【DCT笔记】DCT变换、DCT反变换、分块DCT变换 - PKU_lzhen - 博客园

DCT变换、DCT反变换、分块DCT变换

一、引言

DCT变换的全称是离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)，主要用于将数据或图像的压缩，能够将空域的信号转换到频域上，具有良好的去相关性的性能。DCT变换本身是无损的，但是在图像编码等领域给接下来的量化、哈弗曼编码等创造了很好的条件，同时，由于DCT变换时对称的，所以，我们可以在量化编码后利用DCT反变换，在接收端恢复原始的图像信息。DCT变换在当前的图像分析已经压缩领域有着极为广大的用途，我们常见的JPEG静态图像编码以及MJPEG、MPEG动态编码等标准中都使用了DCT变换。

二、一维DCT变换

一维DCT变换时二维DCT变换的基础，所以我们先来讨论下一维DCT变换。一维DCT变换共有8种形式，其中最常用的是第二种形式，由于其运算简单、适用范围广。我们在这里只讨论这种形式，其表达式如下：

其中，f(i)为原始的信号，F(u)是DCT变换后的系数，N为原始信号的点数，c(u)可以认为是一个补偿系数，可以使DCT变换矩阵为正交矩阵。

$$F(u) = c(u)\sum_{i=0}^{N-1} f(i)\cos\left[\frac{(i+0.5)\pi}{N}u\right]$$

$$c(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & u \neq 0 \end{cases}$$

三、二维DCT变换

二维DCT变换其实是在一维DCT变换的基础上在做了一次DCT变换，其公式如下：

$$F(u,v) = c(u)c(v)\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} f(i,j)\cos\left[\frac{(i+0.5)\pi}{N}u\right]\cos\left[\frac{(j+0.5)\pi}{N}v\right]$$

$$c(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & u \neq 0 \end{cases}$$

由公式我们可以看出，上面只讨论了二维图像数据为方阵的情况，在实际应用中，如果不是方阵的数据一般都是补齐之后再做变换的，重构之后可以去掉补齐的部分，得到原始的图像信息，这个尝试一下，应该比较容易理解。

另外，由于DCT变换高度的对称性，在使用Matlab进行相关的运算时，我们可以使用更简单的矩阵处理方式：

$$F = AfA^T$$

$$A(i,j) = c(i)\cos\left[\frac{(j+0.5)\pi}{N}i\right]$$

接下来利用Matlab对这个过程进行仿真处理：

```
clear;
clc;
X=round(rand(4)*100)    %产生随机矩阵
A=zeros(4);
for i=0:3
    for j=0:3
        if i==0
            a=sqrt(1/4);
        else
            a=sqrt(2/4);
        end
        A(i+1,j+1)=a*cos(pi*(j+0.5)*i/4);
    end
end
Y=A*X*A'          %DCT变换
YY=dct2(X)        %Matlab自带的dct变换
```

运行结果为：

```
X =

    42    66    68    66
    92     4    76    17
    79    85    74    71
    96    93    39     3


Y =

  242.7500   48.4317   -9.7500   23.5052
  -12.6428  -54.0659    7.4278   22.7950
   -6.2500   10.7158  -19.7500  -38.8046
   40.6852  -38.7050  -11.4653  -45.9341


YY =
```

```
18
19   242.7500   48.4317   -9.7500   23.5052
20   -12.6428  -54.0659    7.4278   22.7950
21    -6.2500   10.7158  -19.7500  -38.8046
22    40.6852  -38.7050  -11.4653  -45.9341
```

由上面的结果我们可以看出，我们采用的公式的方法和Matlab自带的dct变化方法结果是一致的，所以验证了我们方法的正确性。

如果原始信号是图像等相关性较大的数据的时候，我们可以发现在变换之后，系数较大的集中在左上角，而右下角的几乎都是0，其中左上角的是低频分量，右下角的是高频分量，低频系数体现的是图像中目标的轮廓和灰度分布特性，高频系数体现的是目标形状的细节信息。DCT变换之后，能量主要集中在低频分量处，这也是DCT变换去相关性的一个体现。

