Wiskunde: overzicht van te kennen bewijzen

---

(1) Analyse

(1.1) Goniometrische functies

BIJZONDERE LIMIET (géén bewijs):

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

AFGELEIDE VAN DE SINUSFUNCTIE:

$D(sin\ x) = D\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ (complementaire hoeken)

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . D\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (afgeleide van cosinus = -sinus + kettingregel)

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . (-1)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= \cos(x)$ (complementaire hoeken)

$D(\sin x) = \cos(x)$

AFGELEIDE VAN DE COSINUSFUNCTIE:

$D(\cos x) = D\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ (complementaire hoeken)

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . D\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (afgeleide van sinus = cosinus + kettingregel)

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . (-1)$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= -\sin(x)$ (complementaire hoeken)

$D(\cos x) = -\sin x$

AFGELEIDE VAN DE TANGENSFUNCTIE

$D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$= \frac{D(\sin x) .\cos x - \sin x .D(\cos x)}{\cos^2 x}$ (quotiëntregel)

$= \frac{\cos x .\cos x - \sin x .(-\sin x)}{\cos^2 x}$ (rekenregels afleiden goniometrische functies)

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ (uitwerken)

$= \frac{1}{\cos^2 x}$ (grondformule van de goniometrie)

$D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

AFGELEIDE VAN DE COTANGENSFUNCTIE

$D(\cot x) = D\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \frac{D(\cos x).\sin x - \cos x\,.D(\sin x)}{\sin^2 x}$ (quotiëntregel)

$= \frac{-\sin x\,.\sin x - \cos x\,.\cos x}{\sin^2 x}$ (rekenregels afleiden goniometrische functies)

$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ (uitwerken)

$= \frac{(-1).\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$ (-1 buiten haakjes brengen)

$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$ (- buiten breuk brengen)

$= -\frac{1}{\sin^2 x}$ (grondformule van de goniometrie)

$D(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(1.2) Cyclometrische functies

EIGENSCHAPPEN VAN CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

$\cos(Bgsin\ x) = \sqrt{1-x^2}$

--> HULPONBEKENDE: $y = Bgsin\ x \Leftrightarrow x = \sin(y)$

--> De omgekeerde bewerking van de boogsinus is de sinus.

==> DUS: $\cos y = \sqrt{1-\sin(y)^2}$

---------> Uit onze hulponbekende volgt: $\cos(Bgsin\ x) = \sqrt{1-\sin(Bgsin\ x)^2}$

$= \sqrt{1-x^2}$ (sin en Bgsin heffen elkaar op)

$\sin(Bgcos\ x) = \sqrt{1-x^2}$

--> HULPONBEKENDE: $y = Bgcos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$

==> DUS: $\cos(y) = \sqrt{1-\cos(y)^2}$

$= \sqrt{1-\cos(Bgcos\ x)^2}$ (hulponbekende terug invoeren)

$= \sqrt{1-x^2}$

$\cot(Bgtan\ x) = \frac{1}{x}$

--> HULPONBEKENDE: $Bgtan\ x = y \Leftrightarrow x = \tan y$

==> DUS: $\cot(y) = \frac{1}{\tan y}$

$= \frac{1}{\tan(Bgtan\ x)}$

$= \frac{1}{x}$

$\tan(Bgcot\ x) = \frac{1}{x}$

--> HULPONBEKENDE: $Bgcot\ x = y \Leftrightarrow >x = \cot(y)$

==> DUS: $\tan(y) = \frac{1}{\cot(y)}$

$= \frac{1}{\cot(Bgcot\ x)}$

$= \frac{1}{x}$

Afgeleiden van cyclometrische functies

ALGEMENE AFGELEIDE VAN INVERSE FUNCTIES (zonder bewijs): $Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df[f^{-1}(x)]}$

$D(Bgsin\,x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D(Bgsin\,x) = \frac{1}{D\sin x\,.[Bgsin\,x]}$ (algemene afgeleide van inverse functies)

$= \frac{1}{\cos x\,[Bgsin\,x]}$ (afgeleide van sinus = cosinus)

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (rekenregels cyclometrische functies)

$D(Bgcos\,x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D(Bgcos\,x) = \frac{1}{D(\cos x).Bgcos\,x}$ (algemene afgeleide van inverse functies)

$= \frac{1}{-\sin x\,.Bgcos\,x}$ (afgeleide van cosinus = - sinus)

$= -\frac{1}{\sin x\,.Bgcos\,x}$ (min mag voor de breuk staan)

$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (rekenregels cyclometrische functies)

$D(Bgtan\,x) = \frac{1}{1+x^2}$

$D(Bgtan\,x) = \frac{1}{Dtan\,x(Bgtan\,x)}$ (algemene afgeleide van inverse functies)

