Velocidad inducida por una distribución lineal de torbellinos

El cálculo de la velocidad inducida por distribuciones de singularidades que formen líneas o planos, es numéricamente más complejo que aquel realizado para singularidades puntuales. Se propone en este ejercicio el cálculo de la velocidad en cualquier punto del campo fluido, inducida por una línea de torbellinos comprendida en un segmento.

Consideramos el análisis de una distribución de torbellinos, $\gamma(x)$, situada en el plano $z = 0$ cuya intensidad varía linealmente a lo largo del segmento (panel) comprendido entre $x = a$ y $x = b$:

$$\gamma(x) = \gamma_a + \gamma_b(x - x_a).$$

Por simplicidad, podemos suponer el punto a localizado en el origen de coordenadas, y descomponer el análisis en la superposición de un panel con intensidad constante γ_a y un panel con una distribución $\gamma(x) = \gamma_b x$, donde γ_b es una constante correspondiente a la intensidad de la línea de torbellinos en el punto b, como se muestra en la Figura 1.

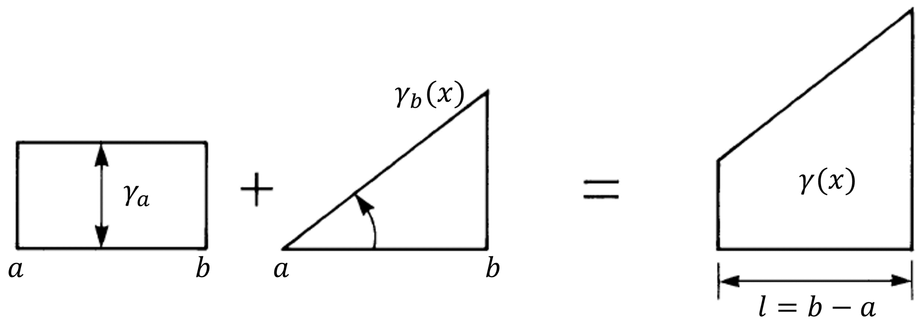

Figura 1. Descomposición lineal de una distribución de intensidad linealmente variable de torbellinos.

Análisis de una distribución de torbellinos de intensidad constante

Suponemos una línea de torbellinos de intensidad $\gamma(x) = \gamma_a = cte$, colocada a lo largo del eje x. La influencia de esta distribución sobre un punto $P = (x, z)$ viene dada por las integrales (sumatorio) de las influencias de cada torbellino diferencial entre los puntos x_a y x_b:

$$u_{\gamma_a}(x,z) = \frac{\gamma_a}{2\pi}\int_{x_a}^{x_b} \frac{z}{(x-x_0)^2 + z^2}\mathrm{d}x_0,$$
$$w_{\gamma_a}(x,z) = -\frac{\gamma_a}{2\pi}\int_{x_a}^{x_b} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + z^2}\mathrm{d}x_0.$$

La resolución de estas integrales se puede consultar en detalle en Katz & Plotkin [1], siendo su resultado analítico:

$$u_{\gamma_a}(x,z) = \frac{\gamma_a}{2\pi}\left[\arctan\frac{z}{x-x_b} - \arctan\frac{z}{x-x_a}\right],$$
$$w_{\gamma_a}(x,z) = -\frac{\gamma_a}{4\pi}\ln\frac{(x-x_b)^2+z^2}{(x-x_a)^2+z^2}.$$

Análisis de una distribución de torbellinos de intensidad linealmente variable

Suponemos una línea de torbellinos de intensidad $\gamma(x) = \gamma_b x$, colocada a lo largo del eje x. En este caso, la influencia de esta distribución sobre un punto $P = (x, z)$ viene dada por las integrales:

$$u_{\gamma_b}(x,z) = \frac{\gamma_b}{2\pi}\int_{x_a}^{x_b} \frac{x_0 z}{(x-x_0)^2 + z^2}\mathrm{d}x_0,$$
$$w_{\gamma_b}(x,z) = -\frac{\gamma_b}{2\pi}\int_{x_a}^{x_b} \frac{x_0(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + z^2}\mathrm{d}x_0.$$

La resolución de estas integrales se puede consultar en detalle en Katz & Plotkin [1], siendo su resultado analítico:

$$
\begin{aligned}
u_{\gamma_b}(x,z) &= -\frac{\gamma_b}{4\pi}\left[z\ln\frac{(x-x_a)^2+z^2}{(x-x_b)^2+z^2} - 2x\left(\arctan\frac{z}{x-x_b} - \arctan\frac{z}{x-x_a}\right)\right],\\
w_{\gamma_b}(x,z) &= -\frac{\gamma_b}{2\pi}\left[\frac{x}{2}\ln\frac{(x-x_a)^2+z^2}{(x-x_b)^2+z^2} + (x_a-x_b) + z\left(\arctan\frac{z}{x-x_b} - \arctan\frac{z}{x-x_a}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Superposición de soluciones y descomposición en coeficientes

