

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

γ доверительная вероятность, $\gamma\%$ уровень доверия

α вероятность ошибки, $\alpha\%$ уровень значимости, $\alpha = 1 - \gamma$

ε - предельная ошибка выборки, точность.

В задачах на ДИ в ответе надо приводить текстовые пояснения по найденному интервалу с привязкой к вопросу задачи (пример в 13.1-13.3)

Одна репрезентативная выборка из нормальной генеральной совокупности

	Оцениваемый параметр генеральной совокупности	предположения и ограничения	вид интервала
1	Генеральное среднее	Известно генеральное стандартное отклонение σ	$I_\gamma(\bar{X} - \varepsilon; \bar{X} + \varepsilon), \varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2	Генеральное среднее	Неизвестно σ , используется выборочное стандартное отклонение s .	$I_\gamma(\bar{X} - \varepsilon; \bar{X} + \varepsilon), \varepsilon = t_{n-1, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$
3	Генеральное среднее	Неизвестно σ , но выборка большая.	$I_\gamma(\bar{X} - \varepsilon; \bar{X} + \varepsilon), \varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$
4	Генеральная доля	Выборка большая.	$I_\gamma(w_B - \varepsilon; w_B + \varepsilon), \text{ где } \varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{w_B(1-w_B)}{n}}$
5.1	Генеральная дисперсия		$I_\gamma\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}}; \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}}\right)$
5.2	Генеральное стандартное отклонение		$I_\gamma\left(\sqrt{\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}}}; \sqrt{\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}}}\right)$
6	Генеральная дисперсия	Выборка большая.	$I_\gamma\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{(n-1) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-1)}}; \frac{(n-1) \cdot s^2}{(n-1) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-1)}}\right)$

Две независимые генеральные совокупности, выборки репрезентативны

7	Разность долей двух независимых генеральных совокупностей	Две большие выборки.	$I_\gamma(w_{B1} - w_{B2} - \varepsilon; w_{B1} - w_{B2} + \varepsilon),$ $\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{w_{B1}(1-w_{B1})}{n_1} + \frac{w_{B2}(1-w_{B2})}{n_2}},$ $w_{B1} = \frac{k_1}{n_1}, w_{B2} = \frac{k_2}{n_2}$ – две выборочные доли.
8	Разность генеральных средних	Известны генеральные стандартные отклонения.	$I_\gamma(\bar{X} - \bar{Y} - \varepsilon; \bar{X} - \bar{Y} + \varepsilon), \varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
9	Разность генеральных средних	Неизвестны генеральные стандартные отклонения, но предполагается, что они равны.	$I_\gamma(\bar{X} - \bar{Y} - \varepsilon; \bar{X} - \bar{Y} + \varepsilon), \varepsilon = t_{\alpha/2} \sqrt{\tilde{s}^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)},$ $\tilde{s}^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, t_{\alpha/2}$ - критическая точка распределения Стьюдента при $n_1 + n_2 - 2$ степенях свободы.

Парные выборки

10	Разность генеральных средних: ДИ для матожидания по выборке d_1, d_2, \dots, d_n , где $d_i = X_i - Y_i$, а доверительные интервалы для генерального среднего (матожидания) мы уже изучали.		
----	--	--	--

Все задачи объединены одной историей:
Один из магазинов торговой сети анализирует поведение своих покупателей. Предполагая, что все интересующие нас данные распределены нормально в генеральной совокупности, выборки репрезентативны, генеральные совокупности где надо независимы, определить:

- 13.1

Нас интересует средний чек постоянного покупателя магазина, при этом нам известно, что стандартное отклонение величины чека для всех постоянных покупателей магазина равно 500 рублей (*т.е. в ГС*).

По случайной выборке из двенадцати постоянных покупателей найден средний чек, который оказался равен 7256 рублей.

а) Построить 95% доверительный интервал для среднего чека всех постоянных покупателей.

б) Если мы захотим построить 99% доверительный интервал – что произойдет с его длиной и почему?

в) Построить 99% доверительный интервал.

г) Что вы можете сказать о таком понятии, как «100% доверительный интервал»?
- 13.2

В условиях предыдущей задачи в пункте в) мы смогли оценить средний чек с доверительной вероятностью 0.99 с точностью до ± 372.391 . Теперь мы хотим повысить точность оценки и уменьшить предельную ошибку выборки.

а) Каким должен быть (*минимальный*) объем выборки чеков постоянных покупателей, чтобы длина 99% доверительного интервала стала (*меньше либо*) равна 600 руб?

