Université de Thiès

UFR SES

Master en Science des Données et Applications / Options ES - AC

PROJET D'OPTIMISATION PRESENTE PAR:

LASSANA BA

ISMAEL YODA

SOUHOUDE OUEDRAOGO

PROJET OPTIMISATION

Exercice 1

Soit $f(x) = 2x_1 + 3x_2$

sous contraintes

$$\begin{cases} C_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 \leq 0 \\ C_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2} - x_1 \leq 0 \end{cases}$$

I. Resolution analytique

1) Determinons le Lagrangien L associé à ce probleme

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu_1 C_1(x) + \mu_2 C_2(x)$$

$$= 2x_1 + 3x_2 + \mu_1 \left[(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 - 13\right] + \mu_2\left(\frac{1}{2} - x_1\right)$$

2) Les conditions KKT d'ordre 1 de ce problème

$$\nabla_x = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 + \mu_1(2x_1 - 2) - \mu_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 + \mu_1(2x_2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_\mu = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_2} = \frac{1}{2} - x_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 C_1(x) = 0 \\ \mu_2 C_2(x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 > 0 \end{matrix}$$

3| Identifions les Contraintes à l'aide des conditions Complémentaires

$$\begin{cases} \mu_1 = 0 & \text{ou} \quad C_1(x) = 0 \\ \mu_2 = 0 & \text{ou} \quad C_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13 = 0 \\ \frac{1}{2} - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = \frac{1}{2}$$

On pourra $x_2^* = -1{,}57$ ou $x_2^* = 5{,}57$

Si $x_2^* = -1{,}57$: • $2 + \mu_1(2x_1 - 2) - \mu_2 = 0$

$$2 - \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (1)$$

• $3 + \mu_1(2x_2 - 4) = 0$

$$3 + \mu_1(-1{,}57 \times 2 - 4) = 0$$

$$\mu_1 = -\frac{3}{-7{,}14} \qquad \mu_1^* = 0{,}42$$

dans (1) $\mu_2 = 2 - \mu_1 \Rightarrow \mu_2^* = 1{,}58$

μ_1^* et μ_2^* sont positifs pour $x_1^* = \frac{1}{2}$ et $x_2^* = -1{,}57$

4) Montrons que la matrice Hessienne de L et definie positive.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix}$$

On a :

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 + \mu_1(2x_1 - 2) + \mu_2$; $\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_1} = 2\mu_1$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 + \mu_1(2x_2 - 4)$; $\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_2} = 2\mu_1$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_1} = 2\mu_1$: On a $\mu_1^* = -0,42$ ou $\mu_1^* = 0,42$

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} -0,84 & 0 \\ 0 & -0,84 \end{pmatrix} \text{ ou } H = \begin{pmatrix} 0,84 & 0 \\ 0 & 0,84 \end{pmatrix}}$$

A $\qquad\qquad$ B

en B : $0,84 > 0$ donc On peut en conclure que la matrice Hessienne et definie positive.

5) Deduisons l'existence d'un minimum local

$$\nabla L(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 + \mu_1(2x_1 - 2) - \mu_2 = 0 \\ 3 + \mu_1(2x_2 - 4) = 0 \end{cases}$$