Aplicando el principio de superposición, la **velocidad horizontal** inducida por ambas distribuciones de torbellinos vendrá dada por:

$$
\begin{aligned}
u(x,z) = u_{\gamma_a} + u_{\gamma_b} = &\frac{\gamma_a}{2\pi}\left[\arctan\frac{z}{x-x_b} - \arctan\frac{z}{x-x_a}\right] - \\
&-\frac{\gamma_b}{4\pi}\left[z\ln\frac{(x-x_a)^2+z^2}{(x-x_b)^2+z^2} - 2x\left(\arctan\frac{z}{x-x_b} - \arctan\frac{z}{x-x_a}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Dada la longitud de esta expresión, puede resultar más conveniente expresarla en función de coeficientes (a_n) que dependan de los parámetros del problema, que puedan ser calculados numéricamente de forma independiente y ensamblados más adelante (se emplea aquí una nomenclatura similar a la utilizada en las clases correspondientes al método de paneles de Aero-CTA):

$$
u(x,z) = \frac{1}{2\pi}(a_1\gamma_a - (a_2 z - a_1 x)\gamma_b),
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left[\arctan\frac{z}{x-x_b} - \arctan\frac{z}{x-x_a}\right],\\
a_2 &= \frac{1}{2}\ln\frac{(x-x_a)^2+z^2}{(x-x_b)^2+z^2} = \ln\frac{r_a}{r_b}.
\end{aligned}
$$

Del mismo modo, la **velocidad vertical** puede formularse como:

$$
\begin{aligned}
w(x,z) = w_{\gamma_a} + w_{\gamma_b} = &-\frac{\gamma_a}{4\pi}\ln\frac{(x-x_b)^2+z^2}{(x-x_a)^2+z^2} - \\
&-\frac{\gamma_b}{2\pi}\left[\frac{x}{2}\ln\frac{(x-x_a)^2+z^2}{(x-x_b)^2+z^2} + (x_a-x_b) + z\left(\arctan\frac{z}{x-x_b} - \arctan\frac{z}{x-x_a}\right)\right] = \\
&= \frac{\gamma_a}{2\pi}\ln\frac{r_a}{r_b} - \frac{\gamma_b}{2\pi}\left[x\ln\frac{r_a}{r_b} + (x_a-x_b) + z\left(\arctan\frac{z}{x-x_b} - \arctan\frac{z}{x-x_a}\right)\right],
\end{aligned}
$$

pudiendo escribirse a través de coeficientes en la forma:

$$
w(x,z) = \frac{1}{2\pi}(a_2\gamma_a - a_3\gamma_b),
$$

con

$$
a_3 = a_2 x + (x_a - x_b) + a_1 z.
$$

Implementación numérica

Una vez desarrollada la matemática, que parte de la base conocida del método de las singularidades, se puede calcular de forma sencilla el cálculo de las velocidades inducidas, u y w, en cualquier punto del plano. Para ello, se deberá desarrollar una función que, dada la intensidad de la componente constante (γ_a) y la componente lineal (γ_b) de la linea de torbellinos (es conveniente dar estas magnitudes como argumentos separados), calcule el valor de los coeficientes a_1, a_2 y a_3 y "ensamble" las expresiones correspondientes al cálculo de la velocidad horizontal y vertical, para un punto del espacio (x, z). Debido al valor de los argumentos de la arcotangente del parámetro a_1, se debe utilizar la función **atan2** en lugar de **atan**.

Validación

La matemática de estas expresiones se simplifica bastante cuando se pretende calcular la velocidad inducida sobre el propio panel, y aun más si se calcula sobre el centro del mismo. Conocer el valor analítico de estas expresiones, otorga por tanto una herramienta para validar el código desarrollado y verificar que los valores numéricos obtenidos son correctos.

Distribución de torbellinos de intensidad constante

En este primer caso, la velocidad horizontal toma un valor constante en todo el panel, siendo éste:

$$u(x, \pm) = \pm \frac{\gamma_a}{2}.$$

La velocidad vertical, por su parte, sigue la expresión:

$$w(x, \pm) = \frac{\gamma_a}{4\pi} \ln \frac{(x - x_b)^2}{(x - x_a)^2},$$

que toma valor **nulo** en el centro del panel.

Distribución de torbellinos de intensidad linealmente variable

En esta segunda configuración, las velocidades horizontales y vertical en el centro del panel toman los valores:

$$u = \pm \frac{\gamma_b}{4}(x_a + x_b),$$
$$w = -\frac{\gamma_b}{2\pi}(x_a - x_b).$$

Referencias

[1] J. Katz and A. Plotkin, Low-Speed Aerodynamics, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.