

---

*Máster Univ. Ingeniería Química*  
**OPTIMIZACIÓN DE PROCESOS QUÍMICOS**



Dpto. Ingeniería Química Industrial  
y del Medio Ambiente

*Colección de Problemas*

*27 de septiembre de 2023*  
*versión 1.5*

---

---

# PROGRAMACIÓN LINEAL

---

## *Introducción*

### Ejercicio PL 1

Estáis en la semana de exámenes. Vuestro proveedor de recursos económicos (¿padres?) solo os proporciona 30 € para gastar y vuestras actividades académicas solo os dejan 8 h libres esa semana de tiempo libre. ¿Cómo planificaríais vuestra semana?

Tabla 1: Datos problema Ejercicio PL 1

	Diversión (unidades/h)	Coste (€/h)
Salir de fiesta	5	10
Jugar al pádel	3	5
Quedar con los amigos en casa	1	1

### Ejercicio PL 2

En League of Legends, la salud efectiva de un jugador defendiéndose de un daño viene dada por  $E=H+0,01 \cdot A$ , siendo  $H$  la salud y  $A$  el arma. La salud ( $H$ ) cuesta 2.5 monedas de oro por unidad y el arma 18 monedas por unidad. Tienes 3600 monedas de oro y necesitas maximizar tu efectividad ( $E$ ) para sobrevivir al máximo del ataque de tus enemigos. ¿Cuánto comprarías de cada cosa?

### Ejercicio PL 3

Una empresa produce dos productos ( $x$  e  $y$ ) con un beneficio neto de 40 y 30 \$/kg respectivamente. Sin embargo, por restricciones de demanda, solo se pueden producir como mucho 40 kg de  $x$  en cada lote. Por capacidad de la planta solo se pueden producir 80 kg de productos totales. El almacenamiento de los productos también es una limitación, no pudiéndose almacenar más de 100  $m^3$  de productos (densidad de 2,1  $m^3$ /kg y 1,7  $m^3$ /kg de  $x$  e  $y$  respectivamente). Establezca cuál es la cantidad óptima de  $x$  e  $y$  que se pueden producir

### Ejercicio PL 4

La empresa Sunrise Breakfast Company debe producir 2000 libras al día de copos de cereales para satisfacer la demanda de su producto Sugar Sweet Cereal. El coste por cada libra de los ingredientes de que se compone el producto son: Ingrediente A 4 \$/libra; B 3 \$/libra; C 2\$/libra.

Los requisitos del gobierno establecen que la mezcla deba contener al menos el 10 % del ingrediente A y el 20 % del ingrediente B. Se sabe también que el uso de más de 800 libras por ton (1 ton=2000 libras) produce un sabor inaceptable. Determinar el mínimo coste de la mezcla que satisfaga la demanda de Sugar Sweet Cereal.

## Ejercicio PL 5

Los alumnos del MUIQ tienen acceso al sistema de calificaciones de la UPM. Por ello, quieren modificar las calificaciones de las asignaturas de primero sin que nadie sospeche. En concreto, desean:

- Aprobar todos (los 30 alumnos) todas las 7 asignaturas
- Evitar sospechas limitando la nota máxima de cada alumno en las diferentes asignaturas y la nota media global de cada asignatura

Buscar una propuesta de distribución de notas que maximice vuestro beneficio sin levantar sospechas

Tabla 2: Datos del problema Ejercicio PL 5

Asignatura	1	2	3	4	5	6	7
Nota máxima de un alumno	9	9,8	8	9	8	10	10
Nota media máxima	7	8	6	8	6	7	7,5

## Formulación

## Ejercicio PL 6

Queremos planificar la producción de dos plantas, A y B cada una de las cuales puede producir dos productos, 1 y 2. ¿Cómo se debería planificar la producción para maximizar los beneficios manteniendo los requisitos del mercado basados en la siguiente información?

Tabla 3: Datos problema Ejercicio PL 6

	Material procesado (kg/día)		Beneficio (€/kg)	
Planta	1	2	1	2
A	3	5	0.9	1.2
B	4	6	0.8	1.1

¿Cuántos días al año debería operar cada planta cada tipo de producto?

## Ejercicio PL 7

Suponga que los caudales que entran y salen del proceso son medidos periódicamente. Determine el mejor valor de la corriente A en kg/h para los siguientes valores de los caudales de B y C medidos a tres tiempos diferentes asumiendo estado estacionario

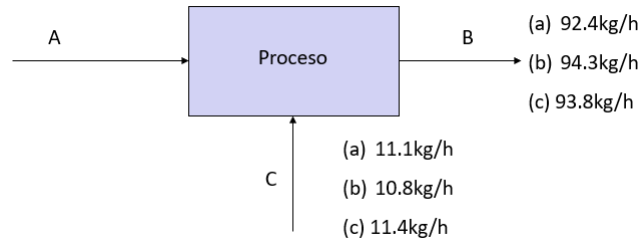


Figura 1: Datos problema Ejercicio PL 7

## Ejercicio PL 8

Considere el diagrama del proceso de la figura donde cada producto (E,F,G) requiere diferentes cantidades de reactantes de acuerdo a la tabla mostrada en la siguiente transparencia. La tabla de abajo muestra la máxima cantidad disponible de reactante por día y su coste por kg.