б) Каким должен быть объем выборки чеков постоянных покупателей, чтобы длина 99% доверительного интервала уменьшилась еще в два раза по сравнению с пунктом а)?
- 13.3

Еще один параметр, который нам важен – как часто постоянные покупатели приходят в магазин.

По выборке из 15 покупателей старше 45 лет было найдено, что среднее количество посещений магазина за год равно 57 при стандартном отклонении 11.

а) Найти 95% доверительный интервал для среднего количества посещений магазина за год для всех постоянных покупателей старше 45 лет.

б) Можем ли мы определить объем выборки, при котором длина 95% доверительного интервала уменьшится в два раза по сравнению с пунктом а)?

в) Найти 98% доверительный интервал для генерального стандартного отклонения.
- 13.4

Так же было опрошено 8 постоянных покупателей 30 - 45 лет, количество посещений за год для них оказалось таким:

посетитель №	1	2	3	4	5	6	7	8
кол-во посещений	60	54	88	39	87	65	55	72

а) Найти 90% доверительный интервал для среднего количества посещений магазина за год для всех постоянных покупателей этой категории.

б) Предположив, что стандартные отклонения в двух генеральных совокупностях равны, построить 99% доверительный интервал для разности матожиданий количества посещений магазина покупателями в категориях 30 – 45 лет и 45+ лет.
- 13.5

Нас интересует время, которое покупатели проводят в магазине. По случайной выборке из 900 человек найдены среднее время, равное 25 минутам, и стандартное отклонение, равное 6 минутам.

а) Построить 98% доверительный интервал для среднего времени, которое покупатель проводит в магазине.

б) Можем ли мы определить объем выборки, при котором длина 98% доверительного интервала уменьшится в три раза по сравнению с пунктом а)?

в) Найти объем выборки, при котором длина 98% доверительного интервала уменьшится в три раза по сравнению с пунктом а), если предположить, что выборочные характеристики новой выборки останутся прежними.

г) Построить 97% доверительный интервал для стандартного отклонения.
- 13.6

Из 500 опрошенных постоянных покупателей 100 отметили, что они полностью довольны обслуживанием в магазине.

а) Найти 99% ДИ для доли полностью довольных обслуживанием покупателей среди всех.

б) Каким должен быть объем новой выборки $n_б$, если мы хотим, чтобы 99% доверительный интервал для доли уменьшился в 2 раза по сравнению с предыдущим пунктом, если предположить, что в новой выборке выборочная доля не изменится?

в) Каким должен быть объем выборки $n_в$, если мы хотим, чтобы 99% доверительный интервал для доли уменьшился не менее чем в 2 раза по сравнению с пунктом а) при любом значении выборочной доли в новой выборке?
- 13.7

Из 600 опрошенных покупателей, НЕ являющихся постоянными, 110 отметили, что они полностью довольны обслуживанием в магазине.

Построить 98% доверительный интервал для разности долей довольных покупателей среди тех, кто не является

	постоянным, и среди постоянных (см предыдущий пункт). Есть ли статистически значимые основания считать, что доли различаются?												
13.8	<p>В таблице приведены данные по 5 покупателям, месяц назад получившим дисконтные карточки. В первой строке – траты в течение месяца до получения карточки, во второй – в течение месяца после.</p> <p>Построить 98% доверительный интервал для разности матожиданий ежемесячных трат до и после получения карточки.</p> <p>Есть ли статистически значимые основания полагать, что после получения карточки средние траты меняются?</p> <table><tr><td>до получения</td><td>17000</td><td>25000</td><td>19000</td><td>32000</td><td>14000</td></tr><tr><td>после</td><td>22000</td><td>21000</td><td>27000</td><td>39000</td><td>18000</td></tr></table>	до получения	17000	25000	19000	32000	14000	после	22000	21000	27000	39000	18000
до получения	17000	25000	19000	32000	14000								
после	22000	21000	27000	39000	18000								
13.9	<p>1) по 13.1 в) – есть ли статистически значимые основания считать, что средний чек по постоянным покупателям изучаемого магазина отличается от среднего по сети, равного 6500?</p> <p>2) по 13.4 б) – есть ли статистически значимые основания считать, что постоянные покупатели 45+ и 30-45 в среднем ходят в магазин разное количество раз в год?</p> <p>3) по 13.6 а) есть ли статистически значимые основания считать, что доля полностью довольных обслуживанием постоянных покупателей данного магазина отличается от аналогичной доли по сети, равной 0.25?</p>												