Высшая инженерная школа РУТ (МИИТ)

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА,
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ, работа с таблицами критических точек.

Критическая точка уровня α (верхняя процентная точка) - такое число x_α, что вероятность того, что СВ X примет значение большее этого числа, равна α: $P(X > x_\alpha) = \alpha$.
Другими словами – это число отсекает справа хвост объема α.

Для стандартного нормального закона мы с этим уже работали:
критическая точка уровня α обозначается как z_α и является решением уравнения $P(Z > z_\alpha) = \alpha$, которое сводится к работе с таблицей: $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$.

(задачу 12.7 постарайтесь решить к следующей лекции, в указаниях она относительно подробно разобрана)

12.1 Известно, что среднее ожидаемое количество баллов по контрольной работе равно 60, стандартное отклонение равно 15. Начиная с какого количества баллов надо ставить отлично, если мы хотим, чтобы отличных оценок было 15.87%? Чему равны z_α и α в этой задаче?
(кол-во баллов подчинено НЗР, может быть дробным)

12.2 Семинарист знает, что среднее ожидаемое количество баллов по экзаменационной контрольной работе равно 40, стандартное отклонение равно 6. Пять процентов лучших и пять процентов худших работ будут перепроверяться лектором. В каких пределах должны находиться баллы за работу для того, чтобы ее проверял только семинарист? Какие критические точки используются в этой задаче?
(кол-во баллов подчинено НЗР, может быть дробным)

Будем говорить, что СВ $T(k)$ распределена по закону Стьюдента (t-распределение), если $T(k) = \dfrac{Z_0}{\sqrt{\frac{1}{k}(Z_1^2+\dots+Z_k^2)}}$, где

$Z_0 \dots Z_k$ - независимые стандартные нормальные СВ.
Распределение Стьюдента зависит от параметра k - это натуральное число, называется числом степеней свободы.
В таблице для разных степеней свободы указаны такие значения $t_{k,\alpha}$, что $P\big(T(k) > t_{k,\alpha}\big) = \alpha$ – т.е сразу даны критические точки распределения Стьюдента с числом степеней свободы k.
Для критической точки должны быть указаны число степеней свободы, встречаются разные обозначения:
$t_{k,\alpha} = t(k)_\alpha = t_\alpha(k)$ и тд.

12.3 а) Для распределения Стьюдента с 9 степенями свободы найти критическую точку уровня 0.025.
(*найти $t_{k=9,\alpha=0.025}$, найти А из условия $P(T(9) > A) = 0.025$*).
б) Найти B из условия $P(|T(15)| > B) = 0.1$. Критическую точку какого уровня задает B?
в) Найти C из условия $P(T(4) < C) = 0.001$. Критическую точку какого уровня использовали при решении?
г) Оценить α если $t_{k=20,\alpha} = 3$
д) Оценить D если $P(T(10) < D) = 0.0075$
е) Оценить E если $P(|T(22)| > E) = 0.03$

При $k \to \infty$ вместо распределения Стьюдента можно использовать стандартное нормальное: $T(\infty) \to Z \sim N(0,1)$ – см последнюю строчку в таблице.

12.4 а) Для распределения Стьюдента с *k=1000* найти критическую точку уровня 0.025.
б) Найти B из условия $P(|T(2000)| > B) = 0.1$. Критическую точку какого уровня задает B?
в) Найти C из условия $P(T(3000) < C) = 0.001$. Критическую точку какого уровня использовали при решении?
г) Найти α если $t_{k=4000,\alpha} = 3$

СВ подчиняется закону хи-квадрат с числом степеней свободы k,
если $\chi^2(k) = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2$, где все слагаемые – независимые стандартные нормальные СВ.
В таблице даны значения $P\big(\chi^2(k) > \chi^2_{k,\alpha}\big) = \alpha$ - критические точки распределения хи-квадрат с числом степеней свободы k. Встречаются обозначения $\chi^2_{\alpha,k} = \chi^2(k)_\alpha$ и тд.

12.5 а) Для распределения хи-квадрат с числом степеней свободы 11 найти критическую точку уровня 0.01.