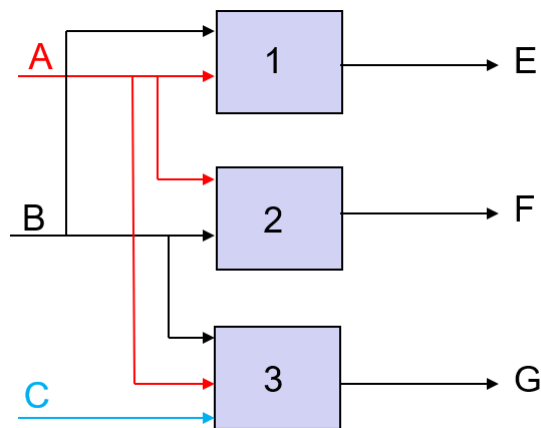


Figura 2: Esquema del problema Ejercicio PL 8

Tabla 4: Datos del problema Ejercicio PL 8

Reactante	Máximo disponible (kg/día)	Coste (€/100kg)
A	4000	1.5
B	3000	2.0
C	2500	2.5

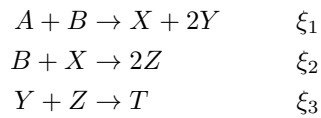
Tabla 5: Datos del problema Ejercicio PL 8

Proceso	Producto	Requisito de reactante (kg/kg producto)	Coste de procesado de producto (€/100kg)	Precio venta (producto) (€/100kg)
1	E	2/3A,1/3B	1.0	4.0
2	F	2/3A,1/3B	0.5	3.3
3	G	1/2A,1/6B,1/3C	1.0	3.8

## *Problemas para practicar*

### **Ejercicio PL 9**

Se desean eliminar los contaminantes A (inicial 5 kmol) y B (2 kmol) mediante el proceso químico:



¿Qué extensiones de reacción harán que la cantidad de contaminantes residual sea mínima? ¿Y si se desea maximizar la cantidad de T?

$$\begin{aligned}
 T : & \quad T = \xi_3 \\
 Z : & \quad Z = 2\xi_2 - \xi_3 \\
 X : & \quad X = \xi_1 - \xi_2 \\
 Y : & \quad Y = 2\xi_1 - \xi_3 \\
 A : & \quad A_0 - A = \xi_1 \\
 B : & \quad B_0 - B = \xi_2
 \end{aligned}$$

## Ejercicio PL 10

Se tiene una granja con una superficie total de 100 hectáreas. En dicha granja se puede plantar maíz, trigo o algodón. Por cada hectárea de maíz plantada se obtiene un beneficio de 109 euros, de trigo 90 euros y de algodón 115 euros. Por cada hectárea plantada de maíz se necesitan 6h de trabajo manual, de trigo 4h y de algodón 8h. El número total de horas disponible de trabajo es de 500 durante la época de plantación. ¿Cuál es la distribución óptima de la plantación? I.e. ¿cuántas hectáreas se han de plantar de cada cultivo?

## Ejercicio PL 11

Una refinería tiene disponibles dos crudos que se procesan con los rendimientos que se procesan en la siguiente tabla. Debido a limitaciones en el equipo y en el almacenamiento, la producción de gasolina, keroseno y fuel oil debe estar limitada como se indica en la tabla mencionada. La refinería no tiene limitaciones en la producción de otros productos como gas oil. El beneficio de procesar el crudo 1 es de 1 €/barril y el de procesar el crudo 2 es de 0.7 €/barril.

Tabla 6: Datos problema Ejercicio PL 11

	Rendimiento (%vol)		Producción máxima (barril/día)
	Crudo 1	Crudo 2	
Gasolina	70	31	6000
Keroseno	6	9	2400
Fuel Oil	24	60	12000

Averiguar cuál debe de ser la alimentación óptima de estos dos crudos a la refinería. Resolver el problema de modo gráfico y utilizando algún paquete de optimización.

## Ejercicio PL 12

Una planta química dispone de dos tipos de materias primas (Feed1 y Feed2) los cuales se pueden procesar mediante diferentes rutas para obtener los productos Prod1, Prod2 y Prod3. Los rendimientos máxicos de cada materia prima hacia cada producto, los límites de máxima y mínima producción y de máxima y mínima alimentación, junto con los parámetros económicos necesarios del problema se encuentran recogidos en la siguiente tabla (las unidades máxicas son toneladas; los parámetros económicos están en euros por tonelada). Determinar compra óptima de materias primas que se debe realizar para maximizar el beneficio de la planta.

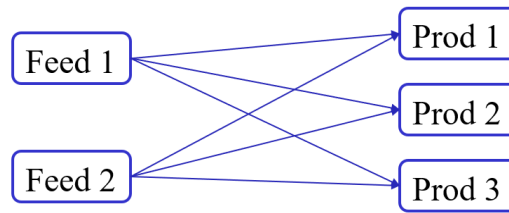


Figura 3: Esquema del problema Ejercicio PL 12

Tabla 7: Parámetros del problema Ejercicio PL 12

		<b>Rendimientos máxicos</b>			<b>Min. Alimentación</b>	<b>Max. Alimentación</b>	<b>Coste</b>
	<b>Cantidad disponible</b>	<b>Prod1</b>	<b>Prod2</b>	<b>Prod3</b>			
<b>Feed1</b>	??	0,7	0,2	0,1	0	1000	5
<b>Feed2</b>	??	0,2	0,2	0,6	0	1000	6
<b>Min. Producto</b>		0	0	0			
<b>Max. Producto</b>		100	70	90			
<b>Precio venta producto</b>		10	11	12			

## Ejercicio PL 13

Una planta de fabricación de cemento es la causante principal de la polución de aire cercana a un municipio. La capacidad de producción de la planta es de 2.5 millones de barriles de cemento. Se desconoce si la planta ha estado operando a plena capacidad. La planta emite 1kg de polvo por barril de cemento producido. Para intentar controlar la emisión de partículas (polvo) se pueden instalar dos tipos de precipitadores electrostáticos. El precipitador de cuatro campos es capaz de reducir la emisión en 750 g de polvo por barril (dejando 250 g por barril) y su costo de operación será de 0.15 euros por barril. El otro precipitador es de cinco campos con lo cual es capaz de reducir la emisión en 900 g por barril de cemento (dejando 100 g por barril), siendo mayor su costo de operación que asciende a 0.19 euros por barril. La agencia de protección medioambiental requiere que la emisión de partículas sea reducida en, al menos, un 84 %. Cada barril de cemento dejaba unos beneficios de 6 euros antes de añadirlos a los precipitadores. ¿Cuántos barriles de cemento se deben producir empleando cada tipo de precipitador de modo que se maximice el beneficio y se cumplan las regulaciones medioambientales?