之后在量化和编码阶段，我们可以采用“Z”字形编码，这样就可以得到大量的连续的0，这大大简化了编码的过程。

四、二维DCT反变换

在图像的接收端，根据DCT变化的可逆性，我们可以通过DCT反变换恢复出原始的图像信息，其公式如下：

$$f(i,j)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}c(u)c(v)F(u,v)\cos\left[\frac{(i+0.5)\pi}{N}u\right]\cos\left[\frac{(j+0.5)\pi}{N}v\right]$$

$$c(u)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{N}}, & u=0\\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & u\neq 0\end{cases}$$

同样的道理，我们利用之前的矩阵运算公司可以推导出DCT反变换相应的矩阵形式：

$$F=AfA^T$$
$$\because\ A^{-1}=A^T$$
$$\therefore\ f=A^{-1}F(A^T)^{-1}=A^TFA$$

下面我们用Matlab对这个过程进行仿真：

```
 1 clear;
 2 clc;
 3 X=[
 4     61    19    50    20
 5     82    26    61    45
 6     89    90    82    43
 7     93    59    53    97] %原始的数据
 8 A=zeros(4);
 9 for i=0:3
10     for j=0:3
```

```
        if i==0
            a=sqrt(1/4);
        else
            a=sqrt(2/4);
        end
        A(i+1,j+1)=a*cos(pi*(j+0.5)*i/4); %生成变换矩阵
    end
end
Y=A*X*A'    %DCT变换后的矩阵
X1=A'*Y*A   %DCT反变换恢复的矩阵
```

运行结果为：

```
X =

    61    19    50    20
    82    26    61    45
    89    90    82    43
    93    59    53    97


Y =

  242.5000   32.1613   22.5000   33.2212
  -61.8263    7.9246  -10.7344   30.6881
  -16.5000  -14.7549   22.5000   -6.8770
    8.8322   16.6881  -35.0610   -6.9246


X1 =

   61.0000   19.0000   50.0000   20.0000
   82.0000   26.0000   61.0000   45.0000
   89.0000   90.0000   82.0000   43.0000
   93.0000   59.0000   53.0000   97.0000
```

我们可以看到反变换后无损的恢复了原始信息，所以证明了方法的正确性。但是在实际过程中，需要量化编码或者直接舍弃高频分量等处理，所以会出现一定程度的误差，这个是不可避免的。