$= \frac{1}{\frac{1}{cos^2 x(Bgtan\,x)}}$

$= \cos^2 x\,(Bgtan\,x)$

$= \frac{1}{1+\tan^2(Bgtan\,x)}$

$= \frac{1}{1+x^2}$

FORMULE:
$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ $(\sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x})$

$D(Bgcot\,x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$D(Bgcot\,x) = \frac{1}{Dcot\,x(Bgcot\,x)}$

$= \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2(Bgcot\,x)}}$

$= -\sin^2(Bgcot\,x)$

$= -\frac{1}{1+\cot^2(Bgcot\,x)}$

$= -\frac{1}{1+x^2}$

(2) Discrete wiskunde

(2.1) Binomium van Newton

EIGENSCHAPPEN VAN BINOMIAALGETALLEN

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

➔ LL: $C_n^{n-p} = \frac{n!}{[n-(n-p)]!.(n-p)!]}$ (def.: combinatie)

$= \frac{n!}{[n-n+p]!\,.(n-p)!}$ (haakjes uitwerken)

$= \frac{n!}{[p]!\,.(n-p)!}$ (aftrekken)

$= C_n^p$

Betekenis van deze eigenschap: de binomiaalgetallen in het driehoek van Pascal staan symmetrisch ten opzichte van elkaar.

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

➔ RL = $C_n^p + C_n^{p+1}$

$= \frac{n!}{(n-p)!p!} + \frac{n!}{[(n-(p+1)]!(p+1)!}$

(definitie van combinatie)

$= \frac{n!}{(n-p)!\,p!} + \frac{n!}{[n-p-1]!(p+1)!}$

(uitwerken)

$= \frac{n!(p+1)}{(n-p)!\,p!(p+1)} + \frac{n!(n-p)}{(n-p)(n-p-1)!(p+1)!}$

(op gelijke noemers zetten)

$$= \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!} + \frac{n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!}$$

(rekenen met faculteiten)

$$= \frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$= \frac{n!(p+1+n-p)}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$= C_{n+1}^{p+1}$$

(3) Kegelsneden

(3.1) Cartesische vergelijking van een parabool

DEFINITIE PARABOOL: Een parabool is een verzameling van punten van het vlak waarvoor de afstand tot de punt en de brandpunt van de parabool gelijk is aan de afstand tot dat punt en het welbepaalde richtlijn d.

→ IN SYMBOLEN: $P = \{D \in \mathbb{R} |\, d(D, F) = d(D, d)\}$

KEUZE ASSENSTELSEL:

--> Orthonormaal

--> $F \to \left(-\frac{p}{2}, 0\right)$

--> $d \to x = -\frac{p}{2}$

--> $|EF| = p$

BEWIJS VAN DE CARTESISCHE VERGELIJKING $y^2 = 2px$:

$D(x_1, y_1) \in P \quad \Leftrightarrow \quad |DF| = |DG|$ met $G \in d$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - \tfrac{p}{2})^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{\left(x_1 - \left(-\tfrac{p}{2}\right)\right)^2 + (y_1 - y_1)^2}$$

(formule voor afstand tussen punten)

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - \tfrac{p}{2})^2 + (y_1)^2} = \sqrt{\left(x_1 - \left(-\tfrac{p}{2}\right)\right)^2}$$

(vereenvoudigen)

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - \tfrac{p}{2})^2 + (y_1)^2} = \sqrt{\left(x_1 + \tfrac{p}{2}\right)^2}$$

(negatief en negatief wordt positief)

$$\Leftrightarrow \left(x_1 - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y_1^2 = \left(x_1 + \tfrac{p}{2}\right)^2$$

(kwadrateren: géén kwadrateringsvoorwaarde)

$$\Leftrightarrow \cancel{x_1^2} - 2 \,.\, x_1 . \tfrac{p}{2} + \cancel{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2} + y_1^2 = \cancel{x_1^2} + 2 \,.\, x_1 \,.\, \tfrac{p}{2} + \cancel{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow -2 \,.\, x_1 \,.\, \tfrac{p}{2} + y_1^2 = 2 \,.\, x_1 \,.\, \tfrac{p}{2}$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 = 2 \,.\, x_1 \,.\, \tfrac{p}{2} + 2 \,.\, x_1 \,.\, \tfrac{p}{2}$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 = 2 \,.\, x_1 \left(\tfrac{p}{2} + \tfrac{p}{2}\right)$$

(afzonderen van gemeenschappelijke termen)

$$\Leftrightarrow y_1^2 = 2 \,.\, x_1 \,.\, p$$

==> $y^2 = 2px \to FORMULE\ IS\ BEWEZEN!$

(3.2) Cartesische vergelijking van een ellips

DEFINITIE ELLIPS: Een ellips E is een verzameling punten van het vlak waarvoor de afstanden tot twee gegeven brandpunten F_1 en F_2 constant is en gelijk is aan 2a.

