UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Inducción Matemática

Lucía Agud

Departamento de Matemática Aplicada
Campus d'Alcoi
Universitat Politècnica de València.

Objetivos

Con este objeto de aprendizaje vas a conseguir:

- Construir el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, a partir de los Axiomas de Peano.
- Conocer el proceso de demostración inductiva.
- Demostrar de forma inductiva igualdades y desigualdades para números naturales.

Contenidos

En este tema se va a trabajar una de las formas de demostrar fórmulas matemáticas donde intervengan números naturales, la **demostración por inducción**.

Para los informáticos en especial este tipo de demostración es muy interesante y necesaria, ya que, si por ejemplo a la hora de programar, se quiere crear un bucle para que se realice una misma operación durante unos cuantos pasos, la ley o fórmula que debe cumplirse en cada iteración se ha tenido que demostrar que es cierta, para que así el proceso del algoritmo sea correcto, y tengamos un algoritmo convergente.

Ejemplo

Obtener la fórmula para implementar en determinado lenguaje de programación la siguiente regla:

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1 \\ 1+2 & = 3 \\ 1+2+3 & = 6 \\ 1+2+3+4 & = 10 \\ 1+2+3+4+5 & = 15 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Lo primero de todo es sacar de forma intuitiva y matemática una regla que veamos que es cierta para todos los casos. Después ya la demostraremos, cuando se vea cómo hacerlo. Veamos qué se puede deducir:

Ejemplo (Continuación)

En una primera observación, se puede comprobar que:

$$\begin{array}{lrll}
n=1: & 1 & =1 & =\frac{2}{2}\\
n=2: & 1+2 & =3 & =\frac{6}{2}\\
n=3: & 1+2+3 & =6 & =\frac{12}{2}\\
n=4: & 1+2+3+4 & =10 & =\frac{20}{2}\\
n=5: & 1+2+3+4+5 & =15 & =\frac{30}{2}
\end{array}$$

Y aún más, se puede verificar que:

$$\begin{array}{lrlll}
n=1: & 1 & =1 & =\frac{2}{2} & =\frac{1\cdot 2}{2}\\
n=2: & 1+2 & =3 & =\frac{6}{2} & =\frac{2\cdot 3}{2}\\
n=3: & 1+2+3 & =6 & =\frac{12}{2} & =\frac{3\cdot 4}{2}\\
n=4: & 1+2+3+4 & =10 & =\frac{20}{2} & =\frac{4\cdot 5}{2}\\
n=5: & 1+2+3+4+5 & =15 & =\frac{30}{2} & =\frac{5\cdot 6}{2}
\end{array}$$

Ejemplo (Continuación)

Con lo que parece que la regla matemática que se verifica es:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Pero esto es lo que sacamos de forma deductiva a partir de la observación. Si se quiere crear una rutina que haga esta operación,o usar esta fórmula, debe verificarse su veracidad. Y para eso no sirve demostrar que unos cuantos números lo cumplen. Hay que demostrarla para todos los números naturales, no para unos cuantos, sino para todos. Es decir, queda demostrar que:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Para demostrar esta regla, y más propiedades de este tipo, es donde intervendrá el método de inducción.

Aunque el **conjunto de los números naturales**, $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, surge de forma natural por la necesidad de contar, su definición matemática es un poco más compleja. Se necesita para su definición ver qué verifica este conjunto que no lo cumplan otros.

Axioma

Matemáticamente, y a grosso modo, un axioma es una propiedad verdadera que se toma como cierta sin herramientas para demostrarla, pero que se observa que siempre se cumple, que constituye la base del proceso matemático.

Veamos cuáles son los axiomas que definen y construyen matemáticamente y de forma única, el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$. Si alguno de estos axiomas dejara de cumplirse, ya no se tendría el conjunto $\mathbb{N}$, sino otro conjunto.

Una definición axiomática precisa de cada uno de los axiomas que interviene para definir de forma única y unívoca el concepto.

