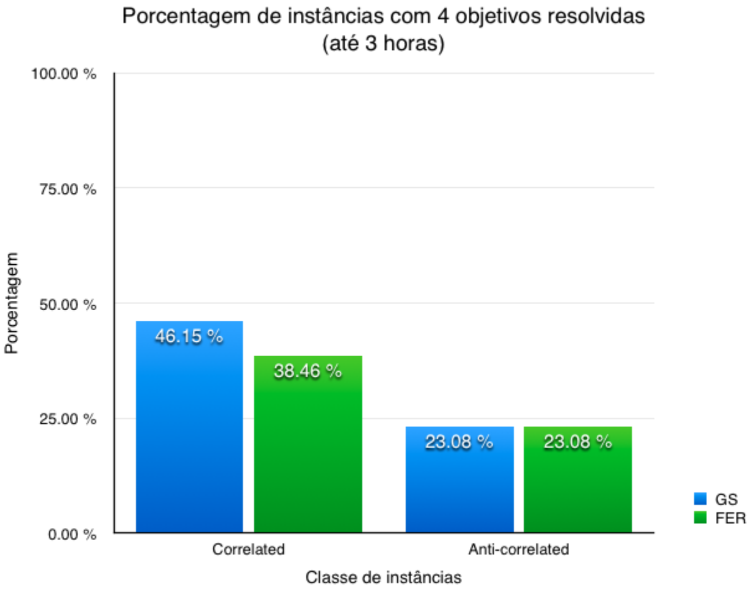


Resultados para 3 objetivos : Quantidade de nós do B&B

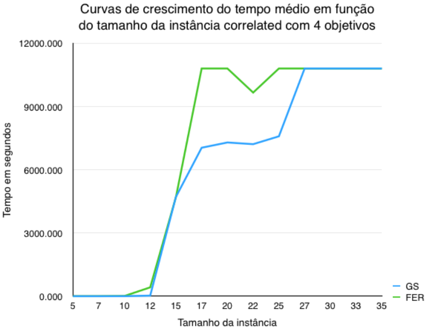


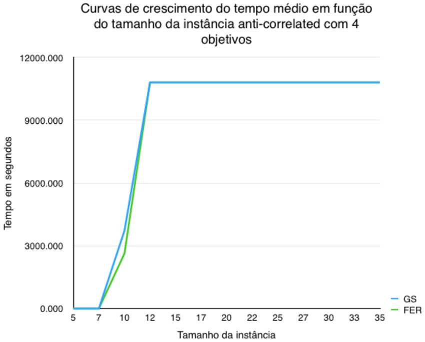


Resultados para 4 objetivos : Limite de 3 horas

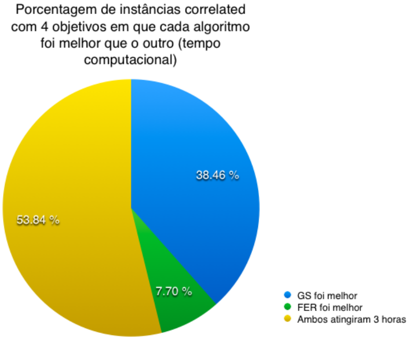


Resultados para 4 objetivos : Curva de crescimento do tempo

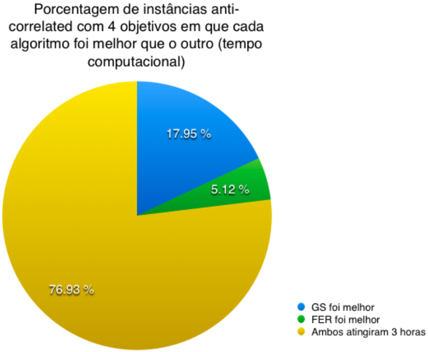




Resultados para 4 objetivos : Tempo computacional



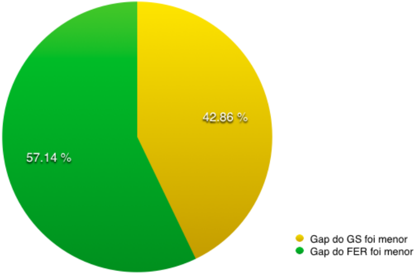
Aqui houve ainda 7.7% de instâncias correlated onde FER atingiu 3 horas, mas GS não atingiu. Todas as instâncias em que GS atingiu 3 horas, FER também atingiu.



