Géométrie

Didier Müller, août 2013

www.nymphomath.ch

Table des matières

1. Géométrie élémentaire

1.1. Le triangle

Définitions

Un triangle ayant deux côtés de même longueur (ou deux angles de même grandeurs) est dit **isocèle**.

Un triangle ayant ses trois côtés de même longueur (ou ses trois angles de même grandeurs) est dit **équilatéral**.

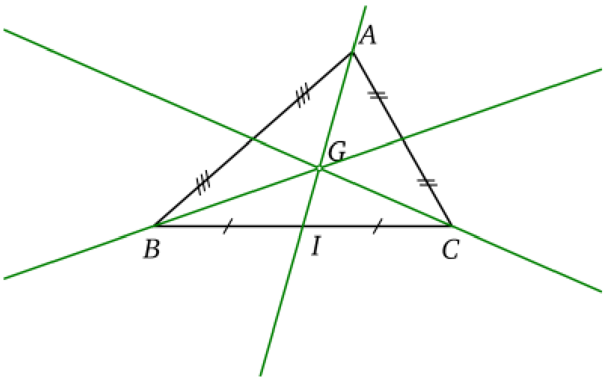
Un triangle ne présentant pas de symétrie particulière est dit **scalène**.

Un triangle présentant un angle droit est qualifié de triangle **rectangle**. Dans ce cas, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse**.

Médianes

On appelle **médiane** du triangle toute droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé. Chacune des trois médianes divise le triangle en deux triangles d'aires égales.

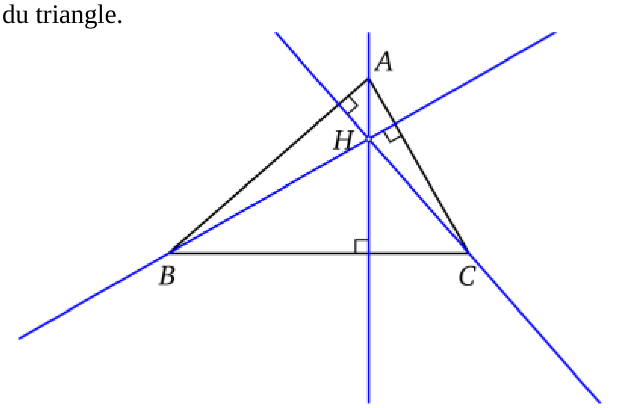
Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point G qui est le **centre de gravité** triangle. Si le triangle était une plaque solide homogène, on pourrait le faire tenir en équilibre sur une pointe en le posant exactement sur le point G.



Hauteurs

On appelle **hauteur** l'une des trois droites passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé. L'intersection de la hauteur et du côté opposé s'appelle le *pied* de la hauteur.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection s'appelle **l'orthocentre** du triangle.



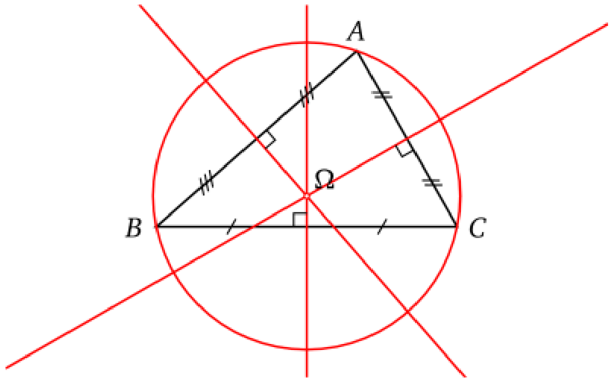
Médiatrices et cercle circonscrit

La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

On appelle *médiatrice* du triangle l'une quelconque des médiatrices des trois segments [AB], [AC] et [BC].

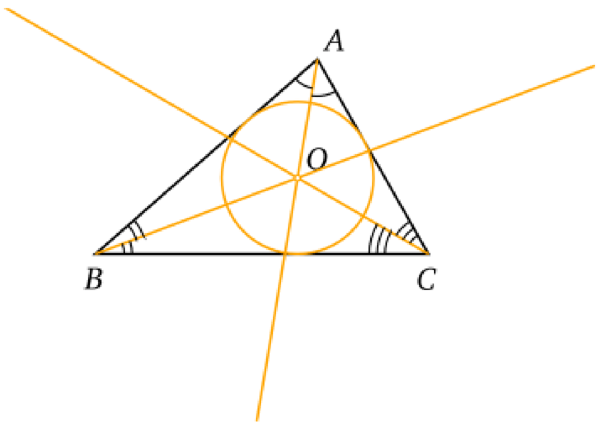
Si on note Ω l'intersection des deux médiatrices des segments [AB] et [AC] alors Ω est à égale distance de A, B et C : par suite Ω est aussi sur la médiatrice du segment [BC]. Les trois médiatrices d'un triangle sont donc concourantes.

Leur point d'intersection est le centre du cercle **circonscrit** au triangle. C'est le seul cercle passant à la fois par les trois sommets du triangle.



Bissectrices et cercle inscrit

La **bissectrice** d'un secteur angulaire est la demi-droite issue du sommet de l'angle qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure. Elle forme de ce fait l'axe de symétrie de cet angle.
Les bissectrices du triangle sont simplement les trois bissectrices des angles du triangles.
La bissectrice de deux droites est l'ensemble des points à égale distance des deux droites : de ce fait le point d'intersection *O* de deux bissectrices est à égale distance des droites (*AB*), (*AC*) et (*BC*). Ce point est donc sur la troisième bissectrice : les trois bissectrices sont concourantes.
D'après les propriétés des bissectrices, on peut tracer un cercle de centre *O* qui est tangent aux trois droites (*AB*), (*AC*) et (*BC*) : c'est le cercle **inscrit** dans le triangle.



1.2. Quelques théorèmes

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle (qui possède un angle droit) le carré de l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Pythagore de Samos
(Samos, env. -569 - env. -475)

Ce théorème est nommé d'après **Pythagore de Samos** qui était un mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce antique.
Que la propriété de Pythagore soit connue depuis l'antiquité est un fait dont on peut trouver trace dans l'histoire. Il suffit pour cela d'observer la corde à treize nœuds dont se servaient les arpenteurs égyptiens et dont on retrouve des illustrations dans de nombreuses représentations des travaux des champs. Cette corde permettait de mesurer des distances mais aussi de construire, sans équerre, un angle droit puisque les 13 nœuds (et les douze intervalles) permettaient de construire un triangle dont les dimensions étaient (3 - 4 - 5), triangle qui s'avère être rectangle. Cette corde restera un outil de géomètre pendant encore tout le Moyen Âge.
La plus ancienne représentation de triplets pythagoriciens (triangle rectangle dont les

côtés sont entiers) se trouve sur des mégalithes (vers 2500 av. J.-C., Grande-Bretagne). On retrouve aussi la trace de triplets pythagoriciens sur des tablettes babyloniennes (tablette Plimpton 322, vers 1800 av. J.-C.) qui prouvent que, plus de 1000 ans avant Pythagore, les géomètres connaissaient l'existence de triplets pythagoriciens.
Mais entre la découverte d'une propriété : « on observe que certains triangles rectangles vérifient cette propriété », sa généralisation : « il semble que tous les triangles rectangles vérifient cette propriété » et sa démonstration : « il est vrai que tous les triangles rectangles (et eux seuls) dans un plan euclidien vérifient cette propriété », il faut souvent attendre plusieurs siècles.
Les preuves historiques de la vie de Pythagore sont déjà si rares qu'il n'est pas étonnant qu'on ne puisse pas lui attribuer avec certitude la paternité de la démonstration. La première trace écrite figure dans les *Éléments* d'**Euclide** sous la forme suivante :

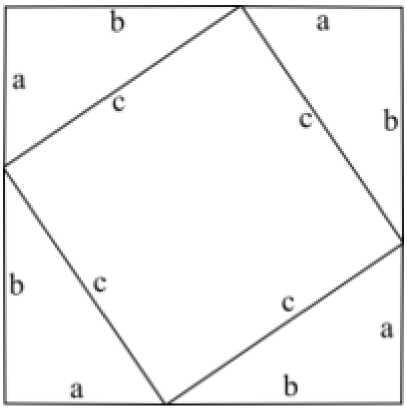
Euclide d'Alexandrie
(?, env. -325 -
Alexandrie, -265)

> « Aux triangles rectangles, le carré du côté qui soutient l'angle droit, est égal aux carrés des deux autres côtés. »
>
> (Livre I, proposition XLVII)

Une preuve moderne

Considérons un triangle rectangle dont les côtés sont de longueurs a, b et c. Ensuite recopions ce triangle trois fois et plaçons le triangle et ses copies de manière à avoir le côté a de chacun aligné au côté b d'un autre, et pour que les jambes des triangles forment un carré dont le côté est $a+b$, comme dans l'image ci-dessous.

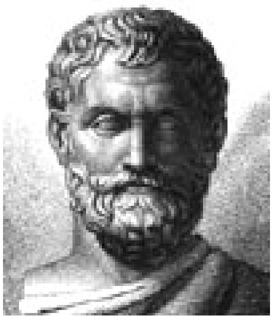
Le mathématicien américain Elisha Scott Loomis (1852-1940) proposa 370 démonstrations du théorème de Pythagore dans la seconde édition de son livre publié en 1940 « The Pythagorean proposition ».



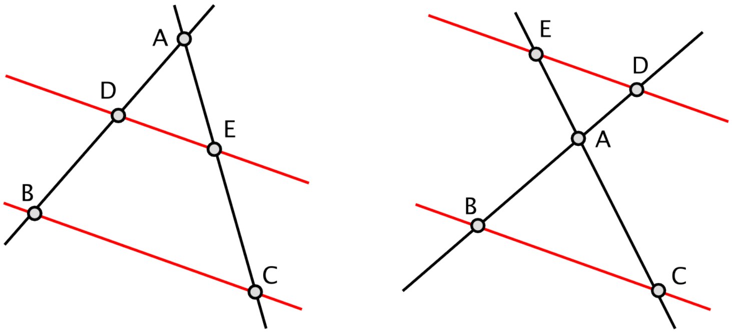
Puis, nous essayons de trouver l'aire du carré formé par les côtés c. Évidemment, c'est c^2, mais c'est aussi égal à la différence entre l'aire du carré extérieur et la somme des aires des triangles. L'aire du carré est $(a+b)^2$ (car son côté est $a+b$) et l'aire totale des triangles est quatre fois l'aire d'un seul, c'est-à-dire $4(ab/2)$, donc la différence est $(a+b)^2 - 4(ab/2)$, ce qu'on peut simplifier comme $a^2+2ab+b^2-2ab$, ou bien a^2+b^2. Nous avons démontré que l'aire du carré de côté c est égale à a^2+b^2 ; en effet, $c^2=a^2+b^2$.

Théorème de Thalès

Le **théorème de Thalès** est un théorème de géométrie, attribué selon la légende au mathématicien et philosophe grec Thalès de Milet ; en réalité Thalès s'est davantage intéressé aux angles opposés dans des droites sécantes, aux triangles isocèles et aux cercles circonscrits. Les Anglo-Saxons nomment d'ailleurs théorème de Thalès une propriété plus proche de la réalité historique - voir théorème de Thalès (cercle).
Cette propriété de proportionnalité était connue des Babyloniens. Mais la première démonstration de ce théorème est attribuée à Euclide qui la présente dans ses Éléments (proposition 2 du livre VI) : il le démontre par proportionnalité d'aires de triangles de hauteur égale.
Le Théorème de Thalès sert notamment à calculer des longueurs dans un triangle, à condition d'avoir deux droites parallèles.



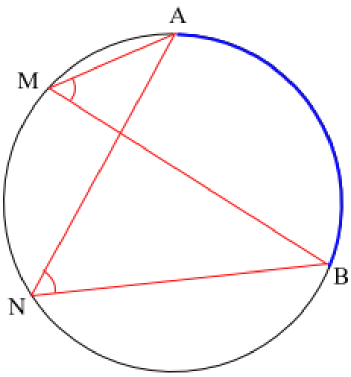
Thalès de Milet
(Milet, env. -624 -
Milet, env. -547)



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Théorème de l'angle inscrit

Deux angles inscrits dans un cercle interceptant le même arc de cercle ont la même mesure.

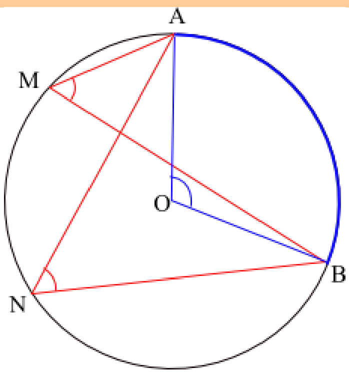


Théorème de Thalès (cercle)

Un triangle inscrit dans un cercle et dont un côté est un diamètre est un triangle rectangle.

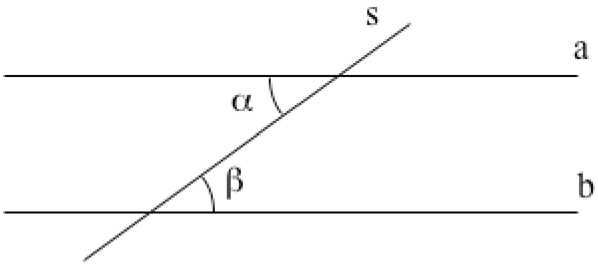
Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre

Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit qui intercepte le même arc.



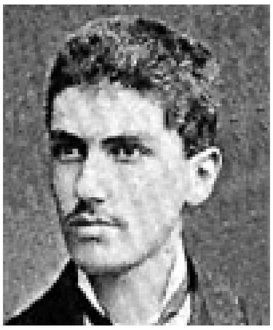
Angles alterne-interne

Sur la figure suivante, les droites a et b sont parallèles, s est une sécante quelconque.



Les angles α et β sont égaux et appelés **angles alterne-interne**.

Théorème de Pick

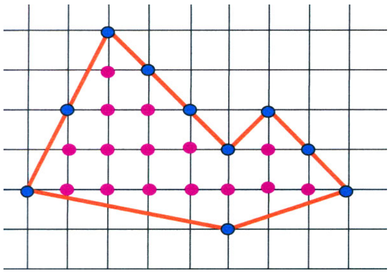


Georg **Pick**
(Vienne, 1859 –
Theresienstadt, 1942)

Soit un polygone construit sur une grille de points équidistants (c'est-à-dire des points de coordonnées entières) tel que tous ses sommets soient des points de la grille ; le **théorème de Pick** fournit une formule simple pour calculer l'aire A de ce polygone en se servant du nombre i de *points intérieurs* du polygone et du nombre b de *points du bord* du polygone :

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

Dans l'exemple ci-dessous, l'aire du polygone est $A = 15 + \frac{10}{2} - 1 = 19$.



Remarque : le polygone ne doit pas être troué.

1.3. Mini-formulaire

Carré Diagonale = $\sqrt{2} \cdot c$ Aire = c^2

Triangle Aire = $\dfrac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2}$

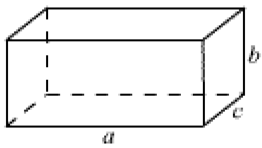
Triangle équilatéral Hauteur = Aire = (voir ex 1.2)

Cercle, disque Périmètre = $2 \pi r$ Aire = πr^2

Cube Grande diagonale = $\sqrt{3} \cdot c$ Aire = $6 c^2$ Volume = c^3

Sphère Aire = $4 \pi r^2$ Volume = $\frac{4}{3} \pi r^3$

Parallélépidède rectangle

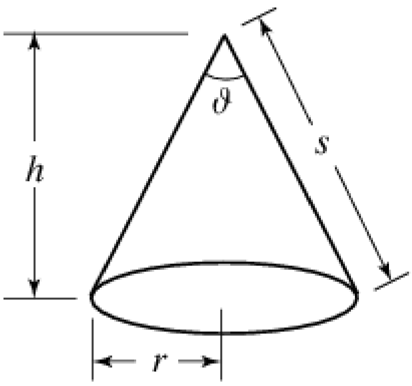


Grande diagonale = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Aire = 2(*ab* + *ac* + *bc*)

Volume = *abc*

Cône circulaire droit (ou cône de révolution)



Apothème du cône : $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{s}$

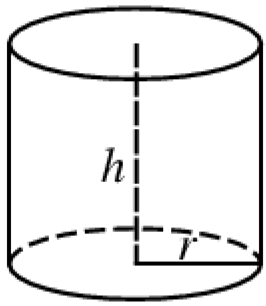
Angle de développement : $\phi = 2 \pi \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Aire latérale = $\pi r s = \frac{1}{2} s^2 \phi$

Aire totale = $\pi r (r + s)$

Volume = $\frac{\pi}{3} r^2 h$

Cylindre circulaire droit (ou cylindre de révolution)



Aire latérale = $2\pi r h$

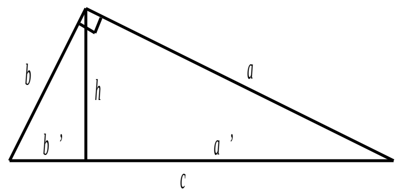
Aire totale = $2\pi r(r+h)$

Volume = $\pi r^2 h$

1.4. Exercices

Exercice 1.1

Démontrez **le théorème de la hauteur** qui dit que, dans un triangle rectangle, $h^2 = a'b'$.



Attention ! Ce théorème ne marche qu'avec des triangles rectangles !

Exercice 1.2

Quelle est la valeur de la hauteur h d'un triangle équilatéral de côté a ?
Que vaut son aire A ?

Exercice 1.3

Un pare-brise est balayé par deux essuie-glaces de longueur L articulés autour de deux points distants de L. Chacun d'eux couvre ainsi un demi-disque. Quelle est la surface totale balayée ?

Exercice 1.4

Soit un triangle inscrit dans un cercle de rayon 15. Un de ses côtés passe par le centre du cercle. Un autre de ses côtés a une longueur de 24. Quelle est la longueur du troisième côté ?

Exercice 1.5

On dispose d'une corde d'une longueur $\ell = \pi$. Parmi les trois figures géométriques suivantes, laquelle doit-on former avec la corde pour couvrir la plus grande surface : un triangle équilatéral, un carré ou un cercle ?
Calculez les trois aires et comparez !

Exercice 1.6

Depuis la Terre, la Lune et le Soleil semblent à peu près de même grosseur. Sachant que le Soleil est environ 387 fois plus éloigné que la Lune, combien faudrait-il de Lunes pour occuper un volume équivalent à celui du Soleil ?

Exercice 1.7

Soit un cube d'arête a.

a. Calculez le volume de la sphère circonscrite au cube.
b. Calculez le volume de la sphère inscrite dans le cube.
c. Calculez l'aire de la sphère tangente aux douze arêtes du cube.

Exercice 1.8

Soit un cylindre de rayon r inscrit dans un cône circulaire droit de hauteur H et de rayon de base R.

a. Calculez le volume V du cylindre.
b. Calculez son aire latérale A.

Exercice 1.9

Les diagonales d'un losange ont des longueurs de 8 et 18 cm. Comparez les volumes des solides engendrés par la rotation du losange autour de...

a. sa petite diagonale
b. sa grande diagonale

Exercice 1.10

Calculez le volume d'un cône circulaire droit de hauteur h inscrit dans une sphère de rayon R.

Exercice 1.11

Un lieu géométrique désigne l'ensemble des points du plan ou de l'espace possédant une certaine propriété.

Exemple : le lieu géométrique des points M dont la distance à un point fixe C est égale à R est le cercle de centre C et de rayon R.

Construisez le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment [AB] sous un angle de 30°.

Exercice 1.12

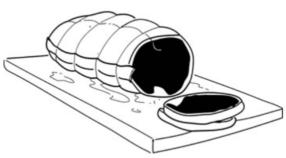
Démontrez le théorème de Pick. Procédez par étape :

1. Prouvez que la formule fonctionne pour des rectangles.
2. Prouvez alors que la formule fonctionne pour des triangles rectangles.
3. Montrez que si la formule fonctionne pour deux polygones ayant un bord commun, elle fonctionne aussi pour le polygone obtenu en éliminant entre eux cette frontière commune.
4. Concluez pour les polygones qui peuvent être « découpés » en triangles rectangles.

Exercice 1.13

Essayez d'adapter la formule de Pick pour la rendre utilisable dans les cas où le polygone a un ou plusieurs « trous ». Ces trous seront évidemment des polygones ayant aussi leurs sommets sur la grille.

Exercice 1.14



Source de l'exercice :
Les maths au quotidien, p.66

Dans votre livre de recettes favori, il est écrit de faire cuire un rôti au foru sur une grille à raison de 12 minutes par livre (500 g) à 240 °C. Vous achetez chez votre boucher une belle pièce de 1.2 kg. Avant de la mettre au four, vous prenez ses mesures : la pièce se présente comme un cylindre non pas circulaire mais plutôt ovale de 19 cm de longueur et 33 cm de circonférence.

1. Quel sera le temps de cuisson du rôti pour qu'il soit cuit à souhait selon le livre de cuisine ?
2. Quelle est l'aire de la surface latérale de la viande en contact avec l'air chaud ?

