Ejercicios resueltos de Matemática Discreta
Grado en INFORMÁTICA
Curso 2017-2018

1. Método de inducción

Ejercicio 1.1 *Comprueba usando inducción si la suma de tres números naturales consecutivos es siempre divisible por* 6.

Normalmente si en un enunciado piden comprobar en vez de demostrar, no está asegurada que la igualdad sea cierta. Hay que verlo. Para ello igualmente se usará inducción, (aunque cuando se cree que algo no es cierto en general, basta encontrar un caso donde no se cumpla y con eso queda demostrado que la propiedad no es cierta. es lo que se llama encontrar un contraejemplo).

En este ejercicio lo que se está pidiendo es comprobar si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n + (n+1) + (n+2) \stackrel{?}{=} 6k, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- Caso $n = 1$: se ha de probar si $1 + 2 + 3 \stackrel{?}{=} \overset{\circ}{6}$, lo que está claro ya que $6 = 6$ ✓.
- Supuesto cierto para el caso n, se demuestra para el caso $n+1$: primero conviene escribir qué se quiere demostrar:

  $$(n+1) + (n+2) + (n+3) \stackrel{?}{=} \overset{\circ}{6}$$

  Para ello se parte de un miembro y se intenta llegar al otro:

  $$(n+1) + (n+2) + (n+3) = \underbrace{n + (n+1) + (n+2)} +3 \stackrel{ind}{=} \underbrace{6k} +3 \neq \overset{\circ}{6}$$

Como no se verifica inducción se tiene que la propiedad es FALSA.

Ejercicio 1.2 *Comprueba usando inducción si el producto de tres números impares consecutivos es siempre divisible por* 6.

En este caso de nuevo se aplicará inducción. Pero recordad que bastaría encontrar un ejemplo que no lo cumpla para poder asegurar que la propiedad es falsa.

Lo que se está pidiendo es:

$$(2n-1)(2n+1)(2n+3) = \overset{\circ}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- Caso $n = 1$: se ha de probar si $1 \cdot 3 \cdot 5 \stackrel{?}{=} \overset{\circ}{6}$, lo que está claro que no es cierto ya que $\nexists k \in \mathbb{N}$ tal que $15 = 6k$.
- Supuesto cierto para el caso n, se demuestra para el caso $n+1$: ya no hace falta porque al no verificarse para el primer caso, ya no se verifica en general.

Por lo tanto, la propiedad es FALSA.

Ejercicio 1.3 *Demuestra usando inducción que:* $(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^n = \dfrac{(-1)^n-1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- <u>Caso $n=1$</u>: se ha de probar si $-1 \stackrel{?}{=} \dfrac{(-1)^1-1}{2} = -1$, ✓.
- <u>Supuesto cierto para el caso n, se demuestra para el caso $n+1$</u>: primero conviene escribir qué se quiere demostrar, evaluando la expresión para $n+1$:

$$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{n+1} \stackrel{?}{=} \frac{(-1)^{n+1}-1}{2}$$

Se parte del primer miembro y se intentará llegar al segundo miembro usando en algún momento la hipótesis de inducción. (Recordad que en ocasiones para demostrar una igualdad o desigualdad, se puede partir de ambos miembros a la vez hasta llegar a una identidad, es decir, algo que es cierto siempre):

$$\begin{aligned}\underbrace{(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^n}+(-1)^{n+1} &\stackrel{ind.}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n-1}{2}}+(-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n-1+2(-1)^{n+1}}{2}\\ &= \frac{(-1)^n-1+2(-1)^n(-1)}{2} = \frac{(-1)^n-1-2(-1)^n}{2}\\ &= \frac{(-1)^n[1-2]-1}{2} = \frac{(-1)^n(-1)-1}{2}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}-1}{2} \checkmark\end{aligned}$$

Por lo tanto, gracias al método de inducción se ha demostrado que la propiedad es cierta para todos los números naturales. Es decir:

$$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^n = \frac{(-1)^n-1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 1.4 *Demuestra que dada la sucesión recurrente:*

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}\\ a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}},\ n\geq 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n \leq 2,\ \forall n \geq 1$$

Este tipo de propiedad es utilizada para demostrar que sucesiones recurrentes están acotadas, y así si además fueran monótonas poder tener asegurada la convergencia (Análisis Matemático). En este caso de nuevo se usa inducción.