Axiomas de Peano

- $1 \in \mathbb{N}$, (es decir, existe un elemento en ese conjunto y se dice cuál es)
- Si $n \in \mathbb{N}$, entonces su sucesor o número siguiente también pertenece a $\mathbb{N}$:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow sig(n) := n+1 \in \mathbb{N}$$

- 1 no es el siguiente de ningún número de $\mathbb{N}$, (es decir, hay un primer elemento):

$$\nexists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 1 = sig(n)$$

- Sean $n, m \in \mathbb{N}$, si n y m tienen el mismo sucesor o siguiente, entonces $n = m$; es decir, la aplicación *siguiente de un número* es inyectiva:

$$n+1 = m+1 \iff n = m$$

- Axioma de Inducción: Un subconjunto de $\mathbb{N}$ que contenga al elemento 1, y que en el momento que contenga a un elemento n también contenga a su siguiente, $n+1$, debe ser el conjunto total $\mathbb{N}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in A \subseteq \mathbb{N}, \\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

K. A. Ross, *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*, Springer-Verlag, N.Y., 1980.

Nota: Observemos qué pasa si no se verifican alguno de los items anteriores:

- Por ejemplo, si se considera $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, donde están los naturales, los enteros negativos y el cero, no verifica el tercero de los axiomas. No hay un primer elemento.
- si consideramos el conjunto de los reales, $\mathbb{R}$, no verifica que dado un elemento haya un siguiente. De hecho es necesario el concepto de intervalo abierto para expresar números mayores que 2 sin tomar el 2:

$$(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / \ x > 2\}$$

porque no se puede decir a partir de qué número real empezaría ese conjunto, por ejemplo.
- En el Axioma de inducción cabe destacar que en ocasiones, **el primer elemento no necesariamente será el** 1, ya que se buscará demostrar una propiedad que se cumpla para todos los números naturales a partir de uno dado. Éste será el que se tome como primer elemento, y el que deberá verificar que pertenece a A.

El último de los axiomas anteriores es el Axioma de inducción. Su importancia radica en que nos dice cómo demostrar que una propiedad, $p(n)$, se verifica para todos los números naturales.

La idea general, que luego simplificaremos, es:

Proceso de demostración por inducción

- Sea A el conjunto de números naturales que sí verifiquen la propiedad $p(n)$ que queremos demostrar para todos los números naturales:

$$A = \{n \in \mathbb{N} / \ p(n) \text{ se verifica}\}$$

- Comprobaremos que $1 \in A$
- Comprobaremos que si partimos de que $n \in A$, también se cumple que $n+1 \in A$; es decir, $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$
- usando el Axioma de inducción, este conjunto verificando los anteriores apartados, obligatoriamente debe ser todo $\mathbb{N}$:

$$A = \mathbb{N}$$

Por lo que la propiedad $p(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

Realizaremos un ejemplo usando el conjunto A y después ya lo haremos en general. Veamos primero, la demostración de la regla sacada en el ejemplo primero de forma intuitiva.

Ejemplo (Usando el conjunto A)

Demuestra que $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $A := \{n \in \mathbb{N} / \ 1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\}$, ha de verse si $A \stackrel{?}{=} \mathbb{N}$, y así se tendrá que la fórmula es cierta para todos los números naturales. Atención especial a la expresión del primer miembro, es una suma que para cada valor de n va aumentando el número de sumandos. Los valores que toma dicha suma son:

$$\begin{array}{ll} n=1 & \longrightarrow 1 \\ n=2 & \longrightarrow 1+2 \\ n=3 & \longrightarrow 1+2+3 \\ & \vdots \end{array}$$

Ejemplo (Continuación)

Nota: Esta suma extendida se puede poner en forma compacta con la notación de los sumatorios (muy importante para los informáticos), de la siguiente manera:

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k$$

teniendo especial atención en no usar para el índice que va tomando valores en el sumatorio la misma letra que el valor tope hasta el que se llega. A nivel de un bucle en programación, esta k sería el contador que va tomando valores.

En este ejemplo, la propiedad a verificar $p(n)$ es:

$$p(n) \text{ es que se cumpla } 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo (Continuación)

Comenzamos con los pasos a verificar del proceso de inducción.

- $\underline{1 \in A}$: se comprueba viendo si la fórmula es cierta para $n = 1$. Observar con mucha ATENCIÓN que para el caso n=1, el primer miembro constaría sólo de un sumando. Por lo tanto:

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \checkmark$$

- $\underline{\text{Suponiendo que } n \in A, \text{ veamos si también } n+1 \in A}$.

