AEC5: Álgebra

ISMAEL HERNÁNDEZ CLEMENTE

PROBLEMA 1

Un subespacio de un espacio vectorial es un conjunto que satisface tres condiciones:

- Contiene al vector cero.
- Es cerrado bajo la suma vectorial.
- Es cerrado bajo la multiplicación por escalares.

Vamos a probar cada caso:

Caso 1: W está compuesto por las matrices con determinante nulo

Contiene al vector cero: La matriz cero tiene determinante cero, por lo que pertenece a W.

Cerrado bajo la suma vectorial: Tomemos dos matrices A y B con determinante nulo. La suma de estas dos matrices puede tener un determinante distinto de cero. Por lo tanto, la suma de dos matrices con determinante nulo podría no pertenecer a W, por lo que W no es cerrado bajo la suma vectorial.

Cerrado bajo la multiplicación por escalares: Si tomamos una matriz A con determinante nulo y la multiplicamos por un escalar k, el determinante de kA podría no ser cero para todos los valores de k. Por lo tanto, W no es cerrado bajo la multiplicación por escalares.

Dado que W no satisface la segunda y tercera condición, no es un subespacio de V.

Caso 2:

Contiene al vector cero: La matriz cero elevada al cuadrado es igual a la matriz cero, por lo que pertenece a W.

Cerrado bajo la suma vectorial: Tomemos dos matrices A y B tal que A2=A y B2 =B. La suma de estas dos matrices podría no cumplir lo siguiente:

$$(A + B)^2 = A + B,$$

Ya que la suma de matrices no necesariamente preserva esta propiedad. Por lo tanto, W no es cerrado bajo la suma vectorial.

Cerrado bajo la multiplicación por escalares: Si tomamos una matriz A tal que A2=A y la multiplicamos por un escalar k, no podemos garantizar que (kA)2=kA para todos los valores de k. Por lo tanto, W no es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Dado que W no satisface la segunda y tercera condición, no es un subespacio de V.

PROBLEMA 2

Si S es un conjunto generador de V:

Esto significa que cualquier vector en V puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores en S. Es decir, dado un vector v en V, podemos encontrar escalares 1,2,...,c1,c2,...,cn tal que:

v=c1a1+c2a2+...+cnan

Esto es lo mismo que decir que la matriz A formada por los vectores en S como columnas, cuando se multiplica por un vector columna x que contiene los escalares c1,c2,...,cn, produce el vector v.

Si para cada b en V existe un vector columna x tal que Ax=b:

Esto significa que la matriz A aplicada a un vector columna x produce cualquier vector b en V. Es decir, la matriz A es suficientemente "flexible" para generar cualquier vector b en V.

Demostración:

Si S es un conjunto generador de V, entonces cualquier vector b en V puede ser expresado como Ax, donde x es un vector columna de escalares que representan la combinación lineal de los vectores en S. Por lo tanto, para cada b en V existe un vector columna x tal que Ax=b.

Si para cada b en V existe un vector columna x tal que Ax=b, entonces la matriz A es suficientemente "flexible" para generar cualquier vector b en V. Esto significa que los vectores en S pueden ser combinados de tal manera que produzcan cualquier vector en V, lo que implica que S es un conjunto generador de V.

PROBLEMA 3

Para describir los espacios de columnas de la matriz A y su traspuesta, primero necesitamos calcular ambas matrices y luego identificar los espacios de columnas respectivos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

El espacio de columnas de A, denotado por R(A), es el espacio generado por las columnas de A. En otras palabras, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

Para determinar R(A), podemos observar que la tercera columna de A es simplemente el doble de la segunda columna y la segunda columna es el doble de la primera columna. Entonces, el espacio de columnas de A está generado por la primera columna, ya que las otras dos son linealmente dependientes de ella.

Entonces, el espacio de columnas de A es el espacio unidimensional generado por el vector columna (12)(12).

Espacio de columnas:

El espacio de columnas de es el espacio generado por las columnas de AT, siendo también el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de AT.

Observando AT, podemos ver que las columnas son linealmente independientes, ya que no hay una relación lineal entre ellas. Por lo tanto, el espacio de columnas de AT es el espacio tridimensional generado por los tres vectores columna de AT, que son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{y} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4

Para determinar si los vectores u, v, y w en R3 son linealmente dependientes, podemos formar una matriz utilizando estos vectores como columnas y luego calcular su determinante. Si el determinante es cero, los vectores son linealmente dependientes; de lo contrario, son linealmente independientes.

