# Comprobando y completando Ejercicios de Inducción

## 1. Introducción

Aquí te voy a detallar algún ejercicio con los pasos que hay que ir haciendo, y quiero que tú lo vayas completando en un hoja aparte o mediante comentarios o escritura en el propio pdf. Marco con un recuadro los espacios que hay que rellenar. Después te lo subiré resuelto y así comparas lo que has escrito con lo mostrado, o quizás ya lo tengas entre los ejercicios resueltos del tema.

Te recomiendo que lo hagas sin buscar donde está la resolución, sino que eso lo hagas después de que lo hayas rellenado por tu cuenta.

Espero te ayude a ir viendo:

- cómo plantear un ejercicio de inducción
- cómo ver si se verifica la igualdad,
- qué pasos hay que efectuar para tener completo el proceso inductivo
- cómo concluir este proceso.



## 2. Testeando: ejercicios resueltos a completar por ti

**Ejercicio 2.1** *Demuestra usando inducción que:* $(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^n = \dfrac{(-1)^n-1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- ¿Qué es lo primero que debes comprobar?

  Que el primer elemento cumple esta propiedad, ¿cuál es en este caso el primer elemento?

  $$n = \square$$

  Por lo tanto, completa:

  Caso $n = \square$: se ha de probar si $\square \stackrel{?}{=} \dfrac{(-1)^{\square}-1}{2} = -1$, ✓.

- ¿Qué habría que ver ahora?

  Supuesto cierto para el caso $\square$, se demuestra para el caso $\square$: para ello primero conviene escribir qué se quiere demostrar, evaluando la expresión para $\square$:

  $$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{\square} \stackrel{?}{=} \frac{(-1)^{\square}-1}{2} \qquad (1)$$

  ☎ OJO: llegados aquí vamos a hacer una pequeña parada para ver si de verdad comprendéis qué es una suma extendida.

  - ¿Sería lo mismo que

    $$(-1)^{\square} \stackrel{?}{=} \frac{(-1)^{\square}-1}{2}? \ \square$$

    recuerda que esto es una suma extendida y no sólo el último sumando.

- Completa los valores que toma esta suma extendida para los distintos valores de $n$

$$
\begin{array}{ll}
n=1 & \Rightarrow (-1) \\
n=2 & \Rightarrow (-1)+(-1)^{\square} \\
n=\square & \Rightarrow (-1)+(-1)^2+(-1)^{\square} \\
 & \vdots \\
n=\square & \Rightarrow (-1)+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5+(-1)^{\square}
\end{array}
$$

  y así sucesivamente.
  Fíjate que se van acumulando los sumandos, y que el número de sumandos varía para cada $n \in \mathbb{N}$.

- Recuerda también que estas sumas extendidas pueden escribirse con notación de sumatorio. Completa la expresión

$$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^n = \sum_{k=\square}^{\square}(-1)^{\square}$$

☺ Volvamos, después de este paréntesis para ir aclarando las sumas extendidas, con el proceso inductivo. Recordad que se estaba queriendo demostrar (1).

Se parte del primer miembro y se intentará llegar al segundo miembro usando en algún momento la hipótesis de inducción. (Recordad que en ocasiones para demostrar una igualdad o desigualdad, se puede partir de ambos miembros a la vez hasta llegar a una identidad, es decir, algo que es cierto siempre). Vamos a ello, acordaos de buscar el caso $\square$ en el caso $\square$:

$$
\begin{aligned}
(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{\square} &= \underbrace{(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{\square}}+(-1)^{\square} \\
&\overset{ind.}{=} \underbrace{\frac{(-1)^{\square}-1}{2}}+(-1)^{\square} = \frac{(-1)^{\square}-1+2(-1)^{\square}}{2}
\end{aligned}
$$

Para y piensa dónde quieres llegar, queremos operar lo que tenemos hasta conseguir llegar al segundo miembro de (1), que era

$$\frac{(-1)^{\square}-1}{2}$$

eso te ha de dar una pista para ver qué tipo de operaciones debes realizar. En este caso quiero que aparezca por algún lado ese sumando $(-1)^{\square}-1$, así que vamos a manipular los sumando que aparecen de ese tipo en la expresión a la que hemos llegado.

Sigamos, donde nos habíamos parado... (te lo vuelvo a copiar para que así lo retomes desde el principio y no pierdas el hilo)

$$
\begin{aligned}
(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{\square} &= \underbrace{(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{\square}}+(-1)^{\square} \\
&\overset{ind.}{=} \underbrace{\frac{(-1)^{\square}-1}{2}}+(-1)^{\square} = \frac{(-1)^{\square}-1+2(-1)^{\square}}{2} \\
&= \frac{(-1)^{\square}-1+2(-1)^{\square}(-1)}{2} = \frac{(-1)^{\square}-1\square 2(-1)^{\square}}{2} \\
&= \frac{(-1)^{\square}[1-2]-1}{2} = \frac{(-1)^{\square}(-1)-1}{2} \\
&= \frac{(-1)^{\square}-1}{2} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

- ☼ Concluyendo: Por lo tanto, gracias al método de $\square$ se ha demostrado que la propiedad es cierta para todos los números naturales, ya que es cierta para el $\square$ elemento, y supuesta cierta para $\square$ también es cierta para $\square$. Es decir:

$$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^n = \frac{(-1)^n-1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\square$

☎ OJO: En ocasiones puede haber ejercicios que no se sepan si son ciertos o no, conviene probar por si acaso con varios casos, dos al menos, y si veis que es cierto, ya se demuestra la generalización usando inducción.
Eso sí, si el enunciado dice Demuestra, entonces la propiedad que pidan es cierta. Mientras que si en el enunciado pone Comprueba, no se sabe si es cierta o no. Conviene que asegures que al menos se verifica para los primeros casos. Si encuentras un caso para el que no se cumpla, estupendo, paras ya porque la propiedad será falsa en general. Si ves que para esos casos se cumple, para demostrar que se cumple en general has de aplicar el método de Inducción.

**Ejercicio 2.2** *Comprueba si se verifica que* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2+1}{2}$.

Como en el enunciado no se asegura que la propiedad sea cierta, es bueno comprobar si se verifica o no para, al menos, los primeros casos antes de aplicar el método de inducción.

También puede empezarse directamente con el método de inducción, es decir

- Comprobamos el caso $n = \square$
- Supuesto $\square$ para el caso $\square$, vemos si también es cierto para el caso $\square$

y ver si en vez de llegar a que es cierto, se llega a que es falso. Pero este camino suele ser un poco más largo.

Comprobemos varios casos a ver si eso nos hace pensar que la propiedad es $\square$ o no.

- Para $n = 1$: he de comprobar si $\square \stackrel{?}{=} \frac{\square^2+1}{2}$. ¿Se verifica? $\square$

  Si no se verifica, ya has encontrado un caso para el que no se cumple la propiedad, por lo que ya puedes asegurar que la propiedad es falsa.

  Si se verifica, mira a ver por si acaso un caso más antes de ponerte con inducción, ya que aún no tenemos claro que la propiedad vaya a ser cierta. Puedes probar con cualquiera.

- Para $n = 2$: he de comprobar si $\square + \square \stackrel{?}{=} \frac{\square^2+1}{2}$. ¿Se verifica? $\square$
- Entonces, ¿qué puedes concluir? $\square$
- ¿Hace falta demostrarlo por inducción?,$\square$. A esto se le llama encontrar un contraejemplo.
- ¿Qué concluyes?, que la propiedad es $\square$.

$\square$