$E = \{D \in \pi | d(D, F_1) + d(D, F_2) = 2a\}$

<u>KEUZE ASSENSTELSELS:</u>
Brandpunt 1: $F_1 \to (-c, 0)$
Brandpunt 2: $F_2 \to (c, 0)$
--> Afstand tussen beide brandpunten = 2c.
--> Beide brandpunten bevinden zich op de x-as.

<u>SPECIALE BETREKKING:</u>
In een ellips geldt volgende betrekking: $b^2 = a^2 - c^2$ (zie samenvatting waarom).

<u>BEWIJS VAN CARTESISCHE VERGELIJKING:</u>

$D \in E \Leftrightarrow |DF_1| + |DF_2| = 2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{[x_1 - (-c)]^2 + (y_1 - 0)^2} + \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1 - 0)^2} = 2a$

(Definitie afstand tussen 2 punten)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = 2a$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}\right)^2 = 4a^2$

(Kwadrateren --> dubbel product uitvoeren)

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}\right)^2 + 2 . \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} . \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} + \left(\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}\right)^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow (x_1 + c)^2 + y_1^2 + (x_1 - c)^2 + y_1^2 + 2 . \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} . \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = 4a^2$

BLAUW = A

$\Leftrightarrow x_1^2 \cancel{+ 2x_1c} + c^2 + y_1^2 + x_1^2 \cancel{- 2x_1c} + y_1^2 + 2A = 4a^2$

$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2c^2 + 2A = 4a^2$

$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + c^2 + A = 2a^2$

$\Leftrightarrow . x_1^2 + y_1^2 + c^2 + . \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} . \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = 2a^2$

GROEN = B

$\Leftrightarrow B + \sqrt{x_1^2 + 2x_1c + c^2 + y_1^2} . \sqrt{x_1^2 - 2x_1c + c^2 + y_1^2} = 2a^2$

$\Leftrightarrow B + \sqrt{x_1^2 + c^2 + y_1^2 + 2x_1c} . \sqrt{x_1^2 + c^2 + y_1^2 - 2x_1c} = 2a^2$

$\Leftrightarrow B + \sqrt{(x_1^2 + c^2 + y_1^2 + 2x_1c)(x_1^2 + c^2 + y_1^2 - 2x_1c)} = 2a^2$

$\Leftrightarrow B + \sqrt{(x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2} = 2a^2$

[(a + b)(a – b) = a² - b²]

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2} = 2a^2 - B$

$\Longrightarrow (x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2 = 4a^4 - 2.2a^2.B + B^2$

$\Leftrightarrow (x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2 = 4a^4 - 4a^2.B + B^2$

$\Leftrightarrow \cancel{(x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2} - (2x_1c)^2 = 4a^4 - 4a^2.(x_1^2 + y_1^2 + c^2) \cancel{+ (x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2}$

$\Leftrightarrow -(2x_1c)^2 = 4a^4 - 4a^2(x_1^2 + y_1^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow -4x_1^2c^2 = 4a^2\left(a^2 - (x_1^2 + y_1^2 + c^2)\right)$

$\Leftrightarrow -x_1^2c^2 = a^2\left(a^2 - (x_1^2 + y_1^2 + c^2)\right)$

$\Leftrightarrow -x_1^2c^2 = a^4 - a^2x_1^2 - a^2y_1^2 - a^2c^2$

$\Leftrightarrow -x_1^2c^2 + a^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^4 - a^2c^2$

$\Leftrightarrow x_1^2\,(a^2 - c^2) + a^2y_1^2 = a^2(a^2 - c^2)$

$\Leftrightarrow x_1^2(b^2) + a^2y_1^2 = a^2b^2$ (speciale betrekking in de ellips: $b^2 = a^2 - c^2$)

$\Leftrightarrow \frac{x_1^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y_1^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

Nu moeten we de equivalentie nog bewijzen.

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1^2}{a^2} \leq 1 \quad \vee \quad \frac{y_1^2}{b^2} \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 \leq a^2 \quad \vee \quad y_1^2 \leq b^2$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 \leq a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 + c^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$

➔ $b^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 + c^2 \leq a^2 + a^2 - c^2 + c^2$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 + c^2 \leq 2a^2$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 2a^2 - (x_1^2 + y_1^2 + c^2)$

--> We hebben bewezen dat RL positief is, dus geld er géén kwadrateringsvoorwaarde en geldt de equivalentie!