Ambos os modelos atingiram o tempo limite em exatamente as mesmas instâncias

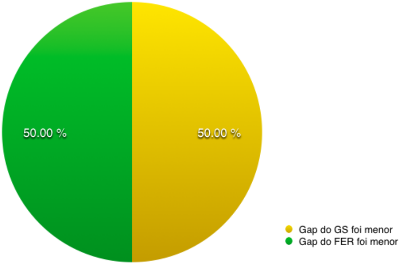
Resultados para 4 objetivos : Gap da solução inicial

Porcentagem de instâncias correlated com 4 objetivos em que cada modelo conseguiu menor gap ao fim de 3 horas



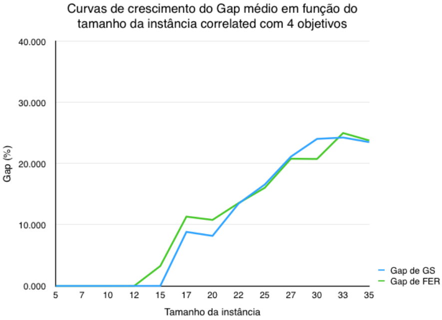
Este cálculo foi feito em cima dos 53,85 % das instâncias correlated em que ambos atingiram 3 horas

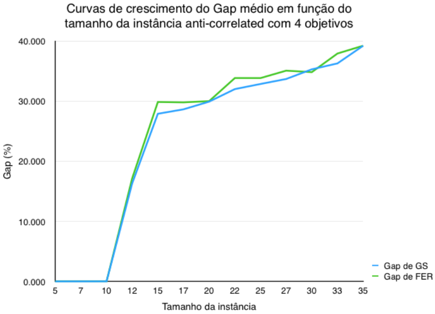
Porcentagem de instâncias anti-correlated com 4 objetivos em que cada modelo conseguiu menor gap ao fim de 3 horas



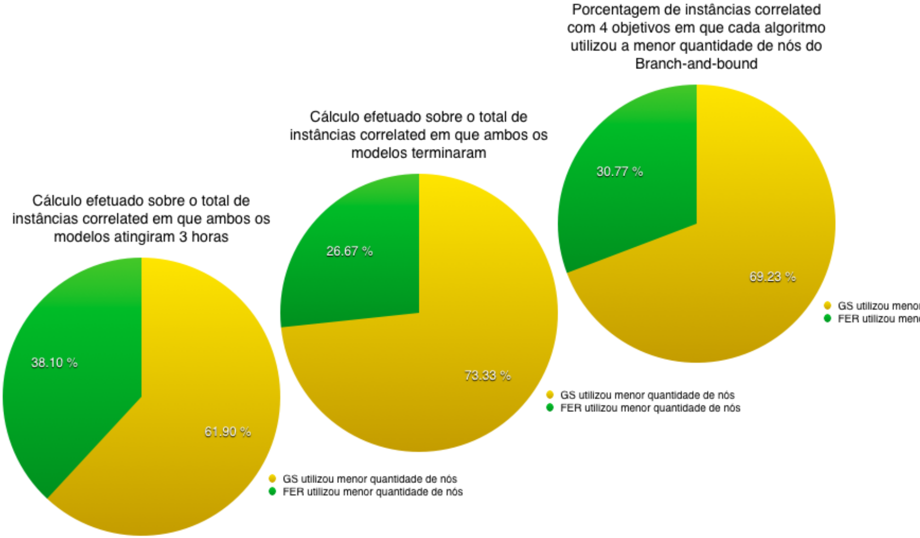
Este cálculo foi feito em cima dos 76,92 % das instâncias anti-correlated em que ambos atingiram 3 horas