- <u>Caso $n=1$</u>: hay que comprobar que $a_1 = \sqrt{2} \stackrel{?}{\leq} 2$, ✓, ya que $\sqrt{2} \approx 1{,}4 \leq 2$.
- <u>Supuesto cierto para el caso n, se demuestra para el caso $n+1$</u>: lo que se ha de ver es que

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \stackrel{?}{\leq} 2$$

Partiendo del primer miembro y usando que $a_n \leq 2$ por hipótesis de inducción, se tiene

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \stackrel{ind.}{\leq} \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \checkmark$$

Como se verifica el caso $n+1$ supuesto cierto el caso n, y se verifica el caso $n=1$, por el axioma de inducción la igualdad es cierta para todos los números naturales:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}\\ a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}},\ n\geq 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n \leq 2,\ \forall n \geq 1$$

1.1. Inducción con algunas curiosidades

Ejercicio 1.5 *Demuestra que* $s_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2} \in \mathbb{N},\ \forall n \geq 1.$

- Caso $n=1$: se ha de probar si $s_1 = \frac{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}{2} \overset{?}{\in} \mathbb{N}$. Lo que es cierto ya que

$$s_1 = \frac{2+\cancel{\sqrt{3}}+2-\cancel{\sqrt{3}}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{N},\ \checkmark$$

- Supuesto cierto para el caso n, se demuestra para el caso $n+1$: se quiere demostrar que

$$s_{n+1} = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1}+(2-\sqrt{3})^{n+1}}{2} \overset{?}{\in} \mathbb{N}$$

Se parte del primer miembro y se intenta llegar al segundo usando que se cree que $s_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2} = p \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \tfrac{(2+\sqrt{3})^{n+1}+(2-\sqrt{3})^{n+1}}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}{2} \\ &= \frac{2(2+\sqrt{3})^n+\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^n+2(2-\sqrt{3})^n-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n}{2} \\ &= 2\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}+\sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2} \\ &\overset{ind.}{=} 2p+\sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Llegados aquí, el segundo sumando, en rojo, debe trabajarse aparte y de nuevo usando inducción, demostrar que también será un número natural. Se pasa a demostrar entonces que $S_n = \sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2} \in \mathbb{N}$:

- Caso $n=1$: $S_1 = \sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}{2} \overset{?}{\in} \mathbb{N}$, lo que es evidente ya que $\sqrt{3}\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = (\sqrt{3})^2 = 3 \in \mathbb{N},\ \checkmark$
- Supuesto cierto para el caso n, se demuestra para el caso $n+1$: se quiere demostrar que

$$S_{n+1} = \sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^{n+1}-(2-\sqrt{3})^{n+1}}{2} \overset{?}{\in} \mathbb{N}$$

Se parte del primer miembro y se intenta llegar al segundo usando que es cierto que $S_n = \sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2} = q \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}{2} \\ &= \sqrt{3}\frac{2(2+\sqrt{3})^n+\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^n-2(2-\sqrt{3})^n+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n}{2} \\ &= \sqrt{3}\left(2\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2}+\sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2}+3\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2} \\ &\overset{ind}{\underset{ind.}{=}} 2q+3p \in \mathbb{N}\ \checkmark \end{aligned} \tag{2}$$

ya que evidentemente la suma de naturales vuelve a ser un número natural.