Le rôti était parfait. Le mois suivant, vous invitez vos voisins et décidez de refaire la même recette. Vous retournez chez votre boucher pour lui acheter à nouveau une pièce de 1.2 kg. Pourtant, la forme est cette fois-ci différente : elle se présente toujours comme un cylindre ovale, mais elle mesure 26 cm de long et 28 cm de circonférence. Comme le poids est le même, vous la faites logiquement cuire le même temps que l'autre rôti (voir question 1). Vous écartez comme de coutume les extrémités bien cuites du rôti et en observant les tranches centrales, c'est la déception ! Le rôti est trop cuit ! Pourquoi ?

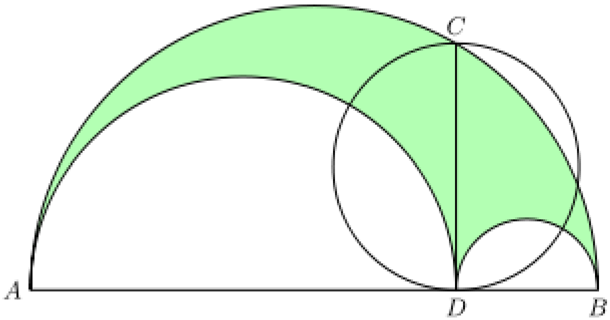
3. Que peut-on dire des volumes des deux rôtis ?
4. Quelle est l'aire de la surface latérale du second rôti ?
5. Expliquez le surplus de cuisson.
6. Combien de temps aurait dû cuire le second rôti à 240 °C pour avoir la même cuisson que le premier ?

Conclusion
De nombreuses recettes donnent le temps de cuisson par rapport à la masse de la pièce de viande. On voit que la forme a aussi de l'importance.
Une astuce que l'on peut utiliser est de faire cuire le rôti à 240 °C le même temps que la circonférence en cm de la pièce.

Exercice 1.15

Le terme « arbelos » signifie couteau de savetier.

L'*arbelos* (ou tricercle de Mohr, du nom du mathématicien danois Georg **Mohr**) est une figure géométrique plane étudiée, entre autres, par **Archimède** (III^e siècle avant notre ère). Ce dernier a démontré que l'aire de l'arbelos (en vert ci-dessous) est égale à celle du disque de diamètre [CD].

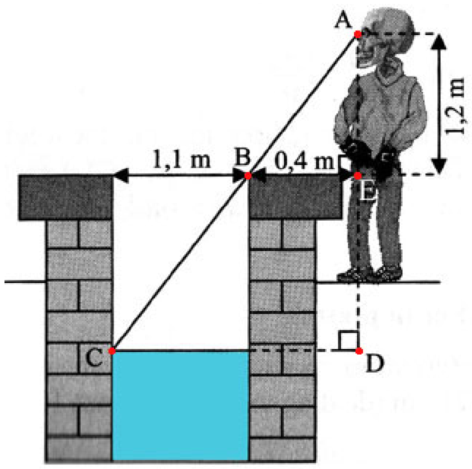


Démontrez cette égalité.

Exercice 1.16

Source de l'exercice :
Les maths au quotidien, p.125

Hector Tête De Mort souhaite savoir à quelle profondeur se trouve la surface de l'eau de son puits, mais il n'a aucun matériel pour la mesurer. En se plaçant devant le puits, il mesure le diamètre du puits ainsi que la distance AE séparant son œil du haut de la margelle. Il recule ensuite, de sorte que son œil (A), le bord du puits (B) et le fond (C) soient alignés. Il mesure alors la distance BE qui le sépare du puits.



Avec toutes ces mesures, comment Hector peut-il déterminer la profondeur de la surface de l'eau, à partir du haut de la margelle ?

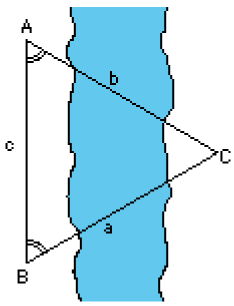
1.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Les définitions et propriétés des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices	❏ ok
Le théorème de Pythagore	❏ ok
Le théorème de Thalès	❏ ok
Les théorèmes se rapportant aux angles inscrits dans un cercle	❏ ok
Les angles alterne-interne	❏ ok
Toutes les formules du mini-formulaire par cœur	❏ ok

2. Trigonométrie

2.1. Utilité de la trigonométrie

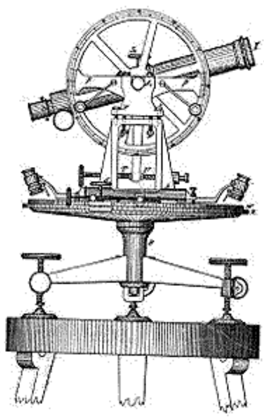
Le problème de base de la trigonométrie est à peu près celui-ci :



> Vous vous tenez sur la rive d'un fleuve large et vous voulez savoir par exemple la distance d'un arbre situé de l'autre côté, désigné sur le schéma par la lettre *C* (pour simplifier ignorons la 3ème dimension). Comment faire sans traverser réellement le fleuve ?

La démarche habituelle consiste à planter deux poteaux aux points *A* et *B*, et avec un décamètre ou une chaîne d'arpenteur et à mesurer la distance *c* qui les sépare (la ligne de base).

Remplacez ensuite le poteau *A* par une lunette d'arpenteur (un théodolite) comme celui ci-contre, munie d'un plateau divisé en 360 degrés permettant de repérer sa direction (son azimut). En visant successivement l'arbre puis le poteau *B*, vous obtenez l'angle *A* du triangle *ABC* par soustraction des chiffres lus sur le plateau d'azimut. A partir du point *B* on mesure l'angle *B* de façon analogue. La longueur *c* de la ligne de base et les deux angles *A* et *B* sont suffisantes pour tout connaître sur le triangle *ABC*, assez, par exemple, pour construire un triangle de même taille et de même forme sur un terrain identique.



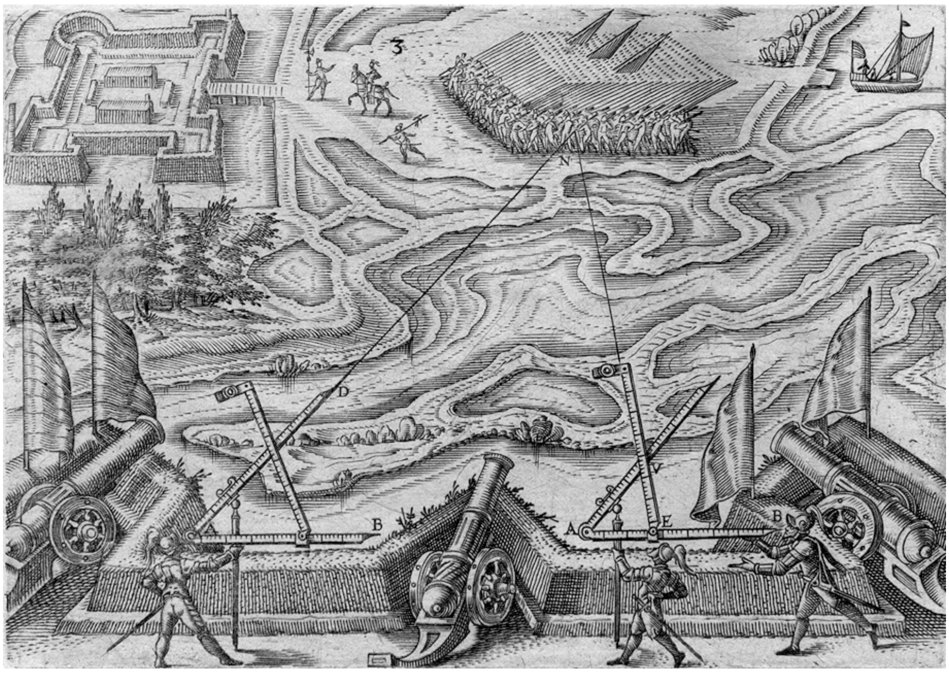
Théodolite du 19ème siècle

La trigonométrie (en grec τριγον = triangle) était à l'origine l'art de préciser uniquement par le calcul les informations absentes. Avec suffisamment d'informations, la trigonométrie vous permet de calculer les dimensions et les angles d'un triangle préalablement défini.

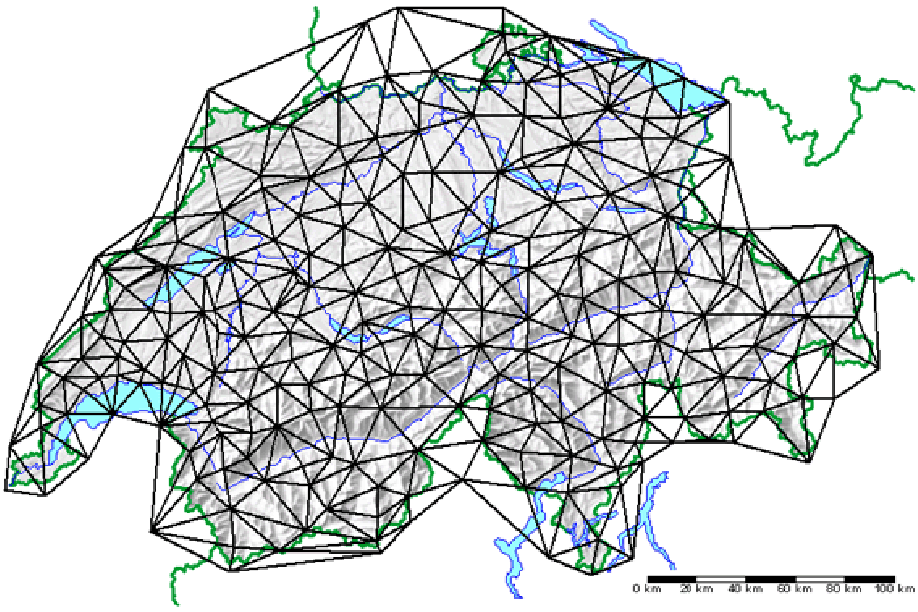
Pourquoi des triangles ? Parce que ce sont les figures de base qui permettent de construire toutes les autres formes ayant des côtés rectilignes. Un carré, un pentagone ou un polygone peuvent être divisés en triangles, en menant des lignes droites d'un angle à tous les autres.

La gravure ci-dessous montre un instrument de triangulation du suisse Jost **Bürgi** utilisé pour déterminer la distance des troupes ennemies, avant de canonner.

Jost **Bürgi**
(Lichtensteig, 28/2/1552 - Kassel, 31/1/1632)



Les arpenteurs divisent une contrée en triangles pour la cartographier et placent à chaque sommet une *balise*, qui de nos jours est souvent une plaque ronde en laiton, arrimée au sol, avec une cuvette au centre destinée à placer les tiges et les appareils de visée (George Washington faisait ce travail dans sa jeunesse). Après avoir mesuré une ligne de base - telle que *AB* dans l'exemple du fleuve - l'arpenteur évaluait les angles formés par ces points vers un autre point *C*, et utilisaient la trigonométrie pour calculer les distances *AC*, *AB* et *BC*. Celles-ci servaient de lignes de base pour deux nouveaux triangles qui à leur tour fournissaient deux nouvelles lignes de base pour deux autres triangles, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le pays entier soit couvert d'une grille ne comportant que des distances connues.

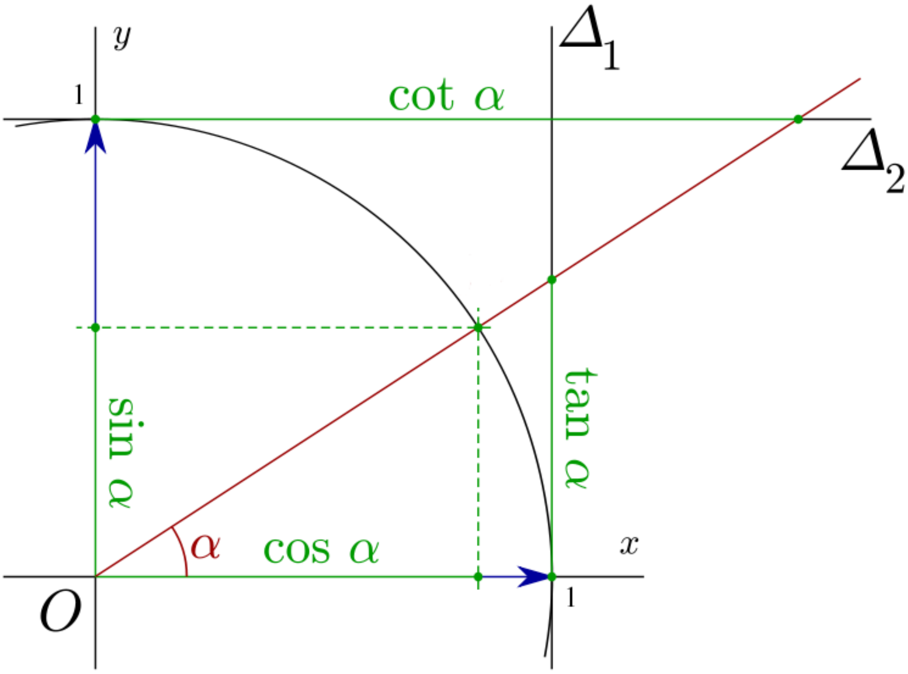


Ultérieurement, on peut ajouter une grille secondaire subdivisant les plus grands triangles dont on repère les angles par des mâts en ferraille ce qui permet de connaître des distances supplémentaires et d'établir des cartes et des plans.

2.2. Le cercle trigonométrique

Toute la trigonométrie est basée **sur le cercle trigonométrique.**

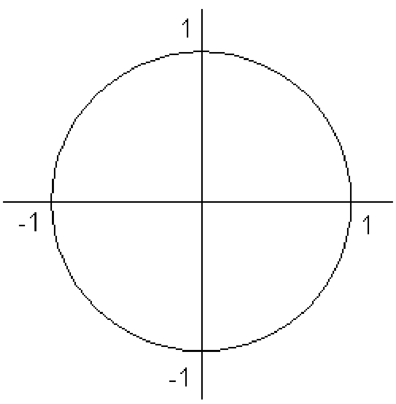
Le **cercle trigonométrique** est un cercle **centré à l'origine** et de **rayon égal à 1**.
Traçons une demi-droite partant de l'origine et formant un angle α avec la demi-droite horizontale partant de l'origine. On définit le **sinus**, le **cosinus**, la **tangente** et la **cotangente** de l'angle α comme les longueurs **signées** des segments déterminés selon le schéma ci-dessous :



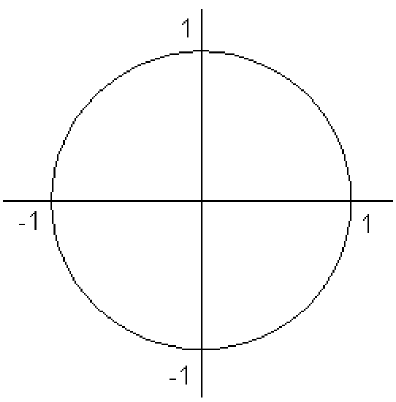
Δ_1 est la droite tangente au cercle au point (1 ; 0). C'est sur cette droite que se lira toujours la valeur tan(α), au besoin en prolongeant la demi-droite rouge en une droite.
Δ_2 est la droite tangente au cercle au point (0 ; 1). C'est sur cette droite que se lira toujours la valeur cot(α), au besoin en prolongeant la demi-droite rouge en une droite.

Exercice 2.1

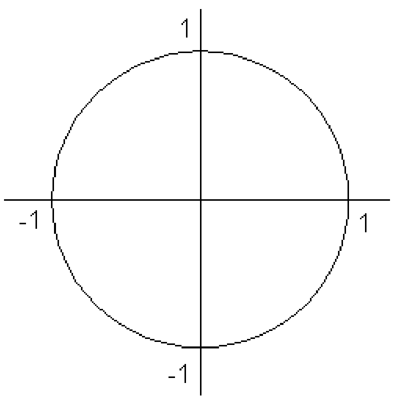
Sur les trois cercles trigonométriques ci-dessous, représentez graphiquement le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente des angles indiqués sous chaque cercle.
Pour chaque dessin, évaluez ensuite les valeurs de ces quatre mesures et contrôlez-les sur votre calculatrice.



α = 130°



α = 220° (ou α = –140°)



α = 310° (ou α = –50°)

Le **sens trigonométrique positif** est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Le **sens trigonométrique négatif** est le sens des aiguilles d'une montre. On « lit » un angle négatif dans le sens trigonométrique négatif.

Exercice 2.2

A l'aide de schémas sur le cercle trigonométrique, puis en utilisant votre calculatrice, vérifiez les relations suivantes :

Abréviations
sinus : $\sin(\alpha)$
cosinus : $\cos(\alpha)$
tangente : $\tan(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha)$
cotangente : $\cot(\alpha)$, $\text{ctg}(\alpha)$

a. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	**b.** $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$	**d.** $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$
e. $\cos(180°-\alpha) = -\cos(\alpha)$	**f.** $\sin(180°-\alpha) = \sin(\alpha)$
g. $\tan(180°-\alpha) = -\tan(\alpha)$	**h.** $\cot(180°-\alpha) = -\cot(\alpha)$
i. $\cos(180°+\alpha) = -\cos(\alpha)$	**j.** $\sin(180°+\alpha) = -\sin(\alpha)$
k. $\tan(180°+\alpha) = \tan(\alpha)$	**l.** $\cot(180°+\alpha) = \cot(\alpha)$
m. $\sin(90°-\alpha) = \cos(\alpha)$	**n.** $\cos(90°-\alpha) = \sin(\alpha)$
o. $\sin(90°+\alpha) = \cos(\alpha)$	**p.** $\cos(90°+\alpha) = -\sin(\alpha)$

Exercice 2.3

En utilisant le cercle trigonométrique et des théorèmes de géométrie élémentaire, prouvez les relations suivantes :

a. $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

b. $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

c. $\cot(\alpha)=\dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

Ces trois relations sont **très** importantes. Il faut les savoir **par cœur** !

Remarquez qu'il n'y a pas de touche « cot » sur votre calculatrice !

2.3. Unités des angles

Jusqu'à présent, vous avez toujours mesuré les angles en **degrés**. C'est une mesure qui est facile à se représenter, mais ce n'est pas la plus pratique mathématiquement.
Le cercle trigonométrique permet de définir une autre unité de mesure : **le radian**.
Comme le cercle trigonométrique a un rayon de 1 (sans unité), la longueur de son périmètre vaut 2π (radians). On a donc la correspondance suivante :

D'autres unités d'angles existent, par exemple les **grades** :
400 gr ↔ 360°
les **pour-milles** :
2000π ‰ ↔ 360°
les **pour-milles d'artillerie** :
6400 ‰a ↔ 360°
Les calculatrices ont une touche qui permet de faire directement certaines de ces conversions.

2π ↔ 360° ou π ↔ 180°

Ainsi, pour convertir des degrés en radians, il faut multiplier les degrés par $\dfrac{\pi}{180}$.

Pour convertir des radians en degrés, il faut multiplier les radians par $\dfrac{180}{\pi}$.

Par convention, quand on ne précise pas l'unité d'un angle, il est exprimé en **radians**. Si vous voulez travailler en degrés, n'oubliez pas le ° !

Exercice 2.4

Convertissez les angles suivants de degrés en radians :

a. 90° ↔ ?	**b.** 45° ↔ ?	**c.** 30° ↔ ?
d. 120° ↔ ?	**e.** 270° ↔ ?	**f.** 60° ↔ ?
g. 310° ↔ ?	**h.** 134° ↔ ?	**i.** 222° ↔ ?

