



PHS4700

Physique pour les applications multimédia

Numéro du groupe : 02

Numéro de l'équipe: 1

Numéro du devoir: 2

Nom: Islam	Prénom: Mohammed Ariful	matricule: 1950221
signature:		
Nom: Bakkouri	Prénom: Ismail	matricule: 1954157
signature:		
Nom: Maliha	Prénom: John	matricule: 1984959
signature:		
Nom: Essai	Prénom: Dawouttes	matricule: 1956802
signature:		

I) Introduction

Le but de ce devoir est de réaliser un programme capable de simuler un tir de coup de pied de coin dans un jeu de soccer. Pour faire cela, nous allons utiliser 3 boules de forme sphérique avec une masse $m = 210 \text{ g}$ et de rayon $R = 3.1 \text{ cm}$. Nous allons écrire une fonction matlab ou octave (On a choisi de travailler avec matlab) capable de calculer la trajectoire de 3 boules de couleurs différentes à partir d'un point initial (point de départ) jusqu'à ce que la boule principale (blanche) s'arrête, en gérant la possibilité de collision des billes entre elles mêmes et le bord de la table. Bien sûr, si la bille blanche touche les deux autres billes, il faut prendre compte qu'un point vient d'être marqué! La fonction prendra en paramètre d'entrée le centre de masse de la boule blanche (x_{yb}), de la boule rouge (x_{yr}), de la boule jaune (x_{yj}) et la vitesse linéaire initiale du centre de masse de la boule blanche (V_{bo}). Quatre simulations seront ensuite faites. Pour les trois premières, on utilisera les conditions initiales données et pour la quatrième, il faut déterminer une combinaison des vitesses linéaires et angulaires qui permettent de marquer un point à partir de la position initiale donnée. Les résultats seront analysés et commentés.

m_B

II) Théorie et équations

i) Forces et accélération

Afin de réaliser les simulations, plusieurs notions théoriques et des équations sont nécessaires. Effectivement, nous avons trois forces qui agissent sur la balle et influencent son mouvement. Voyons ces trois forces en détails.

- Force gravitationnelle.

Nous avons d'abord la force de gravité qui est la force qui est appliquée sur tout objet en raison de sa masse.

La force de gravitation est représentée par $\vec{F}_g = (0; 0; -m_b g)^T$ avec $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

- Force de frottement visqueux.

Ensuite, nous avons la force de frottement visqueux qui est la force qui s'applique sur la balle en raison de son déplacement dans un fluide, ici, il s'agit de l'air. Elle est proportionnelle à la vitesse, l'air et à la masse volumique du liquide, et est opposée à la direction de la vitesse de la balle.

$$\vec{F}_{vis} = -A\rho C_{vis}\vec{v}$$

avec: $A = \pi R_b^2$ est l'aire effective du ballon.

\vec{v} est la vitesse du centre de masse du ballon.

$\rho = 1.2754 \text{ kg/m}^3$ est la masse volumique de l'air.

C_{vis} est le coefficient de traînée visqueuse donné par :

$$C_{vis} = \begin{cases} 0.235 |\vec{v}| & \text{si } Re < 100000 \\ 0.235 |\vec{v}| - 0.125 |\vec{v}| \left(\frac{Re-100000}{35000} \right) & \text{si } 100000 < Re < 135000 \\ 0.110 |\vec{v}| & \text{sinon} \end{cases}$$

avec Re le nombre de Reynolds donné par :

$$Re = \frac{\rho |\vec{v}| R_b}{\mu}$$

où $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ est la viscosité de l'air.

- **Force de Magnus.**

Finalement, la force de Magnus est également appliquée sur la balle. Il s'agit de la force qui agit sur un objet en raison de sa vitesse angulaire. Elle est calculée de la sorte:

$$\vec{F}_M(\vec{v}, \vec{\omega}) = \rho C_M A |\vec{v}|^2 \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}$$

où ρ , A et \vec{v} sont définis ci-dessus, $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire du ballon et C_M est le coefficient de Magnus donné par :

$$C_M = 0.1925 \left(\frac{|\vec{\omega}| R_b}{|\vec{v}|} \right)^{1/4}$$

Nous allons ensuite déterminer la force résultante sur la balle afin de calculer son accélération. Pour ce faire, nous utiliserons la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

La deuxième loi de Newton va prendre la forme suivante en prenant compte toutes les forces :

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= \vec{F}_g + \vec{F}_{vis} + \vec{F}_M = m \vec{a} \\ \Sigma \vec{F} &= (0; 0; -mg)^T - \rho C_{vis} \vec{v} + \rho C_M A |\vec{v}|^2 (\vec{\omega} \times \vec{v} / |\vec{\omega} \times \vec{v}|) = m \vec{a} \end{aligned}$$

et donc l'accélération est définie comme suit:

$$\vec{a} = \frac{(0; 0; -mg)^T - \rho C_{vis} \vec{v} + \rho C_M A |\vec{v}|^2 (\vec{\omega} \times \vec{v} / |\vec{\omega} \times \vec{v}|)}{m}$$

ii) **Approximation de la position et de la vitesse**

Pour calculer numériquement les positions de la balle tout au long de la simulation, nous avons approximé par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Cet algorithme consiste à effectuer les quatre approximations successives tel qu'illustré sur la figure 1 à des intervalle de t très petite. Pour cette simulation, nous avons choisir une valeur de $\Delta t = 0.001s$.