## Ejercicio PL 14

La siguiente figura muestra un diagrama muy simplificado del blending de crudos y de la distribución de la producción de una refinería. Como se puede observar hay cuatro tipos de crudos disponibles y cuatro familias de productos. La refinería está separada en dos procesos, la cadena de fuel (producción de diferentes gasolinas, keroseno, gasoil,...) y la cadena de lubes (aceites in-

dustriales).

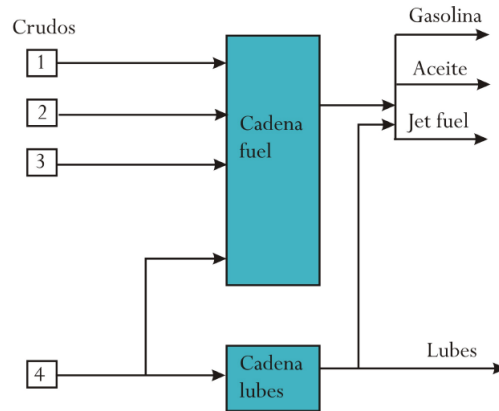


Figura 4: Esquema simplificado de la distribución de productos

En función del tipo de crudo se obtiene una distribución de productos diferentes, los rendimientos a cada producto de cada crudo se muestran en la tabla 1. Así mismo, la demanda máxima esperada de cada producto y los precios de venta de los mismos. Finalmente, la tabla también presenta los costes de compra de los crudos, los costes de operación y el suministro de cada crudo disponible.

Tabla 8: Datos del problema Ejercicio PL 14

Crudos	Rendimientos de productos (bbl/bbl crudo)					Valor del producto \$/bbl	Demanda máxima 10³bbl/wk
	Cadena de fuel				Cadena de lubes		
	1	2	3	4			
Crudos	4						
Productos							
Gasolina	0,6	0,5	0,3	0,4	0,4	45	170
Aceite	0,2	0,2	0,3	0,3	0,1	30	85
Jet fuel	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	15	85
Lube	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	60	20
Pérdidas operación	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	—	—
Coste crudo (\$/bbl)	15	15	15	25	25		
Costes operación (\$/bbl)	5	8,5	7,5	3	2,5		
Suministro de crudo disponible 10³bbl/wk	100	100	100		200		

Se pretende distribuir de forma óptima los crudos entre los dos procesos de modo que los beneficios se maximicen. Se pide:

1. Plantear un modelo del sistema a optimizar, estableciendo función objetivo y restricciones
2. Utilizando los datos del análisis de sensibilidad, indicar qué efecto tendría bajar la demanda máxima de ventas de jet fuel de 85 a 75 miles de barriles por semana. Escribe la operación y el resultado.



## Ejercicio PL 15

Una compañía distribuidora de vacunas dispone de un total de un millón de vacunas para repartir en España. Las vacunas llegan a través de Barajas, por lo que tienen un coste asociado al transporte hasta el lugar de su utilización (en euros por dosis). Cada comunidad autónoma tiene un número de individuos susceptibles de ser vacunados y realiza una oferta por dosis de vacuna (en euros por dosis). El requisito del Gobierno para que se comercialicen las vacunas es que al menos se vacune al 15 % de la población susceptible en cada territorio. No se desea vacunar a más del 40 % de la población de un territorio, puesto que ya se considera conseguida la inmunidad de grupo. ¿Cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa? Los datos por comunidades autónomas están recogidos en el Excel adjunto “DatosVacunas.xlsx”

## Ejercicio PL 16

Una compañía fabrica dos tipos de productos, uno normal y uno extra. La compañía tiene dos plantas de fabricación, una en Toledo y otra en Málaga. La planta de Toledo tiene un presupuesto de operación diario de 45000 euros y puede producir como mucho 300 unidades (entre los dos tipos de productos). El coste de fabricar el producto normal en la planta de Toledo es de 150 euros mientras que el producto extra cuesta 200 euros fabricarlo. La planta de Málaga tiene un presupuesto diario de 36000 euros y puede fabricar como mucho 250 unidades (entre los dos productos). Los costes de fabricación en esta planta son de 135 euros para el producto normal y de 180 euros para el producto extra. La compañía quiere limitar la producción diaria a 250 unidades de producto normal y 350 unidades de producto extra. El beneficio de venta de cada unidad de producto normal es de 50 euros mientras que el del producto extra es de 70 euros por unidad. Se pide calcular el máximo beneficio y qué cantidad de cada tipo de unidad (normal y extra) se debe producir en cada planta de fabricación.

## Ejercicio PL 17

Una empresa petrolera dispone de diez grados disponibles de crudo en cantidades desde 10 a 30 Mbpd, en total suman 200 Mbpd de disponibilidad agregada. Se tiene tres refinerías (X, Y, Z) con diferentes tratamientos dependiendo del crudo de entrada. En todo caso la capacidad de todas las refinerías de tratar crudo no supera los 180 Mbpd. Una de las refinerías (X) dispone de diferentes líneas de tratamiento que se pueden utilizar simultáneamente, pero con diferentes eficiencias. El beneficio o coste de procesar cada crudo en cada refinería está cuantificado y se recoge en la tabla en forma de céntimos por barril. Se pide maximizar el beneficio mediante la mejor distribución de los crudos en las refinerías.