Entonces, formemos la matriz con los vectores u, v, y w:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (1 \cdot 1 - (-4) \cdot (-1)) - 2 \cdot (-(2) \cdot (-1) - (-4) \cdot 1) + 7 \cdot (-(2) \cdot (-1) - 1 \cdot (-4))$$

$$\det(A) = 1 \cdot (1 - 4) - 2 \cdot (2 - (-4)) + 7 \cdot (-2 - (-4))$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (6) + 7 \cdot (-2 + 4)$$

$$\det(A) = -3 - 12 + 7 \cdot 2$$

$$\det(A) = -3 - 12 + 14$$

$$\det(A) = -15 + 14$$

$$\det(A) = -1$$

Como el determinante de A es diferente de cero (−1−1), los vectores u, v, y w son linealmente independientes.

PROBLEMA 5

Para demostrar que los vectores son linealmente independientes en el espacio vectorial V de las funciones de R en R, podemos utilizar el criterio de independencia lineal.

Un conjunto de funciones{f(t),g(t),h(t)} es linealmente independiente si la única combinación lineal de estas funciones que da como resultado la función cero es aquella en la que todos los coeficientes son cero.

Entonces, para probar la independencia lineal de f(t), g(t), y h(t), supongamos que existen constantes a, b, y c tales que:

$$af(t) + bg(t) + ch(t) = 0$$

donde 0 es la función cero en V, es decir, la función cero que mapea todos los elementos de R a 0. Entonces, tenemos:

$$a\sin(t) + b\cos(t) + ct = 0$$

Ahora, necesitamos mostrar que a=b=c=0 es la única solución a esta ecuación.

Tomemos t = 0:

$$a\sin(0) + b\cos(0) + c(0) = a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = b = 0$$

Tomemos t = $\pi/2$:

$$a\sin(\pi/2) + b\cos(\pi/2) + c(\pi/2) = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot (\pi/2) = a + c(\pi/2) = 0$$

Tomemos t=π:

$$a\sin(\pi) + b\cos(\pi) + c\pi = a \cdot 0 + b \cdot (-1) + c\pi = -b + c\pi = 0$$

Puesto que b=0 (como lo demostramos antes), entonces −b+cπ=0, lo que implica cπ = 0.

Dado que π es un número real y c es un coeficiente, la única forma de que cπ=0 es si c=0.

Ahora, volviendo a la ecuación a+c(π/2)=0, sabiendo que c=0, tenemos a=0.

Por lo tanto, hemos demostrado que la única solución a la ecuación af(t)+bg(t)+ch(t)=0 es a=b=c=0, lo que significa que f(t), g(t) y h(t) son linealmente independientes en V.

PROBLEMA 6

Para determinar si el conjunto S={1+t, t+t2,t2+t3,...,tn−1+tn} es una base de Pn(t), el espacio vectorial de polinomios en t de grado menor o igual a n, podemos seguir estos pasos:

- Dimensión de Pn(t): Sabemos que el espacio Pn(t) está formado por todos los polinomios de la forma a0+a1t+a2 t2+...+antn, donde ai son coeficientes escalares, y el grado máximo del polinomio es n. Por lo tanto, la dimensión de Pn (t) es n+1 (debido a los n+1 coeficientes posibles: 0, 1,...,a0,a1,...,an).
- Número de vectores en S: El conjunto S contiene n vectores. Cada vector en S es una combinación lineal de monomios de la forma ti+ti+1, donde i varía de 0 a n−1.
- ¿Independencia lineal?: Si demostramos que los vectores en S son linealmente independientes y hay n+1 vectores en Pn (t), entonces S debe ser una base de Pn(t).

Para demostrar la independencia lineal, consideremos la siguiente combinación lineal:

$$c_1(1+t) + c_2(t+t^2) + \ldots + c_n(t^{n-1} + t^n) = 0$$

Para que esta combinación sea igual a cero para todo t, todos los coeficientes ci deben ser cero.

Al expandir la expresión, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales en 1,2,...,c1,c2,...,cn. La resolución de este sistema mostrará si los vectores son linealmente independientes o no.