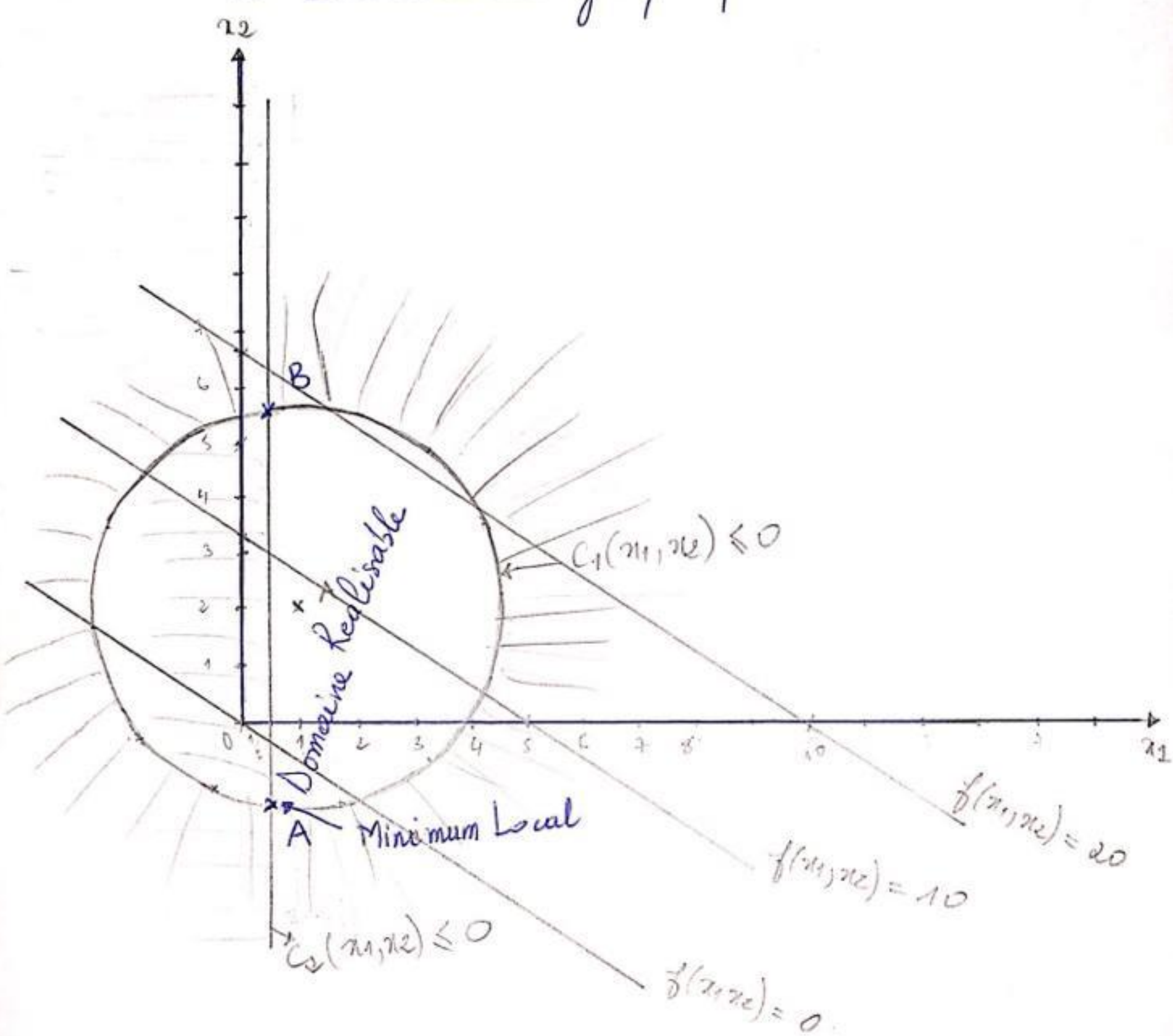
D'après les calculs sur la question n°3

$x_1^* = \frac{1}{2}$ et $x_2^* = -1{,}57$

De plus les conditions d'ordre 1 (KKT) sont remplis et la matrice Hessienne est définie positive donc :

$x^* \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1{,}57 \end{pmatrix}$ est un minimum local

II Resolution graphique



$x_1 = \frac{1}{2}$

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0$ on a un cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(1;2)$ et de rayon $\sqrt{13} \Rightarrow r = 3{,}6$