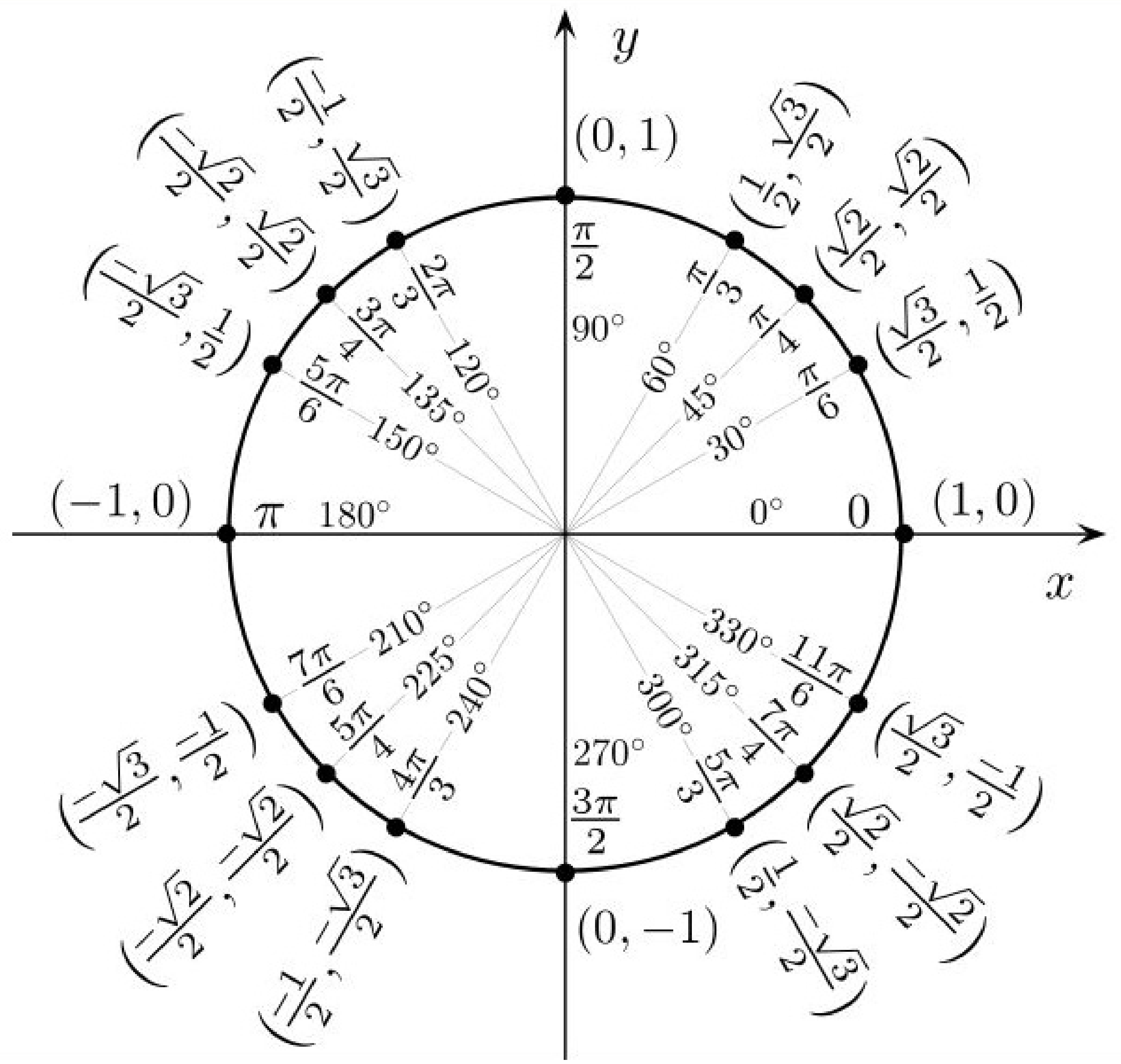
Exercice 2.5

Convertissez les angles suivants de radians en degrés :

a. $\frac{3}{2}\pi \leftrightarrow ?$ **b.** $\frac{\pi}{4} \leftrightarrow ?$ **c.** $\frac{\pi}{2} \leftrightarrow ?$

d. $\frac{\pi}{3} \leftrightarrow ?$ **e.** $\frac{\pi}{8} \leftrightarrow ?$ **f.** $\frac{7}{9}\pi \leftrightarrow ?$

g. $0.5 \leftrightarrow ?$ **h.** $3.29 \leftrightarrow ?$ **i.** $4.032 \leftrightarrow ?$



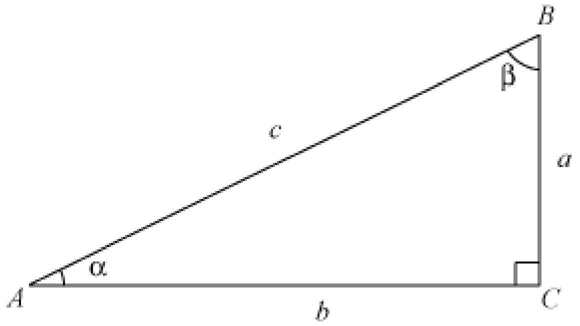
Quelques valeurs

Quelques valeurs qu'il est bon de savoir par cœur, car elles reviennent souvent.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
$\cot(\alpha)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0

2.4. Triangles rectangles

Remarquez bien que le côté *a* est opposé à l'angle α, *b* à β et *c* à l'angle droit.
Les formules ci-dessous ne sont valables que si les lettres sont placées de cette façon !



Dans un triangle rectangle, on a, en utilisant les notations du dessin ci-dessus, les relations suivantes :

$\sin(\alpha)=\frac{a}{c}$ « = côté opposé sur hypoténuse »

$\cos(\alpha)=\frac{b}{c}$ « = côté adjacent sur hypoténuse »

$\tan(\alpha)=\frac{a}{b}$ « = côté opposé sur côté adjacent »

Complétez : $\sin(\beta)$ = $\cos(\beta)$ = $\tan(\beta)$ =

Sauriez-vous démontrer ces relations en utilisant le cercle trigonométrique et le théorème de Thalès ?

Exercice 2.6

« Résoudre un triangle » consiste à déterminer les éléments non donnés (angles et longueur des côtés).
Un triangle est rectangle en *C* (voir dessin ci-dessus). Résolvez ce triangle connaissant :

a. c = 4.75 et β = 65.8°
b. c = 25.43 et a = 12.3
c. a = 48.523 et α = 53.46°
d. a = 112.5 et β = 14.5°
e. a = 22.3 et b = 46.8
f. b = 42.8 et S = 1040.04 (S est l'aire du triangle)
g*. α = 38.45° et S = 8.28
h*. c = 17.3 et S = 53.44

À l'exercice **h**, vous aboutirez à une équation bicarrée. Voir le Cahier Algèbre.

Exercice 2.7

Un triangle est isocèle en *A*. Résolvez ce triangle connaissant :

a. α = 48.5° et a = 22.8
b. α = 103.48° et $b = c$ = 4.24
c. a = 8.5 et β = γ = 72.4°
d. β = γ = 32.89° et $b = c$ = 18.72

Exercice 2.8*

Connaissant la base *a* et l'angle α d'un triangle isocèle, calculez les côtés égaux, les hauteurs, les rayons des cercles inscrit et circonscrit, ainsi que l'aire du triangle. Pour chaque question, donnez la réponse littérale ne comprenant dans le membre de droite que *a* et α.
Application numérique : *a* = 15, α = 40°

Exercice 2.9

Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 mètres lorsque le soleil est élevé de 37.5° au-dessus de l'horizon ?

Exercice 2.10

a. Calculez le périmètre d'un polygone régulier convexe à sept côtés inscrit dans un cercle de rayon 2.

b. Un polygone régulier convexe à quinze côtés a une aire égale à 1500. Calculez la longueur de son côté et le rayon du cercle dans lequel il est inscrit.

Exercice 2.11

Un chat aperçoit un arbre sous un angle de 38.6°. Il recule de 25 mètres et voit alors l'arbre sous un angle de 18.3° (on admettra que les yeux du chat et le pied de l'arbre sont au même niveau).

a. À quelle distance de l'arbre le chat se trouvait-il au début ?

b. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 2.12*

Un chat aperçoit de l'autre côté d'un canal un arbre, juste en face, sous un angle de 35°. Il se déplace de 30 mètres le long de la rive et voit maintenant l'arbre sous un angle de 19°.

a. Quelle est la largeur du canal ?

b. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 2.13

Deux observateurs, placés à la même altitude et distants de 1350 mètres, visent au même moment une montgolfière située entre eux. Cette montgolfière est dans le plan vertical contenant les deux observateurs. Les angles d'élévation sont de 65.4° et 76.5°. Quelle est l'altitude de la montgolfière ?

Exercice 2.14*

Deux poulies, dont les diamètres sont 122 cm et 88 cm, sont reliées par une courroie de transmission tendue. La distance entre les axes des poulies est 400 cm. Quelle est la longueur de la courroie ?

Exercice 2.15

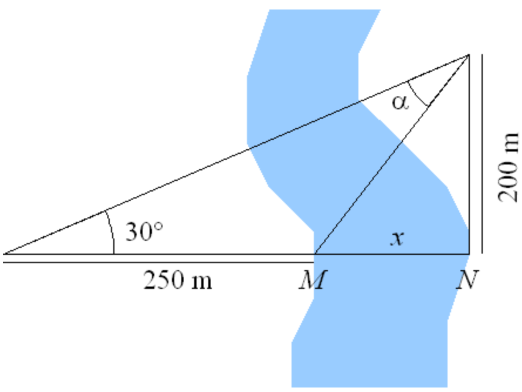
Cet angle s'appelle *l'élongation*. Il est maximum quand le Soleil, la Terre et Vénus sont en *quadrature*.

Quand la planète Vénus est observée depuis la Terre pendant une certaine période, elle paraît se mouvoir en avant et en arrière le long d'un segment de droite, le Soleil étant au milieu. À la distance apparente maximale du Soleil, l'angle Soleil-Terre-Vénus est d'environ 47°.

Sachant que la distance Terre-Soleil vaut environ $148.64 \cdot 10^6$ km, estimez la distance séparant Vénus du Soleil.

Exercice 2.16

Pour déterminer la largeur du Nil entre deux points M et N, les Égyptiens utilisaient un procédé semblable à celui présenté ci-dessous (vue prise d'avion).



Calculez x et α.

Exercice 2.17

Rayon de la Terre : 6371 km

Vous venez de plaquer l'ex-amour de votre vie ! Vous l'abandonnez sans remords sur la jetée (altitude de ses yeux humides : 4 m) et ramez vers le large (altitude de vos yeux impitoyables : 1 m). À quelle distance du rivage échapperez-vous à son regard déchirant, en disparaissant de son horizon ?

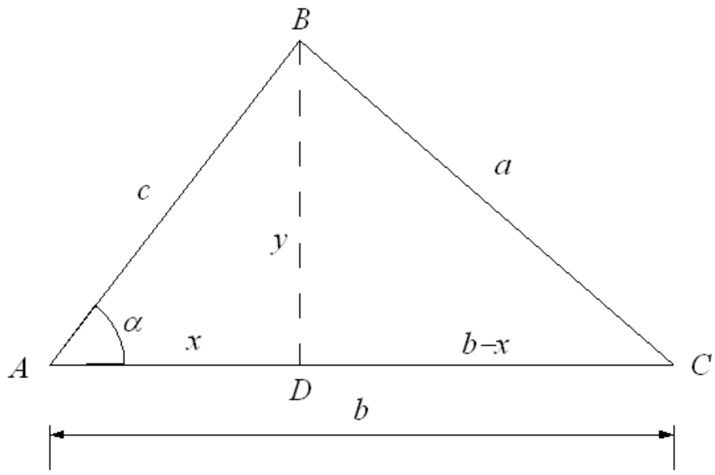
Exercice 2.18*

Indication :
$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

Un piédestal surmonté d'un statue est érigé au bord d'une rivière. Le piédestal a pour hauteur 12.5 m et la statue 15.2 m. Un chat placé sur l'autre bord de la rivière voit sous un même angle la statue et le piédestal (on admettra que les yeux du chat sont au niveau du pied du piédestal). Quelle est la largeur de la rivière ?

2.5. Triangles quelconques

Nous allons utiliser les deux triangles ci-dessous pour trouver deux théorèmes, appelés **théorème du sinus** et **théorème du cosinus**.



Théorème du cosinus

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle *BCD*

On a : $\cos(\alpha)=\frac{x}{c} \Rightarrow x = c\cos\alpha$ et $\sin(\alpha)=\frac{y}{c} \Rightarrow y = c\sin\alpha$

$$\begin{aligned} a^2 &= (b-x)^2 + y^2 \\ &= (b - c\cos\alpha)^2 + (c\sin\alpha)^2 \\ &= (b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha) + (c^2\sin^2\alpha) \\ &= b^2 + c^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2bc\cdot\cos\alpha \end{aligned}$$

Comme $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, nous avons la relation :

Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\alpha)$$

En faisant une permutation cyclique des lettres a, b, c et α, β, γ, nous obtenons les formules pour b^2 et c^2 (voir résumé page suivante).

Théorème du sinus

Utilisons encore les deux triangles donnés plus haut pour trouver deux expressions de la longueur *y*.

$\sin(\alpha)=\frac{y}{c}$ et $\sin(\gamma)=\frac{y}{a}$ nous conduit à deux expressions de y :

$y = c\sin(\alpha)$ et $y = a\sin(\gamma)$.

Ce qui nous donne : $a\sin\gamma = c\sin\alpha \Rightarrow \frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$

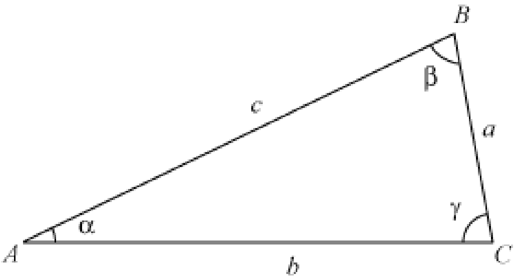
Un raisonnement similaire donne la relation $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}$ qui, combinée avec le premier résultat, nous fournit :

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Résumé

Remarquez bien que a est toujours opposé à α, b à β et c à γ !



Dans un triangle quelconque, on a, en utilisant les notations du dessin ci-dessus :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Attention ! Dans un triangle, il y a deux solutions pour l'équation $\sin(\alpha) = k$:
$\alpha_1 = \arcsin(k)$
$\alpha_2 = 180° - \arcsin(k)$

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

(r : rayon du cercle circonscrit)

Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Aire d'un triangle quelconque

Démontrez cette formule !

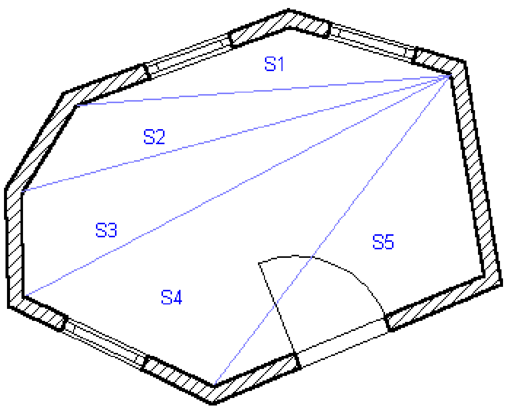
$$S = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ca\sin(\beta)$$

Héron d'Alexandrie (fin du 1[er] siècle après J.-C.) a démontré cette formule déjà connue d'Archimède.

Formule d'Héron (aire d'un triangle connaissant ses trois côtés)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Calculer l'aire d'une pièce ou d'un terrain n'est pas toujours facile, puisque les pièces sont rarement des triangles ou des rectangles parfaits. Une manière de faire classique et de créer une triangulation : on découpe la pièce en triangles, dont il sera facile de calculer les aires avec la formule d'Héron (il faudra juste mesurer les longueurs des côtés des triangles). En additionnant toutes ces aires, on obtiendra l'aire totale.



Exercice 2.19

Résolvez les triangles *ABC* ci-dessous, puis vérifiez leur aire S.

a.	$a = 70.24$	$b = 82.12$	$\gamma = 30.69°$	$S = 1472$
b.	$\beta = 58.25°$	$\gamma = 39.38°$	$a = 20.46$	$S = 113.91$
c.	$a = 41.94$	$b = 96.92$	$c = 107.26$	$S = 2'030.5$
d.	$a = 20.43$	$b = 5.63$	$c = 27.84$	
e.	$\beta = 30.65°$	$a = 98.06$	$b = 364.04$	$S = 11'120.94$
f.	$\beta = 39.37°$	$a = 460.14$	$b = 335.59$	$S = 76'082.55$ / $27'744.77$

Exercice 2.20

rayon de la Terre : 6370 km

Un observateur, couché sur le sol, voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur ?

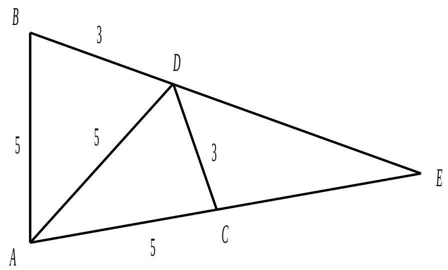
Exercice 2.21

Un bateau quitte le port à 13h00 et fait route dans la direction 55°W à la vitesse de 38 km/h (les angles sont mesurés avec la direction N). Un deuxième bateau quitte le même port à 13h30 et vogue dans la direction 70°E à 28.5 km/h.
Calculez la distance séparant les bateaux à 15h00.

Exercice 2.22

Les proportions du dessin ne sont pas exactes.

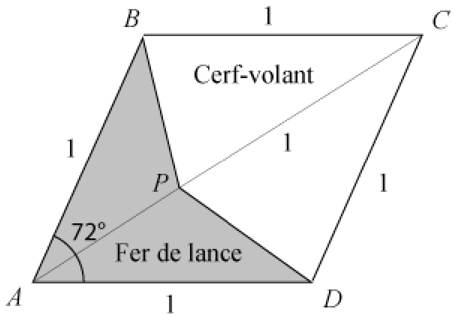
Quelle est la longueur du segment $\overline{DE}$?



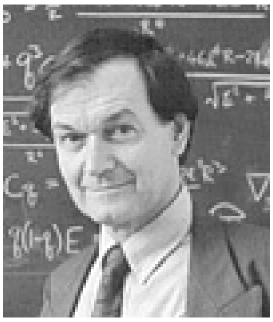
Exercice 2.23

Ce pavage joue un rôle important en cristallographie.

Les pavés de *Penrose* ont la forme d'un losange *ABCD* dont la longueur des côtés est 1 et dont un angle intérieur fait 72°. On situe un point *P* sur la diagonale *AC* à une distance 1 du sommet *C*. De ce point partent les deux segments de droite *PB* et *PD* rejoignant les deux autres sommets du losange, comme le montre la figure ci-dessous. Les deux pavés ainsi formés sont appelés « fer de lance » et « cerf-volant ».

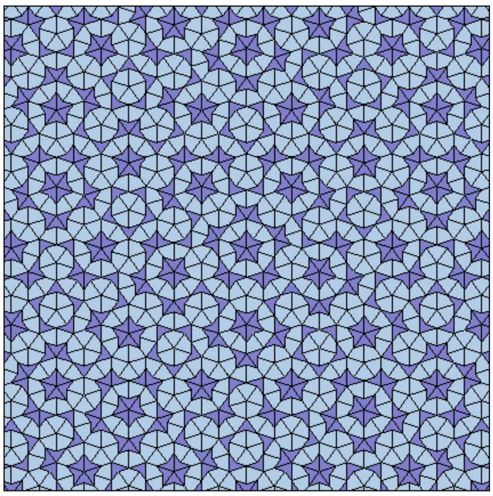


a. Calculez les mesures en degrés de $\angle BPC$, $\angle APB$ et $\angle ABP$.
b. Calculez la longueur du segment *BP* à 0.001 près.
c. Calculez l'aire d'un fer de lance et d'un cerf-volant à 0.01 près.



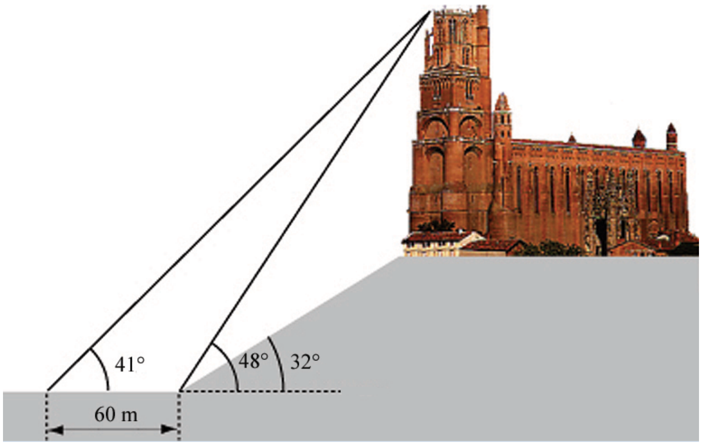
Roger **Penrose**
(Colchester, 8 août 1931 -)

Physicien et mathématicien britannique.
En 1974, il publie un article où il présente ses premiers pavages non périodiques : les **pavages de Penrose** (*Pentaplexity*, Bulletin of the Institute for Mathematics and its Applications, 10, 266-271, 1974).



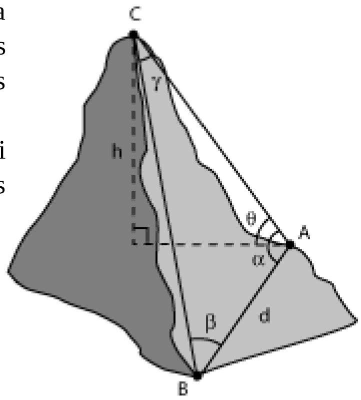
Exercice 2.24

Une basilique est située au sommet d'une colline (voir schéma ci-dessous). Quelle est la hauteur de cette basilique ?



Exercice 2.25

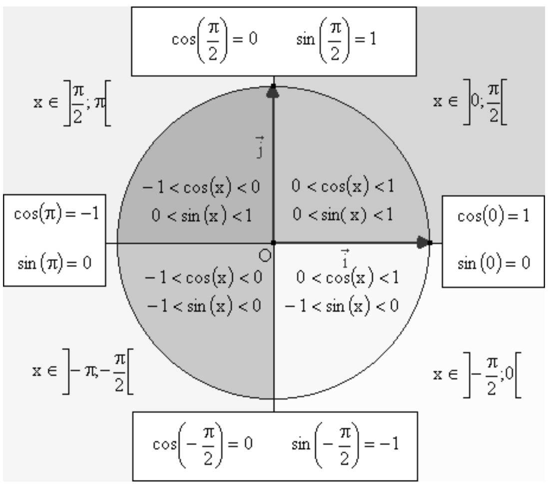
Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points A et B au bas de la montagne d'où l'on voit le sommet. A et B ne sont pas forcément à la même altitude mais ils sont séparés d'une distance d.
On mesure les angles $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A (angle entre AC et l'horizontale).
Quelle est l'altitude de C si celle de A est h_A ?