- Como se verifica el caso $n+1$ supuesto cierto el caso n, y se verifica el caso $n=1$, por el axioma de inducción la igualdad es cierta para todos los números naturales:

$$S_n = \sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2} \in \mathbb{N}$$

Se ha demostrado con esta segunda inducción que el sumando señalado en rojo en la ecuación (1) también es un número natural. Con lo que volviendo entonces a esa igualdad (1) que aún estaba pendiente de demostrar, se tiene

$$s_{n+1} = 2p + \sqrt{3}\frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2} \stackrel{(2)}{=} 2p + q \in \mathbb{N}$$

ya que evidentemente la suma de naturales vuelve a ser un número natural.

Como se verifica el caso $n+1$ supuesto cierto el caso n, y se verifica el caso $n=1$, por el axioma de inducción la igualdad es cierta para todos los números naturales:

$$s_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq 1$$

Ejercicio 1.6 *Demuestra que la* ***sucesión de Fibonacci****, que de forma recurrente viene definida por:*

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 & = 1 \\ a_2 & = 1 \\ a_n & = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ \forall n \geq 1$$

es decir, se verifica una ley para el término general a_n que no es de recurrencia.

Una **sucesión recurrente o iterada** es aquella que para calcular un término se precisa uno o varios de los términos anteriores. En este caso se precisan los dos anteriores. No siempre dada una sucesión iterada se puede obtener un término general para la sucesión, pero en esta ocasión se va a ver que sí.

- Caso $n=1$: hay que comprobar que $a_1 = 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{(1+\sqrt{5})^1 - (1-\sqrt{5})^1}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$ ✓.
- Supuesto cierto para el caso n, se demuestra para el caso $n+1$: se quiere demostrar, que partiendo de que a_n sí que tiene esa expresión (supongo cierto caso n), entonces

$$a_{n+1} \stackrel{?}{=} \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \tag{3}$$

Se parte de un miembro, y usando inducción debe llegarse al otro. Observad que aquí se aplica una **inducción completa**. Hasta ahora, en el proceso de inducción se está demostrando que supuesto cierto para un caso general n se ve que es cierto para el siguiente. Eso se lo podemos aplicar tanto al caso n, como al caso $n-1$, quedando en este caso el enunciado de este apartado así:

Véase que supuesto cierto **hasta** el caso n, es cierto para el caso $n+1$.

En verdad es inducción, un poco más completa ya que usa que es cierto para todos los casos **hasta** el n y se verá que por lo tanto también lo es para el siguiente. Por ello, se aplica que por hipótesis es cierto tanto para a_n como para a_{n-1}, todos los casos que hay hasta el caso n:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \stackrel{ind.comp.}{=} \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} + \frac{2(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^n\sqrt{5}} \\ &= 2\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n + 2(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Una vez llegados aquí conviene tener claro dónde se quiere llegar en el segundo miembro. Observad que el denominador que se ha conseguido ya es el mismo al que se quiere llegar (mirad (3)). Como lo que se quiere es acabar teniendo una resta de potencias elevadas a n es bueno buscarlas aplicando propiedades de potencias y agrupar sacando factor común. Se usará que:

$$a^{n+1}a^{-1} = a^n \quad \text{y} \quad a^{n+1}a^{-2} = a^{n-1}$$

Con lo que:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n + 2(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= 2\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}(1+\sqrt{5})^{-1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}(1-\sqrt{5})^{-1} + 2(1+\sqrt{5})^{n+1}(1+\sqrt{5})^{-2} - 2(1-\sqrt{5})^{n+1}(1-\sqrt{5})^{-2}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= 2\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}[(1+\sqrt{5})^{-1} + 2(1+\sqrt{5})^{-2}] - (1-\sqrt{5})^{n+1}[(1-\sqrt{5})^{-1} - 2(1-\sqrt{5})^{-2}]}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}[\frac{1}{1+\sqrt{5}} + 2\frac{1}{(1+\sqrt{5})^2}] - (1-\sqrt{5})^{n+1}[\frac{1}{1-\sqrt{5}} + 2\frac{1}{(1-\sqrt{5})^2}]}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}[\frac{1+\sqrt{5}+2}{(1+\sqrt{5})^2}] - (1-\sqrt{5})^{n+1}[\frac{1-\sqrt{5}+2}{(1-\sqrt{5})^2}]}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}[\frac{3+\sqrt{5}}{1+5+2\sqrt{5}}] - (1-\sqrt{5})^{n+1}[\frac{3-\sqrt{5}}{1+5-2\sqrt{5}}]}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= 2\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}[\frac{\cancel{(3+\sqrt{5})}}{2\cancel{(3+\sqrt{5})}}] - (1-\sqrt{5})^{n+1}[\frac{\cancel{(3-\sqrt{5})}}{2\cancel{(3-\sqrt{5})}}]}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= 2\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}[\frac{1}{2}] - (1-\sqrt{5})^{n+1}[\frac{1}{2}]}{2^{n+1}\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Como se verifica el caso $n+1$ supuesto cierto el caso n, y se verifica el caso $n=1$, por el axioma de inducción la igualdad es cierta para todos los números naturales:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1 \\
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ \forall n \geq 1$$