Podemos observar que cada vector en S es una combinación lineal de dos monomios consecutivos. Por lo tanto, los coeficientes de cada monomio son distintos. Esto significa que cada vector en S tiene una contribución única a los coeficientes del polinomio resultante.

Por lo tanto, cada ci debe ser cero para que la combinación lineal sea cero para todo t.

Dado que S tiene n elementos y todos son linealmente independientes, y la dimensión de Pn(t) es n+1, entonces S forma una base para Pn(t).

PROBLEMA 7

Primero, recordemos que una matriz simétrica A es aquella que satisface A=AT, es decir, la matriz es igual a su traspuesta. Una base comúnmente utilizada para V es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora, vamos a demostrar que esta base es en realidad una base para �V:

Demostración de que las matrices son simétricas:

- Es fácil verificar que todas las matrices en la base son simétricas, ya que son iguales a sus transpuestas.

Demostración de que son linealmente independientes:

- Supongamos que tenemos una combinación lineal igual a cero:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que igualamos para obtener un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Solución a este sistema es c1=c2=c3=0, lo que prueba que las matrices son linealmente independientes. Dado que las matrices en la base son linealmente independientes y V es de dimensión 3, entonces estas matrices generan todo V.

PROBLEMA 8

a)

Podemos observar que la ecuación a+b+c =0 define un plano en R3 que pasa por el origen. Para encontrar una base para este plano, necesitamos dos vectores linealmente independientes que estén en el plano.

Una opción es tomar (1,−1,0) (1,−1,0) y (0,1,−1)(0,1,−1). Estos dos vectores son linealmente independientes y están en el plano definido por a+b+c=0.

Como hemos encontrado una base con dos vectores linealmente independientes, la dimensión de W es 2.

b)

La condición a=b=c define una recta en R3 que pasa por el origen. Para encontrar una base para esta recta, necesitamos un solo vector que esté en la recta. Una opción es tomar (1,1,1)(1,1,1). Este vector está en la recta definida por a=b=c. Como hemos encontrado una base con un solo vector, la dimensión de W es 11.

c)

La condición c=3a define un plano en R3 que pasa por el origen. Para encontrar una base para este plano, necesitamos dos vectores linealmente independientes que estén en el plano. Podemos tomar (1,0,3)(1,0,3) y (0,1,3)(0,1,3). Estos dos vectores son linealmente independientes y están en el plano definido por c=3a. Como hemos encontrado una base con dos vectores linealmente independientes, la dimensión de W es 22.

PROBLEMA 9

a)

Para demostrar esto, necesitamos mostrar que cada elemento de U y cada elemento de W también están en U+W. Sea u∈U. Entonces u=u+0, donde u es la suma de u y el elemento nulo 0, que claramente está en W. Entonces u está en U+W. Similarmente, sea w∈W. Entonces w=0+w, donde w es la suma del elemento nulo 0 y w, que está en U. Entonces w está en U+W. Como cada elemento de U y W está en U+W, podemos concluir que U y W están contenidos en U+W.

b)

- U+W es un subespacio de V.
- No hay ningún subespacio propio de V que contenga tanto a U como a W.

Para la primera parte, observe que U+W está cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalares, ya que es la suma de todos los posibles elementos de U y W. Por lo tanto, U+W es un subespacio de V.

Para la segunda parte, supongamos que existe un subespacio propio Z de V que contiene tanto a U como a W. Entonces, para todo u en U y w en W, también deben estar en Z. Pero esto implicaría que Z debe contener todas las combinaciones lineales de elementos de U y W, que es precisamente U+W. Por lo tanto, Z no puede ser un subespacio propio, lo que implica que U+W es el menor subespacio que contiene tanto a U como a W.

c)

- W⊆W+W
- W+W⊆W

W⊆W+W: Esto es trivial, ya que, para cualquier w en W, 0w=w+0, donde w y 0 están en W. Por lo tanto, w está en W+W. W+W⊆W: Cualquier elemento en W+W es de la forma w1+w2, donde w1 y w2 están en W. Pero la suma de dos elementos en W también está en W, ya que W es cerrado bajo la suma. Por lo tanto, W+W está contenido en W. Al demostrar ambas inclusiones, podemos concluir que W+W=W.

PROBLEMA 10