Resultados para 4 objetivos : Gap da solução inicial

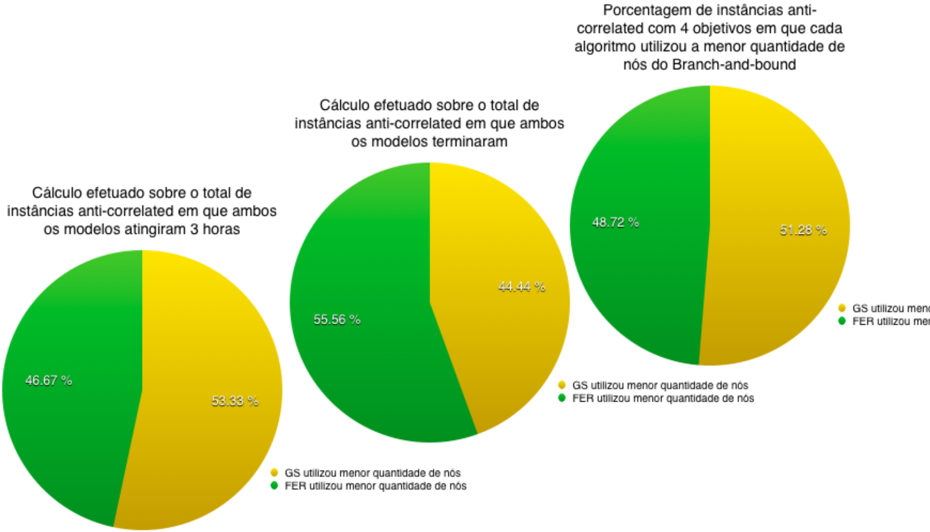




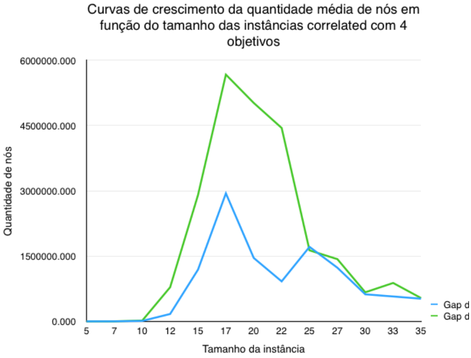
Resultados para 4 objetivos : Quantidade de nós do B&B

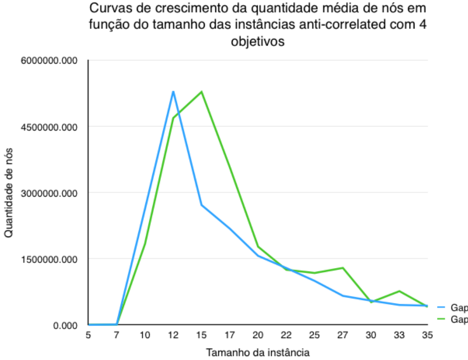


Resultados para 4 objetivos : Quantidade de nós do B&B



Resultados para 4 objetivos : Quantidade de nós do B&B





Considerações finais e trabalhos complementares

1. O modelo de Galand e Spanjaard (2012) apresentou, no geral, desempenho superior ao de Fernández et al. (2017)
2. Tal diferença de desempenho, contudo, diminui para 4 objetivos, sugerindo que, possivelmente, o modelo proposto por Fernández et al. (2017) possa se tornar mais competitivo com mais objetivos
3. Pesquisa complementar:
    1. experimentos com 5, 8 e 10 objetivos;
    2. testar instâncias com até 50 vértices;
    3. adotar outros critérios para gerar os pesos ω_i, $i \in P$, além do *k-centrum*;
    4. implementar algum dos modelos alternativos de Fernández et al. (2017), o qual reduz o número de restrições, a fim que se possa comparar com os modelos experimentados por este trabalho.

Referências Bibliográficas I

CHASSEIN, A.; GOERIGK, M. Alternative formulations for the ordered weighted averaging objective. *Information Processing Letters*, Elsevier, v. 115, n. 6, p. 604–608, 2015.

DE, A.; DIAZ, E. D. A fuzzy ordered weighted average (owa) approach to result merging for metasearch using the analytical network process. In: IEEE. *Emerging Applications of Information Technology (EAIT), 2011 Second International Conference on*. [S.l.], 2011. p. 17–20.

FERNÁNDEZ, E.; POZO, M. A.; PUERTO, J. Ordered weighted average combinatorial optimization: Formulations and their properties. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 169, p. 97–118, 2014.

FERNÁNDEZ, E. et al. Ordered weighted average optimization in multiobjective spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 260, n. 3, p. 886–903, 2017.

Referências Bibliográficas II

GALAND, L.; SPANJAARD, O. Exact algorithms for owa-optimization in multiobjective spanning tree problems. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 7, p. 1540–1554, 2012.

KNOWLES, J. *Local-search and hybrid evolutionary algorithms for Pareto optimization*. Tese (Doutorado) — Department of Computer Science, University of Reading, Reading, UK, 2002.

MAGNANTI, T. L.; WONG, R. T. Network design and transportation planning: Models and algorithms. *Transportation Science*, v. 18, p. 1–55, 1984.

OGRYCZAK, W.; ŚLIWIŃSKI, T. On solving linear programs with the ordered weighted averaging objective. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 148, n. 1, p. 80–91, 2003.

RAMENTOL, E. et al. Ifrowann: imbalanced fuzzy-rough ordered weighted average nearest neighbor classification. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 23, n. 5, p. 1622–1637, 2015.

Referências Bibliográficas III

WANG, H.; ZHANG, Y.; QIAN, G. Multiple binary classifiers fusion using induced intuitionistic fuzzy ordered weighted average operator. In: IEEE. *Information and Automation (ICIA), 2011 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2011. p. 230–235.

YAGER, R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, v. 18, n. 1, p. 183–190, 1988.