Tabla 9: Datos problema Ejercicio PL 17

Crudo	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	
Refinería	Beneficio o pérdidas (en c€ por barril)										Requerido ( $10^6$ barriles)
X	-6	3	17	10	63	34	15	22	-2	15	30
Y	-11	-7	-16	9	49	16	4	10	-8	8	40
W	-7	3	16	13	60	25	12	19	4	13	50
Z	-1	0	13	3	48	15	7	17	9	3	60
Dispon. ( $10^6$ barriles)	30	30	20	20	10	20	20	10	30	10	

## Ejercicio PL 18

Una empresa elabora un aceite nuevo (REFI) refinando exclusivamente diferentes tipos de aceite y mezclándolos. Los tipos de aceite se clasifican en dos categorías: vegetales (VEG1 y VEG2) y no vegetales (OIL1, OIL2 y OIL3). Dependiendo del tipo de aceite, vegetal o no vegetal, se requiere una línea de producción distinta para refinarlo, por lo que se puede refinar un máximo de 200 toneladas de aceite vegetal y 250 de no vegetal. Además, se puede asumir que el coste del refinamiento es nulo y que durante este proceso no se producen pérdidas de peso. Por otro lado, existen restricciones de control de calidad que imponen cotas (inferior y superior) a la acidez del producto final: 1.4 y 1.8 unidades, respectivamente. Se puede asumir que la acidez se mezcla linealmente. La acidez y el coste de una tonelada de cada tipo de aceite se refleja en la siguiente tabla:

Tabla 10: Datos problema Ejercicio PL 18					
Aceite	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
Coste	110	120	130	110	115
Acidez	2,2	1,1	2	1,2	1,5

Cada tonelada de producto final se vende a un precio de 150 euros. Plantea el modelo que maximiza el beneficio neto.

## Ejercicio PL 19

Una refinería tiene que realizar un blending (mezcla) de gasolinas. La refinería quiere mezclar cuatro constituyentes del petróleo para obtener gasolina de tres grados diferentes: A,B y C. Determinar la mezcla de los cuatro consituyentes que optimizará el beneficio. La disponibilidad de los productos así como sus costes se dan en la siguiente tabla.

Tabla 11: Datos problema Ejercicio PL 19

	Max. Disponible (bbl/día)	Coste barril (€)
<b>1</b>	3000	13
<b>2</b>	2000	15,3
<b>3</b>	4000	14,6
<b>4</b>	1000	14,9

Para mantener la calidad de cada grado de gasolina, es necesario especificar una serie de porcentajes máximos o mínimos de cada producto en cada mezcla. Estas especificaciones se indican en la siguiente tabla junto con el precio de venta de las diferentes gasolinas fabricadas

Tabla 12: Datos problema Ejercicio PL 19

Grado	Espec.	Precio venta (€/barril)
<b>A</b>	No más de 15 % de 1	16,2
	No menos de 40 % de 2	
	No más de 50 % de 3	
<b>B</b>	No más de 10 % de 1	15,75
	No más de 10 % de 2	
<b>C</b>	No más de 20 % de 1	15,3

NOTA: Supóngase que los únicos costes variables son los de compra y venta a la hora de plantear la optimización.

## Ejercicio PL 20

Una compañía tiene dos plantas de alquiler, A1 y A2, de las cuales se distribuyen productos a tres clientes C1, C2 y C3. Los costes de transporte de cada planta a cada cliente vienen dados en la siguiente tabla:

Tabla 13: Datos problema Ejercicio PL 20

Planta	A1	A1	A1	A2	A2	A2
Cliente	C1	C2	C3	C1	C2	C3
Coste (€/tm)	25	60	75	20	50	85

La producción máxima de cada planta así como la demanda mínima de cada cliente viene especificada en la siguiente tabla:

Tabla 14: Datos problema Ejercicio PL 20

Planta/Cliente	A1	A2	C1	C2	C3
Producción (tm/día)	1,6	0,8	0,9	0,7	0,3

El coste de producción para la planta A1 es de 30 EUR por tonelada. El coste de producción

de la planta A2 es 35EUR/t. Hallar la distribución óptima o para minimizar los costes totales (producción y transporte) de la compañía

## Ejercicio PL 21

Una planta de cogeneración puede utilizar carbón, fuel o gas simultáneamente y debe producir 4000 kW. El poder calorífico, emisión de azufre asociada y costo de cada una de los combustibles se puede ver en la tabla adjunta:

Tabla 15: Datos problema Ejercicio PL 21

Combustible	Azufre (%)	Coste (€/tm)	Poder calorífico (kJ/kg)
Gas	0,12	55	61000
Fuel	0,45	41	45000
Carbón	2,8	28	38000

La legislación impone que el contenido de las emisiones esté limitado a un 2.5 % de azufre Se pide:

- Determinar el costo mínimo por hora de funcionamiento y los correspondientes caudales de cada uno de los combustibles en Tm/h.
- Si el costo del fuel aumenta en 2 €/Tm ¿en cuánto se modificaría el coste óptimo?

## Ejercicio PL 22

Una empresa de fertilizantes dispone de ciertas cantidades de nitrato, fosfato y potasa indicadas en la tabla adjunta que utiliza para fabricar tres tipos de fertilizantes A, B y C mezclandolos con un producto base del que dispone de cantidades en exceso. Las composiciones de cada uno de los fertilizantes figuran tambien en la tabla adjunta, así como los precios de venta de los fertilizantes A, B y C. El costo de realizar la mezcla, embalaje y venta son iguales para los tres y ascienden a 6 €/Tm. Si la empresa por determinadas razones no puede producir mas de 6000 Tm del producto A y sabe que el mercado no está saturado, se desea calcular cuanto fertilizante de cada tipo debe fabricar y cuanta materia prima utilizar para obtener el máximo beneficio en un cierto periodo de tiempo. ¿Cuál es el beneficio óptimo?

