Análise experimental de modelos matemáticos propostos para o problema da Árvore Geradora Multiobjetivo baseada no operador *OWA*

Islame Felipe da Costa Fernandes

05 de Setembro de 2017

1 Introdução

A Árvore Geradora Mínima, naturalmente mono-objetivo, é um dos problemas clássicos da Teoria dos Grafos e possui inúmeras aplicações em problemas do mundo real. Sua versão multiobjetivo (*MoST*) considera vários critérios de otimização simultaneamente, adequando-se às necessidades do mundo real que, por vezes, são, de fato, multicritério (MONTEIRO, 2011).

A literatura do problema *MoST* se divide em duas grandes abordagens: a primeira adota a dominância clássica de Pareto e a segunda explora algoritmos cuja preferência possa ser fornecida pelo tomador de decisão. Uma destas preferências utiliza o operador *Ordered Weighted Average* (*OWA*), que será estudado por este trabalho. Neste caso, o problema passa a ser chamado de *OWA-ST*.

O objetivo deste trabalho é implementar, experimentar e analisar os resultados para dois modelos matemáticos fundamentais para o problema da *OWA-ST*: o de Galand e Spanjaard (2012) e o de Fernández et al. (2017). Serão relatados experimentos para 39 grafos completos, de 5 a 35 vértices, das classes *correlated* e *anti-correlated* para 3 e 4 objetivos.

Fernández et al. (2017) também compararam o modelo proposto pelo autores com aquele proposto por Galand e Spanjaard (2012). Porém, os autores conduziram experimentos em grafos gerados aleatoriamente. O presente trabalho justifica-se, pois, diante da proposta de conduzir novos experimentos em classes de instâncias *correlated* e *anti-correlated* conforme proposto por Knowles (2002).

Este texto é organizado como segue: a Seção 2 apresenta a definição formal do problema da *MoST* e *OWA-ST* e o estado da arte; a Seção 3 detalha os modelos estudados; a Seção 4 apresenta os resultados dos experimentos; por fim, a Seção 5 contém as considerações finais e propostas de trabalhos complementares.

2 O problema

Esta seção apresenta a definição formal da $MoST$ e OWA-ST. A definição utilizada é de Fernández et al. (2017) e utiliza notação matricial. As notações utilizadas por esta seção serão invocadas constantemente ao logo de todo o texto.

Seja $G(V, E)$ um grafo conexo e não direcionado, com $|V| = n$ vértices e $|E| = m$ arestas. Seja $P = \{1, 2, ..., p\}$ um conjunto com p objetivos. Um vetor de custos $c_e = (c_e^1, ..., c_e^p)^T \in \Re^p$ é associado a cada aresta $e \in E$. Pode-se definir uma matriz $C \in R^{p \times m}$, tal que:

$$C = \begin{pmatrix} c_{e_1}^1 & c_{e_2}^1 & ... & c_{e_m}^1 \\ c_{e_1}^2 & c_{e_2}^2 & ... & c_{e_m}^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{e_1}^p & c_{e_2}^p & ... & c_{e_m}^p \end{pmatrix}$$

Seja $X \subseteq \{0, 1\}^m$ o conjunto de todas as árvores geradoras de G. Assim, uma árvore $\tau \in X$ é representa como um vetor, de dimensão m, onde cada coordenada representa se a aresta correspondente figura (valor 1) ou não (valor 0) em τ. Seja $Z \subseteq \Re^p$ o espaço objetivo e seja $f : X \to Z$ a função que mapeia cada árvore $\tau \in X$ em seu vetor de custos, definida por $f(\tau) = C\tau$. Denota-se por $f_i(\tau) = C_i\tau$ o valor da *i-ésima* componente, $i \in P$, do vetor $f(\tau)$. Pela definição clássica de dominância de Pareto, diz-se que uma árvore $\tau^* \in X$ é eficiente se, e somente se, $\nexists\ \tau' \in X$ que a domine. O problema da $MoST$ visa, portanto, encontrar o conjunto de árvores eficientes $X^* \subseteq X$, dito conjunto Pareto ótimo, com $f(X^*) \subseteq Z$, chamada Fronteira de Pareto.

Aggarwal, Aneja e Nair (1982) efetuam uma redução polinomial do problema da mochila 0-1 à árvore geradora biobjetivo ($p = 2$), mostrando assim que tal problema é NP-difícil. Além disso, ele é também intratável (HAMACHER; RUHE, 1994), ou seja, algoritmos exatos que se dispõem a encontrar o conjunto Pareto ótimo requerem um tempo muito alto de processamento para instâncias de tamanhos consideráveis.

Além da versão clássica com dominância de Pareto, a $MoST$ também pode ser estudada a partir de outros critérios de preferências apontados pelo tomador de decisão. Uma rápida revisão bibliográfica dos vários algoritmos baseados em preferência para a $MoST$ será apresentada na subseção 2.1.

O critério de preferência estudado por este trabalho é o *Ordered Weighted Average* (OWA) e o problema é chamado de OWA-ST. Segundo Fernández et al. (2017), o operador OWA é geral o suficiente para ser aplacado a qualquer problema multiobjetivo. No caso particular, para entender a OWA-ST, considere $\forall\tau \in X, f_\sigma(\tau) \in Z$ o vetor que permuta os custos componentes do vetor $f(\tau)$ tal que $f_{\sigma_1}(\tau) \geq ... \geq f_{\sigma_p}(\tau)$. Seja ainda $\omega \in \Re^p$ um vetor de pesos não negativos tais que $\sum_{i \in P} \omega_i = 1$. O problema OWA-ST visa encontrar $\tau \in X$ que minimiza o operador $OWA_\omega(\tau) = \omega^T f_\sigma(\tau)$.

O problema da OWA-ST é NP-difícil (GALAND; SPANJAARD, 2012). A prova consiste numa redução do problema da Árvore Geradora Max-Linear (ML-ST)

ao *OWA-ST*. Sabe-se que tal problema é NP-difícil (HAMACHER; RUHE, 1994) e é definido como:

$$min\{h(\tau)\ :\ \tau \in X\} \text{ onde: } h(\tau) = max\{f_i(\tau), ..., f_p(\tau)\} \tag{1}$$

Galand e Spanjaard (2012) e Fernández et al. (2017) afirmam que uma instância do problema da *ML-ST* pode ser reduzida a uma instância da *OWA-ST*, onde $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = ... = \omega_p = 0$.

2.1 Estado da arte

O estado da arte da *MoST* é rico em trabalhos que exploram suas principais características e que apresentam algoritmos exatos ou heurísticos. Uma extensa revisão bibliográfica é apresentada por Fernandes (2016), onde o autor apresenta uma análise experimental dos algoritmos exatos. Outras revisões bibliográficas do problema foram apresentadas por Ruzika e Hamacher (2009) e Climaco e Pascoal (2011), sem, todavia, contemplar a análise experimental dos algoritmos. Os trabalhos que propõem algoritmos exatos baseados em dominância de Pareto são : Corley (1985), Pugliese, Guerriero e Santos (2015), Ramos et al. (1998), Steiner e Radzik (2003) e Sourd e Spanjaard (2008). Dentre estes, destaca-se o algoritmo híbrido (e exato) de Sourd e Spanjaard (2008), pois possui o melhor desempenho computacional (FERNANDES, 2016). Os demais algoritmos exatos são baseados em preferência e foram propostos por Perny e Spanjaard (2005), Alonso et al. (2009), Galand, Perny e Spanjaard (2010), Galand e Spanjaard (2012) e Fernández et al. (2017). Os trabalhos baseados em heurísticas são: busca local de Hamacher e Ruhe (1994) e Davis-Moradkhan (2010); algoritmos evolucionários de Zhou e Gen (1999), Knowles e Corne (2000a, 2000b, 2001), Rocha, Goldbarg e Goldbarg (2006, 2007), Chen et al. (2007), Davis-Moradkhan, Browne e Grindrod (2009), Monteiro, Goldbarg e Goldbarg (2009, 2010) e Monteiro (2011); e o algoritmo *GRASP* de Arroyo, Vieira e Vianna (2008).

Especificamente, o presente trabalho está concentrado na *MoST* baseada em preferência, mais precisamente, em abordagens baseadas no operador *OWA*. Os algoritmos exatos baseados em dominância de Pareto e os algoritmos heurísticos não serão explorados aqui. O leitor interessado em tais abordagens é convidado a consultar o trabalho de Fernandes (2016).

Perny e Spanjaard (2005) prepuseram dois algoritmos baseados em preferência, generalizações, respectivamente, dos algoritmos clássicos de Kruskal (1956) e Prim (1957). Os autores concebem algoritmos suficientemente gerais, onde qualquer relação de preferência pode ser utilizada, desde que a mesma satisfaça ao Axioma da Independência e seja quase transitiva.

Alonso et al. (2009) também propuseram dois algoritmos baseados em preferência que são generalizações, respectivamente, de Kruskal (1956) e Prim (1957). Da mesma forma, tais algoritmos podem trabalhar com qualquer relação de preferência, porém, desta vez, a mesma deve ser transitiva negativa e aditiva forte.