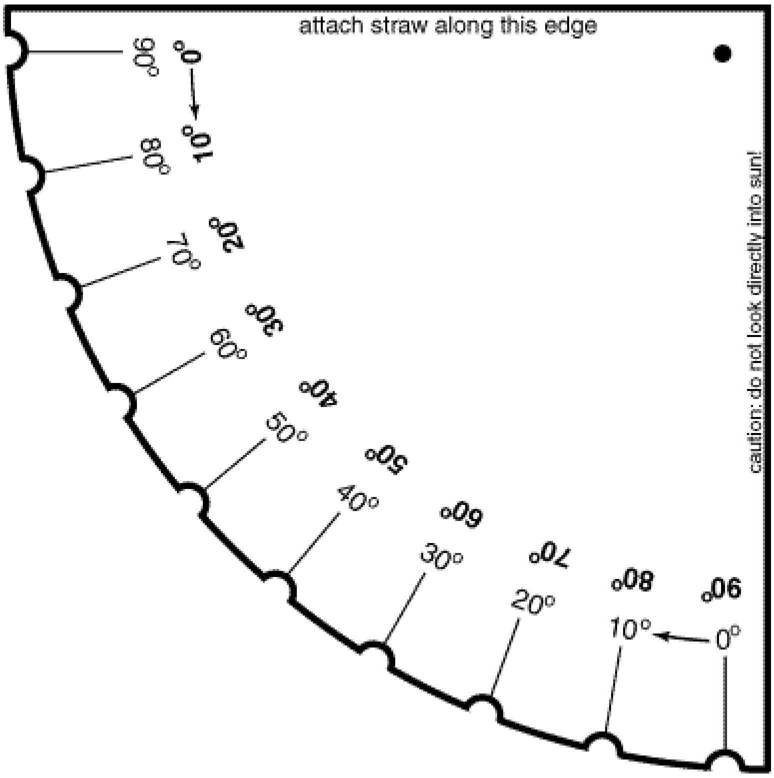
Application numérique :
$d = 450$ m, $h_A = 920$ m, $\alpha = 35.4^\circ$, $\beta = 105.8^\circ$, $\theta = 23.5^\circ$

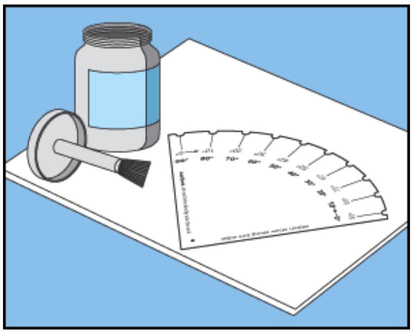
2.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Utiliser le cercle trigonométrique pour définir le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle	❑ ok
Convertir des degrés en radians et vice-versa	❑ ok
Résoudre des triangles rectangles	❑ ok
Connaître et appliquer le théorème du sinus	❑ ok
Connaître et appliquer le théorème du cosinus	❑ ok
Résoudre des triangles quelconques	❑ ok

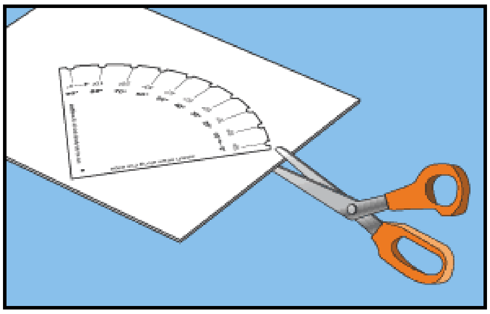


Annexe : bricoler un astrolabe

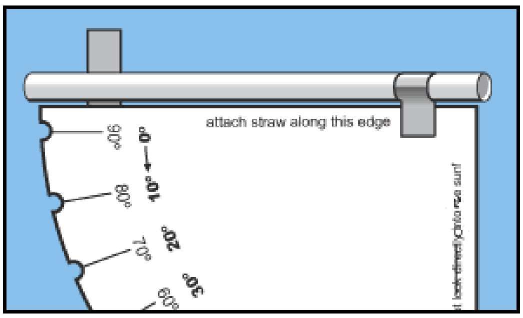




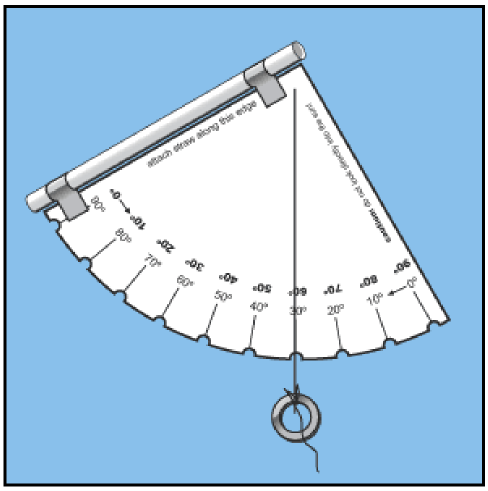
1. Coller le patron ci-dessus sur un carton fort.



2. Découper le carton.



3. Attacher une paille le long du bord indiqué



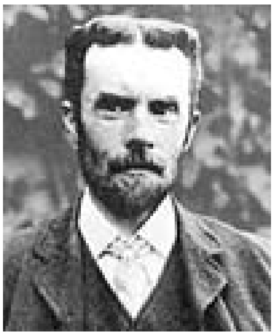
4. Fixer une ficelle lestée passant par le trou que vous aurez fait à la place du point noir.

La ficelle indique l'angle d'inclinaison de l'objet qu'on regarde à travers la paille.
Attention ! Ne fixez jamais le Soleil ! C'est très dangereux pour vos yeux !

3. Calcul vectoriel

3.1. Les vecteurs

William Rowan **Hamilton** (Dublin, 4/8/1805 - Dublin, 2/9/1865)



Oliver **Heaviside** (Londres, 18/5/1850 - Torquay, 3/2/1925)

L'Irlandais Sir William **Hamilton** (1805-1865) fut l'un des premiers à utiliser les vecteurs et il est probablement l'inventeur du mot (mot venant du latin *vehere*, qui signifie « porter »). L'Allemand Hermann **Grassman** (1809-1877) introduisit la notation vectorielle pour des problèmes de physique. L'Américain **Gibbs** (1839-1903) et l'Anglais **Heaviside** (1850-1925), disciples de Hamilton, donnent au calcul vectoriel sa forme quasi définitive, mais ce type de « calcul » met assez de temps à s'introduire en France. Michel **Chasles** (1793-1880), avait déjà pressenti l'importance du sens sur un axe sans aller jusqu'à la notion de vecteur.

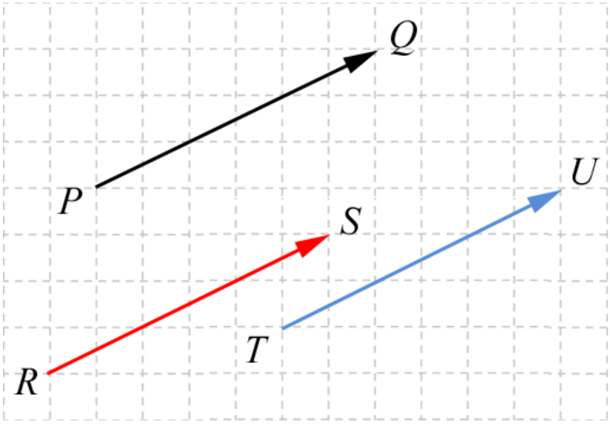
À l'origine, un **vecteur** est un objet de la géométrie euclidienne. À deux points, Euclide associe leur distance. Or, un couple de points porte une charge d'information plus grande : ils définissent aussi une direction et un sens. Le vecteur synthétise ces informations.
La notion de vecteur peut être définie en dimension deux (le plan) ou trois (l'espace euclidien usuel). Elle se généralise à des espaces de dimension quelconque. Cette notion, devenue abstraite et introduite par un système d'axiomes, est le fondement de la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire.
Le vecteur permet, en physique, de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre ou une fonction numérique seuls. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, une force ou un champ électrique, la direction et le sens sont indispensables. Les vecteurs s'opposent aux grandeurs scalaires décrites par un simple nombre, comme la masse, la température, etc.

En termes simples, un **vecteur** est une grandeur qui a une **intensité**, une **direction** et un **sens**. Il est commode de le représenter par une flèche.

Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux s'ils ont la **même intensité** (longueur), la **même direction** et le **même sens**.

Par exemple, les trois vecteurs de la figure ci-dessous sont égaux, même s'ils ont des points initiaux et terminaux différents. Ces trois flèches représentent donc le même vecteur. Un vecteur n'a pas de « point d'attache ».

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$

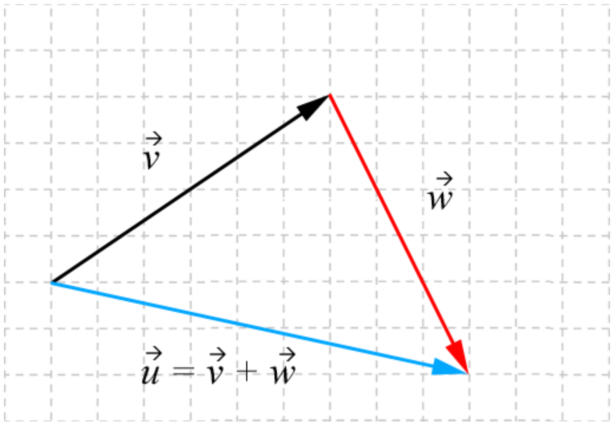


Le vecteur qui a une longueur de 0 est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$.

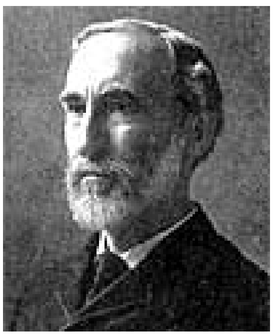
Le vecteur nul n'a évidemment pas de direction, donc pas de sens.

Addition de vecteurs

La somme $\vec{v}+\vec{w}$ de deux vecteurs est définie comme suit : on met les deux vecteurs bout à bout de sorte que le point terminal de $\vec{v}$ coïncide avec le point initial de $\vec{w}$. Le vecteur $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$ relie le point initial de $\vec{v}$ au point terminal de $\vec{w}$.



Les quatre propriétés de d'addition



Josiah Willard **Gibbs**
(New Haven, 11/2/1839 - New Haven, 28/4/1903)

Hermann Günter **Grassmann**
(Szczecin, 15/4/1809 - Szczecin, 26/9/1877)

i. L'addition de vecteurs est **commutative**. Cela signifie que, si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$$

ii. L'addition de vecteurs est aussi **associative**. Cela veut dire que, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

iii. L'addition **a un élément neutre** : le vecteur nul. En effet :

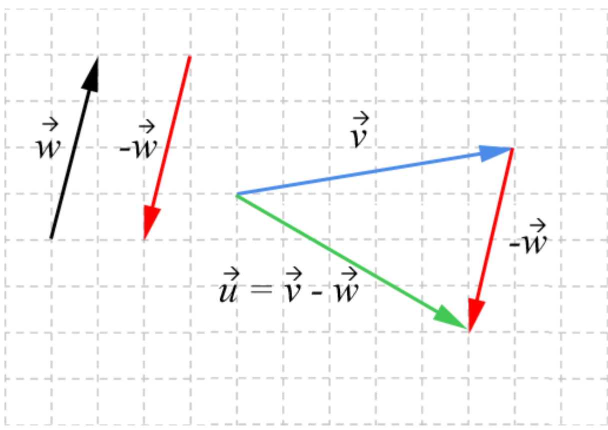
$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$$

iv. Enfin, si $\vec{v}$ est un vecteur, alors $-\vec{v}$ est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que $\vec{v}$, mais de sens opposé. Donc

$$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$$

La différence $\vec{v}-\vec{w}$ de deux vecteurs est définie comme

$$\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{v})$$

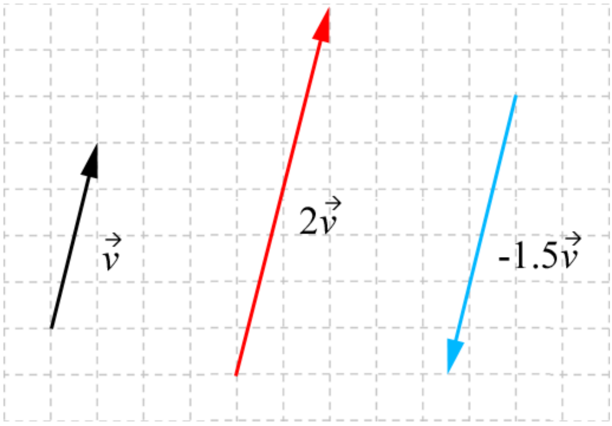


Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Quand on manipule des vecteurs, on utilise le mot « scalaire » à la place de « nombre réel ». Les scalaires sont souvent désignés par une lettre grecque.

Si λ est un scalaire et $\vec{v}$ un vecteur, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est défini comme suit :

1. Si λ > 0, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur dont l'intensité a λ fois l'intensité de **v** et dont le sens est le même que $\vec{v}$.
2. Si λ < 0, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur dont l'intensité a λ fois l'intensité de **v** et dont le sens est l'opposé de celui de $\vec{v}$.
3. Si λ = 0 ou si $\vec{v}=\vec{0}$, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur nul.



Propriétés du produit

v. $\lambda(\vec{v}+\vec{w})=\lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}$

vi. $(\lambda+\mu)\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$

vii. $\lambda(\mu\vec{v})=(\lambda\mu)\vec{v}$

viii. $1\vec{v}=\vec{v}$

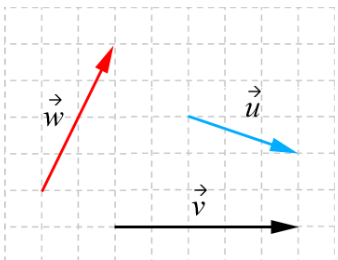
ix. $0\vec{v}=\vec{0}$

Ces propriétés se vérifient aisément sur un petit dessin. Essayez !

Exercice 3.1

Utilisez les vecteurs de la figure ci-dessous pour dessiner, sur une feuille quadrillée, les vecteurs suivants :

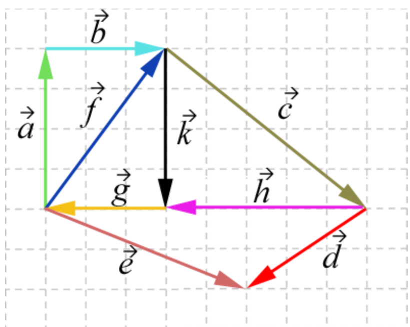
a. $\vec{v}+\vec{w}$
b. $\vec{u}+\vec{v}$
c. $3\vec{v}$
d. $4\vec{w}$
e. $\vec{v}-\vec{w}$
f. $\vec{u}-\vec{v}$
g. $3(\vec{v}+\vec{u})-2\vec{w}$
h. $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$



Exercice 3.2

Donnez trois possibilités pour **b.**

a. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}+\vec{b}=\vec{f}$?
b. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}+\vec{d}=\vec{e}$?
c. Exprimez $\vec{c}$ par rapport à $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$.
d. Exprimez $\vec{g}$ par rapport à $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{k}$.
e. Exprimez $\vec{e}$ par rapport à $\vec{d}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$.
f. Exprimez $\vec{e}$ par rapport à $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.
g. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{k}+\vec{g}$?
h. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{h}$?



Michel **Chasles**
(Epernon, 15/11/1793 - Paris, 18/12/1880)

La **relation de Chasles** porte le nom de Michel **Chasles**, mathématicien français du 19e siècle. Elle était connue depuis déjà quelque temps mais les travaux de Michel Chasles en géométrie justifient qu'on lui en attribue en quelque sorte la paternité.
Initialement associée à la géométrie, pour décrire une relation entre vecteurs dans un espace affine, la relation de Chasles s'écrit de la manière suivante :

Pour des points *A*, *B* et *C* d'un espace affine : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Les deux relations suivantes se déduisent de la relation de Chasles.
Quels que soient les points *A* et *B* du plan et l'origine *O*, on a les deux relations suivantes :

$$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

Exercice 3.3

Soient *A*, *B*, *C*, *D* et *E* cinq points quelconques du plan. Simplifiez au maximum les expressions suivantes (sans faire de dessin), en utilisant les relations de Chasles :

$\vec{a}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}$ $\qquad$ $\vec{b}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$

$\vec{c}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ $\qquad$ $\vec{d}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DB}$

$\vec{e}=87\overrightarrow{AC}+82\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{AD}$

Exercice 3.4

Soient trois points *A*, *B* et *C* non alignés. Soit le point *G* défini par la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Démontrez que pour tout point *M* du plan, on a la relation $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

3.2. Représentation des vecteurs dans le plan

Représentation des vecteurs dans le plan

On utilise un système de coordonnées rectangulaires pour représenter les vecteurs dans le plan. Appelons $\vec{i}$ un vecteur de longueur 1 dont la direction est celle de l'axe *Ox* et $\vec{j}$ un vecteur de longueur 1 dont la direction est celle de l'axe *Oy*.

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

En deux dimensions, les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment ce que l'on appelle la **base canonique**.
Elle est **orthonormée** : les deux vecteurs sont orthogonaux et ont une longueur de 1.

Si $\vec{v}$ est un vecteur ayant son point initial à l'origine *O* et son point terminal en *P*(*a*, *b*), alors on peut représenter $\vec{i}$ comme combinaison des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$$\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

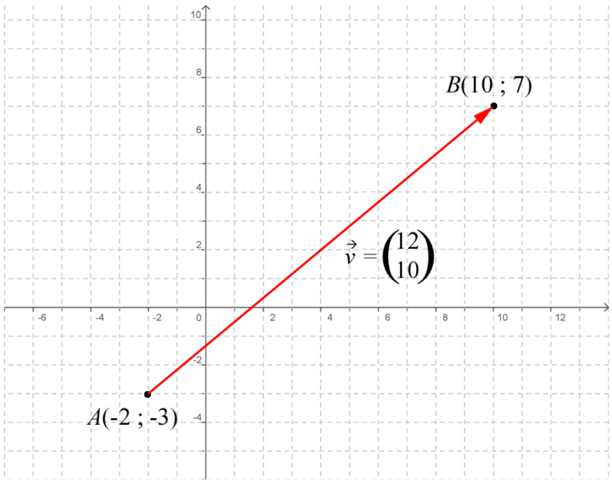
Les scalaires *a* et *b* sont appelés les **composantes** du vecteur $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}$, *a* étant la composante dans la direction $\vec{i}$ et *b* la composante dans la direction $\vec{j}$.
En *n* dimensions, les vecteurs ont *n* composantes.

Théorème 1

Supposons qu'un vecteur $\vec{v}$ a pour point initial $P_1(x_1, y_1)$ et comme point terminal $P_2(x_2, y_2)$. On a alors :

$$\vec{v}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$$

Exemple



Théorème 2 Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux si et seulement si leurs composantes correspondantes sont égales.

Exercice 3.5

Soit le vecteur $\vec{v}$ ayant comme point initial P et comme point terminal Q. Écrivez $\vec{v}$ sous la forme $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et sous la forme $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

a. $P(0 ; 0)$; $Q(3 ; 4)$ **b.** $P(3 ; 2)$; $Q(5 ; 6)$
c. $P(-2 ; -1)$; $Q(6 ; -2)$ **d.** $P(-3 ; 7)$; $Q(0 ; 0)$

Nous pouvons à présent définir l'addition, la soustraction et le produit en utilisant les composantes d'un vecteur.

Soient $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ deux vecteurs et λ un scalaire. Alors :

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix} \qquad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-c\\b-d\end{pmatrix}$$

$$\lambda\vec{v} = \lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda b\end{pmatrix}$$

Norme d'un vecteur

Les quatre termes suivants sont synonymes : **norme**, **intensité**, **longueur**, **module**.

Si $\vec{v}$ est un vecteur, on utilise le symbole $\|\vec{v}\|$ pour représenter la **norme** de $\vec{v}$.