Tabla 16: Datos problema Ejercicio PL 22

Fertilizantes	Nitrato	Fosfato	Potasa	Base	Precio venta (€/tm)
A	5 %	10 %	5 %	80 %	16
B	5 %	10 %	10 %	75 %	20
C	10 %	10 %	10 %	70 %	24
Disponibilidad (tm)	1000	1800	12000		
Costes (€/tm)	64	16	40	2	

## Ejercicio PL 23

Un fabricante de vinos desea mezclar vinos de cinco años diferentes para fabricar vinos de tres calidades diferentes (A, B y C). La cantidad de vino disponible de cada año (llamados año 1, 2, 3, 4, 5) es de 800, 900, 500, 900 y 600 barriles respectivamente. La calidad del vino A es tal que como máximo se producirán 200 barriles. Se desea maximizar el beneficio.

Se pide:

Tabla 17: Datos del problema Ejercicio PL 23

MEZCLA	COMPOSICIÓN	BENEFICIO (€/barril)
A	La suma de las cantidades de los años 1 y 2 debe ser al menos 60 %. La suma de las cantidades de los años 4 y 5 no debe superar el 10 %	4000
B	La suma de las cantidades de los años 1, 2 y 3 debe ser al menos 50 %	3000
C	No más del 50 % del año 5	2500

1. Plantear un modelo del sistema a optimizar, estableciendo función objetivo y restricciones.
2. Implementar y resolver el problema.

## Ejercicio PL 24

La compañía ABC Furniture Company produce mesas y sillas. El proceso de producción es similar en ambos casos requiriendo una serie de horas de carpintería y pintura. Cada mesa necesita 4 h de trabajo de carpintería y 2 h de pintado. Cada mesa necesita de 150 euros de materiales totales. Las sillas por su parte requieren de 3 h de carpintería y 1 h de pintado. El consumo de material en cada silla es de 100 euros. En el presente ejercicio anual, se dispone de 240 h totales de carpintería y 100 h de pintura y el banco ha prestado un total de 10000 euros para la compra de material. Cada mesa vendida da una beneficio neto de 7 euros y cada silla da un beneficio neto de 5 euros.

1. Plantear un modelo del sistema a optimizar, estableciendo función objetivo y restricciones
2. La producción de mesas y sillas para alcanzar el máximo beneficio anual. Si en lugar de 10000 euros el banco únicamente prestará 5000, calcular cómo cambiaría la producción de mesas y sillas.

## Ejercicio PL 25

Una empresa lleva a cabo la producción de tres productos (P1, P2 y P3), los cuales se venden al mercado con un precio de venta de 2, 4 y 5 euros/kg respectivamente. Para ello utiliza como entrada al proceso dos materias primas MP1 y MP2. P1 no solo puede ser vendido, sino que es necesario también como intermedio para la producción de P2 y P3. Estos (P2 y P3) se venden directamente. Así, para la producción de 1 kg de P1 se necesitan 1.2 kg de MP1. Para la producción de 1 kg de P2 se necesitan 0.3 kg de P1 y 1.6 kg de MP2. Para la producción de 1 kg de P3 se necesitan 2.5 kg de P1. El coste de cada materia prima es de 1 y 2 euros por kg

para MP1 y MP2 con una disponibilidad máxima de 1000 y 2000 kg. Determinar la producción óptima de P1, P2 y P3 para maximizar el beneficio de la empresa.

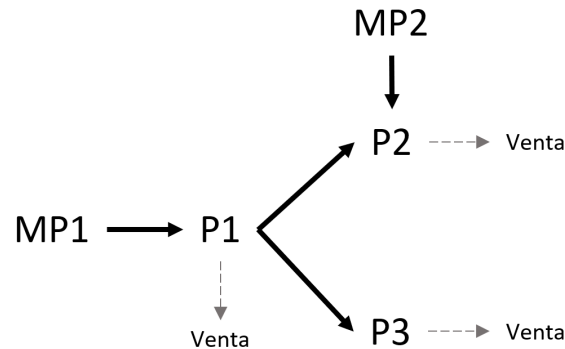


Figura 5: Esquema simplificado del problema

1. Plantear un modelo del sistema a optimizar, estableciendo función objetivo y restricciones.
2. Implementar y resolver el problema.

## Ejercicio PL 26

Se desea optimizar el tratamiento con radioterapia de un paciente que sufre un tumor en el próstata. Para ello, se dispone de un equipo basado en la tecnología *Intensity Modulation Radiation Therapy*, que permite dividir la intensidad del tratamiento en diferentes rayos (R1 a R6) que inciden sobre diferentes zonas (Z1 a Z9) (Figura 6).

Las unidades de intensidad de radiación son Gy (1 Gray equivale a J de energía depositada sobre 1 kg). La absorción de radiación recibida en cada zona depende de múltiples factores (naturaleza del tejido, cercanía a la fuente, ángulo de incidencia...). A modo de resumen, se facilitan las tasas de absorción (Gy recibidos/Gy incididos) de cada zona en las figuras 7 y 8.

Se quiere optimizar el tratamiento de forma que la zona Z8 correspondiente a la próstata (lugar donde está el tumor) reciba la mayor cantidad posible de radiación. La potencia máxima de los diferentes rayos es de 80 Gy

Se conoce además que las zonas Z4 y Z7, correspondientes a las zonas en las que se encuentra el hueso pívico, son especialmente sensibles y se desea que no reciban más de 20 Gy de radiación. Por seguridad, es deseable que ninguna zona reciba más de 50 Gy.