Galand, Perny e Spanjaard (2010), diferentemente dos dois trabalhos supracitados, trabalharam especificamente com a Integral de *Choquet* como relação de preferência. Os autores apresentaram dois algoritmos, um de enumeração (chamado *ranking*) e outro *Branch-and-bound* que se propõem a encontrar a solução *Choquet-ótima*.

A família de operadores *OWA* foi introduzida por Yager (1988) e intensamente utilizada em trabalhos que estudam problemas envolvendo tomada de decisão, sobretudo aqueles onde vários critérios devem ser considerados. Os trabalhos de Ogryczak e Śliwiński (2003), Fernández, Pozo e Puerto (2014) e Chassein e Goerigk (2015) trazem diversas formulações matemáticas alternativas para modelar tal operador no contexto de otimização multiobjetivo. Tais autores também apresentam a análise computacional dos modelos propostos.

Galand e Spanjaard (2012) conceberam um modelo de programação matemática, aplicado ao problema *OWA-ST*, que pode ser utilizado para uma quantidade arbitrária de objetivos. O autores provaram que o problema é NP-Difícil e procederam experimentos computacionais, incluindo várias subclasses do problema.

Fernández, Pozo e Puerto (2014) exploraram o operador *OWA*, apresentando e estudando uma variedade de modelos alternativos de programação linear. Tais modelos são suficientemente gerais e podem ser aplicados a qualquer problema de otimização multicritério. A fim de proceder análise experimental, os autores aplicaram seus modelos ao problema do caminho mais curto e do emparelhamento perfeito de custo mínimo. Fernández et al. (2017) utilizaram um dos modelos gerais propostos por Fernández, Pozo e Puerto (2014) e aplicaram ao *OWA-ST*. Além disso, Fernández et al. (2017) estudaram reformulações do modelo para a *OWA-ST* e compararam seu desempenho quando combinado com diversos modelos alternativos para a árvore geradora, dentre eles o modelo de fluxo de Magnanti e Wong (1984), adotado na presente pesquisa.

As pesquisas envolvendo operadores *OWA* não se restringem especificamente à Otimização combinatória. Por exemplo, os trabalhos de Wang, Zhang e Qian (2011) e Ramentol et al. (2015) utilizaram versões *fuzzy* do operador *OWA* para resolver problemas de classificadores de padrões; De e Diaz (2011) também utilizaram a variante *fuzzy* no estudo de soluções para *engine* de pesquisas em rede.

3 Modelos

Esta seção detalha dois modelos para a *OWA-ST* (subseções 3.1 e 3.2) e um modelo para representar a árvore geradora de um grafo (subseção 3.3).

3.1 Modelo de Galand e Spanjaard (2012)

O modelo de Galand e Spanjaard (2012) segue abaixo. Seja r_{ij} a variável que denota o valor do *i-ésimo* objetivo ocupando a posição j. Seja ainda a seguinte variável:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a } i\text{-}ésima \text{ função objetivo ocupa posição } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Min \sum_{j \in P} \omega_j \left(\sum_{i \in P} r_{ij} \right) \tag{2}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in P} z_{ij} = 1 \quad \forall j \in P \tag{3}$$

$$\sum_{j \in P} z_{ij} = 1 \quad \forall i \in P \tag{4}$$

$$\sum_{i \in P} r_{ij} \geq \sum_{i \in P} r_{ij+1} \quad j \in P : j < p \tag{5}$$

$$r_{ij} \leq M z_{ij} \quad i, j \in P \tag{6}$$

$$\sum_{j \in P} r_{ij} = C_i \tau \quad i \in P \tag{7}$$

$$\tau \in X \tag{8}$$

$$r_{ij} \geq 0 \quad i, j \in P \tag{9}$$

$$z \in \{0, 1\}^{p \times p} \tag{10}$$

A equação (2) minimiza a função objetivo do problema, a qual consiste na média ponderada dos valores objetivos ordenados (OWA-ST). As restrições (3) garantem que, para qualquer posição da sequência ordenada de valores objetivos, tal posição possuirá apenas um valor objetivo. Analogamente, as restrições (4) garantem que seja qual for o valor objetivo, tal valor estará em apenas uma posição. Assim, as restrições (3) e (4) asseguram uma permutação de cada valor objetivo da árvore. As restrições (5) asseguram que tal permutação será em ordem não crescente. A restrição (6) garante que qualquer r_{ij} será zero caso z_{ij} seja zero, e será menor ou igual a um valor M (para algum M suficientemente grande) caso z_{ij} seja seja 1. A restrição (7) garante que, para qualquer árvore $\tau \in X$, o valor do seu *i-ésimo* custo será igual a r_{ij}, para algum j. A restrição (8) determina que τ seja uma árvore. Note que, devido (7), faz-se necessário um conjunto de restrições suplementares para assegurar que τ seja de fato uma árvore. A subseção 3.3 detalhará tais restrições.

3.2 Modelo de Fernández et al. (2017)

O modelo de Fernández et al. (2017) segue abaixo. A variável z_{ij} possui exatamente a mesma semântica daquela definida no trabalho de Galand e Spanjaard (2012). Seja θ_j, $\forall j \in P$, a variável que representa o valor objetivo da posição j da sequência ordenada.

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a } i\text{-ésima} \text{ função objetivo ocupa posição } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Min \sum_{j \in P} \omega_j \theta_j \tag{11}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in P} z_{ij} = 1 \quad \forall j \in P \tag{12}$$

$$\sum_{j \in P} z_{ij} = 1 \quad \forall i \in P \tag{13}$$

$$C_i \tau \leq \theta_j + M \left(1 - \sum_{k \geq j} z_{ik} \right) \quad i, j \in P \tag{14}$$

$$\theta_j \geq \theta_{j+1} \quad j \in P : j < p \tag{15}$$

$$\tau \in X \tag{16}$$

$$\theta_j \geq 0 \quad j \in P \tag{17}$$

$$z \in \{0,1\}^{p \times p} \tag{18}$$

O objetivo do modelo, representado pela fórmula 11, é minimizar a soma ponderada dos valores objetivo ordenados. As restrições (12) e (13) são idênticas àquelas análogas descritas na subseção 3.1. As restrições (14) relacionam o valor do *i-ésimo* custo da árvore τ e o valor de θ_j posicionado na sequência. As restrições (15) asseguram que tal sequência esteja em ordem não crescente. A restrição (16) assegura que τ seja uma árvore.

Fernández et al. (2017) provam que toda solução ótima do modelo apresentado é também solução ótima do modelo de Galand e Spanjaard (2012) e vice-versa.

Sejam Ω^{GS} e Ω^{FER} os domínios dos modelos de Galand e Spanjaard (2012) e Fernández et al. (2017), respectivamente, definido por suas restrições. Fernández et al. (2017) provam que $\Omega^{GS} \subset \Omega^{FER}$.

Por fim, Fernández et al. (2017) propuseram alguns modelos alternativos para o problema da *OWA-ST*, baseados no modelo original supradetalhado. Por exemplo, os autores sugerem remover as restrições (13) e (15), aumentando o espaço de busca, mas, possivelmente, melhorando o desempenho do *Branch-and-bound* diante da redução da quantidade de restrições. O presente trabalho, entretanto, optou por implementar e experimentar, inicialmente, o modelo original a fim de verificar as fundamentais diferenças de comportamento entre os dois modelos em suas concepções inciais.

3.3 Modelo para a Árvore Geradora

Este trabalho utilizou o modelo matemático para árvore geradora concebido por Magnanti e Wong (1984), que é baseado em fluxo em redes. Segundo os autores, o modelo possui vários casos especiais. Um destes é o caso em que o fluxo obtido atinge todos os n vértices do grafo, passando por $n-1$ arestas, configurando uma árvore geradora. Sejam, pois as seguintes variáveis e o seguinte modelo:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } (i,j) \in E \text{ é utilizada para transporte do fluxo} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

x_{ij} : é a quantidade de fluxo transportado do nó i ao nó j pela aresta $(i,j) \in E$.

$$Min \sum_{\{(i,j)\in E\}} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{\{j:(1,j)\in E\}} x_{1j} = n-1 \tag{19}$$

$$\sum_{\{i:(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{k:(j,k)\in E\}} x_{jk} = 1 \quad \forall j = 2,3,...,n \tag{20}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \tag{21}$$

$$(n-1) y_{ij} \geq x_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \tag{22}$$

$$y_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \tag{23}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in E \tag{24}$$

Note que o modelo de Magnanti e Wong (1984), conforme escrito acima, destina-se a encontrar a árvore geradora mínima de um grafo (vide função objetivo). Todavia, suas restrições são capazes de modelar a árvore geradora multiobjetivo. De fato, para o contexto dos modelos de Galand e Spanjaard (2012) e Fernández et al. (2017), as restrições são mais importantes. A restrição (19) considera o vértice 1 como sendo a fonte de um fluxo de valor $n-1$. Assim, as arestas que possuem uma das extremidades no vértice 1 poderão transferir o fluxo em apenas um sentido (saindo do vértice 1). A restrição (20) garante que a cada nó $j = 2, 3..., n$ pelo qual o fluxo passa, um resíduo de uma unidade é retido em j. Deste modo, o fluxo diminui em uma unidade cada vez que passa em um vértice. As restrições (22) e (23) ajudam a garantir que $x_{ij} = 0$ ou

$x_{ji} = 0$, se, e somente se, $y_{ij} = 0$, além de garantir que jamais circulará, em qualquer aresta, um fluxo superior a $n - 1$. Finalmente, quando o fluxo passa por todos os vértice, ele atinge valor zero, tendo passado por exatamente $n - 1$ arestas. Tem-se, pois, uma árvore geradora.