Puisque $\|\vec{v}\|$ sera la longueur du vecteur, la norme doit avoir les cinq propriétés suivantes :

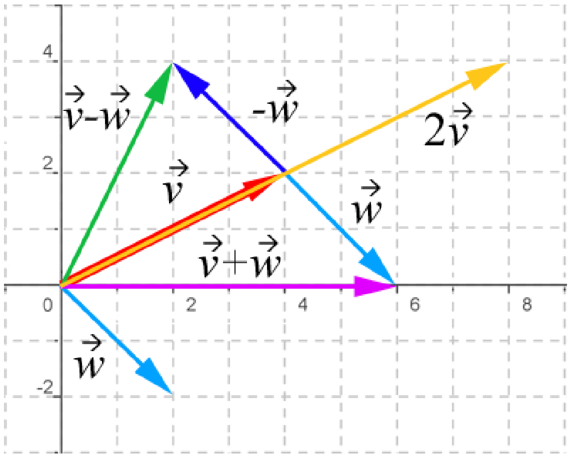
Soit $\vec{v}$ un vecteur et λ un scalaire, alors

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$
(b) $\|\vec{v}\| = 0$ si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$
(c) $\|\overrightarrow{-v}\| = \|\vec{v}\|$
(d) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$
(e) $\|\overrightarrow{v+w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (inégalité du triangle)

Un vecteur $\vec{v}$ pour lequel la norme $\|\vec{v}\| = 1$ est qualifié de **vecteur unité** (ou **unitaire**).

Dans le plan muni d'un système orthonormé, on a : $\left\|\overrightarrow{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}\right\| = \sqrt{a^2+b^2}$

Exemple récapitulatif



$\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $\quad$ $\|\vec{w}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$2\vec{v}=2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ $\quad$ $\|2\vec{v}\|=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Théorème 3 Pour tout vecteur non nul, le vecteur $\vec{u}=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ est un **vecteur unité** qui a la même direction et le même sens que $\vec{v}$.

Exemple Soit $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. La norme de ce vecteur est $\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

On peut rendre unitaire n'importe quel vecteur (non nul) en le multipliant par l'inverse de sa norme.

Le vecteur unité ayant même direction est même sens est $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=1$.

Exercice 3.6

Faites les calculs ci-dessous en utilisant $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

a. $\vec{v}+\vec{w}$ $\quad$ **b.** $\vec{w}-\vec{v}$
c. $-5\vec{v}$ $\quad$ **d.** $\|\vec{v}\|$
e. $2\vec{v}+3\vec{w}$ $\quad$ **f.** $3\vec{v}-2\vec{w}$
g. $\|\vec{v}-\vec{w}\|$ $\quad$ **h.** $\|\vec{v}\|-\|\vec{w}\|$
i. le vecteur unité de direction $\vec{v}$ **.**

Exercice 3.7

Trouvez un vecteur $\vec{v}$ dont la norme est égale à 4 et dont la composante dans la direction $\vec{i}$ est deux fois plus grande que la composante dans la direction $\vec{j}$.

Exercice 3.8

La formule du point **c** vous sera très utile par la suite.

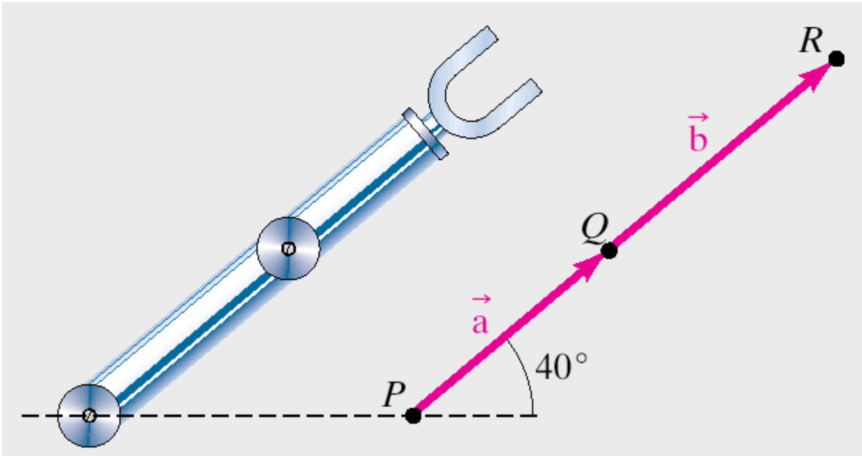
a. Trouvez un vecteur $\vec{v}$ de direction $-\vec{i}+3\vec{j}$ et dont la norme est égale à 8.
b. Trouvez un vecteur $\vec{w}$ incliné de 32° par rapport à l'horizontale et dont la norme est égale à 7.
c. Donnez la formule permettant de calculer les composantes d'un vecteur connaissant son angle (α) avec l'horizontale et sa longueur (L).

Exercice 3.9

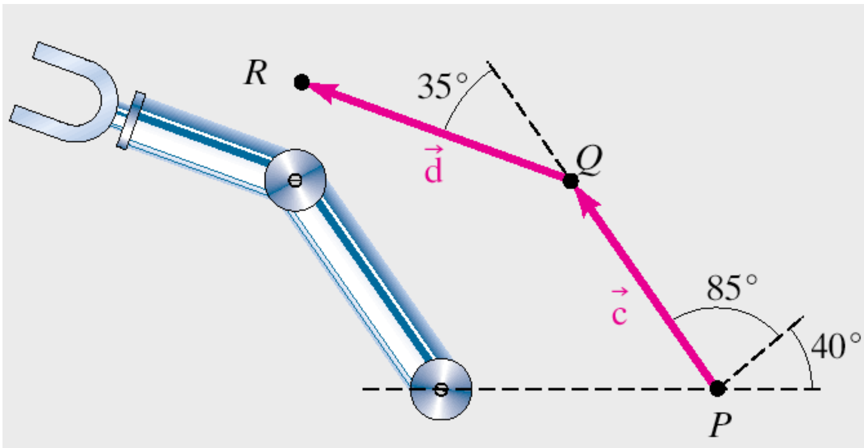
Si le vent souffle à 20 km/h dans la direction N40°W (angle de 40° vers l'ouest par rapport au nord), exprimez sa vitesse par un vecteur $\vec{v}$.

Exercice 3.10

a. La première figure représente le bras d'un robot. Ce bras peut pivoter aux articulations *P* et *Q*. Le bras supérieur (représenté par $\vec{a}$) fait 37.5 cm de long et l'avant-bras, y compris la main (représenté par $\vec{b}$), a une longueur de 42.5 cm. Calculez les coordonnées du point *R* situé sur la main.



b. Partant de la position ci-dessus, le bras supérieur est pivoté de 85° et l'avant-bras de 35°, comme le montre la deuxième figure. Calculez les nouvelles coordonnées du point R.



Applications

Les forces fournissent un exemple de quantités physiques qui peuvent être représentées avantageusement par des vecteurs ; en effet deux forces se combinent comme deux vecteurs s'additionnent. Comment savons-nous cela ? Ce sont des expériences de laboratoire qui ont corroboré cette hypothèse.

Ainsi, si deux forces (ou vitesses) $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ agissent simultanément sur un objet, le vecteur somme $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ produit le même effet.

La force $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ est parfois appelée la **résultante** de $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Exercice 3.11

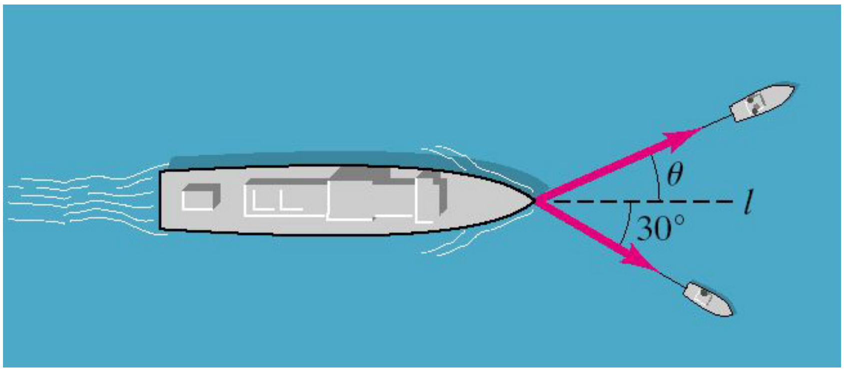
D'après ses instruments de bord, un avion se déplace à 500 km/h dans la direction est. Si le vent souffle à une vitesse de 60 km/h dans la direction du nord-ouest, déterminez la vitesse de l'avion par rapport au sol.

Exercice 3.12

Vu du sol, un avion se déplace vers le nord-ouest à une vitesse constante de 250 miles par heure, poussé par un vent d'est de 50 miles par heure. Quelle serait la vitesse de l'avion s'il n'y avait plus de vent ?

Exercice 3.13

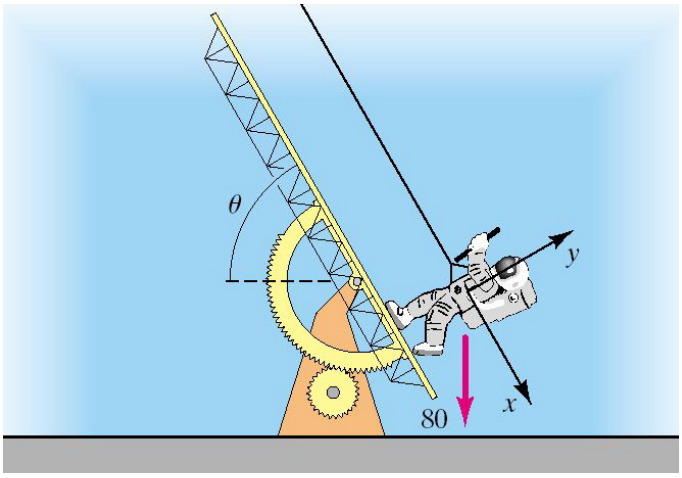
La figure ci-dessous montre deux remorqueurs qui amènent un navire dans un port.



Le remorqueur le plus puissant génère une force de 20'000 N sur son câble, le plus petit une force de 16'000 N. Si le navire suit une ligne droite l. Calculez l'angle que forme le plus puissant remorqueur avec la droite l.

Exercice 3.14

La figure ci-dessous représente un appareillage simple servant à simuler des conditions de gravité sur d'autres planètes.



Une corde est attachée à un astronaute manœuvrant sur un plan incliné qui forme un angle de θ degrés avec l'horizontale.

a. Si l'astronaute pèse 80 kg, calculez les composantes x et y de la force de pesanteur (voir figure).

b. La composante y de la partie **a** est la force de pesanteur de l'astronaute par rapport au plan incliné. La force de pesanteur de l'astronaute serait de 140 N sur la Lune et de 300 N sur Mars. Calculez les angles que devrait faire le plan incliné pour simuler une marche sur ces corps célestes.

Rappel de physique
1 kg = 9.81 N

3.3. Le produit scalaire

Le **produit scalaire** est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'où son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité.

Définition du produit scalaire

Si $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan, alors le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{w}$ est défini ainsi :

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=ac+bd \qquad (1)$$

Exemples

Soient $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculez :

a. $\vec{v}\cdot\vec{w}$ **b.** $\vec{w}\cdot\vec{v}$ **c.** $\vec{v}\cdot\vec{v}$
d. $\vec{w}\cdot\vec{w}$ **e.** $\|\vec{v}\|$ **f.** $\|\vec{w}\|$

Solutions

a. $\vec{v}\cdot\vec{w} = 2\cdot5 + (-3)\cdot3 = 1$ **b.** $\vec{w}\cdot\vec{v} = 5\cdot2 + 3\cdot(-3) = 1$
c. $\vec{v}\cdot\vec{v} = 2\cdot2 + (-3)\cdot(-3) = 13$ **d.** $\vec{w}\cdot\vec{w} = 5\cdot5 + 3\cdot3 = 34$
e. $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ **f.** $\|\vec{w}\|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

Que remarquez-vous ?

Propriétés du produit scalaire

Les résultats obtenus dans l'exemple ci-dessus suggèrent quelques propriétés générales.

Théorème 4

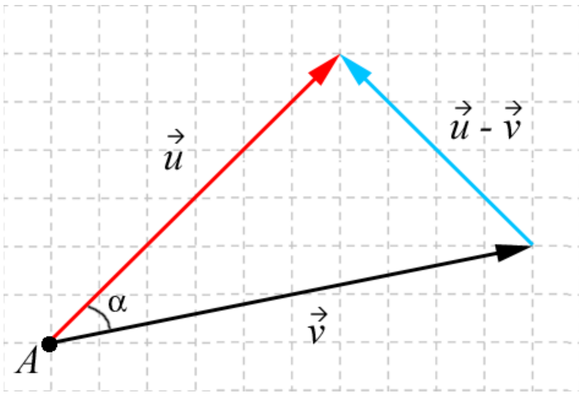
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ *Commutativité* (2)
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ *Distributivité* (3)
$\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$ (4)
$\vec{0}\cdot\vec{v}=0$ (5)
$(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})$ (6)

Angle entre deux vecteurs

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle compris entre deux vecteurs.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ayant le même point initial *A*. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ forment un triangle. C'est l'angle α au point *A* que l'on appelle l'angle compris entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Les trois côtés du triangle ont pour longueurs $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|$. Le *théorème du cosinus* nous dit :

Voir chapitre 2 de ce cahier.

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

Nous pouvons utiliser la propriété (4) pour réécrire cette formule en termes de produit scalaire :

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha \qquad (7)$$

Grâce à la propriété (3), le côté gauche de l'équation (7) peut se réécrire ainsi :

$$\begin{aligned}(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})-\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\,\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (8)\end{aligned}$$

En combinant les équations (7) et (8), nous obtenons :

$$\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

ce qui donne, après simplification : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

Théorème 5

Angle entre deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, l'angle α, 0° ≤ α ≤ 180°, compris entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par la formule :

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \qquad (9)$$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \quad \text{donne l'angle } \textbf{aigu} \qquad (10)$$

Exercice 3.15

Calculez le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{w}$ et l'angle aigu entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

a. $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}$

b. $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

c. $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}$

d. $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

e. $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{w}=4\vec{i}+3\vec{j}$

f. $\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}$

g. $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

h. $\vec{v}=\vec{i}$, $\vec{w}=-3\vec{j}$

Exercice 3.16

Un bateau veut atteindre le point de la rive opposée situé exactement en face de lui. La vitesse du courant est de 3 km/h. Le bateau est capable de maintenir une vitesse constante de 20 km/h. Selon quel angle par rapport à la ligne directe doit être dirigé le bateau pour qu'il atteigne son objectif ?
Si la rivière a une largeur de 0.5 km, combien de temps durera la traversée ?

Vecteurs parallèles

Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **parallèles** (on dit aussi **colinéaires**) s'il existe un scalaire non nul λ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{w}$.

Les vecteurs $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{w}=-6\vec{i}+2\vec{j}$ sont parallèles, puisqu'on peut écrire $\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{w}$. On aurait aussi pu voir que

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}=\frac{-18-2}{\sqrt{10}\sqrt{40}}=\frac{-20}{\sqrt{400}}=-1$$

ce qui implique que l'angle α entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est 180°.

Vecteurs orthogonaux

Si l'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vaut 90°, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

Puisque le vecteur nul n'a pas de direction, on utilise comme convention que le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

Il suit de la formule (9) que si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, alors $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$ puisque cos(90°) = 0.
À l'inverse, si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$, cela signifie que soit $\vec{v}=\vec{0}$, soit $\vec{w}=\vec{0}$, soit enfin cos(α) = 0. Dans le dernier cas, α = 90° et donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Théorème 6 Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

Exercice 3.17

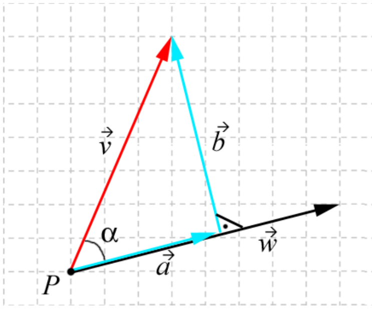
Trouvez *a* tel que l'angle entre $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}$ soit 90°.

Exercice 3.18

Généralisez à trois dimensions les formules (1) et (10) et calculez l'angle aigu entre les vecteurs $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$.

3.4. Projection d'un vecteur sur un autre vecteur

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non nuls ayant la même origine *P*. Nous cherchons à décomposer $\vec{v}$ en deux vecteurs : $\vec{a}$ qui sera parallèle à $\vec{w}$ et $\vec{b}$ qui sera orthogonal à $\vec{w}$. Le vecteur $\vec{a}$ est la **projection orthogonale** de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$.



$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$$

Cherchons à exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{w}=\vec{a}\cdot\vec{w}+\vec{b}\cdot\vec{w} \qquad (11)$$

Puisque $\vec{b}$ est orthogonal à $\vec{w}$, nous avons $\vec{b}\cdot\vec{w}=0$. De plus, comme $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{w}$, nous avons $\vec{a}=\lambda\vec{w}$, λ étant un scalaire dont nous allons chercher la valeur.

Ainsi, l'équation (11) peut se réécrire : $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{a}\cdot\vec{w}=\lambda\vec{w}\cdot\vec{w}=\lambda\|\vec{w}\|^2$.

Ce qui implique que : $\lambda=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$.

Donc $\vec{a}=\lambda\vec{w}=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$.

Théorème 7 Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non nuls.
Le vecteur projection de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ est : $proj_{\vec{w}}\vec{v}=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$

Théorème 8 Soit α l'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\vec{w}$. La longueur du vecteur $\vec{v}$ projeté orthogonalement sur $\vec{w}$ est $\|\vec{v}\|\cos\alpha$.

Exercice 3.19

Décomposez $\vec{v}$ en deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, où $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{w}$ et $\vec{b}$ orthogonal à $\vec{w}$.

a. $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

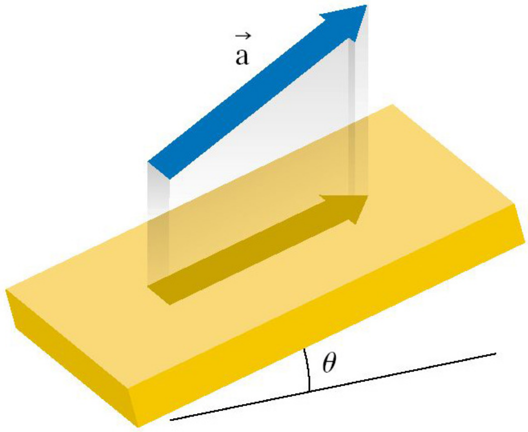
c. $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

Que remarquez-vous en comparant les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$?

Exercice 3.20

On utilise le calcul vectoriel dans l'imagerie informatique pour calculer la longueur des ombres sur les surfaces plates. On peut représenter la longueur des objets par le vecteur $\vec{a}$.

Sur la figure ci-dessous, une source lumineuse éclaire un objet et projette son ombre sur le sol verticalement. θ est l'angle que forme le sol avec l'horizontale.



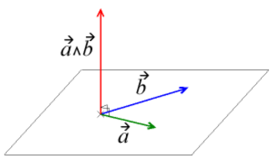
Calculez la longueur de l'ombre sur le sol pour le vecteur $\vec{a}$ donné.

a. $\vec{a}=\begin{pmatrix}2.6\\4.5\end{pmatrix}$, $\theta=0°$ **b.** $\vec{a}=\begin{pmatrix}25.7\\-3.9\end{pmatrix}$, $\theta=12°$ **c.** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-13.8\\19.4\end{pmatrix}$, $\theta=-17°$

3.5. Le produit vectoriel

Le produit vectoriel n'existe pas en 2 dimensions.

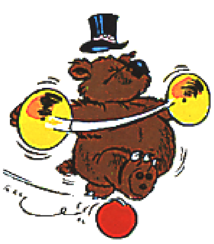
Le **produit vectoriel** est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension 3. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard **Gibbs** pour ses étudiants en physique. Les travaux de Hermann Günter **Grassmann** et William Rowan **Hamilton** sont à l'origine du produit vectoriel défini par **Gibbs**.

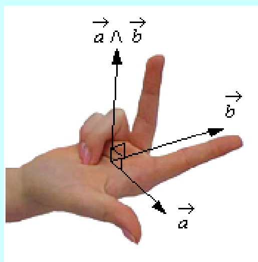


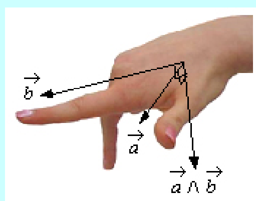
Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angle α.
Par définition, le **produit vectoriel** de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur noté $\vec{a}\wedge\vec{b}$ (lire $\vec{a}$ « cross » $\vec{b}$) tel que :

1. la direction de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ est orthogonale à chacun des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;

2. le sens de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ donne au triplet $(\vec{a};\vec{b};\vec{a}\wedge\vec{b})$ une **orientation directe** *:* cette orientation est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur), illustrée ci-après ;







3. la norme de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot|\sin\alpha|$$

Composantes du vecteur $\vec{a}\wedge\vec{b}$ dans une base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormée

Le **produit vectoriel** de $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ est le vecteur $\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$.

Truc mnémotechnique pour calculer $\vec{a}\wedge\vec{b}$:

Effectuez le « déterminant » $\begin{vmatrix}\vec{i} & a_1 & b_1\\ \vec{j} & a_2 & b_2\\ \vec{k} & a_3 & b_3\end{vmatrix}$, avec $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

La première colonne est composée de trois vecteurs, c'est pour cette raison que le mot « déterminant » a été mis entre guillemets.

Exercice 3.21

On donne les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$.