Determinar el tratamiento óptimo

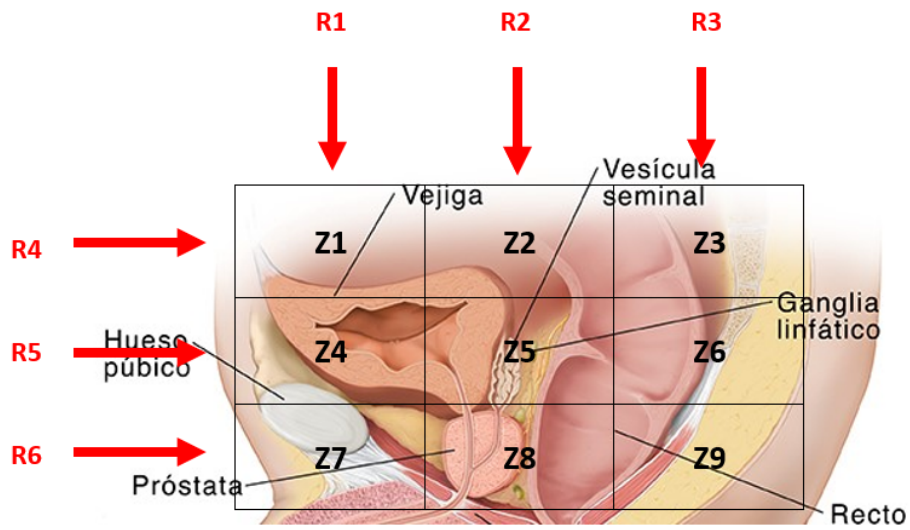


Figura 6: Esquema del problema

R1	R2	R3
↓	↓	↓
0,3	0,4	0,3
0,2	0,3	0,2
0,2	0,5	0,2

Figura 7: Cantidad de radiación absorbida por las diferentes zonas (tratamientos R1, R2, R3)

R4	R5	R6
→	→	→
0,3	0,2	0,1
0,4	0,2	0,2
0,4	0,5	0,2

Figura 8: Cantidad de radiación absorbida por las diferentes zonas (tratamientos R1, R2, R3)

## Ejercicio PL 27

Una empresa desea distribuir sus productos en España desde sus centros de producción (Madrid, Barcelona, San Sebastián y Sevilla) hasta las 47 provincias peninsulares. Cada península tiene una demanda mínima a satisfacer y cada centro de producción una capacidad máxima de fabricación. Se desea satisfacer las necesidades de demanda de cada provincia, minimizando el coste de transporte. Los costes de transportar 100 tm de producto entre provincias, las capacidades máximas y las demandas mínimas se encuentran en el archivo "DatosEj27".

## Ejercicio PL 28

Se dispone de un cambiador de calor al que entra una corriente fría (caudal 0.25 kg/s y calor específico 4 kJ/kgK) y una corriente caliente en contracorriente (caudal 0.4 kg/s y calor específico 4.5 kJ/kgK). La corriente fría se desea calentar desde 20 a 200 °C y la caliente se desea enfriar de 150 a 50 °C. Se desea mantener una diferencia de temperaturas mínima en ambos extremos del cambiador de 20 °C. ¿Qué temperaturas de salida del cambiador minimizan el consumo de servicios auxiliares?

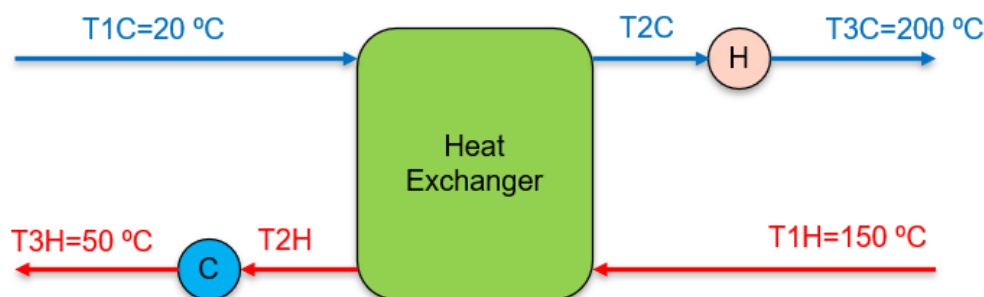


Figura 9: Esquema del problema

## Ejercicio PL 29

La empresa La Jara Metales es una compañía especializada en aleaciones específicas de la industria aérea. La Junta de Extremadura les ha concedido un contrato para proveer 2000 kg de una aleación a 105 euros/kg. La aleación debe de contener Cobre, Magnesio, Níquel y Aluminio. Los requisitos de composición que se deben cumplir son:

1. Al menos un 20 % de Níquel
2. Al menos un 15 % de Cobre
3. Entre un 2 % y un 3 % de Magnesio
4. No más del 1,5 % de impurezas
5. El resto Aluminio.



La empresa dispone de 5 metales que pueden mezclarse para fabricar el producto final. Los costes y composición de estos se encuentran en la hoja Datos\_Ejercicio29.xlsx. El material Z20 es muy demandado, por lo que la empresa no puede utilizar más de 600 kg para fabricar la aleación. La empresa está interesada en conocer qué mezcla de materiales básicos proporciona los mayores beneficios. También están interesados en conocer los cambios en los valores de algunos parámetros.

1. ¿Cómo afectaría a la decisión final disminuir el coste de Z30 en 5 eu/kg?
2. ¿Cuánto afectaría una restricción muy severa de la legislación en cuanto al contenido de impurezas?
3. Si la disponibilidad de Z20 pudiera aumentarse pagando 10 eur adicionales por tonelada, ¿sería interesante pagar este coste adicional?