4 Experimentos computacionais

Apresenta-se, nesta seção, os resultados dos experimentos computacionais os modelos de Galand e Spanjaard (2012) e Fernández et al. (2017). Todos os experimentos foram realizados numa máquina Intel *Xeon W3520*, 2.67 GHz, Sistema Operacional Ubuntu 14.04 *LTS*, 64 bits, 8GB de memória RAM. Os algoritmos foram implementados em linguagem *C++* e compilados com compilador *GNU g++* versão 4.8.4. Os modelos foram implementados com o *solver Gurobi* versão 6.5.

4.1 Instâncias utilizadas

Os experimentos foram efetuados com instâncias com 3 e 4 objetivos, 39 instâncias de cada, para grafos completos, tendo de 5 a 35 vértices. Para cada quantidade n de vértices, foram geradas três instâncias, denotadas, respectivamente, por $n.1$, $n.2$ e $n.3$. Todas as instâncias foram geradas com o gerador de Knowles (2002) considerando a correção proposta por Chen et al. (2007) (que impede de gerar arestas com peso negativo). Knowles (2002) classificou suas instâncias em três subgrupos: *correlated*, *anti-correlated* e *concave*. As duas primeiras dizem respeito à correlação β dos pesos das arestas (positivo e negativo, respectivamente). Os valores escolhidos para β foram 0.2, 0.5 e 0.85 para instâncias *correlated n.1*, *n.2* e *n.3*, respectivamente. Para instâncias *anti-correlated*, o parâmetro β assume valores -0.2, -0.5 e -0.85 respectivamente os grupos *n.1*, *n.2* e *n.3*. Até a data do experimentos aqui relatados, os o gerador de Knowles (2002) não contempla instâncias *concave* com mais de dois objetivos. Tal classe de instâncias foi, por isso, desconsiderada.

As instâncias precisam ser acrescidas de um vetor $\omega \in \Re^p$ de pesos, conforme descrito na seção 2. Existem variados critérios (ou técnicas) para geração de ω, como o *k-centrum* (TAMIR, 2001), *k-trimmed* (GALAND; SPANJAARD, 2012) e o critério de Hurwicz (HURWICZ, 1951). O primeiro critério foi adotado. Ele consiste em determinar um $k \in P$ e gerar os pesos tais que $\omega_1 = ... = \omega_k = 1/k$ e $\omega_{k+1} = ... = \omega_p = 0$. Para as instâncias com 3 objetivos, é determinado randomicamente um $k \in \{2, 3\}$; analogamente, para 4 objetivos, k é determinado randomicamente em $\{2, 3, 4\}$.

4.2 Metodologia de comparação

Cada instância é executada uma vez com o modelo de Galand e Spanjaard (2012) e uma vez com o modelo de Fernández et al. (2017), com limite máximo de 10800 segundos de execução (três horas). Ou seja, se a execução atingir tal limite de tempo, então ela é finalizada. Foram observados o tempo de processamento, em segundos, de cada execução. Além disso, como muitas instâncias podem exigir mais de três horas, foram recuperados o *gap* relativo (em porcentagem) entre o valor melhor objetivo (operador OWA) encontrado e o valor da solução relaxada obtida no início do processamento do *solver*. Deste modo, seja z_R o valor objetivo da solução relaxada no nó raiz e z^* o melhor valor OWA encontrado no final do processamento, então o *gap* relativo será $100(z^* - z_R)/z_R$ (FERNÁNDEZ et al., 2017). A observação deste valor é importante, pois possibilita analisar quais dos dois modelos chegou mais ~~próximo do ótimo~~ ao fim de três horas. O valor z^* do melhor objetivo OWA encontrado por cada modelo também figurará nas tabelas dos experimentos. Outra observação importante é a quantidade de nós explorados na execução da árvore *branch-and-bound* criada pelo *solver*. Este valor é importante porque possibilita compreender qual dos modelos é mais dispendioso na fase *branch-and-bound*.

Possibilita saber quem chegou mais próximo do fim do seu processamento, ou seja, quem conseguiu uma soluçao mais próxima do seu próprio limite

4.3 Instâncias com 3 objetivos

A Tabela 1 mostra os resultados dos experimentos para instâncias com 3 objetivos. Os dados são agrupados em classes (*correlated* e *anti-correlated*) e, em cada classe, confronta-se os resultados do modelo de Galand e Spanjaard (2012) (GS) e Fernández et al. (2017) (FER). Os resultados da referida tabela (exceto os da coluna *Nós*) estão ajustados em precisão de três casas decimais. Na coluna *Nós*, devido à grande quantidade de dígitos, os dados foram apresentados em notação científica, com precisão de uma casa decimal.

Para 3 objetivos, GS executou 19 instâncias *correlated* e 10 *anti-correlated* antes de atingir o limite de 3 horas. Isso representa, respectivamente, $48,72\%$ e $25,64\%$ do total de instâncias testadas. FER, por sua vez, achou, em tempo hábil, o ótimo de 17 instâncias *correlated* e 10 *anti-correlated*. Isso representa, respectivamente, $43,60\%$ e $25,64\%$ do total de instâncias. Do total de instâncias *correlated* com 3 objetivos, em 20 ($51,30\%$) ambos os modelos atingiram 3 horas de processamento. Houve ainda 2 instâncias *correlated* ($5,13\%$) em que o FER atingiu o limite de tempo, mas o GS não. Isso significa que todas as instâncias *correlated* em que GS atingiu o tempo limite, FER também atingiu (mas não o inverso). Do total de instâncias *anti-correlated*, em 29 ($74,36\%$) ambos os modelos atingiram o tempo limite. Ademais, ambos os modelos atingiram o tempo limite em exatamente as mesmas instâncias *anti-correlated*.

Ainda no que se refere ao tempo computacional, conforme se nota na Tabela 1, do total de instâncias *correlated*, o GS foi melhor que FER em 16 (41%) e foi pior em apenas 3 ($7,7\%$), a saber 10.1, 12.1 e 12.3. Nas demais instâncias *correlated*, GS e FER atingiram 3 horas de processamento. Do total de instâncias *anti-correlated*, GS foi melhor que FER em 7 ($17,94\%$) e pior em apenas 3 ($7,7\%$), a saber 7.2, 10.2 e 12.1. Nas demais instâncias *anti-correlated*, GS e FER atingiram 3 horas de processamento. Portanto, percebeu-se que, para a maioria das instâncias em que se encontrou o ótimo antes de atingir o limite de tempo de execução, o GS apresentou melhor desempenho que o FER. É possível visualizar tal resultado nas Figuras 1 e 2, que plotam a curva de crescimento de tempo médio em função do tamanho das instâncias *correlated* e *anti-correlated*, respectivamente. Na primeira, a curva do GS está visivelmente abaixo da curva do FER para a maioria das instâncias. Na segunda, tal diferença não é tão visível, mas percebe-se, contudo, que as curvas crescem praticamente juntas para a maioria das instâncias.

Figura 1: Curvas de crescimento do tempo médio em função do tamanho da instância correlated com 3 objetivos

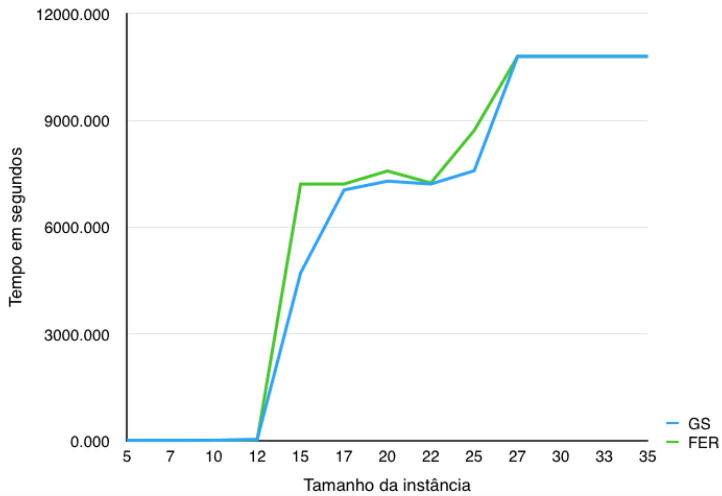
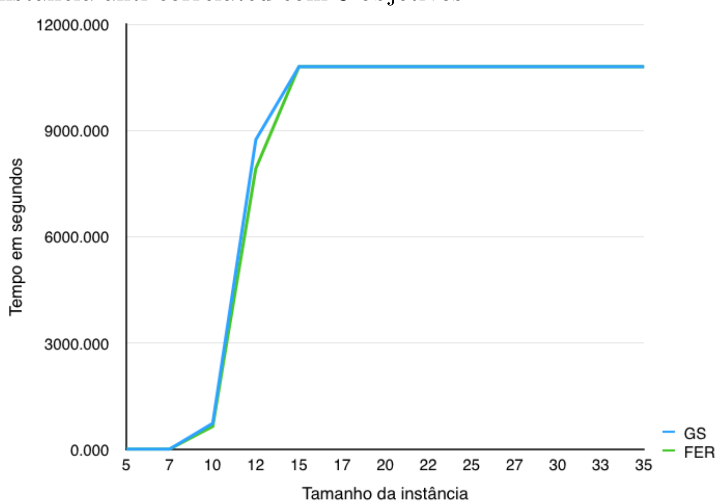


Figura 2: Curvas de crescimento do tempo médio em função do tamanho da instância anti-correlated com 3 objetivos



Para as instâncias em que ambos os modelos atingem três horas de processamento, outros parâmetros precisam ser analisados. Um desses parâmetros é o *gap*, ou seja, a porcentagem de afastamento entre a melhor solução corrente e a solução relaxada no nó raiz do *Branch-and-bound*. Observa-se que alguns valores de *gap* estão entre 0% e $0,01\%$, mesmo o *solver* tendo encontrado o ótimo em tempo hábil. Tal fenômeno deve-se a uma pequena perda de precisão de ponto flutuante do próprio *solver* nos valores da função objetivo. Assim, por conveniência, o presente trabalho considera que tais valores de *gap* são, de fato, 0%.