Calculez et comparez :

a. $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}\wedge\vec{u}$

b. $\vec{u}\wedge(2\vec{v})$, $(2\vec{u})\wedge\vec{v}$ et $2(\vec{u}\wedge\vec{v})$

c. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})+(\vec{u}\wedge\vec{w})$

d. $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$

Exercice 3.22

Calculez $\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|$ lorsque $\|\vec{a}\|=6$, $\|\vec{b}\|=5$ et l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut 30°.

Aire d'un triangle

L'aire *S* d'un triangle *ABC* vaut la moitié de l'aire du parallélogramme *ABDC*. D'où, d'après le point 3 de la définition du produit vectoriel :

$$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$$

Exercice 3.23

On donne les points *A*(2; 1; –2), *B*(2; 3; 0), *C*(6; 6; 5) et *D*(6; 4; 3).

a. Vérifiez que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme et calculez son aire.

b. Calculez l'aire du triangle *ABC*.

3.6. Le produit mixte

Le produit vectoriel n'existe pas en 2 dimensions.

On appelle **produit mixte** de trois vecteurs de dimension 3 $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, pris dans cet ordre, le nombre réel noté $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ défini par $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})$.

Soient les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\text{dét}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

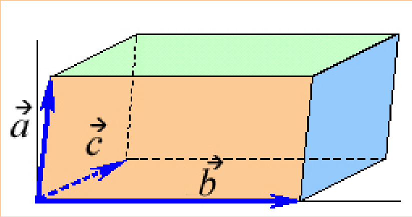
En effet :

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix} = a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_2(-1)\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

Propriétés du produit mixte

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ = **volume signé du parallélépipède** construit sur $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



2. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont coplanaires.

3. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

4. Un produit mixte est invariant dans une permutation circulaire de ses vecteurs :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

5. Un produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

Exercice 3.24

On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Calculez les produits mixtes suivants :

a. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ **b.** $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$ **c.** $[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$ **d.** $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$

Exercice 3.25

On donne les points A(7; 1; –3), B(8; 2; –2), C(4; 4; 4), D(10; 1; –5).
Ces quatre points sont-ils coplanaires ?

Applications du produit mixte

Calculer le volume d'un parallélépipède : $V = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|$

Calculer le volume d'un tétraèdre $ABCD$: $V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|$

Exercice 3.26

Calculez le volume du tétraèdre $ABCD$ dont les coordonnées des quatre sommets sont A(2; –1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; –1) et D(4; 1; 3).

Exercice 3.27

Soient les points A(2; 1; –1), B(3; 0; 1) et C(2; –1; 3).
Calculez les points D situés sur l'axe des y et tels que $ABCD$ soit un tétraèdre de volume égal à 5.

3.7. Ce qu'il faut savoir absolument

Additionner deux vecteurs	❑ ok
Multiplier un vecteur par un scalaire	❑ ok
Calculer la longueur d'un vecteur	❑ ok
Donner les composantes d'un vecteur connaissant son angle avec l'horizontale et sa longueur (ex. 3.8)	❑ ok
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs	❑ ok
Calculer l'angle entre deux vecteurs	❑ ok
Projeter un vecteur sur un autre vecteur	❑ ok
Calculer le produit vectoriel de deux vecteurs et connaître ses applications	❑ ok
Calculer le produit mixte de trois vecteurs et connaître ses applications	❑ ok

4. Géométrie analytique

4.1. Un peu d'histoire

René **Descartes**
(La Haye en Touraine, 31/3/1596 - Stockholm, 11/2/1650)

La **géométrie analytique** est une approche de la géométrie dans laquelle on représente les objets par des équations ou inéquations. Le plan ou l'espace est nécessairement muni d'un repère.
1637 est l'année de naissance de la géométrie analytique, lorsque René **Descartes** publia, anonymement pour éviter une dispute avec l'Église, son *Discours de la méthode*. Dans cet ouvrage, qui est également important pour l'histoire de la philosophie, la troisième partie, intitulée *La Géométrie*, expose avec méthode les principes fondamentaux de la géométrie analytique. Peu de temps auparavant, **Fermat** (1601-1665) avait également développé la méthode de la géométrie analytique, mais son traité *Ad locos et solidos isagoge* ne fut pas publié avant 1670.
La forme actuelle fut cependant établie longtemps après Descartes, en particulier par le suisse **Euler** (1707-1783).

4.2. Coordonnées d'un point dans un repère

Définition On appelle **repère** du plan tout ensemble constitué d'un point arbitraire fixe (**origine**) et de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non parallèles.

Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont une norme de 1 et qu'ils sont orthogonaux, on dit que le repère est **orthonormé**. On note ce repère $\{O, (\vec{i}\,;\vec{j})\}$.

Sauf indication contraire, nous travaillerons toujours dans un repère orthonormé, avec $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Définition On appelle **coordonnées** d'un point *P* dans un repère $\{O, (\vec{i}\,;\vec{j})\}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le repère $\{O, (\vec{i}\,;\vec{j})\}$.

Dans le repère, l'ordre des vecteurs est important !

Dans le plan, les coordonnées du point *P* dans le repère $\{O, (\vec{i}\,;\vec{j})\}$ sont les nombres réels *x* et *y* tels que

$$\overrightarrow{OP}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}\text{ , la plupart du temps avec } \vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

On écrit *P*(*x* ; *y*).

On écrira les points horizontalement et les vecteurs verticalement.

Dans l'espace, les coordonnées du point *P* dans le repère $\{O, (\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})\}$ sont les nombres réels *x*, *y* et *z* tels que

$$\overrightarrow{OP}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}\text{ , très souvent avec } \vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

On écrit *P*(*x* ; *y* ; *z*).

Terminologie La première coordonnée *x* est appelée **abscisse** du point *P*.
La deuxième coordonnée *y* est appelée **ordonnée** du point *P*.
Dans l'espace, la troisième coordonnée *z* est appelée **cote** du point *P*.

Exercice 4.1

On donne les points $A(1;\ 1)$, $B(–2;\ 1)$, $C(–2;\ –1)$ et $D(1;\ –1)$. Dessinez ces quatre points sur une feuille quadrillée si, dans le repère $\{0\ ;\ (\vec{i}\,;\vec{j})\ \}$, …

a. $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{i}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Milieu d'un segment

On appelle **milieu** d'un segment *AB* le point *M* tel que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ n'est pas le milieu du segment *AB* !

Soient les points *A* et *B*. En résolvant l'équation ci-dessus, on trouve que le milieu de *AB* est le point *M* ayant pour coordonnées...

dans le plan : $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

dans l'espace : $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Centre de gravité d'un triangle

Le centre de gravité *G* du triangle *ABC* a pour coordonnées...

dans le plan : $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

dans l'espace : $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

La formule ci-dessus a été obtenue en résolvant l'équation : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Exercice 4.2

a. Dessinez les points $A(2;\ 3)$, $B(–4;\ –3)$, $C(0;\ –4)$ et $D(2;-\sqrt{3})$.
b. Calculez les coordonnées du milieu de *AC* et du milieu de *BD*.
c. Calculez les coordonnées du centre de gravité du triangle *ABC*.

Exercice 4.3

On donne les points $A(2\ ;\ 3)$, $B(–3\ ;\ 1)$ et $C(8\ ;\ –1)$.
a. Calculez les coordonnées du point *D* tel que *ABCD* soit un parallélogramme. Calculez les coordonnées du centre *I* du parallélogramme *ABCD*.
b. Déterminez le(s) point(s) *E* de l'axe des ordonnées tel(s) que *ABEC* soit un trapèze.

4.3. Droites du plan

Définitions

Une **droite** *d* est un ensemble infini de points alignés. Il existe deux façons équivalentes de définir une droite :
- **a.** en donnant deux points *A* et *B* quelconques de la droite ;
- **b.** en donnant un point *A* de la droite et un vecteur $\vec{v}$ indiquant sa direction.

Notation

La droite *d* passant par le point d'ancrage $A(x_0\ ,\ y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ est notée $d(A,\ \vec{v}\ )$.

Représentation paramétrique dans le plan

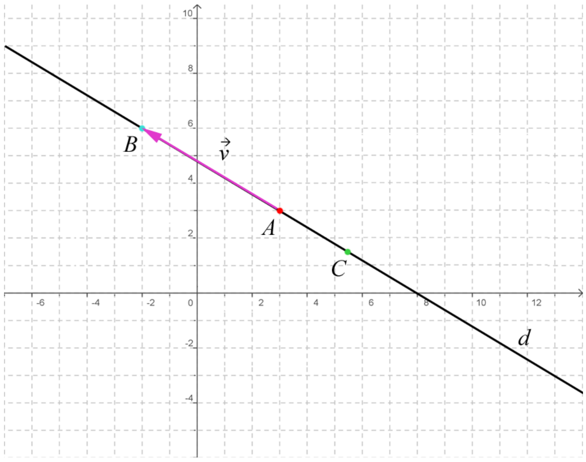
Tous les points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ de la droite $d(A,\ \vec{v}\ )$ sont définis par la relation :

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ que l'on peut aussi écrire : $\begin{cases}x=x_0+\lambda\,x_v\\y=y_0+\lambda\,y_v\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ce système est appelé représentation paramétrique de $d(A,\ \vec{v}\ )$.

Le paramètre λ sert à modifier la longueur et éventuellement le sens du vecteur directeur pour que la pointe du vecteur puisse « toucher » tous les points de la droite.

Il existe une infinité de manières de définir la **même droite**, puisque la droite est composée d'une infinité de points (qui peuvent tous servir de point d'ancrage) et qu'il existe une infinité de multiples du vecteur directeur.



Sur cet exemple, on peut trouver B et C si on connaît $A(3;\ 3)$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+1\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.5\\1.5\end{pmatrix}$$

Exercice 4.4

Deux droites du plan sont **parallèles** si les vecteurs directeurs sont colinéaires. Si ce n'est pas le cas, elles sont **sécantes** (on dit aussi **concourantes**). Elles n'ont alors qu'un seul point commun.

On donne les points $A(1; –2)$, $B(–5; 2)$, $C(–4; 1)$, $D(–1; –1)$ et $E(50; –40)$.

a. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

b. Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ?

Exercice 4.5

On donne les points $A(1; –1)$, $B(–2; 3)$, $C(5; –6)$, $D(1291; –1721)$.

a. Les points A, B, C et D sont-ils alignés ?

b. Donnez trois points alignés sur A et B.

Exercice 4.6

Soit la droite (AB) avec $A(2; –4)$ et $B(–1; –3)$.

a. Écrivez une (il y en a une infinité) représentation paramétrique de la droite (AB).

b. Les points $C(1; –1)$, $D(0; 0)$, $E(5; –5)$ et $F(–139; 43)$ sont-ils situés sur la droite (AB) ?

c. Trouvez sur la droite (AB) le point K dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée.

Exercice 4.7

Une droite d est donnée par la relation paramétrique $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

a. Dessinez d.

b. Colorez en rouge les points pour lesquels $\lambda \in [-1\ ;\ 2[$.

c. Colorez en bleu les points pour lesquels $\lambda \geq 3$.

Exercice 4.8

On donne les points $A(–4; 1)$, $B(2; –3)$ et $C(5; 4)$. Écrivez une représentation paramétrique des droites suivantes :

a. la droite passant par B et parallèle à la droite (AC) ;

b. la médiane (AA') du triangle ABC.

Intersection de droites sécantes

Pour déterminer $d(A, \vec{v}\,) \cap d(B, \vec{w}\,)$, procédez comme suit :

1. Écrivez une représentation paramétrique de chaque droite en désignant les paramètres **par des lettres différentes** (λ et μ par exemple).

2. Imposez l'égalité des abscisses x et des ordonnées y. On obtient un système de deux équations avec deux inconnues : λ et μ. La résolution de ce système fournit les valeurs des paramètres correspondant au point d'intersection des droites.

Exercice 4.9

Dans le plan, on donne un quadrilatère *ABCD* par ses quatre sommets : *A*(–3; 1), *B*(2; –5), *C*(6; 2), *D*(1; 7).
Calculez les coordonnées du point d'intersection des diagonales.

Exercice 4.10

Soient les trois droites suivantes :

d_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ d_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ d_3: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Déterminez les intersections $d_1 \cap d_2$, $d_1 \cap d_3$ et $d_2 \cap d_3$.

Équation cartésienne d'une droite

On obtient l'équation cartésienne en partant des équations paramétriques. Il suffit en fait d'éliminer le paramètre λ en combinant les deux équations du système paramétrique. On obtiendra alors une seule équation où n'apparaîtront plus que *x* et *y*.

Partons du système paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda x_v \\ y = y_0 + \lambda y_v \end{cases}$

Après avoir multiplié la première équation par y_v et en avoir soustrait x_v fois la deuxième, on obtient :

$$y_v x - x_v y = y_v x_0 - x_v y_0$$

ou

$$\underbrace{y_v}_{a} x - \underbrace{x_v}_{b} y + \underbrace{(x_v y_0 - y_v x_0)}_{c} = 0$$

Exemple

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{cases}$$

Éliminons le paramètre λ pour obtenir l'équation cartésienne, en additionnant le double de la deuxième ligne à la première :

$$x + 2y = 1$$

L'équation cartésienne réduite est :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

La relation du type $ax + by + c = 0$ est appelée **équation cartésienne** de $d(A, \vec{v})$.

La droite *d* d'équation $ax + by + c = 0$ a comme vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Lorsque *b* n'est pas nul, l'équation $ax + by + c = 0$, peut s'écrire $y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{m} x \underbrace{- \frac{c}{b}}_{h}$.

La relation $y = mx + h$ s'appelle l'**équation cartésienne réduite** d'une droite du plan.

Rappelons que, dans un repère orthonormé, *m* est la pente de la droite et *h* est l'ordonnée à l'origine.

Exercice 4.11

Soit une droite *d* donnée par la représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Écrivez une équation cartésienne de *d*.

Exercice 4.12

Quelle particularité possède la droite *d* : $ax + by + c = 0$ lorsque
a. $a = 0$ **b.** $b = 0$ **c.** $c = 0$?

Exercice 4.13

Soit la droite *d* : $3x + 2y - 5 = 0$.
a. Donnez un vecteur directeur de la droite *d*.
b. Donnez le vecteur directeur de *d* ayant 7 pour 1ère composante.

Exercice 4.14

Soit la droite *d* : $2x - 3y + 6 = 0$.
a. Dessinez la droite *d*.
b. Écrivez une équation cartésienne de la droite *d'* parallèle à *d* et passant par l'origine. Dessinez *d'*.
c. Écrivez une équation cartésienne de la droite *d''* parallèle à *d* et passant par *A*(–4; 1). Dessinez *d''*.

4.4. Droites de l'espace

Équations paramétriques

Il n'existe pas d'équation cartésienne d'une droite dans l'espace.

Soit la droite d passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques des droites dans l'espace sont les mêmes que dans le plan, sauf qu'il y a une coordonnée en plus : z.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R} \quad \text{que l'on peut aussi écrire :} \quad \begin{cases}x=x_0+\lambda x_v\\y=y_0+\lambda y_v,\ \lambda\in\mathbb{R}.\\z=z_0+\lambda z_v\end{cases}$$

Exercice 4.15

Soit la droite d passant par les points $A(1; –2; 5)$ et $B(–3; 6; 1)$.

a. Déterminez deux vecteurs directeurs de cette droite.
b. Déterminez deux autres points de cette droite.

Exercice 4.16

Soit la droite d : $\begin{cases}x=3\lambda+1\\y=2\lambda\\z=-5\lambda+2\end{cases}$

Donnez deux autres représentations paramétriques de cette droite.

Exercice 4.17

Une droite d est définie par un point $A(2; 4; 5)$ et un vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$.

a. Écrivez un système d'équations paramétriques de d.
b. Vérifiez si le point $P(7; –1; 3)$ appartient à la droite d.

Exercice 4.18

Soit le point $A(2; 0; –3)$. Écrivez une représentation paramétrique des droites suivantes :

d_1 passant par A et $B(1; 4; 5)$.

d_2 passant par A et parallèle à la droite g : $\begin{cases}x=2\lambda-1\\y=3\lambda\\z=5\lambda+2\end{cases}$

d_3 passant par A et parallèle à l'axe des y.

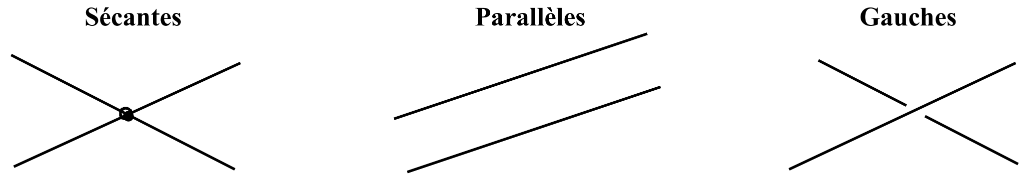
Exercice 4.19

Montrez que les systèmes d'équations suivants déterminent la même droite :

$$\begin{cases}x=3+2\lambda\\y=5-2\lambda\\z=1+\lambda\end{cases} \qquad \begin{cases}x=7-4\mu\\y=1+4\mu\\z=3-2\mu\end{cases}$$

Positions relatives de deux droites

Dans le plan, il n'y a que deux éventualités : deux droites sont sécantes ou parallèles. Dans l'espace, deux droites peuvent aussi être **gauches**.



Deux droites sécantes ont un point commun. Deux droites sécantes ou parallèles sont **coplanaires.**

Les vecteurs directeurs de deux droites parallèles sont colinéaires. Deux droites parallèles peuvent aussi être **confondues**.

Les deux droites n'ont aucun point en commun et ne sont pas parallèles.

Exercice 4.20

Étudiez les positions relatives des droites suivantes :

a. $d : A(6; 3; 0)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $g : B(0; 0; 4)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

b. $d : A(3; -1; 2)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $g : B(4; -1; 0)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$

c. $d : A(7; 4; 4)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $g : B(5; -1; 0)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix}$

d. $d : A(2; -1; -3)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $g : B(4; 0; -4)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

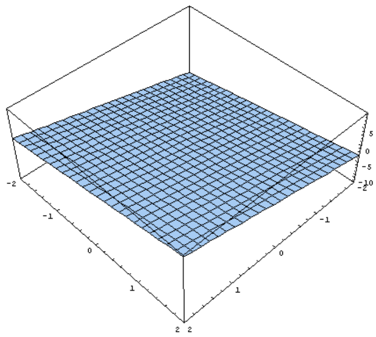
Exercice 4.21

On donne un quadrilatère plan *ABCD* avec les coordonnées des sommets $A(1; 3; 2)$, $B(4; -1; 3)$, $C(4; 9; -7)$ et $D(1; 8; -3)$.
Calculez les coordonnées du point d'intersection des diagonales.

4.5. Plans dans l'espace

Un **plan** (que l'on désigne souvent par les lettres p, q ou π) est un objet fondamental à deux dimensions. Intuitivement il peut être visualisé comme une « planche sans épaisseur » qui s'étend à l'infini et que l'on peut orienter comme on veut dans l'espace.

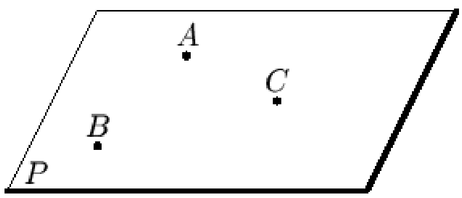
Dans un espace à trois dimensions et avec un système de coordonnées (x, y, z), on peut définir le plan comme l'ensemble des solutions de l'équation : $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont des nombres réels et où a, b et c ne sont pas simultanément nuls.



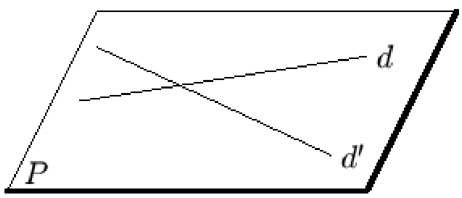
Plan d'équation
$3x + 2y - z - 1 = 0$

Un plan *P* peut être déterminé par :

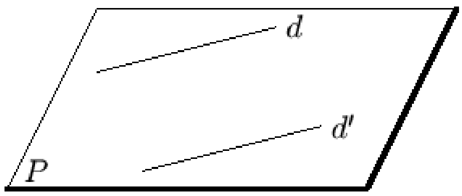
- trois points non alignés ;



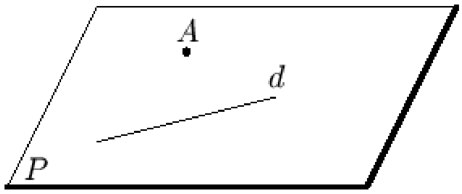
- deux droites sécantes;



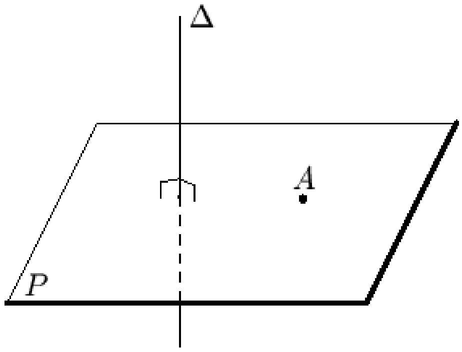
- deux droites parallèles distinctes (non confondues) ;



- une droite et un point n'appartenant pas à cette droite.