---

## PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA MIXTA

---

### Ejercicio MILP 1

Se dispone de una mochila con la cual se quieren transportar una serie de objetos con el objetivo de maximizar el valor de lo que se lleva en la mochila. Los objetos son:

Tabla 18: Datos del problema Ejercicio MILP 1

Objeto	Peso (kg)	Valor (M€)
Soldado1	2	1
Soldado2	2	1
Soldado3	2	1
Tabla1	5	10
Tabla2	5	10
Máscara1	8	13
Máscara2	3	7

La resistencia de la mochila es tal que se puede llevar un máximo de 10 kg. ¿Cuáles son los objetos que habría que meter en la mochila?

### Ejercicio MILP 2

Se dispone de dos unidades de producción (N1 y N2) que producen los productos 1 y 2, a partir de tres materias primas (A, B y C). La primera unidad, produce un máximo de 8000 lb/día y la segunda 10000 lb/día. Se sabe que para obtener una libra de producto 1, se requieren 0.4 lb de A y 0.6 lb de B. Para obtener una libra del producto 2 se requieren 0.3 lb de B y 0.7 lb de C. Se dispone de un máximo de 6000 lb/día de B, pero no hay límites de A y C. Los beneficios unitarios del producto 1 y 2 son 0.16 y 0.20 €/lb.

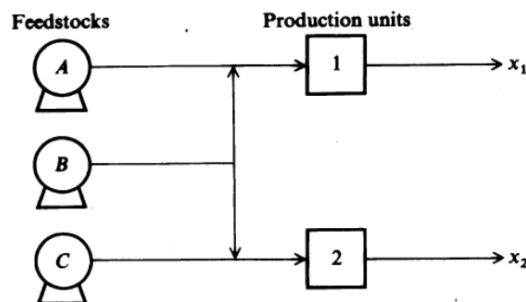


Figura 10: Esquema simplificado del problema

- ¿Cuánto se debe producir de 1 y de 2, sabiendo que cada uno trabaja en producciones discontinuas de 2000 lb?
- Debido a una incidencia en la planta, solo se pueden producir un total de 5 lotes, ¿cuál es la producción óptima?

### Ejercicio MILP 3

Una empresa de automóviles dispone de tres factorías, A, B y C y de dos centros de distribución, D1 y D2. Las capacidades de producción de las 3 factorías durante un año son 1000, 1500 y 1200 vehículos, respectivamente. Las demandas en los centros de producción son de 2300 y 1400 vehículos respectivamente.

Tabla 19: Datos del problema Ejercicio MILP 3

	D1	D2
A	1000	2690
B	1250	1350
C	1275	850

El coste de transporte en tren es de 10 pesetas por kilómetro y vehículo. Si la matriz de distancias entre las factorías y los centros de distribución vienen dada por la siguiente tabla, ¿cuántos vehículos deben fabricarse en cada factoría para que el transporte desde cada una de las factorías a cada uno de los centros de distribución sea mínimo?

### Ejercicio MILP 4

Se tiene un reactivo A, disponible en una cantidad de 100 kg/día. Se está pensando en instalar dos procesos basados en reactores CSTR en continuo. En el primero de ellos se produce B ( $A \rightarrow B$ ) con una constante cinética igual a 1.98 kg/m<sup>3</sup>/día (orden 0). Este proceso tiene un coste de funcionamiento proporcional al volumen del reactor y es igual a 11 €/m<sup>3</sup>. En el segundo proceso se produce el producto C ( $A \rightarrow C$ ) siguiendo también una ley cinética de orden 0 con constante igual a 2.11 kg/m<sup>3</sup>/día. El coste de funcionamiento es de 14 €/m<sup>3</sup>. Se sabe que los reactores no pueden tener un tamaño superior a 50 m<sup>3</sup>, por restricciones de construcción. El máximo asumible por el mercado cada día es de 90 kg de B y 80 kg de C. Sabiendo que los precios de A, B y C son de 10, 23 y 28 €/kg. ¿Cuál es la producción óptima del sistema? Si sólo hubiera presupuesto para instalar un proceso, ¿cuál es el proceso más rentable y con qué producción y volúmenes de reacción operaría?

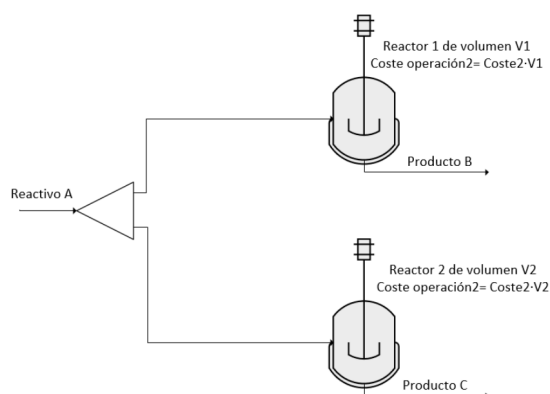


Figura 11: Esquema simplificado del problema

## Ejercicio MILP 5

Una empresa desea producir el compuesto C, el cual puede ser obtenido mediante los procesos II o III. Ambos usan como materia prima el compuesto B. Este compuesto B puede ser comprado a otra empresa (Bext) o puede ser obtenido mediante el proceso I a partir del compuesto A. Dadas las siguientes especificaciones, formula el problema de optimización como MILP y resuélvelo utilizando PYOMO para decidir:

1. ¿Qué proceso construir (II y III son excluyentes)?
2. ¿Cuánto se debe producir de B?
3. ¿Cuánto se debe producir del producto C?

El objetivo es maximizar el beneficio. Máxima demanda de C de 10 tons/h con un precio de venta de 1800 eur/ton.

Datos:

	Costes fijos (eur/hr)	Costes variables (eur/ton mat prima)
Proceso I	1000	250
Proceso II	1500	400
Proceso III	2000	550

	Conversión
Proceso I	90 % de A a B
Proceso II	82 % de B a C
Proceso III	95 % de B a C

Precios: A: 500 eur/ton; B: 950 eur/ton.