Das 20 instâncias *correlated* em que ambos os modelos atingiram o limite de três horas, o *gap* do GS, quando comparado ao do FER, foi menor em 12 (60%) e foi maior em 8 (40%). Das 2 instâncias *correlated* em que somente FER atingiu o tempo limite, é diretamente aceitável que o GS apresente menor *gap*. Das 29 instâncias *anti-correlated* em que ambos atingiram o tempo limite, o *gap* do GS foi menor em 18 ($62,04\%$) e maior em 11 ($37,93\%$). Portanto, na maioria dos casos, em ambas as classes, o *gap* do GS foi menor, sugerindo que tal modelo teria grande chances de encontrar o ótimo em menor tempo (quando comparado ao FER), caso o limite fosse maior que 3 horas. Observe as Figuras 3 e 4: elas ilustram as curvas de crescimento do *gap* médio em função do tamanho das instâncias *correlated* e *anti-correlated*, respectivamente. Em ambas as figuras, constata-se o *gap* médio é igual a zero quando ambos os modelos atingem o ótimo. Todavia, conforme cresce o tamanho da instância *correlated*, é notório que o *gap* do GS permanece inferior ao do FER. Nas instâncias *anti-correlated*, tal diferença é visivelmente perceptível para instâncias a partir de 27 vértices.

Figura 3: Curvas de crescimento do Gap médio em função do tamanho da instância correlated com 3 objetivos

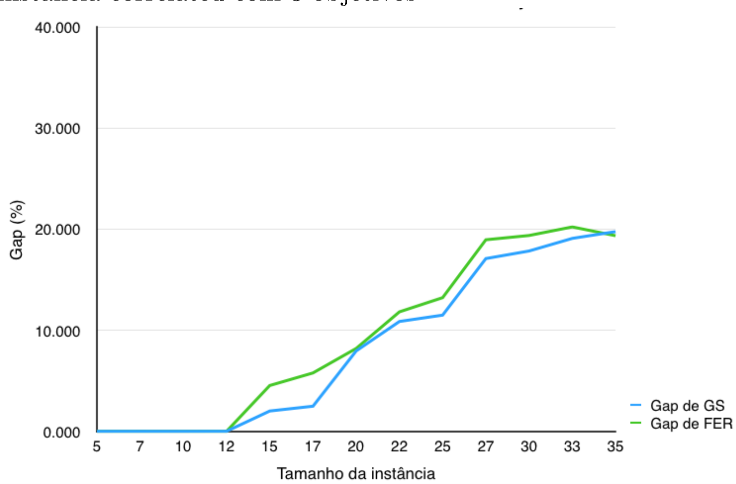
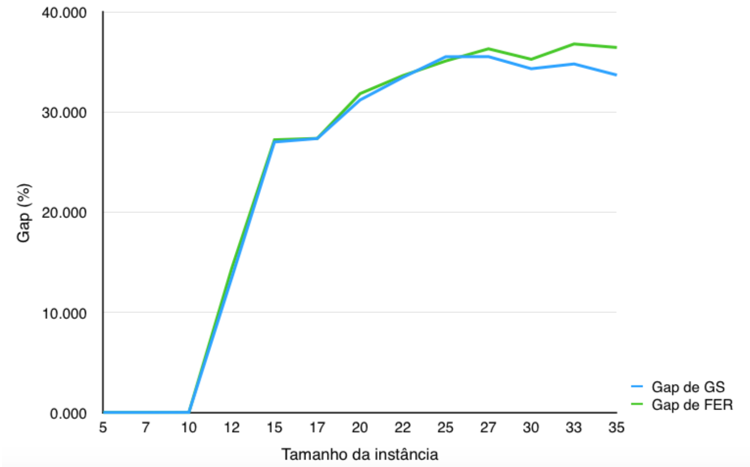


Figura 4: Curvas de crescimento do Gap médio em função do tamanho da instância anti-correlated com 3 objetivos



Do total de instâncias *correlated*, quando se analisa a quantidade de nós da árvore de *Branch-and-bound*, nota-se que o GS, quando comparado com o FER, utilizou menor quantidade de nós em 33 instâncias ($84,61\%$) e maior em 6 ($15,39\%$). Em média, considerando todas as instâncias *correlated*, a quantidade de nós explorados por FER foi 84% superior a de GS. Caso considere-se apenas as 17 instâncias *correlated* onde ambos os modelos encontraram o ótimo, a quantidade de nós do GS foi inferior à do FER em 14 ($82,35\%$) e superior em 3 ($17,65\%$). De 20 instâncias *correlated* onde ambos os modelos atingiram o tempo limite, a quantidade de nós do GS foi menor em 17 (85%) e maior em 3 (15%).

Do total de instâncias *anti-correlated*, o GS, face ao FER, utilizou menor quantidade de nós em 22 ($56,42\%$) e maior em 17 ($43,58\%$). Em média, a quantidade de nós explorados por FER, para as instâncias *anti-correlated* com 3 objetivos, foi maior que a de GS em $14,29\%$. De 10 instâncias *anti-correlated* onde ambos os modelos encontraram o ótimo, GS utilizou menos nós que FER em 7 (70%) e mais nós em 3 (30%). Considerando apenas as 29 instâncias *anti-correlated* onde ambos os modelos atingiram o tempo limite, estes últimos valores são 15 ($51,72\%$) e 14 ($48,28\%$), respectivamente.

Portanto, constatou-se que, para instâncias com 3 objetivos, o GS apresentou melhor desempenho que o FER nos aspectos do tempo de processamento, distância da solução inicial e quantidade de nós do *Branch-and-bound*. Tal diferença de desempenho é maior quando se observa somente as instâncias *correlated*. De fato, instâncias *anti-correlated* mostram-se mais difíceis. Além disso, observando cada grupo de instâncias de mesmo tamanho, percebeu-se que, no geral, instâncias *correlated* do grupo $n.3$ são mais fáceis, porque elas possuem maior coeficiente de correlação. De maneira análoga, as instâncias *anti-correlated* do grupo $n.1$ são mais fáceis, pois possuem maior coeficiente de anticorrelação.