(3.3) Cartesische vergelijking van een hyperbool

DEFINITIE HYPERBOOL: Een hyperbool H is een verzameling van punten van het vlak waarvoor de absolute waarde van het verschil van de afstanden tot twee gegeven punten F_1 en F_2 constant is en gelijk is aan 2a.

$H = \{D \in \pi | d(D, F_1) - d(D, F_2) = \pm 2a\}$

SPECIALE BETREKKING:
In een hyperbool geldt een speciale betrekking: $b^2 = c^2 - a^2$
(niet verwarren met ellips: $b^2 = a^2 - c^2$)

KEUZE ASSENSTELSEL:
BRANDPUNT 1: $F_1 \rightarrow (-c, 0)$
BRANDPUNT 2: $F_2 \rightarrow (c, 0)$
--> F_1F_2 ligt op de x-as. Afstand tussen F_1 en F_2 is gelijk aan 2c.

BEWIJS VOOR DE CARTESISCHE VERGELIJKING:

$D \in H \Leftrightarrow |DF_1| - |DF_2| = 2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1 - 0)^2} - \sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1 - 0)^2} = 2a$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_1-c)^2+(y_1-0)^2}-\sqrt{(x_1+c)^2+(y_1-0)^2}\right)^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}\right)^2 - 2\,.\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}.\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}+\left(\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}\right)^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1-c)^2+y_1^2+(x_1+c)^2+y_1^2-\ 2\,.\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}.\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2} = 4a^2$$

BLAUW = A

$$\Leftrightarrow x_1^2-2x_1c+c^2+y_1^2+x_1^2+2x_1c+c^2+y_1^2-\ 2A = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1^2+2y_1^2+2c^2-2A = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow .x_1^2+y_1^2+c^2 - A = 2a^2$$

GROEN = B

$$\Leftrightarrow B - A = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow -A-2a^2 = \ -B$$

$$\Leftrightarrow A-2a^2 = B$$

$$\Leftrightarrow A-2a^2 = \sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}.\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}$$

$$\Leftrightarrow A-2a^2 = \ \sqrt{[(x_1-c)^2+y_1^2][(x_1+c)^2+y_1^2]}$$

$$\Leftrightarrow A-2a^2 = \ \sqrt{[x_1^2-2x_1c+c^2+y_1^2][x_1^2+2x_1c+c^2+y_1^2]}$$

$$\Leftrightarrow A-2a^2 = \ \sqrt{(x_1^2+y_1^2+c^2)^2-(2x_1c)^2}$$

$$==> (A-2a^2)^2 = \ (x_1^2+y_1^2+c^2)^2-(2x_1c)^2$$

$$\Leftrightarrow A^2-2\,.A\,.2a^2+4a^4 = (x_1^2+y_1^2+c^2)^2-(2x_1c)^2$$

$$\Leftrightarrow A^2-4a^2.A+4a^4 = (x_1^2+y_1^2+c^2)^2-4x_1^2c^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2+y_1^2+c^2)^2-4a^2(x_1^2+y_1^2+c^2)-4a^4 = (x_1^2+y_1^2+c^2)^2-4x_1^2c^2$$

$$\Leftrightarrow -4a^2(x_1^2+y_1^2+c^2)-a^4 = -4x_1^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(x_1^2+y_1^2+c^2)-a^4 = \ x_1^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x_1^2+a^2y_1^2+a^2c^2-a^4 = x_1^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x_1^2-x_1^2c^2+a^2y_1^2 = a^4-a^2c^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2(a^2-c^2)+a^2y_1^2 = a^2(a^2-c^2)$$

SPECIALE BETREKKING: $b^2 = c^2-a^2$

$$\Leftrightarrow x_1^2(-b^2)+a^2y_1^2 = a^2(-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2(-b^2)}{a^2(-b)^2}+\frac{a^2y_1^2}{a^2(-b)^2} = \frac{a^2(-b)^2}{a^2(-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{(-b)^2} = 1$$

$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ (DIT IS DE CARTESISCHE VERGELIJKING VAN DE HYPERBOOL)

We moeten nog bewijzen dat de equivalentie geldt…

$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

==> $\frac{x_1^2}{a^2} \geq 1$

==> $x_1^2 \geq a^2$

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \geq a^2 + y_1^2 + c^2$

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \geq a^2 + y_1^2 + b^2 + a^2$

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \geq 2a^2 + y_1^2 + b^2$

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 - 2a^2 \geq y_1^2 + b^2$

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 - 2a^2 \geq y_1^2 + b^2 \geq 0$

--> Equivalentie is bewezen!