RESUME

A) SUITES DE FONCTIONS, CONTINUITE ET INTEGRATION

Je vous propose un résumé sur les relations entre les notions de suite, de continuité et de dérivabilité. Les propositions ne sont pas démontrées. Certaines démonstrations sont données en cours ou sur le polycopié que je vous ai envoyé. Pour plus d'efficacité imprimez ce résumé.

Théorème 0.1 (Continuité)
I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

i) $f_n \longrightarrow f$ *CU (converge uniformément)*

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n *est continue en* a

Alors f est continue en a

Théorème 0.2 (généralisation)
$(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose :

i) $f_n \longrightarrow f$ *CU (converge uniformément) dans* $[a,b]$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n *continue dans* $[a,b]$

Alors f est continue dans $[a,b]$

Théorème 0.3 (CU et intégrabilité)
$(f_n)_n$ une suite de fonctions ; $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose :

i) $f_n \longrightarrow f$ *CU (converge uniformément) dans* $[a,b]$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n *est intégrable dans* $[a,b]$ *(ie que* $\int_a^b f(t)dt$ *existe)*

Alors :

a) f *est intégrable dans* $[a,b]$

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

Cas particulier : *le théorème reste vrai si on remplace f_n intégrable parf_n continue dans $[a,b]$*

Théorème 0.4 (corollaire *)
Soit I **un intervalle borné***, $a \in I$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose :*

i) $f_n \longrightarrow f$ *CU (converge uniformément) dans* I

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n *est localement intégrable dans* I

Soit $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$, $x \in I$. *Alors :*

j) f *est localement intégrable dans* I

ii) $F_n \longrightarrow F$ *CU (converge uniformément) où* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *; c'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt = F(x)$$

Théorème 0.5 (théorème de DINI)
Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions vérifiant :

1. *$\forall n$, f_n est continue.*
2. *$(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction* **continue** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
3. *$\forall x \in [a,b]$ la suite réelle $(f_n(x))_n$ est croissante : $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.*
   Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f

Théorème 0.6 (théorème de convergence dominée)
Soit I **un intervalle** *de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions telle que :*

i) *$\forall n \in \mathbb{N}$: f_n continue par morceaux*

ii) *$f_n \longrightarrow f$ CS (converge simplement) et f continue par morceaux dans I*

iii) *$\exists \varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, intégrable sur I et vérifiant $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$*

Alors :

a) *$\forall n \in \mathbb{N}$; f_n est intégrable*

b) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_I f(t)dt$

B) **<u>INTEGRALES DEFINIES DEPENDANT D'UN PARAMETRE</u>**

Théorème 0.7 (continuité)
$f : [a,b] \times I \to \mathbb{K}$ qui à $(t,x) \to f(t,x)$; $I \subset \mathbb{R}$

1. *f continue $\Longrightarrow F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ est continue dans I*
2. *Soit $u, v : E \longrightarrow [a,b]$ 2 fonctions :*
   f, u, v continues $\Longrightarrow F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dt$ est continue dans I

Théorème 0.8 (dérivabilité)
Soit $f : [a,b] \times]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}$ qui à $(t,x) \to f(t,x)$; $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. On suppose :

i) *f continue dans $[a,b] \times]\alpha,\beta[$*

ii) *$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ existe et est continue dans $[a,b] \times]\alpha,\beta[$*

Alors : $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ est dérivable dans $]\alpha,\beta[$ et on a $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$

iii) Si en plus $u, v :]\alpha,\beta[\to [a,b]$ sont 2 fonctions dérivables alors
la fonction : $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dt$ dérivable dans $]\alpha,\beta[$ et on a :

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt + v'(x)f(v(x),x) - u'(x)f(u(x),x)$$

C) **<u>INTEGRALES IMPROPRES DEPENDANT D'UN PARAMETRE</u>**

Théorème 0.9 (continuité)
Soit $f : [a,b[\times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction qui à (t,x) associe $f(t,x)$. On suppose :

i) *f continue*

ii) *$\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ CU (converge uniformément)*

Alors $F : E \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie par* $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ *est continue*

Théorème 0.10 (dérivabilité) *Soit* $f : [a,b[\times]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction. On suppose :*

1. f *continue*
2. $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ *CS (converge simplement) dans* $]\alpha,\beta[$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ *existe et est continue dans* $[a,b[\times]\alpha,\beta[$
4. $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ *CU dans* $]\alpha,\beta[$

   Alors la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ *est dérivable et on a :*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

D) INTEGRALES IMPROPRES DEPENDANT D'UN PARAMETRE ET SUITES

Théorème 0.11

On considère la fonction $f[a,b[\times E \longrightarrow \mathbb{K}$. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite dans* $[a,b[$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$ *et soit* $F_n(x) = \displaystyle\int_a^{x_n} f(t,x)dt$ *un suite définie dans* E. *On*

$$\left(\int_a^b f(t,x)dt \quad CU\right) \Longrightarrow \left(F_n \ \longrightarrow F\ (CU)\right) \text{ où } F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$$

Théorème 0.12 (CU d'Abel)

Soit $h : [a,b[\times I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *et* $g : [a,b[\times I \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose que :*

1. *L'application partielle* $h(.,x) : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *est décroissante dans* $[a,b[$ *pour tout* $x \in E$ *(ie :* $t_1 \leq t_2 \Longrightarrow f(t_1,x) \geq f(t_2,x)\ \forall x \in I$*)*
2. $\lim\limits_{t\to b^-}\left(\sup\limits_{x\in E} h(t,x)\right) = 0$
3. *l'application partielle* $g(.,x) :\longrightarrow \mathbb{R}$ *est localement intégrable dans* $[a,b[$ *pour tout* $x \in E$
4. $\exists M > 0 : \forall u \in [a,b[, \forall x \in E$ *on a :* $\left|\displaystyle\int_a^u g(t,x)dt\right| \leq M$

   Alors l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(t,x)g(t,x)dt$ *est uniformément convergente.*

Théorème 0.13 (Fubini) *Soit* $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)dx\right)dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(t,x)dt\right)dx$$