UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Inducción Matemática. Ejercicios

Lucía Agud

Departamento de Matemática Aplicada
Campus d'Alcoi
Universitat Politècnica de València.

Contenidos

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

EJERCICIO

Demuestra usando inducción que: $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$. *(Observar que esta fórmula corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica).*

EJERCICIO

Demuestra por inducción que: $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \ \ \forall n \geq 2.$

EJERCICIO

Demuestra usando inducción que: $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$*. (Observar que esta fórmula corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica).*

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

- *Caso* $n = 1$*: ver si la igualdad se verifica para este caso. Hay que demostrar que* $a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r-1}{r-1}$*, lo que es evidente ya que*

$$a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{\cancel{r-1}}{\cancel{r-1}} = a_1 \checkmark$$

- *Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para* $n+1$*: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:*

$$a_1 + a_1 r + a_r^2 + \cdots + a_1 r^n \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Ejercicio

Demuestra usando inducción que: $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$. *(Observar que esta fórmula corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica).*

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

- *Caso $n = 1$: ver si la igualdad se verifica para este caso. Hay que demostrar que* $a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r-1}{r-1}$*, lo que es evidente ya que:*

$$a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{\cancel{r-1}}{\cancel{r-1}} = a_1 \checkmark$$

- *Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para $n+1$: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:*

$$a_1 + a_1 r + a_r^2 + \cdots + a_1 r^n \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r^{n+1} - 1}{r-1}$$

EJERCICIO

Demuestra usando inducción que: $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$. *(Observar que esta fórmula corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica).*

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

- *Caso* $n = 1$*: ver si la igualdad se verifica para este caso. Hay que demostrar que* $a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r-1}{r-1}$*, lo que es evidente ya que:*

$$a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{\cancel{r-1}}{\cancel{r-1}} = a_1 \ \checkmark$$

- *Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para* $n+1$*: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:*

$$a_1 + a_1 r + a_r^2 + \cdots + a_1 r^n \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

EJERCICIO (CONTINUACIÓN)

Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{a_1 + a_1 r + a_r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}} + a_1 r^n \overset{\textit{hip. ind.}}{=} \underbrace{a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}} + a_1 r^n$$

$$= a_1 \frac{r^n - 1 + r^n(r-1)}{r-1} = a_1 \frac{\cancel{r^n} - 1 + r^{n+1} - \cancel{r^n}}{r-1}$$

$$= a_1 \frac{r^{n+1} - 1}{r-1} \ \checkmark$$

Por lo tanto, como se verifica para $n = 1$, y supuesto cierto hasta n también es cierto para $n+1$ por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

EJERCICIO (CONTINUACIÓN)

Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{a_1 + a_1 r + a_r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}} + a_1 r^n \overset{hip.\ ind.}{=} a_1 \underbrace{\frac{r^n - 1}{r-1}} + a_1 r^n$$

$$= a_1 \frac{r^n - 1 + r^n(r-1)}{r-1} = a_1 \frac{\cancel{r^n} - 1 + r^{n+1} - \cancel{r^n}}{r-1}$$

$$= a_1 \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \ \checkmark$$

Por lo tanto, como se verifica para $n = 1$, y supuesto cierto hasta n también es cierto para $n+1$ por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

EJERCICIO

Demuestra por inducción que: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \geq 2.$

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

- *Caso $n=2$: ver si la igualdad se verifica para este caso que aquí es el primero ya que se pide que la igualdad se verifique para $n \geq 2$. Hay que demostrar que $1-\frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$, lo que es evidente ya que:*

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4} \checkmark$$

- *Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para $n+1$: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \stackrel{?}{=} \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Ejercicio

Demuestra por inducción que: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ \ \forall n\geq 2.$

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

- *Caso $n=2$: ver si la igualdad se verifica para este caso que aquí es el primero ya que se pide que la igualdad se verifique para $n\geq 2$. Hay que demostrar que $1-\frac{1}{4}\stackrel{?}{=}\frac{3}{4}$, lo que es evidente ya que:*

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\stackrel{?}{=}\frac{3}{4}\ \checkmark$$

- *Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para $n+1$: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\stackrel{?}{=}\frac{n+2}{2(n+1)}$$

EJERCICIO

Demuestra por inducción que: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \geq 2.$

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

- *Caso $n=2$: ver si la igualdad se verifica para este caso que aquí es el primero ya que se pide que la igualdad se verifique para $n \geq 2$. Hay que demostrar que $1-\frac{1}{4}\overset{?}{=}\frac{3}{4}$, lo que es evidente ya que:*

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\overset{?}{=}\frac{3}{4} \checkmark$$

- *Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para $n+1$: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\overset{?}{=}\frac{n+2}{2(n+1)}$$

Ejercicio (Continuación)

Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \overset{hip.\ ind.}{=} \underbrace{\frac{n+1}{2n}}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2n} - \frac{\cancel{n+1}}{2n(n+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{(n+1)^2-1}{2n(n+1)} = \frac{n^2+2n}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n}(n+2)}{2\cancel{n}(n+1)} = \frac{(n+2)}{2(n+1)} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, como se verifica para $n=2$, y supuesto cierto hasta n también es cierto para $n+1$ por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta $\forall n \geq 2$:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \geq 2$$

Ejercicio (Continuación)

Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \overset{hip.\ ind.}{=} \underbrace{\frac{n+1}{2n}}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2n} - \frac{\cancel{n+1}}{2n(n+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{(n+1)^2-1}{2n(n+1)} = \frac{n^2+2n}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n}(n+2)}{2\cancel{n}(n+1)} = \frac{(n+2)}{2(n+1)} \checkmark$$

Por lo tanto, como se verifica para $n=2$, y supuesto cierto hasta n también es cierto para $n+1$ por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta $\forall n \geq 2$:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \geq 2$$