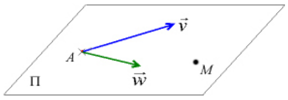


- un point du plan et une droite orthogonale au plan.



Équations paramétriques d'un plan

On désigne souvent un plan par la lettre π, qui n'a rien à voir avec le nombre pi !



Un plan π peut être défini par un de ses points, appelé **point d'ancrage**, et par **deux vecteurs directeurs** non colinéaires donnant l'orientation du plan dans l'espace.

Soit le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et les vecteurs $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_w\\y_w\\z_w\end{pmatrix}$.

Soit le plan $\Pi = (A\ ;\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\ )$, passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Les trois équations ci-dessous forment une **représentation paramétrique** du plan.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x_w\\y_w\\z_w\end{pmatrix}\text{, avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Équation cartésienne d'un plan

$$\begin{aligned} M\in\Pi=(A\ ;\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\ ) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM},\vec{v},\vec{w} \text{ sont coplanaires}\\ &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM},\vec{v},\vec{w})=0\\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-x_0 & x_v & x_w\\ y-y_0 & y_v & y_w\\ z-z_0 & z_v & z_w\end{vmatrix}=0\end{aligned}$$

En effectuant ce déterminant et en regroupant les termes, on obtient une **équation cartésienne** du type :

$$\Pi:\ ax+by+cz+d=0$$

Exercice 4.22

Déterminez les équations paramétriques des plans suivants :

a. π_1 passant par $A(2; 3; 5)$, $B(1; 0; 5)$, $C(6; –2; 5)$

b. π_2 contenant le point $A(1; 2; 5)$

et la droite d définie par $B(6; 0; 0)$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

c. π_3 contenant les deux droites : $d(A;\ \vec{v})$: $A(2; 0; 3)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$g(B;\ \vec{w})$: $B(4; 0; 0)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

d. π_4 contenant les droites d : $\begin{cases}x=1+3\lambda\\y=3-4\lambda\\z=2+\lambda\end{cases}$ et g : $\begin{cases}x=4-3\mu\\y=9-\mu\\z=-7+4\mu\end{cases}$

Exercice 4.23

Déterminez les équations cartésiennes des quatre plans trouvés à l'exercice 4.22.

Exercice 4.24

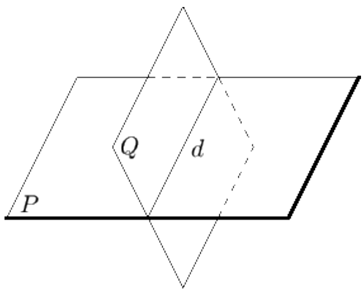
Vérifiez que les points $A(–4; 0; 3)$, $B(–2; 3; 0)$, $C(0; 2; 1)$ et $D(2; 1; 2)$ sont dans un même plan.
Donnez trois façons de procéder…

Positions relatives de droites et de plans

Trois possibilités :
- une droite coupe un plan en un point ;
- une droite est parallèle à un plan ;
- une droite appartient à un plan.

Positions relatives de deux plans

Trois possibilités :
- deux plans sont parallèles ;
- deux plans sont identiques ;
- deux plans sont sécants. Leur intersection est une droite.



Deux plans sécants

Exercice 4.25

On donne le plan π : $3x – 2y + z – 6 = 0$.
Déterminez les points d'intersections de π avec les axes de référence.

Exercice 4.26

On donne le plan π : $2x – y + 3z – 6 = 0$. Déterminez la position de π relativement aux droites suivantes :

a. d donnée par $A(2; 1; –2)$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ **b.** h donnée par $D(1; 2; 2)$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$

c. g passant par $B(2; 1; –1)$ et $C(3; 0; –2)$

Exercice 4.27

On donne les cinq points $A(1; 2; 6)$, $B(5; 7; 4)$, $C(2; 3; 5)$, $D(4; 6; 1)$ et $E(3; 4; 2)$.
Calculez le point d'intersection de la droite AB avec le plan CDE.

Exercice 4.28

On donne $P_1(1; 1; 1)$, $P_2(3; 2; 5)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

a. Les plans $\pi_1 = (P_1; \vec{v}\,; \vec{w})$ et $\pi_2 = (P_2; \vec{v}\,; \vec{w})$ sont-ils parallèles ?
b. Calculez les équations cartésiennes de π_1 et π_2 puis comparez-les.

Exercice 4.29

Écrivez l'équation cartésienne d'un plan...

a. parallèle au plan : $2x - 5y + z - 3 = 0$ et passant par l'origine
b. parallèle au plan : $2x - 5y + z - 3 = 0$ et passant par $A(2; -1; 4)$.

Indication : utilisez le résultat **b.** du problème 4.28.

Exercice 4.30

On donne les équations cartésiennes de deux plans p et q.
Déterminez si ces deux plans sont sécants, parallèles ou confondus.

a. $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : 3x + 2y + 5z = 4$
b. $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : 6x - 4y + 10z = 4$
c. $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : -15x + 10y - 25z = -20$

Exercice 4.31

On donne les plans $p : 3x - 5y + z + 4 = 0$ et $q : x + y - 2z + 3 = 0$.
Déterminez une représentation paramétrique de la droite d'intersection de ces deux plans.

Exercice 4.32

Existe-t-il un point appartenant aux trois plans :
$p : x + 2y - 3z = -6$ $q : 2x + 4y - z = 18$ $r : 3x - 2y + z = 2$?
Si oui, donnez ses coordonnées.

Exercice 4.33

Trouvez les équations paramétriques d'une droite d passant par $A(2; 3; 5)$ et parallèle aux deux plans $p : 3x - y + z = 0$ et $q : x - y + z = 0$.

Exercice 4.34

Déterminez une droite d passant par le point $A(3; -2; -4)$, qui est parallèle au plan $p: 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ et qui coupe la droite g définie par $B(2; -4; 1)$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Établissez une **méthode** de résolution avant de vous lancer dans les calculs.

Droites orthogonales

Les droites d et g sont orthogonales $\Leftrightarrow$ $\vec{d}\cdot\vec{g}=0$.

Remarques
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.
- Deux droites orthogonales et sécantes sont appelées **perpendiculaires**.

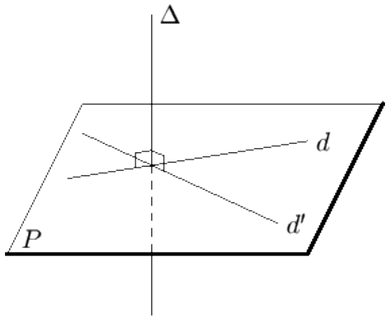
Exercice 4.35

Soit la droite d : $\begin{cases}x=2+3\lambda\\y=\lambda\\z=-4-\lambda\end{cases}$
Déterminez une droite g perpendiculaire à d.

Droite orthogonale à un plan

Une droite d est orthogonale à un plan π $\Leftrightarrow$ d est orthogonale à toute droite de π.
Une droite orthogonale à un plan est aussi appelée **normale** de ce plan.

Si une droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan *P*, alors Δ est orthogonale au plan *P*.



Si une droite Δ est orthogonale à une droite *d* d'un plan *P*, **on ne peut pas** en déduire que Δ est orthogonale à *P*.

Propriétés

- Étant donnés une droite *d* et un point *A*, il existe un seul plan passant par *A* et orthogonal à *d*.
- Étant donnés un plan π et un point *A*, il existe une seule droite passant par *A* et normale à π.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles.

Conséquence Un plan peut être déterminé par un point et un vecteur normal.

Le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Si deux plans $p : ax + by + cz + d = 0$ et $p' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles, alors les vecteurs normaux sont colinéaires. Donc $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$.

Exercice 4.36

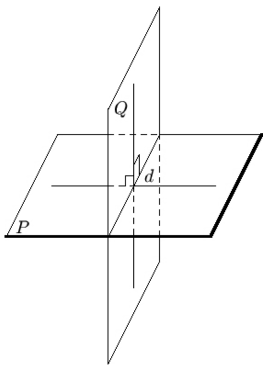
Déterminez la droite *d* passant par le point $A(2; 3; 5)$ et perpendiculaire au plan π d'équation cartésienne $3x - 2y + z + 5 = 0$.

Exercice 4.37

Écrivez une équation cartésienne du plan π passant par le point $A(3; 1; 1)$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B(1; 0; 5)$ et $C(3; -3; 8)$.

Plans perpendiculaires

Les plans *P* et *Q* sont perpendiculaires ⇔ les vecteurs normaux de *P* et *Q* sont orthogonaux.



Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un des plans contient une droite orthogonale à l'autre plan.
Il existe une infinité de plans passant par un point *A* et orthogonaux à un plan π.

Exercice 4.38

Écrivez une équation cartésienne du plan π passant par l'origine et le point $A(1; 1; 1)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z + 2 = 0$.

4.6. Distances

Distance entre deux points

On appelle **distance** du point A au point B la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note $\delta(A ; B)$.

$$\delta(A;B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Exercice 4.39

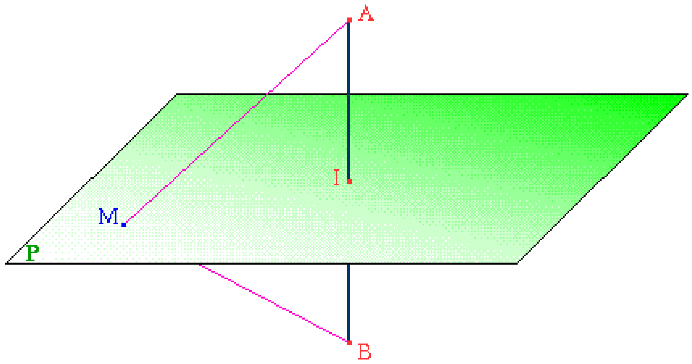
Calculez la distance entre les points $A(1; -5; 4.3)$ et $B(0.4; 1; -9.1)$.

Plan médiateur

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux points A et B est un plan appelé **plan médiateur** de AB.

I : milieu du segment AB

$\overrightarrow{AB}$: vecteur normal du plan P.

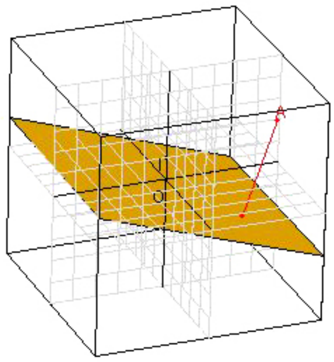


Exercice 4.40

Établissez l'équation cartésienne du plan médiateur du segment AB avec $A(2; -1; 4)$ et $B(1; 3; 2)$.

Distance d'un point à un plan

La distance d'un point A à un plan π est la distance du point A à sa projection orthogonale sur π.



Formule vectorielle

Soit π le plan passant par un point P et de vecteur normal $\vec{n}$.
La distance δ du point A au plan π est $\delta = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

Formule analytique

Soit π le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point $A(x_0, y_0, z_0)$ au plan π est $\delta = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Exercice 4.41

Calculez la distance du point $A(15; -2; 5)$ au plan $\pi : 3x - 2y + z = 12$.

Exercice 4.42

Soient les deux plans d'équations $3x + 12y - 4z - 18 = 0$ et $3x + 12y - 4z + 73 = 0$.
Vérifiez qu'ils sont parallèles, puis calculez leur distance.

Exercice 4.43

On donne le tétraèdre de sommets $A(2; 4; 6)$, $B(–4; –4; 4)$, $C(5; 0; 3)$ et $D(–1; 7; 5)$. Calculez la longueur de la hauteur, issue de A, de ce tétraèdre.

Exercice 4.44

Déterminez les équations cartésiennes des plans p' et p'' situés à une distance 6 du plan d'équation $9x + 2y – 6z – 8 = 0$.

Plans bissecteurs

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux plans sécants π et π' est constitué de deux plans appelés **plans bissecteurs** de π et π'. Ils sont orthogonaux l'un à l'autre.

Exercice 4.45

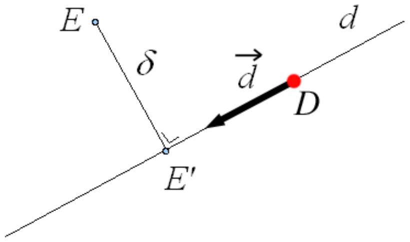
Dessinez deux plans sécants et leurs plans bissecteurs.

Exercice 4.46

On donne les plans $p : x + 2y – 2z – 1 = 0$ et $q : 2x – y + 2z + 1 = 0$.
Déterminez les équations cartésiennes des plans bissecteurs de p et q.

Distance d'un point à une droite

Dans l'espace, la distance d'un point E à une droite d est la distance du point E à sa projection orthogonale E' sur la droite d.



Distance d'un point E à une droite $d(D ; \vec{d})$:

$$\delta(E;d) = \frac{\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Justification

$\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|$ = aire du parallélogramme construit sur $\vec{d}$ et $\overrightarrow{DE}$

= base · hauteur = $\|\vec{d}\| \cdot \delta(E;d) \Rightarrow \delta(E;d) = \dfrac{\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$

Exercice 4.47

Soit la droite d : $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

Calculez la distance du point $A(–5; 4; –2)$ à la droite d.

Exercice 4.48

On donne la droite d passant par les points $A(2; 3; 5)$ et $B(1; 2; 8)$.
Déterminez le point E de la droite d situé à égale distance de $C(5; 4; 8)$ et $D(9; –2; 6)$.

Exercice 4.49

Soient les points $A(1; 5; 3)$, $B(5; 3; 7)$ et $C(9; 1; 2)$.
Déterminez les équations paramétriques de la bissectrice de l'angle BAC.

Distance entre deux droites de l'espace

La distance entre deux droites $d(D ; \vec{d})$ et $g(G ; \vec{g})$ est : $\delta(d;g) = \dfrac{[\overrightarrow{DG}, \vec{d}, \vec{g}]}{\|\vec{d} \wedge \vec{g}\|}$

Exercice 4.50

On donne deux droites : $d(AB)$ avec $A(2; 1; 3)$ et $B(1; 2; 1)$
$g(CD)$ avec $C(–1; –2; –2)$ et $D(1; –4; 0)$.
Calculez la distance entre ces deux droites.

Exercice 4.51

Soit la droite $d(AB)$ passant par les points $A(0; 5; –2)$ et $B(7; 3; 5)$. Quel point D de cette droite est le plus proche du point $C(5; 3; 7)$?
Donnez trois (!) méthodes pour trouver la solution.

4.7. Angles

Angle de deux droites

On appelle angle (aigu ou obtus) de deux droites l'angle que forment les vecteurs directeurs de ces deux droites.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right)$$

Exercice 4.52

On donne les deux droites $d : \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=8+6\lambda \\ z=16+2\lambda \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x=2+3\mu \\ y=\mu \\ z=-4-\mu \end{cases}$

Calculez l'angle aigu compris entre ces deux droites.

Exercice 4.53

Soit le triangle de sommets $A(4;\, 1;\, 7)$, $B(2;\, 4;\, 3)$ et $C(3;\, 9;\, 5)$.
Calculez les trois angles de ce triangle.

Angle de deux plans

On appelle angle (aigu ou obtus) de deux plans l'angle des vecteurs normaux à ces deux plans.

Exercice 4.54

Soient les deux plans sécants $p : x + 2y - z = 0$ et $q : 2x - 3y + 4z = 8$.
Calculez l'angle aigu formé par ces deux plans.

Angle d'une droite et d'un plan

On appelle angle (aigu ou obtus) d'une droite d et d'un plan π l'angle que forme d avec sa projection d' sur π.

Méthode

1. Calculer l'angle **aigu** β formé par le vecteur directeur de la droite d avec le vecteur normal du plan π.
2. L'angle formé par d et π vaut $\alpha = 90° - \beta$

Exercice 4.55

Soit la droite d passant par $A(1;\, 2;\, 3)$ et $B(2;\, 1;\, 5)$. Soit le plan $\pi : 3x + 2y - 5z = 0$.
Calculez l'angle formé par d et π.

4.8. Cercles du plan

Définition

Soit Ω un point du plan et r un nombre réel positif. On appelle **cercle** de centre Ω et de rayon r l'ensemble des points M du plan dont la distance au point Ω est égale à r.

Équation cartésienne du cercle

Soit le cercle de centre $\Omega(x_0\,;\, y_0)$ et de rayon r.

$$M(x\,;\,y) \in \text{cercle } (\Omega\,;\, r) \quad\Leftrightarrow\quad \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r$$
$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$$

Remarques

On supposera que l'on travaille toujours dans un repère orthonormé.

En développant la formule ci-dessus, on obtient l'équation :

$$x^2+y^2\underbrace{-2x_0}_{a}\cdot x\underbrace{-2y_0}_{b}\cdot y+\underbrace{x_0^2+y_0^2-r^2}_{c}=0$$

Attention !

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ n'est pas forcément l'équation d'un cercle !

On en déduit que tout cercle possède une équation cartésienne de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Équations paramétriques du cercle

$$\Gamma : \begin{cases} x = x_0 + r\cos(\alpha) \\ y = y_0 + r\sin(\alpha) \end{cases}$$

Le paramètre est l'angle α qui varie entre 0 et 2π.

Exercice 4.56

Formez l'équation d'un cercle...

a. de centre 0 (origine) et de rayon $r = 3$;
b. de centre $\Omega(6; -8)$ et passant par l'origine ;
c. dont $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$ sont les extrémités d'un diamètre ;
d. passant par $A(3; 1)$ et $B(-1; 3)$ et dont le centre appartient à la droite $3x - y - 2 = 0$.

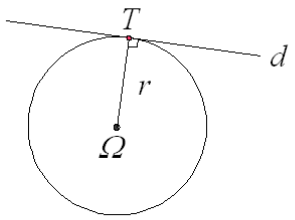
Exercice 4.57

Les équations ci-dessous définissent-elles des cercles ? Si oui, déterminez leur centre et leur rayon.

a. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ **b.** $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$ **d.** $2x^2 + 2y^2 - 9x + 4y - 8 = 0$

Tangente à un cercle

Une droite d est dite **tangente** à un cercle de centre Ω et de rayon r si $\delta(\Omega ; d) = r$.



La droite tangente en un point T à un cercle $(\Omega ; r)$ est la droite :

- passant par T
- perpendiculaire à ΩT

Exercice 4.58

Formez l'équation du cercle tangent à la droite $d : 4x - 3y + 15 = 0$ en $T(0 ; 5)$ et passant par le point $A(4 ; 7)$.

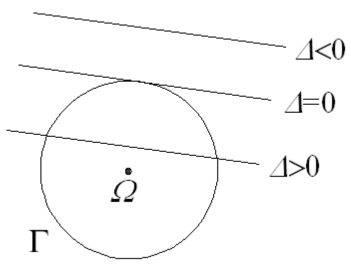
Intersection d'une droite et d'un cercle

Pour déterminer les points d'intersection d'une droite d et d'un cercle Γ, il faut résoudre le système des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{équation cartésienne de la droite } d \\ \text{équation cartésienne du cercle } \Gamma \end{cases}$$

Par substitution, on obtient une équation du deuxième degré. En fonction du discriminant Δ de cette équation, on se trouve en face d'un des trois cas suivants :

1. $\Delta > 0$: il y a deux points d'intersection
2. $\Delta = 0$: il y a un point de tangence
3. $\Delta < 0$: la droite ne coupe pas le cercle.



Exercice 4.59

Déterminez les intersections d'une droite et d'un cercle :

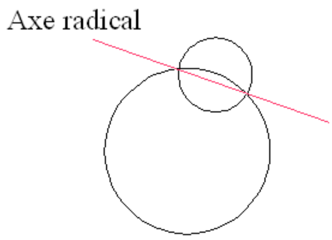
a. droite : $2x - y = 3$ cercle : $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$
b. droite : $x - 2y = 1$ cercle : $x^2 + y^2 - 8x + 2y = -12$

Intersection de deux cercles

Pour déterminer les points d'intersection de deux cercles Γ_1 et Γ_2, il faut résoudre le système des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{équation cartésienne du cercle } \Gamma_1 \\ \text{équation cartésienne du cercle } \Gamma_2 \end{cases}$$

Pour ce faire, on soustrait les équations des deux cercles. On obtient l'équation d'une droite que l'on appelle l'**axe radical**. On détermine ensuite l'intersection de cette droite avec l'un des deux cercles comme vu précédemment.



Exercice 4.60

Déterminez les points d'intersection des deux cercles Γ_1 et Γ_2 :

$\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ $\qquad\qquad$ $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$

Distance d'un point à une droite dans le plan

Soit d la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

La distance du point $A(x_0, y_0)$ à la droite d est $\delta = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 4.61

Soit le cercle Γ: $16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$.

a. Déterminez le point de Γ le plus proche de l'origine.

b. Déterminez le point de Γ le plus proche de la droite d : $8x - 4y + 73 = 0$.

Exercice 4.62

Formez l'équation…

a. de la droite tangente au cercle $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ au point $T(-5 ; 7)$

b. des droites parallèles à d : $2x + y - 7 = 0$ et tangentes au cercle dont l'équation est $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$

c. des droites passant par le point $A(1 ; 6)$ (qui n'appartient pas au cercle) et tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$.
Indication : utilisez le fait que $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{\Omega T} = 0$

Exercice 4.63

Écrivez l'équation du cercle…

a. circonscrit au triangle ABC : $A(1 ; 1)$, $B(1 ; -1)$, $C(2 ; 0)$

b. inscrit dans le triangle DEF : $D(2 ; -1)$, $E(-2 ; 2)$, $F(16 ; 9.5)$.

