Ejercicios resueltos de inducción

Ejercicio 1 *Demuestra que* $n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)$ *es múltiplo de* k, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Resolución: Hay que probarlo por el método de inducción, para cualquier valor de k, para ello:

- Veamos si es cierto para $n = 1$ que en este caso es el primer elemento:

$$1\cdot 2\cdot\ldots(1+k-1) \overset{?}{\in} \mathring{k} \iff 1\cdot 2\cdot\ldots k \overset{?}{\in} \mathring{k}, \checkmark$$

  evidentemente ya que k es uno de los factores.

- Supuesto cierto para n, veamos si es cierto para $n+1$. Primero indicad qué se ha de demostrar:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+1+k-1) \overset{?}{\in} \mathring{k}$$

  Partiendo del primer miembro se intenta llegar al segundo

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+2)\ldots(n+1+k-1) &= (n+1)(n+2)\ldots(n+k)\\
&= (n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)\cdot(n+k)\\
&\overset{reordeno}{=} (n+k)(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)\\
&\overset{distrib.}{=} \underbrace{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}\\
&\quad + k(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)\\
&\overset{ind.}{=} \underbrace{\mathring{k}} + {\color{blue}k}(n+1)(n+2)\cdot\ldots(n+k-1) \in \mathring{k}
\end{aligned}$$

  ya que el segundo sumando en un producto de números naturales siendo el primer factor precisamente k.

Por el axioma de inducción, al ser cierto para el primer elemento y supuesto cierto para un elemento n también lo es para su siguiente $n+1$, entonces debe ser cierto para todos los números naturales. $\square$

Ejercicio 2 *Demuestra que* $n(n+1)$ *es siempre múltiplo de* 2.

Resolución: Es un caso particular del Ejercicio 1, con $k = 2$. Luego ya estaría demostrado al haberlo hecho en general para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Siempre puede hacerse para este caso concreto siguiendo el proceso visto en el Ejercicio 1. $\square$

<u>ATENCIÓN</u>: Os pongo aquí un ejercicio en el que quizás no se ve directamente cómo llegar de un miembro al otro, en ese caso conviene usar la estrategia de o manipular ambos miembros o ver si lo que falta para se verifique son iguales aparte. Esto ocurre en muchas situaciones.

Ejercicio 3 *Demuestra que* $(1^5+2^5+\ldots+n^5)+(1^7+2^7+\ldots+n^7) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Resolución:

- Caso $n = 1$: se ha de probar si $1^5 + 1^7 \stackrel{?}{=} 2\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\right)^4 = 2$, ✓

- Supuesto cierto para el caso n, se demuestra para el caso $n+1$: primero conviene escribir qué se quiere demostrar:

$$(1^5 + 2^5 + \ldots + (n+1)^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + (n+1)^7) \stackrel{?}{=} 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4$$

  Observad que el segundo miembro se puede escribir como:

$$2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4 = \frac{(n+1)^4(n+2)^4}{2^3} \tag{1}$$

  Se parte del primer miembro y se busca llegar al segundo usando la hipótesis de inducción. Es decir,

$$\begin{aligned}
(1^5+2^5 &+ \ldots + (n+1)^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + (n+1)^7) \\
&= (1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 + (n+1)^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7 + (n+1)^7) \\
&\stackrel{reagrupo}{=} (1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (n+1)^5 + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7) + (n+1)^7 \\
&\stackrel{reordeno}{=} \underbrace{(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7)} + (n+1)^5 + (n+1)^7 \\
&\stackrel{ind.}{=} \underbrace{2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4} + (n+1)^5 + (n+1)^7 \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^4(n+1) + (n+1)^4(n+1)^3 \\
&= (n+1)^4\left(2\frac{n^4}{2^4} + n + 1 + (n+1)^3\right) \\
&= \frac{(n+1)^4}{2^3}\left(n^4 + 8n + 8 + 8(n+1)^3\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

  Si no se sabe cómo llegar al segundo miembro, reescrito como en la ecuación (1), no olvidar que se puede ver qué falta para tenerlo y comprobar si esas cosas son iguales. Es decir, véase usando el binomio de Newton o desarrollando esas potencias de binomios, que

$$\begin{aligned}
(n+2)^4 &\stackrel{?}{=} n^4 + 8n + 8 + 8(n+1)^3 \\
&\Updownarrow \\
n^4 + 4n^3 \cdot 2 + 6n^2 \cdot 2^2 + 4n2^3 + 2^4 &\stackrel{?}{=} n^4 + 8n + 8 + 8(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\
&\Updownarrow \\
n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16 &\stackrel{?}{=} n^4 + 8n + 8 + 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8 \\
&\Updownarrow \\
n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16 &\stackrel{?}{=} n^4 + +8n^3 + 24n^2 + 32n + 16 \checkmark
\end{aligned}$$

ya que para que dos polinomios sean iguales deben serlo monomio a monomio. Hecho que aquí ocurre.

Por lo tanto, como $(n+2)^4 = n^4+8n+8+8(n+1)^3$, sustituyendo en la igualdad (2) que estábamos viendo si se verificaba, se tiene:

$$\begin{aligned}(1^5+2^5+\ldots+(n+1)^5) \quad & +(1^7+2^7+\ldots+(n+1)^7) \\ & = \frac{(n+1)^4}{2^3}\left(n^4+8n+8+8(n+1)^3\right) \\ & = \frac{(n+1)^4}{2^3}(n+2)^4 = \frac{(n+1)^4(n+2)^4}{2^3} \\ & \overset{(1)}{=} 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4 \checkmark \end{aligned}$$

Como se verifica el caso $n+1$ supuesto cierto el caso n, y se verifica el caso $n=1$, por el axioma de inducción la igualdad es cierta para todos los números naturales:

$$(1^5+2^5+\ldots n^5)+(1^7+2^7+\ldots n^7) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\square$