$f(x_1, x_2) = 2x_2 + 3x_2$

on pose $f(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow$

x_1	0	3
x_2	0	-2

$f(x_1, x_2) = 10$

x_1	0	5
x_2	3,3	0

$f(x_1, x_2) = 20$

x_1	0	10
x_2	5,6	10

Exercice 2

$\min \quad f(x) = 2x_1 + 3x_2$

sous contraintes

$$\begin{cases} C_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 \leq 0 \\ C_2(x_1, x_2) = x_1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= x_1 - \frac{1}{2} \leq 0$$

I. Resolution Analytique

1) Determinons le Lagrangien L associé à ce problème

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu_1 C_1(x) + \mu_2 C_2(x)$$

$$= 2x_1 + 3x_2 + \mu_1 \left[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13\right] + \mu_2 \left(-\frac{1}{2} + x_1\right)$$

2) Les conditions KKT d'ordre 1 de ce problème

$$\nabla_x = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 + \mu_1(2x_1 - 2) + \mu_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 + \mu_1(2x_2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_\mu = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_2} = x_1 - \frac{1}{2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 C_1(x) = 0 \\ \mu_2 C_2(x) = 0 \end{cases}$$

3) Identifions les contraintes à l'aide des conditions complementaires.

$$\begin{cases} \mu_1 = 0 & \text{ou} \quad C_1(x) = 0 \\ \mu_2 = 0 & \text{ou} \quad C_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13 = 0 & (1) \\ x_1 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

En (1) $\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0$

$$\boxed{x_2^* = -1,57} \quad \text{ou} \quad \underline{x_2^* = 5,57}$$

si $x_2^* = 5,57 \Rightarrow \mu_1(2x_2 - 4) = -3$

$$\mu_1(2 \times 5,57 - 4) = -3$$

$$\underline{\mu_1^* = -0,42}$$

si $x_2^* = -1,57 \Rightarrow \mu_1(2 \times -1,57 - 4) = -3$

$$\boxed{\mu_1^* = 0,42}$$

$$2 + \mu_1(2x_1 - 2) - \mu_2 = 0$$

$$\mu_2 = 2 + 0,42\left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)$$

$$\boxed{\mu_2^* = 1,58}$$

$$\boxed{\begin{cases} \mu_1^* = 0,42 \\ \mu_2^* = 1,58 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = -\frac{1}{2} \\ x_2^* = -1,57 \end{cases}}$$

4) Montrons que la matrice Hessienne de L et definie positive.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix}$$

On a :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 + \mu_1(2x_1 - 2) + \mu_2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_1} = 2\mu_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 + \mu_1(2x_2 - 4) \quad ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_2} = 2\mu_1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_1} = 2\mu_1$: On a $\mu_1^* = -0,42$ ou $\mu_1^* = 0,42$

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} -0,84 & 0 \\ 0 & -0,84 \end{pmatrix} \quad ou \quad H = \begin{pmatrix} 0,84 & 0 \\ 0 & 0,84 \end{pmatrix}}$$

A B

en B : $0,84 > 0$ donc On peut en conclure que la matrice Hessienne et definie positive.

5) Deduisons l'existence d'un minimum local

$$\nabla L(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 + \mu_1(2x_1 - 2) - \mu_2 = 0 \\ 3 + \mu_1(2x_2 - 4) = 0 \end{cases}$$