Rappel
Le cercle circonscrit a pour centre l'intersection des médiatrices.
Le cercle inscrit a pour centre l'intersection des bissectrices.

Indication
Pour trouver l'équation d'une bissectrice, pensez à la façon dont vous opérez avec un compas.

4.9 Sphères

On appelle sphère de centre Ω et de rayon r l'ensemble des points M de l'espace situés à la distance r du centre Ω.

Soit la sphère de centre $\Omega\,(x_0\,;\,y_0;\,z_0)$ et de rayon r.

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{sphère } (\Omega\,;\,r) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$$

En développant la formule ci-dessus, on obtient l'équation :

$$x^2+y^2+z^2\underbrace{-2x_0}_{a}\cdot x\underbrace{-2y_0}_{b}\cdot y\underbrace{-2z_0}_{c}\cdot z+\underbrace{x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2}_{d}=0$$

Repérez bien ce que sont a, b, c et d. Cela vous permettra de retrouver le centre et le rayon de la sphère (voir ex. 4.66)

On en déduit que toute sphère possède une équation cartésienne de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

Mais attention ! L'inverse n'est pas vrai ! Voir ex 4.66.

Exercice 4.64

Écrivez l'équation cartésienne de...

a. la sphère de centre $O(0;\,0;\,0)$ et passant par le point $A(3;\,2;\,-1)$;

b. la sphère de centre $C(1;\,-2;\,4)$ et passant par le point $A(3;\,2;\,-1)$.

Exercice 4.65

Écrivez l'équation de la sphère (S) de diamètre AB avec $A(-1;\,0;\,5)$ et $B(7;\,4;\,-7)$.

Exercice 4.66

Les équations suivantes représentent-elles des sphères ?
Si oui, déterminez leur centre et leur rayon.

a. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y - 4z + 22 = 0$

b. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$

c. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y + 2z - 87 = 0$

Exercice 4.67

Écrivez l'équation de la sphère passant par les deux points $A(4;\,2;\,-3)$, $B(-1;\,3;\,1)$ et ayant son centre sur la droite (CD) connaissant $C(2;\,3;\,7)$ et $D(1;\,5;\,9)$.

Positions relatives d'un plan et d'une sphère

Trois possibilités :

- le plan coupe la sphère : l'intersection est un cercle ;
- le plan est tangent à la sphère ;
- le plan ne touche pas la sphère.

Attention ! Dans l'espace, un cercle n'a pas d'équation cartésienne. On le définit en donnant son centre, son rayon et le plan qui le contient.

Remarques très utiles

1. Un **plan tangent** à la sphère de centre Ω et de rayon r est un plan situé à la distance r de Ω.
2. Le plan tangent à la sphère ($\Omega\,;\,r$) au point T a pour vecteur normal $\overrightarrow{T\Omega}$.
3. Le plan tangent en T à la sphère ($\Omega\,;\,r$) contient toutes les droites tangentes en T à cette sphère.

Exercice 4.68

Soit la sphère (S) : $(x-1)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=62$.

Soit le plan π : $3x - 7y + 2z + 100 = 0$.

Prouvez que le plan π est tangent à la sphère (S).

Exercice 4.69

Calculez le rayon de la sphère (S) de centre $\Omega(4; 1; -5)$ qui est tangente au plan $\pi : x + 2y + 2z = 4$.

Exercice 4.70

[(1)]*appartient* signifie « est sur » la sphère, pas « dans » la sphère

Soient la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 30y - 4z + 13 = 0$ et le point $T(7; 4; 4)$.

a. Vérifiez que le point T appartient[(1)] à la sphère.
b. Écrivez l'équation cartésienne du plan tangent à la sphère (S) au point T.

Exercice 4.71

Soit la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y = 159$ et le plan $\pi : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$. Déterminez les équations des plans parallèles au plan π et tangents à la sphère (S).

Exercice 4.72

Soit la sphère (S) : $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ et le plan $\pi : 2x - 2y - z + 9 = 0$.
a. Prouvez que le plan π coupe la sphère (S).
b. L'intersection de π et (S) est un cercle (C) ; déterminez son centre et son rayon.

Positions relatives d'une droite et d'une sphère

Trois possibilités :
- la droite coupe la sphère en deux points ;
- la droite est tangente à la sphère ;
- la droite ne touche pas la sphère.

Une **droite tangente** à la sphère de centre Ω et de rayon r est située à la distance r de Ω.

Exercice 4.73

On donne la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$ et la droite d : $\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=6-2\lambda \\ z=-4+\lambda \end{cases}$

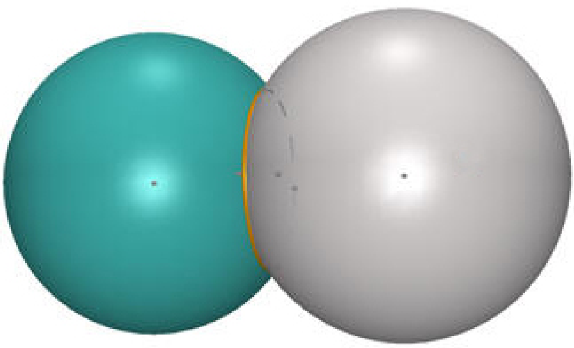
Calculez les coordonnées des points d'intersection de (S) et d.

Exercice 4.74

Soient la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z + 17 = 0$ et le point $A(-2; 2; 3)$.
a. Vérifiez que le point A appartient à la sphère (S).
b. Écrivez l'équation d'une droite d tangente en A à la sphère.
c. Écrivez l'équation de la droite g tangente en A à la sphère et coupant l'axe des z.

Positions relatives de deux sphères

L'intersection des deux sphères est un cercle.



Exercice 4.75

Dessinez les six positions relatives possibles de deux sphères.

Exercice 4.76

Soient deux sphères ($S1$) et ($S2$) :
($S1$) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$
($S2$) : $x^2 + y^2 + z^2 = 81$
a. Montrez que les sphères ($S1$) et ($S2$) sont tangentes.
b. Déterminez l'équation du plan tangent commun à ces deux sphères.

4.10. Ce qu'il faut absolument savoir

Trouver les coordonnées du milieu d'un segment ❏ ok
Trouver les coordonnées du centre de gravité d'un triangle ❏ ok

Donner la représentation paramétrique d'une droite connaissant deux points
ou un point et le vecteur directeur ❏ ok
Trouver un point quelconque d'une droite donnée et vérifier qu'un point appartient à une droite ❏ ok
Trouver les positions relatives de deux droites ❏ ok
Calculer le point d'intersection de deux droites (s'il existe) ❏ ok
Trouver le vecteur directeur d'une droite ❏ ok

Donner l'équation paramétrique d'un plan connaissant trois points ou un point et deux vecteurs directeurs ❏ ok
Donner l'équation cartésienne d'un plan connaissant trois points ou un point et deux vecteurs directeurs ❏ ok
Donner l'équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal ❏ ok
Trouver le vecteur normal d'un plan connaissant son équation cartésienne ❏ ok
Trouver un point quelconque d'un plan donné et vérifier qu'un point appartient à un plan ❏ ok
Trouver les positions relatives de deux plans ❏ ok
Trouver le point d'intersection d'une droite et d'un plan ❏ ok
Trouver la droite d'intersection de deux plans ❏ ok

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs ❏ ok
Reconnaître deux vecteurs, deux droites ou deux plans perpendiculaires ❏ ok

Calculer la distance entre deux points ❏ ok
Calculer la distance entre un point et un plan grâce au produit scalaire ❏ ok
Calculer la distance entre un point et une droite grâce au produit vectoriel ❏ ok
Calculer la distance entre deux droites grâce au produit mixte ❏ ok

Calculer l'angle entre deux vecteurs (et entre deux droites) ❏ ok
Calculer l'angle entre deux plans ❏ ok
Calculer l'angle entre une droite et un plan ❏ ok

Donner l'équation cartésienne d'une sphère connaissant son centre et son rayon ❏ ok
Reconnaître l'équation d'une sphère ❏ ok
Retrouver le centre et le rayon d'une sphère d'après son équation ❏ ok
Trouver un point d'une sphère donnée et vérifier qu'un point appartient à une sphère ❏ ok
Trouver les positions relatives d'une sphère et d'un plan ❏ ok
Trouver les positions relatives de deux sphères ❏ ok
Trouver les positions relatives d'une sphère et d'une droite ❏ ok
Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une sphère (s'ils existent) ❏ ok
Trouver le cercle d'intersection d'un plan et d'une sphère (s'il existe) ❏ ok
Trouver le cercle d'intersection de deux sphères (s'il existe) ❏ ok
Trouver le plan tangent à une sphère connaissant le point de tangence ❏ ok
Trouver le point de tangence de deux sphères ❏ ok

Solutions des exercices

Chapitre 1

1.2. $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ $\quad A=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

1.3. $2.527L^2$

1.4. 18

1.5. un cercle

1.6. environ 58 millions de Lunes

1.7. **a.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}a^3$ **b.** $\frac{\pi}{6}a^3$ **c.** $2\pi a^2$

1.8. **a.** $V=\pi r^2\left(1-\frac{r}{R}\right)H$ **b.** $A=2\pi r\frac{(R-r)H}{R}$

1.9. **a.** 216π **b.** 96π

1.10. $V=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h)$

1.13. $A=i+\frac{b}{2}-1+n$, où n est le nombre de trous

1.14. **1.** env. 29 min **2.** 627 cm^2
3. masses égales, donc volumes égaux
4. 728 cm^2
5. temps de cuisson proportionnel à la surface latérale en contact avec l'air chaud
6. entre 24 et 25 min.

1.16. 3.3 m

Chapitre 2

2.2. **i.** $-\cos(\alpha)$ **j.** $-\sin(\alpha)$
k. $\tan(\alpha)$ **l.** $\text{ctg}(\alpha)$

2.4. **a.** $\pi/2$ **b.** $\pi/4$ **c.** $\pi/6$
d. $2\pi/3$ **e.** $3\pi/2$ **f.** $\pi/3$
g. $31\pi/18$ **h.** 2.3387 **i.** 3.8746

2.5. **a.** 270° **b.** 45° **c.** 90°
d. 60° **e.** 22.5° **f.** 140°
g. 28.648° **h.** 188.503° **i.** 231.02°

2.6. **a.** α=24.2° a=1.95 b=4.33
b. α=28.93° β=61.07° b=22.26
c. β=36.54° c=60.394 b=35.958
d. α=75.5° c=116.2 b=29.1
e. α=25.48° β=64.53° c=51.8
f. α=48.64° β=41.36° a=48.6 c=64.8
g. β=51.55° b=4.57 a=3.63 c=5.83
h. a=15.95 b=6.7 (ou le contraire)
α=67.21° β=22.79° (ou le contraire)

2.7. **a.** $\beta=\gamma=65.75°$ $b=c=27.76$
b. $\beta=\gamma=38.26°$ $a=6.66$
c. $\alpha=35.2°$ $b=c=14.1$
d. $\alpha=114.22°$ $a=31.44$

2.8. $b=c=21.93$ $h_a=20.61$ $h_b=h_c=14.1$
$\rho=5.25$ $r=11.67$ $S=154.5456$

2.9. 27.62 m

2.10. **a.** $p=12.15$
b. côté = 9.22, $r=22.17$

2.11. **a.** $d=17.68$ m **b.** $h=14.12$ m

2.12. **a.** $d=16.94$ m **b.** $h=11.86$ m

2.13. 1934 m

2.14. 1130.6 cm

2.15. environ 109 millions de km

2.16. $x=96.41$ m $\alpha=34.25°$

2.17. 10.7 km

2.18. 40 m

2.19. **a.** α=58.79° β=90.52° c=41.92
b. α=82.37° b=17.55 c=13.1
c. α=22.99° β=64.52° γ=92.48°
d. impossible
e. α=7.89° γ=141.46° c=444.95
f. deux solutions :
α=60.43° γ=80.2° c=521.33
ou α=119.57° γ=21.06° c=190.11

2.20. 1182.588 km

2.21. 106.44 km

2.22. $\overline{DE}\cong 4.69$

2.23. **a.** 72°, 108°, 36° **b.** 0.618 **c.** 0.36, 0.59

2.24. 105 m

2.25. 1195.54 m

Chapitre 3

3.2. **a.** $\vec{a}$
b. $-\vec{g}-\vec{h}$; $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{f}+\vec{c}$; ...
c. $\vec{c}=-\vec{f}+\vec{e}-\vec{d}$
d. $\vec{g}=-\vec{k}+\vec{c}+\vec{d}-\vec{e}$
e. $\vec{e}=-\vec{g}-\vec{h}+\vec{d}$
f. $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$
g. $\vec{0}$
h. $-\vec{g}$

3.3. $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$ $\vec{b}=\overrightarrow{DC}$ $\vec{c}=\vec{0}$
$\vec{d}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ $\vec{e}=5\overrightarrow{AC}+85\overrightarrow{AD}$

3.5. **a.** $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
c. $\vec{v}=8\vec{i}-\vec{j}=\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{v}=3\vec{i}-7\vec{j}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$

3.6. **a.** $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}-15\\25\end{pmatrix}$
d. $\sqrt{34}$ **e.** $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix}13\\-21\end{pmatrix}$
g. $\sqrt{89}$ **h.** 2.2254 **i.** $\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

3.7. $\vec{v}=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

3.8. **a.** $\vec{v}=\frac{8}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{w}=\begin{pmatrix}5.936\\3.709\end{pmatrix}$
c. $L\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$

3.9. $\vec{v}=\begin{pmatrix}-12.85\\15.32\end{pmatrix}$

3.10. **a.** $(x_p+61.28\ ;\ y_p+51.42)$
b. $(x_p-61.45\ ;\ y_p+45.25)$

3.11. 459.54 km/h

3.12. 217.54 mph

3.13. 23.6°

3.14. **a.** $x = 80\cdot\sin\theta$; $y = 80\cdot\cos\theta$
b. Lune : 79.72° ; Mars : 67.53°

3.15. **a.** 0 ; 90° **b.** 0 ; 90° **c.** 4 ; 36.87°
d. 6 ; 18.43° **e.** 24 ; 16.26° **f.** –1 ; 81.87°
g. 7 ; 8.13° **h.** 0 ; 90°

3.16. 8.63 degrés ; 1.52 minutes

3.17. $a=\frac{3}{2}$

3.18. env. 83.5°

3.19. **a.** $\vec{a}=\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
b. $\vec{a}=-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\frac{7}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$
c. $\vec{a}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
d. $\vec{a}=\frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

3.20. **a.** 2.6 **b.** 26.27 **c.** 14.43

3.21. **a.** $\begin{pmatrix}-7\\14\\21\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7\\-14\\-21\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}-14\\28\\42\end{pmatrix}$ (3 fois)
c. $\begin{pmatrix}-3\\34\\23\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-3\\34\\23\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}-56\\14\\-28\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}14\\0\\-28\end{pmatrix}$

3.22. 15

3.23. **a.** 12 **b.** 6

3.24. **a.** 70 **b.** –70 **c.** 70 **d.** 0

3.25. oui, car $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]=0$

3.26. 3

3.27. $D(0; 8; 0)$ et $D'(0; -7; 0)$

Chapitre 4

4.2. **b.** milieu de AC : $E(1; -0.5)$,
milieu de BD : $F(-1; -2.37)$.
c. $G(-2/3; -4/3)$

4.3. **a.** $D(13 ; 1)$, $I(5 ; 1)$
b. $E_1(0 ; -1)$, $E_2(0 ; -21/5)$

4.4. **a.** oui **b.** non

4.5. **a.** non

4.6. **a.** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$
b. C : non ; D : non ; E : oui ; F : oui
c. $K(-4 ; -2)$

4.8. **a.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.9. $I\left(\frac{159}{109}; \frac{163}{109}\right)$

4.10. **a.** $d_1 \cap d_2$: $I\left(-\frac{9}{7}; \frac{20}{7}\right)$

$d_1 \cap d_3$: $I\left(-\frac{9}{7}; \frac{20}{7}\right)$

$d_2 \cap d_3$: $d_2 = d_3$

4.11. $5x + 2y - 29 = 0$

4.12. **a.** Droites horizontales
b. Droites verticales
c. Droites passant par l'origine

4.13. **b.** $\begin{pmatrix} 7 \\ -10.5 \end{pmatrix}$

4.14. **b.** $2x - 3y = 0$
c. $2x - 3y + 11 = 0$

4.20. **a.** gauches **b.** parallèles
c. sécantes **d.** confondues

4.21. $I(2; 5; -1)$

4.22. Des réponses parmi une infinité :

a. $\pi_1 : \begin{cases} x = 2 - \lambda + 5\mu \\ y = 3 - 3\lambda - 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$

b. $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + 5\lambda - \mu \\ y = 2 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 5 - 5\lambda + \mu \end{cases}$

c. $\pi_3 : \begin{cases} x = 4 + \lambda + 2\mu \\ y = -\lambda \\ z = \lambda - 3\mu \end{cases}$

d. $\pi_4 : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - 3\mu \\ y = 3 - 4\lambda - \mu \\ z = 2 + \lambda + 4\mu \end{cases}$

4.23. **a.** $z = 5$ **b.** $x + z = 6$
c. $3x + 5y + 2z = 12$ **d.** $x + y + z = 6$

4.25. $I(2; 0; 0)$, $J(0; -3; 0)$, $K(0; 0; 6)$

4.26. **a.** d coupe le plan en $I(-1; -5; 1)$
b. h est contenue dans le plan
c. g est parallèle au plan

4.27. $I(2; 13/4; 11/2)$

4.28. **a.** oui

4.29. **a.** $2x - 5y + z = 0$
b. $2x - 5y + z = 13$

4.30. **a.** sécants **b.** parallèles **c.** confondus

4.31. $d : \begin{cases} x = 1 + 9\lambda \\ y = 2 + 7\lambda \\ z = 3 + 8\lambda \end{cases}$

4.32. $I(2; 5; 6)$

4.33. $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + \mu \\ z = 5 + \mu \end{cases}$

4.34. $d : \begin{cases} x = 3 + 5\mu \\ y = -2 - 6\mu \\ z = -4 + 9\mu \end{cases}$

4.37. $\pi : 2x - 3y + 3z - 6 = 0$

4.38. $\pi : x - z = 0$

4.39. 14.69

4.40. $-x + 4y - 2z + \frac{7}{2} = 0$

4.41. 11.225

4.42. 7

4.43. 1.8856

4.44. p' : $9x + 2y - 6z - 74 = 0$
p'' : $9x + 2y - 6z + 58 = 0$

4.46. p_1 : $3x + y = 0$ p_2 : $-x + 3y - 4z - 2 = 0$

4.47. 6.123

4.48. $E(9; 10; -16)$

4.49. $\begin{cases} x = 1 + 14\lambda \\ y = 5 - 7\lambda \\ z = 3 + 5\lambda \end{cases}$

4.50. $3\sqrt{2}$

4.51. $D(7; 3; 5)$

4.52. 70.75°

4.53. $\alpha = 40.53°$, $\beta = 99.76°$, $\gamma = 39.71°$

4.54. 52.67°

4.55. 36.58°

4.56. **a.** $x^2 + y^2 = 9$
b. $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$
c. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

4.57. **a.** $\Omega(-3 ; 0)$, $r = 5$
b. $\Omega(-3 ; 4)$, $r = 3$
c. Ce n'est pas un cercle
d. $\Omega(2.25 ; -1)$, $r = 3.17$

4.58. $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$

4.59. **a.** $A(0 ; -3)$ $B\left(\frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right)$
b. $T(3 ; 1)$

4.60. $A(-1 ; -1)$ $B\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$

4.61. **a.** $A(0.71 ; -0.12)$
b. $B(-3.5 ; 1.25)$

4.62. **a.** $3x - 4y = -43$
b. $2x + y = -19$ $2x + y = 1$
c. $x - 2y = -11$ $2x + y = 8$

4.63. **a.** $x^2 + y^2 - 2x = 0$
b. $(x-2)^2 + (y-1.5)^2 = 4$

4.64. **a.** $x^2 + y^2 + z^2 = 14$
b. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 45$

4.65. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 56$

4.66. **a.** oui $\Omega(-3; 5; 2)$ $r = 4$
b. non
c. oui $\Omega\left(\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{2}\right)$ $r = 4\sqrt{3}$

4.67. $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 45$

4.69. $r = \frac{8}{3}$

4.70. **b.** $10x - 11y + 2z - 34 = 0$

4.71. p' : $12x + 4y + 3z - 209 = 0$
p'' : $12x + 4y + 3z + 129 = 0$

4.72. **b.** $\Omega(-1 ; 2; 3)$, $r = 8$

4.73. $I(1; 2; -2)$ et $J(3; 0; -1)$

4.74. **c.** $g : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

4.76. **b.** $2x + 6y - 3z - 63 = 0$