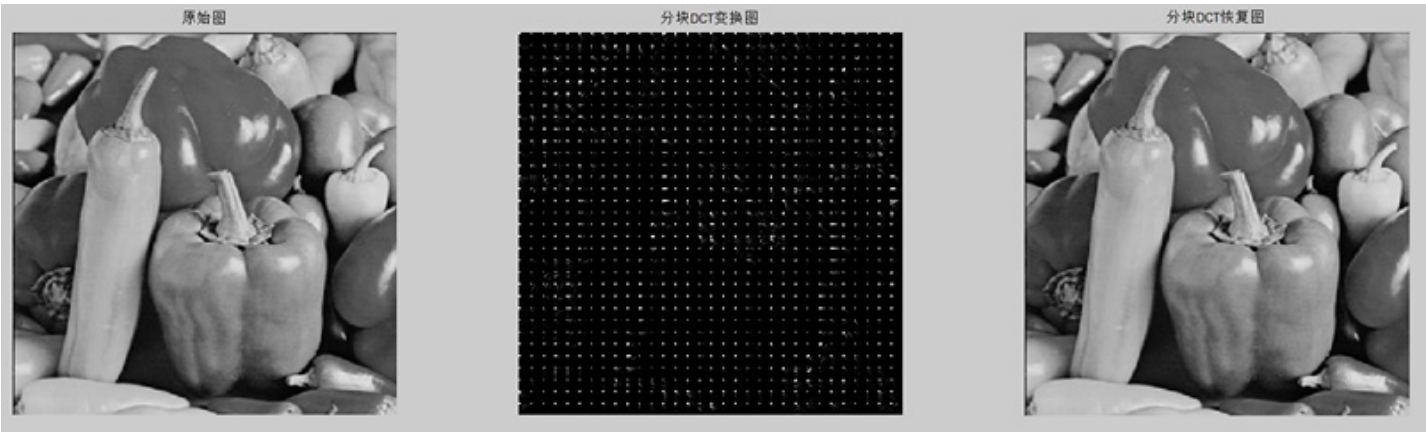
五、分块DCT变换

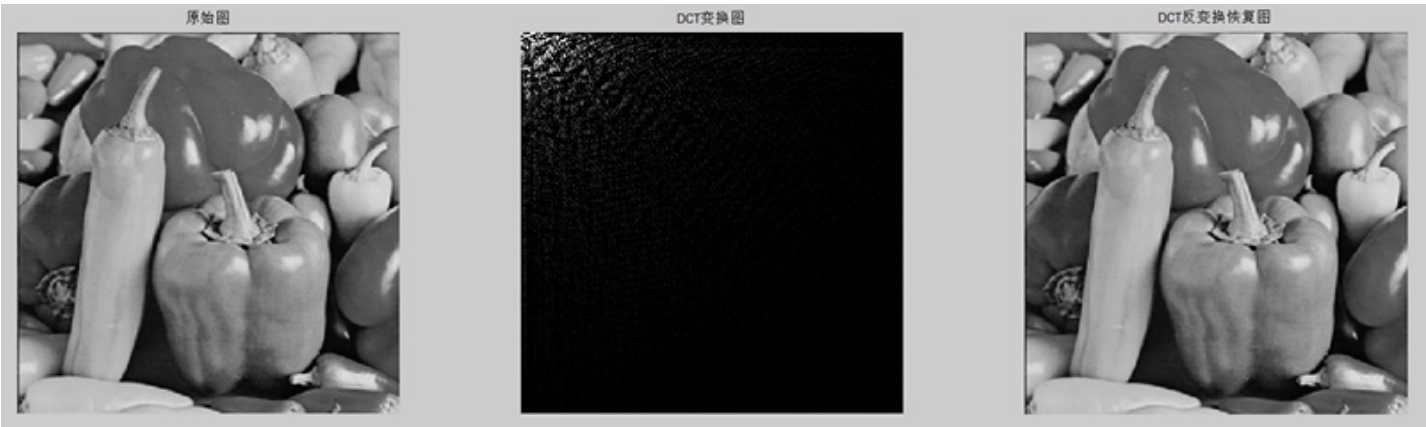
在实际的图像处理中，DCT变换的复杂度其实是比较高的，所以通常的做法是，将图像进行分块，然后在每一块中对图像进行DCT变换和反变换，在合并分块，从而提升变换的效率。具体的分块过程中，随着子块的变大，算法复杂度急速上升，但是采用较大的分块会明显减少图像分块效应，所以，这里面需要做一个折中，在通常使用时，大都采用的是8*8的分块。

Matlab的 blkproc 函数可以帮我们很方便的进行分块处理，下面给出我们的处理过程：

```
clear;
clc;

X=imread('pepper.bmp');
X=double(X);
[a,b]=size(X);
Y=blkproc(X,[8 8],'dct2');
X1=blkproc(Y,[8 8],'idct2');

figure
subplot(1,3,1);
imshow(uint8(X));
title('原始图');

subplot(1,3,2);
imshow(uint8(Y));
title('分块DCT变换图');

subplot(1,3,3);
imshow(uint8(X1));
title('分块DCT恢复图');

Y1=dct2(X);
X10=idct2(Y1);

figure
subplot(1,3,1);
imshow(uint8(X));
title('原始图');

subplot(1,3,2);
imshow(uint8(Y1));
title('DCT变换图');

subplot(1,3,3);
imshow(uint8(X10));
title('DCT反变换恢复图');
```

运行结果为：





从图中，我们可以明显看出DCT变换与分块DCT变换在使用时的区别。

六、小结

DCT、DWT等是图像处理的基础知识，之前一直有用到，但是没怎么好好整理下，今天在做稀疏编码的时候正好有用到，就顺便整了下，希望能够给后来者一些提示。

Reference:http://wuyuans.com/2012/11/dct2/