Tabela 1: Resultados para instâncias com 3 objetivos

Instância	Correlated								Anti-correlated							
	GS				FER				GS				FER			
	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)	Nós	Gap (%)	z^*	Tempo (s)	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)
5.1	3,4E+01	0,000	124,500	0,020	1,1E+02	0,000	124,500	0,030	4,3E+01	0,000	148,333	0,020	8,6E+02	0,000	148,333	0,110
5.2	6,1E+01	0,000	217,333	0,020	1,1E+03	0,000	217,333	0,110	1,5E+02	0,000	176,500	0,030	4,6E+02	0,000	176,500	0,060
5.3	6,0E+00	0,000	113,500	0,010	8,9E+01	0,000	113,500	0,030	6,7E+01	0,000	174,333	0,020	1,2E+03	0,000	174,333	0,120
7.1	3,5E+02	0,007	168,500	0,080	1,2E+03	0,000	168,500	0,500	1,1E+03	0,000	258,000	0,240	2,5E+03	0,000	258,000	1,380
7.2	1,3E+02	0,000	144,000	0,040	1,3E+03	0,000	144,000	0,310	7,6E+03	0,000	280,500	2,170	6,4E+03	0,000	280,500	1,850
7.3	1,3E+02	0,000	87,000	0,070	2,3E+03	0,000	87,000	0,380	5,6E+03	0,000	261,333	1,220	1,6E+04	0,000	261,333	5,400
10.1	1,0E+04	0,000	233,000	5,980	7,2E+03	0,000	233,000	5,430	9,4E+04	0,009	315,666	62,780	4,3E+05	0,000	315,666	127,520
10.2	3,1E+03	0,000	212,333	1,790	9,1E+03	0,000	212,333	6,030	1,7E+06	0,010	380,000	1493,190	1,0E+06	0,000	380,000	1072,360
10.3	4,9E+02	0,000	115,500	0,200	6,1E+02	0,000	115,500	0,270	7,9E+05	0,010	354,000	638,140	2,6E+06	0,000	354,000	730,580
12.1	6,1E+04	0,00	287,500	75,280	3,5E+04	0,000	287,500	40,540	2,6E+06	0,010	357,500	4625,100	1,4E+06	0,000	357,500	2181,470
12.2	1,1E+04	0,008	239,000	8,700	1,7E+04	0,000	239,000	16,530	7,8E+06	10,877	420,666	10800,000	7,7E+06	16,403	420,666	10800,000
12.3	2,0E+03	0,000	151,000	1,150	9,0E+02	0,000	151,000	0,530	4,3E+06	29,399	521,000	10800,000	3,8E+06	26,680	521,000	10800,000
15.1	1,6E+06	0,00	350,333	3331,930	1,1E+07	7,517	350,333	10800,000	3,1E+06	16,825	440,000	10800,000	2,2E+06	16,250	440,000	10800,000
15.2	4,7E+06	6,020	353,500	10800,000	5,1E+06	6,082	353,500	10800,000	4,0E+06	26,250	554,999	10800,000	6,0E+06	29,826	554,333	10800,000
15.3	5,9E+03	0,000	186,333	5,160	1,6E+04	0,000	186,333	25,910	3,0E+06	37,931	660,000	10800,000	2,7E+06	35,584	659,000	10800,000
17.1	4,6E+06	0,010	348,333	10322,300	1,1E+07	9,474	348,333	10800,000	2,0E+06	14,885	432,000	10800,000	1,9E+06	12,847	432,000	10800,000
17.2	3,2E+06	7,439	344,000	10800,000	3,0E+06	7,849	344,000	10800,000	3,0E+06	27,282	618,333	10800,000	5,4E+06	31,483	618,333	10800,000
17.3	4,5E+03	0,005	215,333	5,040	1,4E+04	0,000	215,333	32,460	2,3E+06	39,877	751,000	10800,000	1,7E+06	37,750	751,000	10800,000
20.1	1,8E+06	13,039	422,333	10800,000	3,6E+06	17,206	422,333	10800,000	1,9E+06	18,920	524,000	10800,000	1,2E+06	20,038	524,000	10800,000
20.2	1,7E+06	10,803	372,500	10800,000	2,3E+06	7,383	372,500	10800,000	2,1E+06	30,652	722,666	10800,000	5,6E+06	33,164	722,666	10800,000
20.3	2,0E+05	0,010	201,000	274,650	1,9E+06	0,000	201,000	1131,110	1,5E+06	44,010	891,000	10800,000	1,3E+06	42,273	893,000	10800,000
22.1	1,4E+06	15,100	446,666	10800,000	2,0E+06	19,478	446,666	10800,000	1,3E+06	23,316	602,000	10800,000	1,0E+06	23,505	602,000	10800,000
22.2	1,6E+06	17,483	404,000	10800,000	1,7E+06	15,965	404,000	10800,000	1,6E+06	32,826	797,333	10800,000	3,3E+06	34,783	797,333	10800,000
22.3	2,2E+04	0,010	193,333	33,390	6,1E+04	0,000	193,333	123,140	1,3E+06	44,204	980,500	10800,000	9,5E+05	42,595	982,500	10800,000
25.1	1,4E+06	16,529	459,000	10800,000	2,9E+06	22,948	459,000	10800,000	8,0E+05	25,747	652,500	10800,000	8,1E+05	24,865	647,500	10800,000

Continua na próxima página

Tabela 1 – continuação da página anterior

Instância	Correlated								Anti-correlated							
	GS				FER				GS				FER			
	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)	Nós	Gap (%)	z^*	Tempo (s)	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)
25.2	1,1E+06	17,935	437,000	10800,000	1,3E+06	16,705	437,000	10800,000	1,2E+06	34,948	909,332	10800,000	2,5E+06	37,060	909,332	10800,000
25.3	3,5E+05	0,010	203,666	1150,920	1,4E+06	0,000	203,666	4550,900	1,1E+06	45,833	1122,000	10800,000	5,9E+05	43,329	1120,500	10800,000
27.1	8,2E+05	16,337	477,000	10800,000	9,2E+05	20,685	477,000	10800,000	6,9E+05	26,972	744,000	10800,000	6,6E+05	27,487	744,000	10800,000
27.2	7,7E+05	27,730	585,000	10800,000	7,7E+05	26,667	585,000	10800,000	9,4E+05	34,849	980,666	10800,000	1,4E+06	36,604	981,666	10800,000
27.3	2,7E+06	7,182	204,000	10800,000	2,2E+06	9,477	204,000	10800,000	5,8E+05	44,738	1214,000	10800,000	7,1E+05	44,815	1215,000	10800,000
30.1	6,2E+05	18,564	560,999	10800,000	1,9E+06	24,064	560,999	10800,000	5,3E+05	29,500	778,500	10800,000	6,5E+05	28,507	770,000	10800,000
30.2	6,0E+05	30,400	528,000	10800,000	7,1E+05	21,780	528,000	10800,000	6,6E+05	36,333	1093,000	10800,000	5,5E+05	36,588	1096,000	10800,000
30.3	2,3E+06	4,530	236,666	10800,000	5,3E+06	12,254	236,666	10800,000	6,8E+05	37,110	1100,670	10800,000	1,3E+06	40,672	1100,670	10800,000
33.1	4,3E+05	17,968	525,000	10800,000	4,5E+05	17,176	524,000	10800,000	4,3E+05	28,134	882,332	10800,000	8,7E+05	30,299	882,332	10800,000
33.2	5,8E+05	18,830	464,000	10800,000	6,0E+05	22,486	464,000	10800,000	4,0E+05	37,782	1187,000	10800,000	4,6E+05	37,867	1191,000	10800,000
33.3	4,5E+05	20,440	295,500	10800,000	1,5E+06	20,981	295,500	10800,000	4,9E+05	38,455	1203,670	10800,000	1,3E+06	42,193	1204,000	10800,000
35.1	3,1E+05	23,265	566,500	10800,000	3,6E+05	19,418	566,500	10800,000	4,3E+05	25,534	866,999	10800,000	7,9E+05	30,296	866,999	10800,000
35.2	4,2E+05	18,916	506,333	10800,000	5,8E+05	22,317	506,333	10800,000	4,2E+05	37,889	1256,000	10800,000	3,3E+05	37,785	1250,500	10800,000
35.3	5,2E+05	17,062	340,500	10800,000	5,8E+05	16,300	340,500	10800,000	4,1E+05	37,619	1255,330	10800,000	7,7E+05	41,220	1256,670	10800,000

4.4 Instâncias com 4 objetivos

A Tabela 2 apresenta os resultados do experimentos com instâncias com 4 objetivos. Seu formato e suas legendas são padrões idênticos àqueles utilizados na Tabela 1. A precisão e a notação dos dados também são idênticas.

Das 39 instâncias executadas, GS encontrou o ótimo, em tempo hábil, para 18 $(46,15\%)$ *correlated* e para 9 $(23,08\%)$ *anti-correlated*. FER, por sua vez, executou, em menos de 3 horas, 15 $(38,46\%)$ instâncias *correlated* e 9 $(23,08\%)$ *anti-correlated*. Além disso, GS, considerando apenas instâncias *correlated*, apresentou menor tempo que FER em 15 $(38,46\%)$ e maior tempo em apenas 3 $(7,70\%)$, a saber 10.2, 12.2 e 15.2. Nas demais 21 instâncias *correlated* $(53,85\%)$, GS e FER atingiram 3 horas de processamento. Houve ainda 3 $(7,70\%)$ instâncias *correlated* em que o FER atingiu o limite, mas o GS não. Do total de instâncias *anti-correlated*, ainda do ponto de vista do tempo computacional, GS foi melhor em 7 $(17,95\%)$ e pior em apenas 2 $(5,12\%)$, a saber 7.2 e 10.2. Ambos os modelos atingiram o limite de tempo em 30 instâncias *anti-correlated*, o que representa $76,92\%$ do total. Mais que isso, os modelos atingiram o tal limite em exatamente as mesmas instâncias desta classe. Como também aconteceu com as instâncias de 3 objetivos, sob a ótica do tempo computacional, aqui se verificou, pois, o melhor desempenho do GS face ao FER. Observe as Figuras 5 e 6, as quais plotam as curvas do tempo médio em função das instâncias *correlated* e *anti-correlated*. Na primeira, é notória a vantagem do GS; na segunda, embora tal diferença não seja visível, pode-se, contudo, notar que as curvas crescem juntas conforme cresce o tamanho da instância.