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1}) \\ \vec{k}_2 &= \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2} \vec{k}_1, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}) \\ \vec{k}_3 &= \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2} \vec{k}_2, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}) \\ \vec{k}_4 &= \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \Delta t \vec{k}_3, t_{n-1} + \Delta t) \end{aligned}$$

Figure 1: algorithme de runge-kutta

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{c,x}(t) \\ v_{c,y}(t) \\ v_{c,z}(t) \\ x_c(t) \\ y_c(t) \\ z_c(t) \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_c(t) \\ \vec{r}_c(t) \end{array} \right. \quad \vec{g}(\vec{q}, t) = \begin{pmatrix} a_{c,x}(\vec{q}, t) \\ a_{c,y}(\vec{q}, t) \\ a_{c,z}(\vec{q}, t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_c(t) \\ \vec{v}_c(t) \end{array} \right.$$

Figure 2: Vecteur $q(t)$ et $g(q,t)$ à utiliser avec Runge-Kutta d'ordre 4

$$\vec{q}(t_n) = \vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{6} \left[\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4 \right] + O(\Delta t^5)$$

Figure 2: Approximation du vecteur $q(t_n)$ avec Runge-Kutta d'ordre 4

Le vecteur q contient les vitesses et les positions de la balle. Étant donnée que les conditions initiales sont fournis dans l'énoncé du devoir, nous avons déjà les composantes du vecteur q au temps $t = 0$. Aussi, dans notre cas, l'accélération angulaire est nulle. Le vecteur q est donc représenté à la figure 2. Nous pouvons alors utiliser ces valeurs pour procéder à la première itération de l'algorithme. Pour trouver le vecteur g , il nous faudra calculer composantes de l'accélération aux instants t . Cela correspond à calculer les forces qui agissent sur la balle en utilisant les équations mentionnées ci-haut. Par la suite, on utilise la loi de Newton $F = ma$ pour trouver l'accélération. Il est à noter qu'on ne va pas s'intéresser aux composantes de la vitesse tout de suite, car elles ne sont pas nécessaires pour déterminer les positions. Enfin, à l'aide du vecteur g , on peut calculer les vecteurs k_i pour finalement trouver la nouvelle position de la balle se trouvant dans le vecteur $q(t_n)$. À la fin de l'itération, on ajoute le Δt au temps et le vecteur q contenant les nouvelles coordonnées de la position de la balle seront utilisées comme condition initiale pour la prochaine itération. Ces étapes se répètent jusqu'à ce que la balle entre dans un but, touche le terrain, sorte du terrain ou touche un des montants des buts.

D'ailleurs, vu qu'on suppose que les montants des buts ont une largeur nulle et qu'il est difficile de détecter une collision de manière numérique, nous avons ajouté une incertitude de 1 mm sur la position de la balle. Ainsi, on peut vérifier si la balle touche un des montants des buts selon une intervalle. De plus, on peut supposer que ces approximations sont justes, car la méthode de Runge-Kutta 4 est assez précise pour cette simulation et possède une erreur globale relativement petite.

III) Présentation et analyse des résultats

a) Tirs initiaux

Suite à la réalisation du programme de simulation de trajectoire, nous avons effectué plusieurs tests pour valider l'exactitude de ce dernier. Les trois premières simulations que nous avons faites sont les suivantes.

Tirs	xy_0 (m)	Vb_0 (m/s ²)	Wb_0 (rad/s)
1	[0.2 ; 89.8]	[5.3 ; -21.0 ; 16.5]	[0 ; 0 ; 6.3]
2	[0.2 ; 89.8]	[5.3 ; -21.0 ; 16.5]	[0 ; -5 ; -6.3]
3	[0.2 ; 89.8]	[5.3 ; -21.0 ; 16.5]	[0 ; 0 ; -6.5]

Tableau 1: Les 3 premières simulations effectuées.

Pour ces 3 tirs, nous avons obtenus les résultats suivants :

Tirs	Temps de collision	Position finale	Vitesse finale	coup
1	2.99s	(21.29, 51.01, 0.10) m	(6.77, -6.65, -12.50) m/s	1
2	2.81s	(0.038, 47.95, 2.50) m	(-2.27, -8.93, -11.84) m/s	3
3	2.99s	(0.041, 45.65, 0.11) m	(-2.81, -9.07, -12.50) m/s	1

Tableau 2: Résultats des 3 premières simulations effectuées.

