

# Inducción Matemática, Ejercicios

Lucía Agud

Departamento de Matemática Aplicada Campus d'Alcoi Universitat Politècnica de València.

# Contenidos

- Resolución del primer Ejercicio
  Resolución del segundo Ejercici



Demuestra usando inducción que:  $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} = a_1\frac{r^n-1}{r-1}$ . (Observar que esta fórmula corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica).

# **E**JERCICIO

Demuestra por inducción que:  $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \ \forall n\geq 2.$ 

Demuestra usando inducción que:  $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^{n}-1}{r-1}$ . (Observar que esta fórmula corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica).

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos

• <u>Caso n = 1</u>: ver si la igualdad se verifica ara este caso. Hay que demostrar que  $a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r-1}{r-1}$ , lo que es evidente ya que 1

 Supuesto cierto hasta, in si es cierto para n+1: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:

$$a_1 + a_1 r + a_r^2 + \dots + a_1 r^n \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Demuestra usando inducción que:  $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^{n}-1}{r-1}$ . (Observar que esta fórmula corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica).

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

• Caso n = 1: ver si la igualdad se verifica para este caso. Hay que demostrar que  $a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r-1}{r-1}$ , lo que es evidente ya que:

$$a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r}{r} = a_1 \checkmark$$

 Supuesto cierto hasis si, versi es cierto para n+1: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:



Demuestra usando inducción que:  $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^{n}-1}{r-1}$ . (Observar que esta fórmula corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica).

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

• <u>Caso n = 1</u>: ver si la igualdad se verifica para este caso. Hay que demostrar que  $a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r-1}{r-1}$ , lo que es evidente ya que:

$$a_1 \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r}{r} = a_1 \checkmark$$

 Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para n+1: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:

$$a_1 + a_1 r + a_r^2 + \dots + a_1 r^n \stackrel{?}{=} a_1 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$



Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{a_{1} + a_{1}r + a_{r}^{2} + \dots + a_{1}r^{n-1}}_{= a_{1}} + a_{1}r^{n} + a_{1}r^{n} + a_{1}r^{n} + a_{1}r^{n} + a_{1}r^{n}$$

$$= a_{1}\frac{r^{n-1} + r^{n}(r-1)}{r-1} = a_{1}\frac{r^{n-1} + r^{n+1} - r^{n}}{r-1} \checkmark$$

$$= a_{1}\frac{r^{n+1} - 1}{r-1} \checkmark$$

$$= a_{1}\frac{r^{n+1} - 1}{r-1} \checkmark$$

$$= a_{1}\frac{r^{n} - 1}{r-1} \checkmark$$

$$\begin{array}{l}
\bar{a}_1 \frac{r^{n-1+r^n(r-1)}}{r-1} = a_1 \frac{r^{n-1}+r^{n+1}-r^{n+1}}{r-1} \checkmark
\end{array}$$

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{a_1 + a_1 r + a_r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}}_{} + a_1 r^n = \underbrace{a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}_{} + a_1 r^n$$

$$= a_1 \frac{r^{n-1}}{r-1} + a_1 r^n$$

$$= a_1 \frac{r^{n-1+r^n}(r-1)}{r-1} = a_1 \frac{r^{n-1+r^n+1-p^n}}{r-1} \checkmark$$

$$= a_1 \frac{r^{n-1+r^n}(r-1)}{r-1} \checkmark$$

Por lo tanto, como se verifica para n=1, y supuesto cierto hasta n también es cierto para n+1 por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$



Demuestra por inducción que:  $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \ \ \forall n\geq 2.$ 

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deba realizarse dos pasos

Caso n = 2: ver si la igualdad se verifica para este caso que aquí es el primero y que se pide que la igualdad se verifique de l

 Supuesto cierto hasta o versi es cierto para n+1: es decir, lo que se quiere demostrar es que supue de cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\stackrel{?}{=}\frac{n+2}{2(n+1)}$$

Demuestra por inducción que:  $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \ \forall n\geq 2.$ 

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

Caso n = 2: ver si la igualdad se verifica para este caso que aquí es el primero ya que se pide que la igualdad se verifique para n ≥ 2. Hay que demostrar que 1 - 1/4 = 3/4, lo que es evidente ya que:

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4} \checkmark$$

 Supuesto cierto hasta de la supuesta es cierto para n + 1: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesta cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente loualdad:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\stackrel{?}{=}\frac{n+2}{2(n+1)}$$

Demuestra por inducción que:  $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \ \forall n\geq 2.$ 

Para demostrar esta igualdad usando inducción, deben realizarse dos pasos:

Caso n = 2: ver si la igualdad se verifica para este caso que aquí es el primero ya que se pide que la igualdad se verifique para n ≥ 2. Hay que demostrar que 1 - 1/4 = 3/4, lo que es evidente ya que:

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4} \checkmark$$

 Supuesto cierto hasta n, ver si es cierto para n+1: es decir, lo que se quiere demostrar es que supuesto cierta la igualdad dada para el caso n, debe verificarse la siguiente igualdad:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\stackrel{?}{=}\frac{n+2}{2(n+1)}$$



Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}_{\text{tip. ind. } \frac{lnp. ind.}{2n}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n}} = \underbrace{\frac{n+1}{2n(n+1)^2}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n(n+1)^2}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n(n+1)^2}} = \underbrace{\frac{n+1}{2n(n+1)^2}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n(n+1)^2}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n(n+1)^2}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n(n+1)^2}}$$
$$= \underbrace{\frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n(n+1)^2}}$$
$$= \underbrace{\frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n(n+1)^2}}_{\text{tip. ind. } \frac{n+1}{2n(n+1)^2}}$$

Por lo tanto, como se verific $\mathfrak{D}$ ara n=2, y supuesto cierto hasta n también es cierto para n+1 por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta  $\forall n \geq 2$ :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \ \forall n \ge 2$$

Se parte del primer miembro de la igualdad y se busca llegar al segundo miembro:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}_{} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \xrightarrow{\text{hip. ind. } n+1 \atop = 0}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{} \\
= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n(n+1)^2} \\
= \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} \\
= \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)}$$

Por lo tanto, como se verifica para n = 2, y supuesto cierto hasta n también es cierto para n+1 por el Axioma de inducción, se concluye que la igualdad es cierta  $\forall n > 2$ :

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ \forall n\geq 2$$