Figura 5: Curvas de crescimento do tempo médio em função do tamanho da instância correlated com 4 objetivos

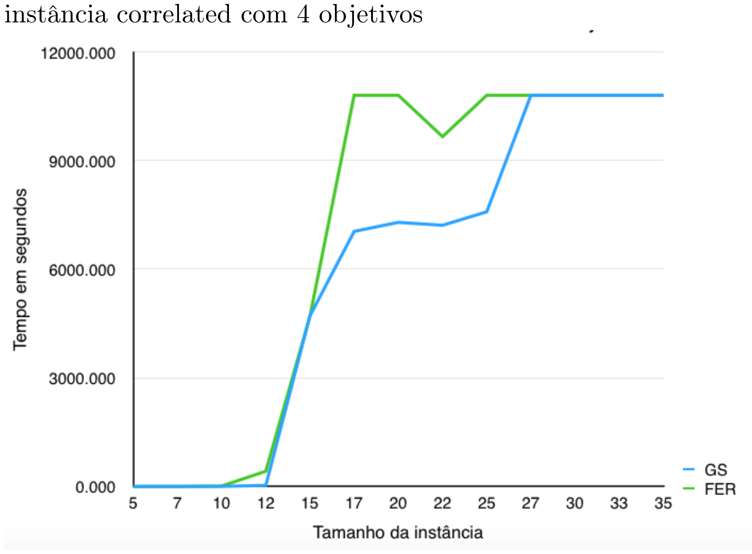
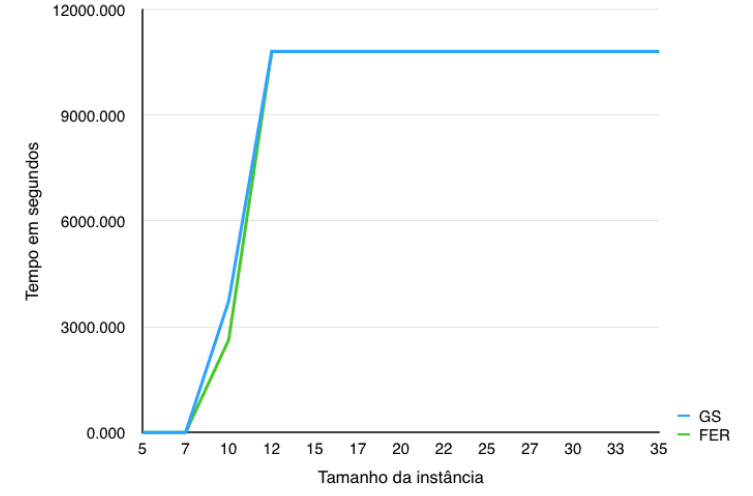


Figura 6: Curvas de crescimento do tempo médio em função do tamanho da instância anti-correlated com 4 objetivos



Quando ambos os modelos atingem o limite de 3 horas, procede-se a análise sob a ótica do *gap*. Novamente, observou-se que alguns valores de *gap* estão entre 0% e 0,01%, mesmo quando o *solver* encontrou o ótimo antes de 3 horas. Entende-se este fenômeno como uma perda de precisão de ponto flutuante do próprio *solver* nos valores da função objetivo. Assim, tais valores de *gap* são considerados como 0%.

Do total de 21 instâncias *correlated* em que ambos os modelos atingem o limite de 3 horas, o *gap* do GS, face ao do FER, foi menor em 9 instâncias (42,86%) e maior em 12 (57,14%). Nota-se que, neste cenário específico, o GS, ao fim de 3 horas, esteve mais distante do ótimo para 57,14% das instâncias *correlated*. De modo análogo, do total de instâncias *anti-correlated* em que ambos os modelos atingiram o limite de tempo, o *gap* do GS foi menor em 15 (50%), assim como foi maior também em 15 (50%). Tais informações sugerem que, sobre o número de instâncias *anti-correlated*, é aproximadamente igualitário o quantitativo de instâncias em que cada modelo ficou mais próximo do ótimo. No geral, pode-se inferir que esta discrepância quantitativa diminuiu em relação ao mesmo cenário traçado para as instâncias com 3 objetivos (subseção 4.3). Lá, GS parecia estar mais próximo do ótimo, ao fim de três horas, para maioria das instâncias (de ambas das classes). Aqui, essa evidência diminui. Porém, caso se analise a média do *gap* por instância, ainda é possível notar diferenças relevantes. Observe as Figuras 7 e 8, que traças as curvas de crescimento do *gap* médio em função do tamanho da instância *correlated* e *anti-correlated*, respectivamente. Na primeira, é perceptível é que, em média, GS aproxima-se mais do ótimo para instâncias de tamanho até 22; em seguida, após 27 vértices, FER apresenta menor *gap* médio. No segundo grupo, as curvas caminham justas, mas é notório a leve vantagem do GS.

Figura 7: Curvas de crescimento do Gap médio em função do tamanho da instância correlated com 4 objetivos

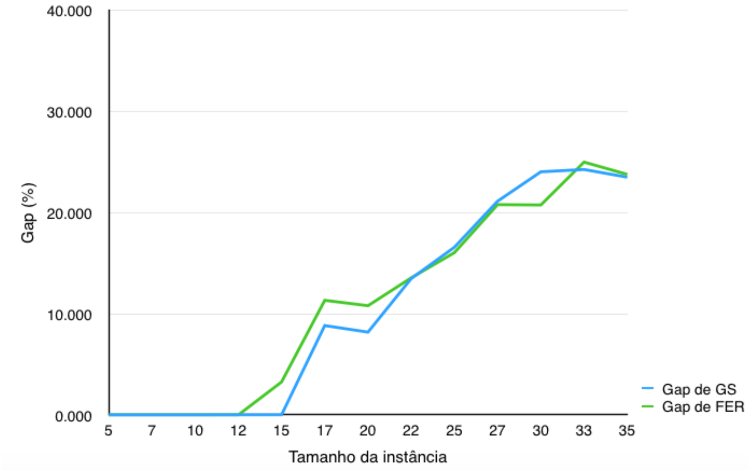
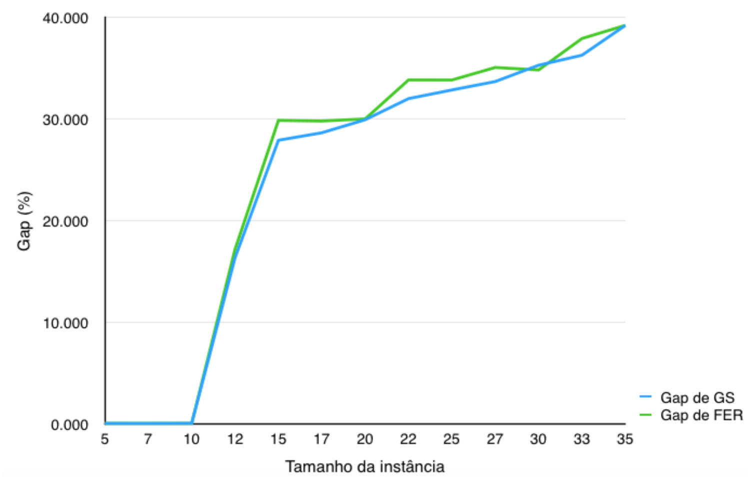


Figura 8: Curvas de crescimento do Gap médio em função do tamanho da instância anti-correlated com 4 objetivos



Quando compara-se a quantidade de nós do *Branch-and-bound* explorados pelo GS e pelo FER, conclui-se que a quantidade do primeiro modelo foi inferior a do segundo em 27 $(69,23\%)$ instâncias do total da classe *correlated* e maior em 12 $(30,77\%)$. A média da quantidade de nós explorados por FER foi 106% maior que a de GS nas instâncias *correlated*. Considerando apenas as 15 instâncias desta classe onde ambos os modelos encontram o ótimo, a quantidade de nós do GS foi inferior a do FER em 11 $(73,33\%)$ e superior em 4 $(26,67\%)$. Das

21 instâncias *correlated* onde ambos os algoritmos atingem o tempo limite, a quantidade de GS foi menor em 13 $(61,90\%)$ e maior em 8 $(38,10\%)$.

Do total de instâncias *anti-correlated*, a quantidade de nós do GS, face ao FER, foi menor em 20 instâncias $(51,28\%)$ e maior em 19 $(48,72\%)$. Em média, a quantidade de nós explorados pelo FER nesta classe foi maior que a do GS em $21,42\%$. Das 9 instâncias *anti-correlated* em que ambos os modelos encontram o ótimo, o GS explorou menos nós que o FER em 4 $(44,44\%)$ instâncias e mais nós 5 $(55,56\%)$. Das 30 instâncias da referida classe em que ambos os modelos atingem o tempo limite, em 16 $(53,33\%)$ a quantidade de nós exploradas pelo GS foi menor e em 14 $(46,67\%)$ foi maior.

Portanto, para instâncias com 4 objetivos, o GS ainda se manteve na liderança, face ao FER, nos aspectos analisados: tempo para atingir o ótimo, distância da solução ótima e quantidade de nós do *Branch-and-bound*. Entretanto, conforme se observou nos parágrafos acima, a discrepância entre os modelos diminuiu em relação aos experimentos com 3 objetivos. Isso sugere que, conforme aumenta-se a quantidade de objetivos, a liderança do GS pode diminuir. Nota-se, pois, a necessidade de expandir esta análise experimental para instâncias com mais objetivos, a fim de se constatar (ou refutar) tal hipótese. Ainda de maneira geral, infere-se que as instâncias da classe *anti-correlated* demandaram mais esforço computacional. Além disso, as instâncias *correlated* do grupo $n.3$ foram consideravelmente mais fáceis, visto que possuem maior coeficiente de correlação. O mesmo pode-se dizer das instâncias *anti-correlated* do grupo $n.1$, já que possuem maior coeficiente de anticorrelação.