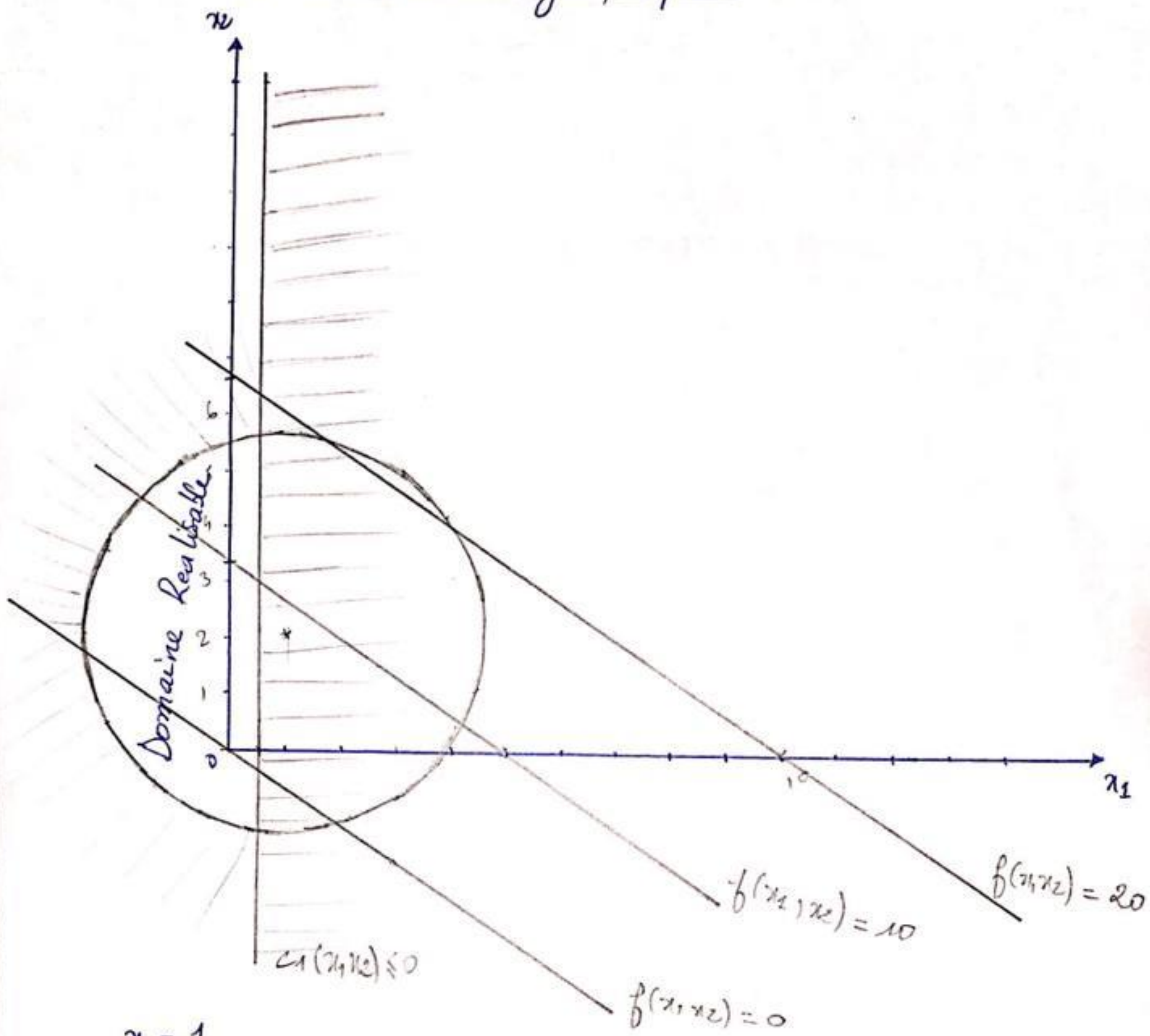
D'après les calculs sur la question n°3

$x_1^* = \frac{1}{2}$ et $x_2^* = -1{,}57$

De plus les conditions d'ordre 1 (KKT) sont remplis et la matrice Hessienne est définie positive donc :

$x^* \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1{,}57 \end{pmatrix}$ est un minimum local

II Resolution graphique



$x_1 = \frac{1}{2}$

$(x_1-1)^2+(x_2-2)^2-13=0$ on a un cercle de centre $C(1,2)$ et de rayon $\sqrt{13} = 3{,}6$

$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2$

on pose $f(x_1,x_2) = 0$ $\Rightarrow$

x_1	0	3
x_2	0	-2

on pose $f(x_1,x_2) = 10$ $\Rightarrow$

x_1	0	5
x_2	3,3	0

on pose $f(x_1,x_2) = 20$

x_1	0	10
x_2	6,6	0