Máxima cantidad disponible de A: 16 tons/hr

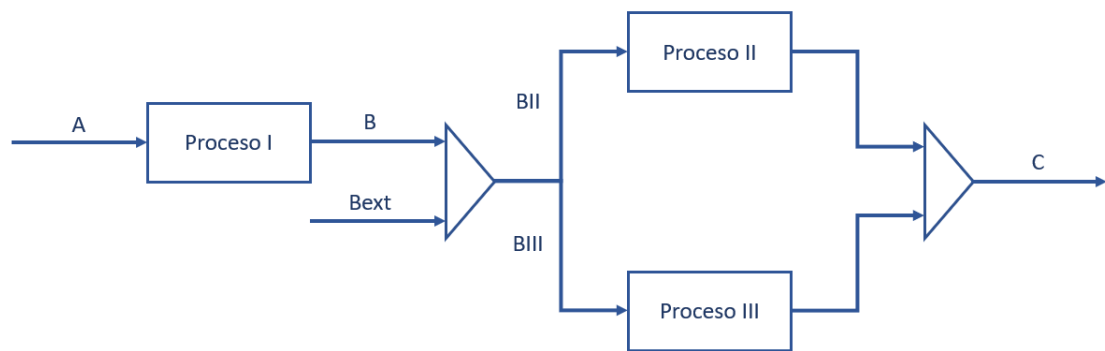


Figura 12: Esquema simplificado del problema

---

## PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO

---

### Ejercicio MO 1

Una compañía persigue encontrar el frente de pareto que satisface, por un lado, la minimización de la huella de carbono y, por otro, el beneficio de la planta. La empresa puede producir simultáneamente dos productos (X1 y X2) con beneficios netos de 1 y -3.5 €/tm respectivamente. Se sabe que cada tonelada de producto, a su vez, tiene una huella de carbono de 2 y -1 tm de  $CO_{2eq}$ . Es decir, mientras que X1 da beneficio positivo con huella de carbono positiva (perjudicial), X2 da pérdidas a la empresa a costa de reducir su huella de carbono. Por otro lado, las líneas de producción no son equivalentes. Como mucho se pueden procesar 20 tm/año del producto X1, mientras que del producto X2 se pueden obtener 100. La capacidad total de purificación (la etapa a la que hay que someter a ambos productos antes de su comercialización) es de 200  $m^3$ /día. La densidad de X1 y de X2 es de 5 y 4  $m^3$ /tm respectivamente. Resolver el problema utilizando el método de  $\epsilon$ -constraint y de random weights.

### Ejercicio MO 2

Una compañía tiene dos plantas en Liverpool y Brighton las cuales venden a tres mercados (Cambridge, London y Manchester). El coste y la huella de carbono asociada al transporte una tonelada de producto se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 20: Datos del problema Ejercicio MO 2

		Coste (\$/ton)	Huella de carbono (kg CO2/ton)
Liverpool	Cambridge	450	1100
	London	600	1400
	Manchester	125	450
Brighton	Cambridge	350	1700
	London	275	1550
	Manchester	700	2400

La capacidad máxima de cada planta es de 750 y 600 ton (Liverpool y Brighton respectivamente). La demanda mínima a satisfacer de los mercados (Cambridge, London y Manchester) es de 225, 500 y 275 ton.

- Formula el modelo como un problema lineal multiobjetivo para determinar la cantidad de producto óptima a transportar
- Calcula 10 puntos del frente de pareto (coste total vs huella de carbono) e identifica las soluciones más prometedoras

Sugerencia: calcula los puntos ideal y nadir y después define los valores de epsilon para huella de carbono dividiendo en intervalos regulares.

## TAREA PROGRAMACIÓN LINEAL (28 de septiembre de 2021)

Se dispone de la siguiente información nutricional y económica de dos alimentos:

Tabla 21: Datos del problema

Alimento/kg	kcal/kg	Proteínas (g/kg)	Precio (euros/kg)
A	1000	25	60
B	2000	95	210

Se desea obtener el coste mínimo para una dieta formada únicamente por estos dos alimentos para un deportista. Dados los requisitos metabólicos especiales, se estima deben ingerir, al menos 100 g de proteínas al día sin superar las 3000 kcal de consumo energético.

Se conoce además que del producto B solo se tiene un stock disponible de 0.7 kg. ¿Merece la pena ir a comprar más cantidad de B?

$$\text{minimizar } Coste = 60F_A + 210F_B$$

sujeito a:

$$1000F_A + 2000F_B \leq 3000 \quad (\text{energía})$$

$$25F_A + 95F_B \geq 100 \quad (\text{proteínas})$$

$$F_B \leq 0.7 \quad (\text{maxB})$$

$$F_A, F_B \geq 0$$

---

## TAREA PROGRAMACIÓN LINEAL (14 de octubre de 2021)

---

En una granja se desea optimizar la ingesta alimentaria de los terneros. Se conoce que cada ternero consume diariamente 700 g de proteínas, 28 g de calcio y 150 mg de vitaminas. En el mercado se puede adquirir pienso o forraje, con costes de 0.30 y 0.35 €/kg respectivamente. La composición nutricional de estos alimentos se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 22: Datos del problema

Alimento	Proteínas (g/kg)	Calcio (g/kg)	Vitaminas (mg/kg)
Pienso	30	2	10
Forraje	45	1	5

Determinar la cantidad óptima diaria de cada alimento para minimizar el coste total.

$$\text{minimizar } Coste = 0.3F_p + 0.35F_f$$

sujeito a:

$$30F_p + 45F_f \geq 700 \quad (\text{proteínas})$$

$$2F_p + F_f \geq 28 \quad (\text{calcio})$$

$$10F_p + 5F_f \geq 150 \quad (\text{vitaminas})$$

$$F_p, F_f \geq 0$$