2. Aritmética modular

Ejercicio 2.1 *Dada la función de codificación $f_{4,11}(x) = 4x + 11$, calcula la función de decodificación en $\mathbb{Z}_{27}$. Expresa los coeficientes de la función como elementos de $\mathbb{Z}_{27}$.*

Para calcular la función de decodificación hay que hallar la función inversa de $f_{4,11}$. Para ello se aplica la definición de función inversa, es decir:

$$f_{4,11}(f_{4,11}^{-1}(x)) = x \iff 4f_{4,11}^{-1}(x) + 11 = x \iff f_{4,11}^{-1}(x) = \frac{x-11}{4} \iff f_{4,11}^{-1}(x) = \frac{x}{4} - \frac{11}{4}$$

Pero los coeficientes de esta función no están expresados como elementos de $\mathbb{Z}_{27}$, así que habrá que ver a qué clase de equivalencia de $\mathbb{Z}_{27}$ pertenecen tanto $\frac{1}{4}$ como $\frac{-11}{4}$.

- ¿A qué clase de equivalencia de $\mathbb{Z}_{27}$ pertenece $\frac{1}{4}$? O planteado de otra forma, buscad $\frac{1}{4} \cong \square(27)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} = [4]^{-1} \text{ en } \mathbb{Z}_{27} \quad &\Longleftrightarrow [4]^{-1} = [m] \text{ tal que } [4][m] = [1] \text{ en } Z_{27} \Longleftrightarrow [4m] = [1] \text{ en } Z_{27} \\ &\Longleftrightarrow 4m = 27q + 1 \Longleftrightarrow m = \frac{27q+1}{4} \in \mathbb{Z}_{27}\end{aligned}$$

Por lo tanto, hay que ir dando valores a $q \in \mathbb{N}$ hasta conseguir que $m \in \mathbb{Z}_{27}$:

$$q = 0 \quad \Rightarrow m = \tfrac{1}{4} \notin \mathbb{Z}_{27}$$

$$q = 1 \quad \Rightarrow m = \tfrac{28}{4} = 7 \in \mathbb{Z}_{27}$$

Habiendo encontrado ya con esto que $m = [4]^{-1} = [7]$. Por lo tanto, en la expresión de la función inversa, ya se puede expresar el primer coeficiente como un elemento de $\mathbb{Z}_{27}$.

Observad que si por ejemplo, se hubiera dado el valor

$$q = 5 \Rightarrow m = 34 \cong 7(27)$$

es decir, como $m > 27$, ha de calcularse a qué clase de equivalencia de $\mathbb{Z}_{27}$ pertenece y para ello, se realiza la congruencia. Recordad que la clase inversa, cuando existe, es única, por eso acaba saliendo la misma:

$$[4]^{-1} = [7] \text{ en } \mathbb{Z}_{27}$$

Nota: el cálculo de la clase inversa de un elemento, `Matlab` no lo efectúa directamente, pero se podría implementar como una *function* desde el Editor de `Matlab`.