Tabela 2: Resultados para instâncias com 4 objetivos

Instância	Correlated								Anti-correlated							
	GS				FER				GS				FER			
	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)	Nós	Gap (%)	z^*	Tempo (s)	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)	Nós	*Gap (%)*	z*	Tempo (s)
5.1	7,1E+01	0,000	117,000	0,020	1,3E+03	0,000	117,000	0,170	6,7E+01	0,000	156,500	0,020	2,4E+03	0,000	156,500	0,250
5.2	1,8E+02	0,000	155,000	0,040	3,7E+02	0,000	155,000	0,050	4,3E+02	0,000	195,500	0,060	4,2E+02	0,000	195,500	0,070
5.3	1,2E+02	0,000	132,000	0,030	9,1E+02	0,000	132,000	0,120	1,6E+02	0,000	181,000	0,040	1,1E+03	0,000	181,000	0,140
7.1	9,0E+02	0,000	202,500	0,200	3,5E+03	0,000	202,500	2,270	7,4E+02	0,000	207,500	0,170	7,1E+03	0,000	207,500	2,550
7.2	8,2E+02	0,000	207,000	0,200	1,3E+03	0,000	207,000	0,620	1,8E+04	0,002	273,500	7,760	8,8E+03	0,000	273,500	2,660
7.3	2,4E+01	0,000	88,333	0,060	1,1E+03	0,000	88,333	0,650	8,9E+03	0,000	242,333	3,450	8,4E+03	0,000	242,333	3,780
10.1	9,4E+03	0,000	250,500	5,890	4,7E+04	0,000	250,500	23,050	1,5E+05	0,010	316,750	122,280	1,3E+06	0,000	316,750	749,220
10.2	2,2E+04	0,000	248,000	19,150	8,6E+03	0,000	248,000	6,310	4,5E+06	0,010	393,500	7 214,880	1,5E+06	0,000	393,500	2 576,620
10.3	9,4E+02	0,000	105,000	0,280	7,5E+02	0,000	105,000	2,550	3,3E+06	0,010	357,333	3 829,090	2,7E+06	0,000	357,333	4 554,430
12.1	2,4E+05	0,010	323,250	277,490	2,3E+06	0,000	323,250	1 126,070	7,8E+06	7,916	412,250	10800,000	6,8E+06	16,980	412,250	10800,000
12.2	2,6E+05	0,009	303,500	476,700	8,3E+04	0,000	303,500	132,680	3,6E+06	21,871	459,000	10800,000	3,5E+06	17,506	457,000	10800,000
12.3	2,9E+03	0,000	210,666	2,410	2,5E+03	0,000	210,666	3,650	4,5E+06	19,179	422,000	10800,000	3,7E+06	16,983	422,000	10800,000
15.1	2,4E+06	0,010	350,750	5 590,320	7,0E+06	9,765	350,750	10800,000	3,4E+06	20,016	515,750	10800,000	6,5E+06	28,260	515,750	10800,000
15.2	1,1E+06	0,010	300,000	3 714,220	1,7E+06	0,000	300,000	3 254,920	2,2E+06	33,212	586,000	10800,000	2,3E+06	29,991	583,500	10800,000
15.3	3,0E+04	0,007	175,666	37,700	4,2E+04	0,000	175,666	46,690	2,6E+06	30,420	554,333	10800,000	7,1E+06	31,269	554,333	10800,000
17.1	3,4E+06	10,460	389,500	10800,000	2,0E+06	16,688	389,500	10800,000	2,6E+06	19,294	521,750	10800,000	3,8E+06	25,443	521,750	10800,000
17.2	1,7E+06	16,021	398,500	10800,000	2,1E+06	13,551	398,500	10800,000	1,7E+06	35,489	664,500	10800,000	1,7E+06	32,226	662,500	10800,000
17.3	3,8E+06	0,010	259,000	6 224,950	1,3E+07	3,732	259,000	10800,000	2,2E+06	31,080	623,999	10800,000	5,3E+06	31,658	623,333	10800,000
20.1	1,2E+06	18,545	473,000	10800,000	1,1E+06	16,385	473,000	10800,000	1,3E+06	26,278	632,000	10800,000	1,2E+06	25,020	627,500	10800,000
20.2	2,2E+06	5,987	376,333	10800,000	5,8E+06	8,769	376,333	10800,000	1,6E+06	37,922	794,666	10800,000	3,3E+06	38,113	794,999	10800,000
20.3	1,0E+06	0,010	214,750	1 953,910	8,1E+06	7,218	214,750	10800,000	1,8E+06	25,511	612,000	10800,000	9,0E+05	26,830	611,250	10800,000
22.1	1,0E+06	22,500	498,500	10800,000	1,1E+06	19,659	498,500	10800,000	1,3E+06	26,877	677,500	10800,000	9,3E+05	26,214	669,500	10800,000
22.2	1,1E+06	17,901	437,000	10800,000	3,3E+06	20,976	437,000	10800,200	1,1E+06	38,516	842,332	10800,000	1,7E+06	38,295	844,332	10800,000
22.3	5,9E+05	0,010	185,500	927,660	8,9E+06	0,000	185,500	7 372,040	1,5E+06	30,560	650,000	10800,000	1,1E+06	36,963	650,000	10800,000
25.1	7,0E+05	21,599	533,000	10800,000	5,3E+05	22,254	532,500	10800,000	1,1E+06	29,265	782,000	10800,000	7,5E+05	28,866	776,000	10800,000

Continua na próxima página

Tabela 2 – continuação da página anterior

Instância	Correlated								Anti-correlated							
	GS				FER				GS				FER			
	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)	Nós	Gap (%)	z^*	Tempo (s)	Nós	*Gap (%)*	z^*	Tempo (s)	Nós	*Gap (%)*	z*	Tempo (s)
25.2	6,6E+05	24,594	498,333	10800,000	9,8E+05	18,788	500,333	10800,000	8,4E+05	38,914	963,999	10800,000	6,6E+05	37,716	965,999	10800,000
25.3	3,8E+06	3,518	180,500	10800,000	3,4E+06	7,064	180,500	10800,000	1,1E+06	30,331	744,750	10800,000	2,1E+06	34,869	743,500	10800,000
27.1	5,7E+05	28,093	596,000	10800,000	5,7E+05	24,833	598,000	10800,000	6,2E+05	29,322	792,000	10800,000	7,5E+05	28,225	783,000	10800,000
27.2	5,5E+05	28,899	544,333	10800,000	1,9E+06	26,148	544,333	10800,000	5,8E+05	40,093	1 041,670	10800,000	1,1E+06	39,936	1 046,670	10800,000
27.3	2,6E+06	6,374	239,750	10800,000	1,8E+06	11,366	239,750	10800,000	7,8E+05	31,581	798,750	10800,000	2,0E+06	36,995	798,750	10800,000
30.1	4,4E+05	26,278	701,500	10800,000	6,1E+05	23,618	696,500	10800,000	5,0E+05	31,920	935,000	10800,000	6,8E+05	30,541	925,000	10800,000
30.2	4,1E+05	31,930	575,999	10800,000	6,6E+05	23,148	575,999	10800,000	5,3E+05	39,926	1 118,670	10800,000	4,7E+05	38,234	1129,000	10800,000
30.3	1,0E+06	13,862	244,000	10800,000	7,4E+05	15,471	244,000	10800,000	6,1E+05	33,976	918,000	10800,000	3,9E+05	35,646	915,250	10800,000
33,1	3,6E+05	29,050	748,000	10800,000	4,2E+05	26,210	744,000	10800,000	4,9E+05	31,710	977,000	10800,000	4,2E+05	32,101	973,500	10800,000
33.2	3,4E+05	30,145	561,999	10800,000	8,1E+05	25,564	561,999	10800,000	4,1E+05	42,207	1 262,670	10800,000	1,3E+06	42,602	1 270,670	10800,000
33.3	1,0E+06	13,558	301,000	10800,000	1,4E+06	23,173	301,000	10800,000	4,5E+05	34,861	988,000	10800,000	5,6E+05	39,008	988,250	10800,000
35.1	3,4E+05	27,479	732,500	10800,000	3,6E+05	25,738	728,500	10800,000	3,4E+05	33,427	1022,000	10800,000	3,9E+05	32,709	1015,000	10800,000
35.2	3,9E+05	29,343	605,333	10800,000	6,2E+05	27,863	605,333	10800,000	3,9E+05	36,005	1 202,750	10800,000	7,0E+05	38,500	1 206,500	10800,000
35.3	8,3E+05	13,662	274,000	10800,000	6,3E+05	17,701	274,000	10800,000	5,8E+05	48,151	1 604,500	10800,000	1,3E+05	46,391	1607,000	10800,000

5 Considerações finais

Este trabalho estudou, implementou e analisou experimentalmente os modelos sugeridos por Galand e Spanjaard (2012) e Fernández et al. (2017), contribuindo para a compreensão dos mesmos. Procedeu-se experimentos com 39 instâncias de 3 e 4 objetivos, das classes *correlated* e *anti-correlated*.