  Para ello, lo primero que se recomienda es plantear qué se quiere demostrar cuando se dice que $n+1 \in \mathbb{N}$. Es decir, hemos de escribir qué significa que se verifique la propiedad en el caso $n+1$, $p(n+1)$. Para ello, se debe 'sustituir' en la propiedad el valor de n por $n+1$.
  En este caso que se cumpla quiere decir que hay que comprobar:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ejemplo (Continuación)

Para demostrar una igualdad se recomienda partir de un miembro e intentar llegar al otro.
En este proceso se debe usar en algún paso intermedio la hipótesis de inducción: sabemos que la propiedad se cumple para n, es decir, $p(n)$ es cierta. No olvidemos que lo que se quiere demostrar es que:

$$n \in A \Rightarrow n+1 \in A$$

Usando esta hipótesis en los sumandos señalados con una llave inferior, se tiene:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+n}+(n+1) \stackrel{ind.}{=} \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \checkmark$$

sin más que haber sacado factor común en el último paso.

- Por lo tanto, como se ha verificado que:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in A \subseteq \mathbb{N} \\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{array}\right\} \stackrel{\text{Ax. de inducción}}{\Longrightarrow} A = \mathbb{N} \iff 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Este ejemplo se hará el proceso de demostrar por inducción ya de forma directa, es decir, sin utilizar como paso intermedio el conjunto A.

Ejemplo

Demuestra usando inducción que: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

- Caso $n=1$: ver si la igualdad se verifica para este caso. Hay que demostrar que $\frac{1}{1\cdot 2}\stackrel{?}{=}\frac{1}{2}$, lo que es evidente ya que:

$$\frac{1}{2}\stackrel{?}{=}\frac{1}{2}\ \checkmark$$

- Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para $n+1$: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\stackrel{?}{=}\frac{n+1}{n+2}$$

Ejemplo (Continuación)

Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{hip.\ ind.}{=} \underbrace{\frac{n}{n+1}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}\ \checkmark$$

donde en $(*)$ se ha utilizado la igualdad notable del *cuadrado de una suma*: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; también puede utilizarse factorizar el polinomio en la variable n que aparece cuya solución puede comprobarse que es $n=-1$ doble.

Por lo tanto, como se verifica para $n=1$, y supuesto cierto hasta n también es cierto para $n+1$ por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo

Demuestra por inducción que: $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1.$

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

- Caso $n=1$: ver si la igualdad se verifica para este caso. Hay que demostrar que $1+\frac{1}{1}\stackrel{?}{=}2$, lo que es evidente ya que:

$$1+\frac{1}{1}=2\stackrel{?}{=}2\ \checkmark$$

- Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para $n+1$: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\stackrel{?}{=}n+2$$

Ejemplo (Continuación)

Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \overset{\text{hip. ind.}}{=} \underbrace{(n+1)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= n+1+\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}}$$

$$= n+1+1 = n+2 \checkmark$$

Por lo tanto, como se verifica para $n=1$, y supuesto cierto hasta n también es cierto para $n+1$ por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hagamos un ejemplo en el cual la forma de utilizar que la propiedad es cierta para el caso n sea un poco distinta.

Ejemplo

Demuestra que $2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9.

Demostrar que un número o expresión es divisible por 9, o múltiplo de 9, quiere decir que se puede expresar como $9k$ con algún $k \in \mathbb{Z}$. Cada número tendrá una k distinta asociada.

- Caso $n = 1$:
$$2^2 - 3 - 1 \stackrel{?}{=} 9k \iff 0 = 9 \cdot 0 \checkmark$$
- Caso supuesto cierto para n, veo si es cierto para $n+1$: Como siempre, primero pongamos qué se quiere demostrar
$$2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 \stackrel{?}{=} 9\tilde{K}$$
Si se desarrolla el primer miembro buscando dónde utilizar que la propiedad es cierta para n:
$$2^{2n} \cdot 2^2 - 3n - 4 = 4 \cdot 2^{2n} - 3n - 4$$
nos encontramos con que aquí no se tiene tal cual la expresión para el caso n, como ocurría en los ejemplos anteriores. Hay que manipularla para poder aplicarla