- ¿A qué clase de equivalencia de $\mathbb{Z}_{27}$ pertenece $\frac{-11}{4}$? O planteado de otra forma, buscad $-\frac{11}{4} \cong \square(27)$.

Aquí hay que hacer alguna cuenta más ya que directamente no es el inverso de un elemento de $\mathbb{Z}_{27}$, pero usando las propiedades de aritmética modular, concretamente la del producto que decía

$$[a][b] = [ab] \tag{4}$$

se tiene

$$-\frac{11}{4} = -[11][4]^{-1}$$

Ahora se puede hacer de dos formas:

  - *1ª forma*: Dejar el signo $-$ fuera, ir haciendo las cuentas y luego ya retomar el signo $-$. Es decir:

$$\frac{11}{4} = [11][4]^{-1} \tag{5}$$

como $11 \in \mathbb{Z}_{27}$, sólo falta calcular de nuevo qué clase de equivalencia es $[4]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_{27}$. Pero eso ya se ha hecho y se ha obtenido que

$$[4]^{-1} = [7] \text{ en } \mathbb{Z}_{27} \tag{6}$$

Reemplazando (6) en (5), se obtiene:

$$\frac{11}{4} = [11][4]^{-1} \overset{(6)}{=} [11][7] \overset{(4)}{=} [77] \overset{(*)}{=} [23]$$

donde en $(*)$ se ha usado que $77 \cong 23(27)$ en $\mathbb{Z}_{27}$.

Ojo, sólo falta un detalle y es que en verdad el coeficiente que había que expresar como elemento de $\mathbb{Z}_{27}$ era $\frac{-11}{4}$, pero este último paso ya es sencillo. Trabajando ya con $\frac{-11}{4}$ que se ha expresado como -23, se calcula cuál es el resto de la división de -23 entre 27, es decir, qué resultado se obtiene al hacer la congruencia módulo 27:

$$\begin{array}{rl} -23 & \underline{|27} \\ 4 & -1 \end{array} \iff -23 \cong 4(27)$$

Con lo que,

$$-\frac{11}{4} \in [4] \text{ en } \mathbb{Z}_{27}$$

- $\underline{\textit{2}^{a}\textit{ forma}}$: Ir haciendo las cuentas ya con el signo $-$. Es decir:

$$-\frac{11}{4} = [-11][4]^{-1} \overset{(**)}{\underset{(6)}{=}} [16][7] \overset{(4)}{=} [112] = [4] \text{ en } \mathbb{Z}_{27} \tag{7}$$

donde en $(**)$ se ha usado que

$$\begin{array}{rl} -11 & \underline{|27} \\ 16 & -1 \end{array} \iff -11 \cong 16(27)$$

y se ha obtenido el mismo resultado que hecho de la primera forma, es decir

$$-\frac{11}{4} \in [4] \text{ en } \mathbb{Z}_{27}$$

Nota: Esta congruencia $-\frac{11}{4} \cong \square(27)$ `Matlab` tampoco la hace de golpe (se puede comprobar), ya que de nuevo vuelve a ser un cálculo de clase inversa con alguna operación añadida. Por eso hay que efectuar todos estos pasos aplicando propiedades.

- Ahora ya se puede expresar la función de decodificación obtenida como una función cuyos coeficientes ya están en $\mathbb{Z}_{27}$, quedando:

$$f^{-1}_{4,11}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{11}{4} \overset{\mathbb{Z}_{27}}{\cong} 7x + 4 = f_{7,4}(x)$$

En un ejercicio de decodificación se podría haber trabajado con la función $f_{\frac{1}{4},-\frac{11}{4}}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{11}{4}$, y cuando se fuera aplicando a cada uno de los números a decodificar hacer la operación de pasar cada uno de los resultados a un elemento de $\mathbb{Z}_{27}$. Pero, por comodidad y ahorro de tiempo, es mejor hacerlo desde el principio y expresar ya la función con coeficientes en el conjunto donde se está trabajando, $\mathbb{Z}_{27}$.