Constatou-se que o modelo de Galand e Spanjaard (2012) apresentou, no geral, desempenho superior ao de Fernández et al. (2017), embora este último seja mais recente. Tal diferença de desempenho, contudo, diminui para 4 objetivos, sugerindo que, possivelmente, o modelo proposto por Fernández et al. (2017) possa se tornar mais competitivo com mais objetivos. Para validar esta hipótese, este trabalho necessita de uma série de complementos, como: realizar experimentos com mais objetivos (sugere-se 5, 8 e 10); testar instâncias com mais vértices (sugere-se até 50); e adotar outros critérios para gerar os pesos ω_i, $i \in P$, além do *k-centrum*, conforme descrito na subseção 4.1. Outro complemento importante é implementar algum dos modelos alternativos de Fernández et al. (2017), o qual reduz o número de restrições, a fim que se possa comparar com os modelos experimentados por este trabalho.

Referências

AGGARWAL, V.; ANEJA, Y.; NAIR, K. Minimal spanning tree subject to a side constraint. *Computers Operations Research*, v. 9, p. 287–296, 1982.

ALONSO, S. et al. Optimality conditions in preference-based spanning tree problems. *European Journal of Operational Research*, v. 198, p. 232–240, 2009.

ARROYO, J. E. C.; VIEIRA, P. S.; VIANNA, D. A grasp algorithm for the multi-criteria minimum spanning tree problem. *Annals of Operations Research*, v. 159, p. 125–133, 2008.

CHASSEIN, A.; GOERIGK, M. Alternative formulations for the ordered weighted averaging objective. *Information Processing Letters*, Elsevier, v. 115, n. 6, p. 604–608, 2015.

CHEN, G. et al. The multi-criteria minimum spanning tree problem based genetic algorithm. *Information Sciences*, v. 117, n. 22, p. 5050–5063, 2007.

CLIMACO, J. C.; PASCOAL, M. M. B. Multicriterio path and tree problems: discussion on exact algorithms and applications. *International Transactions in Operational Research*, p. 1–36, 2011.

CORLEY, H. Efficient spanning trees. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 45, 1985.

DAVIS-MORADKHAN, M. Multi-criterion optimization in minimum spanning trees. *Studia Informatica Universali*, v. 8, p. 185–208, 2010.

DAVIS-MORADKHAN, M.; BROWNE, W. N.; GRINDROD, P. Extending evolutionary algorithms to discover tri-criterion and non-supported solutions for the minimum spanning tree problem. In: *GECCO '09 – Genetic and Evolutionary Computational Conference, 2009, Montréal. Proceedings of the 11th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation (GECCO '09)*. [S.l.]: ACM, New York, 2009. p. 1829–1830.

DE, A.; DIAZ, E. D. A fuzzy ordered weighted average (owa) approach to result merging for metasearch using the analytical network process. In: IEEE. *Emerging Applications of Information Technology (EAIT), 2011 Second International Conference on*. [S.l.], 2011. p. 17–20.

FERNANDES, I. Graduação em Ciência da Computação, *Graduação em Ciência da Computação, Análise Experimental dos Algoritmos Exatos Aplicados ao Problema da Árvore Geradora Multiobjetivo*. Natal, RN, Brasil: [s.n.], 2016.

FERNÁNDEZ, E.; POZO, M. A.; PUERTO, J. Ordered weighted average combinatorial optimization: Formulations and their properties. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 169, p. 97–118, 2014.

FERNÁNDEZ, E. et al. Ordered weighted average optimization in multiobjective spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 260, n. 3, p. 886–903, 2017.

GALAND, L.; PERNY, P.; SPANJAARD, O. Choquet-based optimisation in multiobjective shortest path and spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, v. 204, p. 303–315, 2010.

GALAND, L.; SPANJAARD, O. Exact algorithms for owa-optimization in multiobjective spanning tree problems. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 7, p. 1540–1554, 2012.

HAMACHER, H.; RUHE, G. On spanning tree problems with multiple objectives. *Annals of Operations Research*, v. 52, p. 209–230, 1994.

HURWICZ, L. Optimality criteria for decision making under ignorance. *Cowles Commission Discussion Paper*, v. 370, p. 370, 1951.

KNOWLES, J. *Local-search and hybrid evolutionary algorithms for Pareto optimization*. Tese (Doutorado) — Department of Computer Science, University of Reading, Reading, UK, 2002.

KNOWLES, J.; CORNE, D. Approximating the nondominated front using the pareto archived evolution strategy. *European Journal of Operational Research*, v. 8, n. 2, p. 149–172, 2000.

KNOWLES, J.; CORNE, D. M-paes: A memetic algorithm for multiobjective optimization. In: *Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 1, p. 325– 332.

KNOWLES, J.; CORNE, D. Comparison of encodings and algorithms for multiobjective spanning tree problems. In: *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation*. [S.l.]: CEC01, 2001. p. 544–551.

KRUSKAL, J. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. In: *Proceedings of the American Mathematical Society*. [S.l.: s.n.], 1956. v. 7, n. 1, p. 48–50.

MAGNANTI, T. L.; WONG, R. T. Network design and transportation planning: Models and algorithms. *Transportation Science*, v. 18, p. 1–55, 1984.

MONTEIRO, S. M. D. Mestrado em Sistemas e Computação, *Algoritmos transgenéticos aplicados ao problema da árvore geradora biobjetivo*. Natal, RN, Brasil: [s.n.], fev. 2011.

MONTEIRO, S. M. D.; GOLDBARG, E. F. G.; GOLDBARG, M. C. A plasmid based transgenetic algorithm for the biobjective minimum spanning tree problem. In: *EVOCOP09 - European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization, 2009, Tübingen. Lecture Notes in Computer Science.* [S.l.]: Heidelberg: Springer, 2009. v. 5482, p. 49–60.

MONTEIRO, S. M. D.; GOLDBARG, E. F. G.; GOLDBARG, M. C. A new transgenetic approach for the biobjective spanning tree problem. In: *IEEE CEC 2010 Congress on Evolutionary Computation, 2010, Barcelona. Proceedings of IEEE CEC 2010 Congress on Evolutionary Computation.* [S.l.]: Piscataway, IEEE, 2010. v. 1, p. 519–526.

OGRYCZAK, W.; ŚLIWIŃSKI, T. On solving linear programs with the ordered weighted averaging objective. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 148, n. 1, p. 80–91, 2003.

PERNY, P.; SPANJAARD, O. A preference-based approach to spanning trees and shortest paths problems. *European Journal of Operational Research*, v. 162, p. 584–601, 2005.

PRIM, R. C. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, v. 36, p. 1389–1401, 1957.

PUGLIESE, L. D. P.; GUERRIERO, F.; SANTOS, J. F. Dynamic programming for spanning tree problems: application to the multi-objective case. *Optimization Letters*, v. 9, p. 437–450, 2015.

RAMENTOL, E. et al. Ifrowann: imbalanced fuzzy-rough ordered weighted average nearest neighbor classification. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 23, n. 5, p. 1622–1637, 2015.

RAMOS, R. M. et al. The problem of the optimal biobjective spanning tree. *European Journal of Operational Research*, v. 111, p. 617–628, 1998.

ROCHA, D. A. M.; GOLDBARG, E. F. G.; GOLDBARG, M. C. A memetic algorithm for the biobjective minimum spanning tree problem. In: *6th European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization, 2006. Budapeste, Lecture Notes in Computer Science*. [S.l.]: Heidelberg, Springer Berlin, 2006. v. 3906, p. 222–233.

ROCHA, D. A. M.; GOLDBARG, E. F. G.; GOLDBARG, M. C. A new evolutionary algorithm for the bi-objective minimum spanning tree. In: *SDA'07 Seventh International Conference on Intelligent Systems Design and Applications, 2007, Rio de Janeiro. Proceedings of ISDA'07.* [S.l.]: EEE Computer Society, 2007. v. 1, p. 735–740.

RUZIKA, S.; HAMACHER, H. W. A survey on multiple objective minimum spanning tree problems. In: *Lerner, J.,Wagner, D., Zweig, K. (eds) Algorithmics of Large and Complex Networks. Springer-Verlag, Berlin.* [S.l.: s.n.], 2009. p. 104–116.

SOURD, F.; SPANJAARD, O. A multiobjective branch-and-bound: application to the biobjective spanning tree problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 20, p. 472–484, 2008.

STEINER, S.; RADZIK, T. *Solving the biobjective minimum spanning tree problem using a k-best algorithm.* [S.l.], 2003.

TAMIR, A. The k-centrum multi-facility location problem. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 109, n. 3, p. 293–307, 2001.

WANG, H.; ZHANG, Y.; QIAN, G. Multiple binary classifiers fusion using induced intuitionistic fuzzy ordered weighted average operator. In: IEEE. *Information and Automation (ICIA), 2011 IEEE International Conference on.* [S.l.], 2011. p. 230–235.

YAGER, R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, v. 18, n. 1, p. 183–190, 1988.

ZHOU, G.; GEN, M. A multiobjective branch-and-bound: application to the biobjective spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, v. 114, p. 141–152, 1999.