	б) Найти B из условия $P(\chi^2(25) < B) = 0.01$. Критическую точку какого уровня задает B? в) Найти симметричный по вероятности промежуток, в котором $\chi^2(7)$ оказывается с вероятностью 0.98. г) Оценить α если $\chi^2_{4,\alpha} = 10$. д) Оценить D если $P(\chi^2(13) < D) = 0.015$. е) Оценить E если $P(\chi^2(8) < E) = 0.03$. Указание: разбирайтесь с этими вопросами по графику.
При $n \to \infty$ вместо распределения хи-квадрат *можно использовать нормальное:* $\chi^2(n) \to N\left(n, \sqrt{2n}^2\right)$	
12.6	а) Для распределения хи-квадрат с $n = 1250$ степеней свободы найти критическую точку уровня 0.01. б) Найти B из условия $P(\chi^2(2000) > B) = 0.1$. Критическую точку какого уровня задает B? в) Найти C из условия $P(\chi^2(3000) < C) = 0.001$. Критическую точку какого уровня использовали при решении? г) Найти α если ${\chi^2}_{4000,\alpha} = 4100$.
Вводная задача к теме Доверительные интервалы, если у вас получится ее решить, то вам будет легче понять материал соответствующей лекции. Здесь в чистом виде работа с нормальным законом, надо просто все посчитать и все, никакого творчества.	
12.7	а) Для случайной величины $T \sim N(50, 10^2)$ найти $P(45 < T < 55)$. б) Для случайной величины $T \sim N(50, 10^2)$ найти такой симметричный относительно матожидания интервал, в который T попадет с вероятностью $\gamma = 0.9$. *(Другими словами: найти такое число ε, для которого будет выполняться равенство $P(50 - \varepsilon < T < 50 + \varepsilon) = \gamma = 0.9$* *Или еще мы это обозначали как $P(T \in 50 \pm \varepsilon) = \gamma = 0.9$.* *Или – отрезать левый и правый хвост распределения общим объемом $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$)* в) Даны 16 независимых случайных величин $Y_i \sim N(950; 60^2)$, $i = 1..16$. Для случайной величины $\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots Y_{16}}{16}$ найти $P(920 < \bar{Y} < 980)$. (указание – если мы знаем распределение Y_i, то мы знаем и распределение $\bar{Y}$). г) Для той же СВ $\bar{Y}$ найти такой симметричный относительно матожидания интервал, в который $\bar{Y}$ попадет с вероятностью $\gamma = 0.9$. (обратите внимание, что у Y_i и $\bar{Y}$ одно и то же матожидание) д) Решить эту задачу в общем виде: Даны n независимых случайных величин $X_i \sim N(m; \sigma^2)$, $i = 1..n$. Для СВ $\bar{X}$ найти такой симметричный относительно матожидания интервал, в который $\bar{X}$ попадет с вероятностью γ. е) Найти вероятность $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Дополнительная задача	
12.8	похожа на 11.20 Рассмотрим две компании А и Б, состоящие из двух офисов – центрального и регионального. Представители обеих компаний участвуют в отраслевой конференции и выступают в сессии, посвященной вопросам равноправия в отрасли. Представитель компании А утверждает, что женщины, работающие в компании А, получают в среднем больше, чем в компании Б. Аргументы такие: он приводит средние зарплаты женщин в центральных офисах – в компании А они выше. Затем он приводит средние зарплаты в региональных офисах – в компании А они снова выше. Однако представитель компании Б приводит данные не по отдельным офисам, а сразу по всей компании – своей и А, и оказывается, что в компании Б средняя зарплата женщин выше. Может ли такое быть? (без всяких фокусов, в ответ либо привести математическое доказательство, что это невозможно, либо пример таких конкретных зарплат)
ответы и указания	
12.1	$X = m + Z \cdot \sigma$, $x_\alpha = m + z_\alpha \cdot \sigma$. В этой задаче: α = 0.1587, $z_{0.1587} = 1$, $x_\alpha = 60 + 15 \cdot 1 = 75$
12.2	*$m \pm z_{0.05} \cdot \sigma$. Критическая точка $z_{0.05}$ (можно так же сказать, что используем еще одну точку $z_{0.95} = -z_{0.05}$)* Ответ: α =0.05, $z_{0.05} \approx 1.645$, $x_{0.95} = 40 - 6 \cdot 1.645 = 30.13$, $x_{0.05} = 40 + 6 \cdot 1.645 = 49.87$
12.3	Ответ: а) $t_{k=9,\alpha=0.025} = 2{,}262$, б) $t_{k=15,\alpha=0.05} = 1.753$,