Ejemplo (Continuación)

Si de la hipótesis de inducción, despejamos lo que nos interesa para poder sustituirla en el caso $n+1$:

$$2^{2n}-3n-1=9k \iff 2^{2n}=9k+3n+1$$

Y sustituyendo en la expresión que queremos verificar, se tiene:

$$\begin{aligned} 4\cdot\underbrace{2^{2n}}-3n-4 &\stackrel{ind.}{=} 4\underbrace{(9k+3n+1)}-3n-4 \\ &= 9\tilde{k}+12n+\cancel{4}-3n-\cancel{4}=9\tilde{k}+9n=9(\tilde{k}+n)=9\tilde{K}\checkmark \end{aligned}$$

- Por lo tanto, como se verifica que la propiedad es cierta para $n=1$, y que en el momento que se supone cierta para n también es cierta para $n+1$, por el Axioma de Inducción, la propiedad es cierta para todos los números naturales:

$$2^{2n}-3n-1 \text{ es divisible por } 9, \forall n\in\mathbb{N}$$

Inducción se puede usar también para demostrar desigualdades entre números naturales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo (Desigualdades)

Demostrar que $2^n \geq n^2, \forall n \geq 4$.

- Caso $n = 4$: sustituyendo $2^4 \overset{?}{\geq} 4^2$. En este caso es evidente y además se verifica la igualdad:

$$16 \geq 16 \checkmark$$

- Supuesto cierto para n veamos si es cierto también para $n+1$:

$$2^{n+1} \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$

Manipulando el primer miembro

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{ind.}{\geq} 2 \cdot n^2$$

Pero esto no es justo a lo que queríamos llegar, hay que seguir trabajando, veamos si desarrollando el cuadrado de la suma, se puede demostrar que

$$2n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$

Ejemplo (Continuación)

$$\begin{aligned} 2n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2 \quad & \Longleftrightarrow \cancel{2}n^2 \overset{?}{\geq} \cancel{n^2} + 2n + 1 \\ & \Longleftrightarrow n^2 - 2n - 1 \overset{?}{\geq} 0 \Longleftrightarrow (n-1)^2 - 2 \overset{?}{\geq} 0 \\ & \Longleftrightarrow (n-1)^2 \overset{?}{\geq} 2 \end{aligned}$$

lo cual es cierto para $n \geq 4$, ya que $(n-1)^2$ es una función creciente, y por lo tanto su valor más pequeño para $n \geq 4$ lo toma en $n = 4$, siendo $(4-1)^2 = 9 > 2\checkmark$. Por lo que se verificará que los valores de la función para n posteriores superarán el valor 2.

- Como se ha demostrado que la desigualdad es cierta para el caso $n = 4$, y que si se supone cierta para un valor de n también es cierta para el valor $n+1$, usando el Axioma de inducción la desigualdad es cierta para todos los números naturales a partir de $n = 4$. Es decir:

$$2^n \geq n^2, \forall n \geq 4$$

Conclusiones

¿Qué hemos conseguido aprender con este tema?

- Entender el concepto de Axioma, uno de los pilares fundamentales y básicos donde se apoya todo el contenido posterior. Es tan sencillo y elemental, que siempre es cierto de forma intuitiva pero no se conocen medios para demostrarlo debido a que es la base del conocimiento.
- El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, que surge de una forma tan natural y como una necesidad para el ser humano, se define a partir de 5 axiomas. Ninguno de ellos es prescindible.
- El Axioma de inducción nos permite demostrar propiedades que se verifican para los números naturales.
- El paso fundamental de las demostraciones inductivas es: primero crear la regla que intuimos se cumple en general para ahora pasar a demostrarla por inducción. Una vez se sabe la regla, recordar que lo más importante es comprobar que hay un elemento que la cumple; y a partir de ahí que si la cumple un elemento cualquiera también la debe cumplir su siguiente.
- No confundáis demostrar con comprobar. Si te piden demostrar es cierto siempre, si un ejercicio pide 'comprueba si...', puede ocurrir que no se cumpla, bastaría encontrar un caso donde no se verifique.