- Tir 1

Pour le tir 1, notre programme a calculé que la valeur de coup vaut 1, ce qui signifie que la balle touche le terrain en premier. Nous pouvons valider cela avec le schéma de trajectoire de la balle pour le tir:

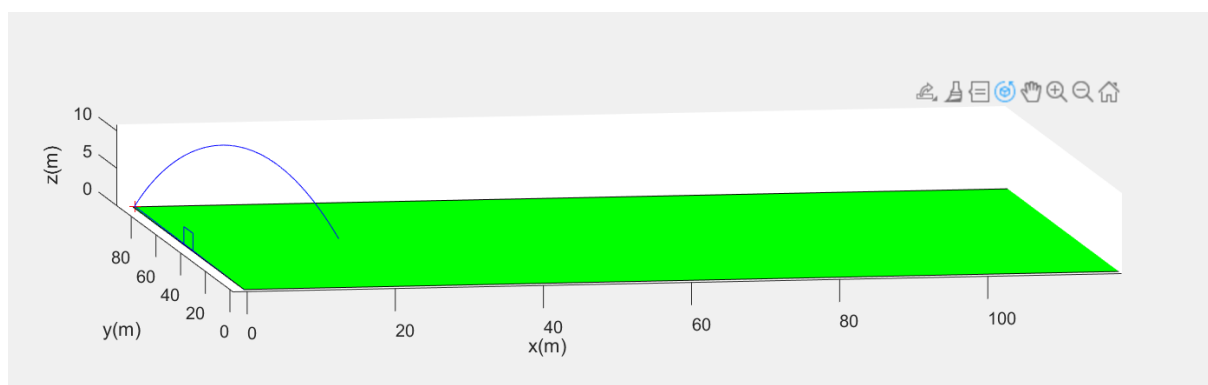


Figure 3: Trajectoire pour le tir 1

Nous remarquons évidemment que la balle ne sort pas du terrain, qu'elle est loin du but et que la trajectoire de la balle se termine quand cette dernière touche croise le plan $z = 0$, cela correspond à la valeur que le programme a sorti. La trajectoire de la balle s'explique par le

fait que la vitesse initiale est positive en x, négative en y et positive en z. Nous observons une parabole de la trajectoire se déplaçant sur l'axe X positif, y négatif, et en Z la vitesse commence positive et commence à décliner en raison de la force gravitationnelle. Nous observons également un peu de courbure en raison de la force de magnus.

- Tir 2 :

Pour le deuxième tir, le programme calcule la valeur de coup = 3, ce qui signifie que la trajectoire de la balle intercepte les montants du but. Cela est observable à l'aide du schéma de la trajectoire:

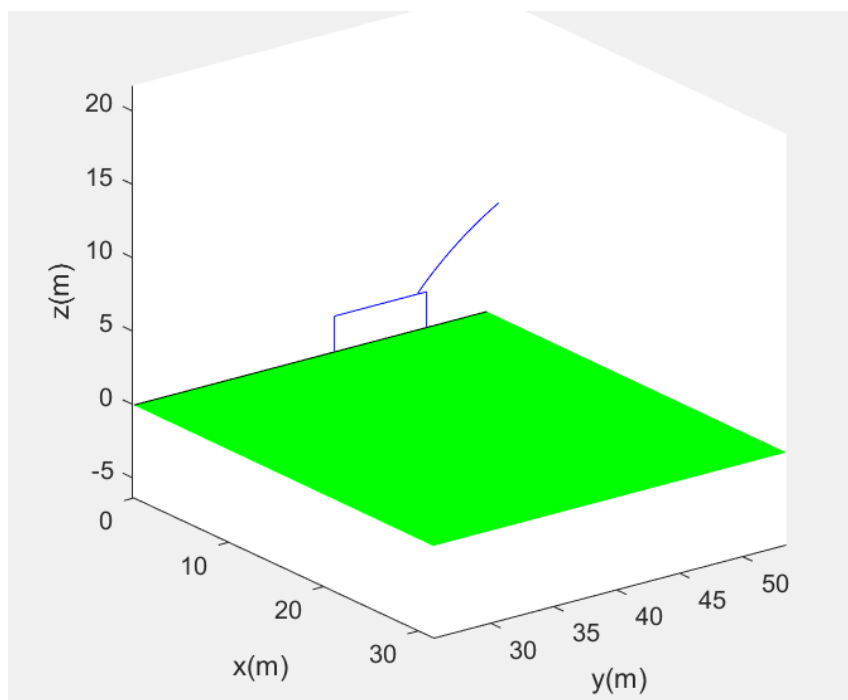
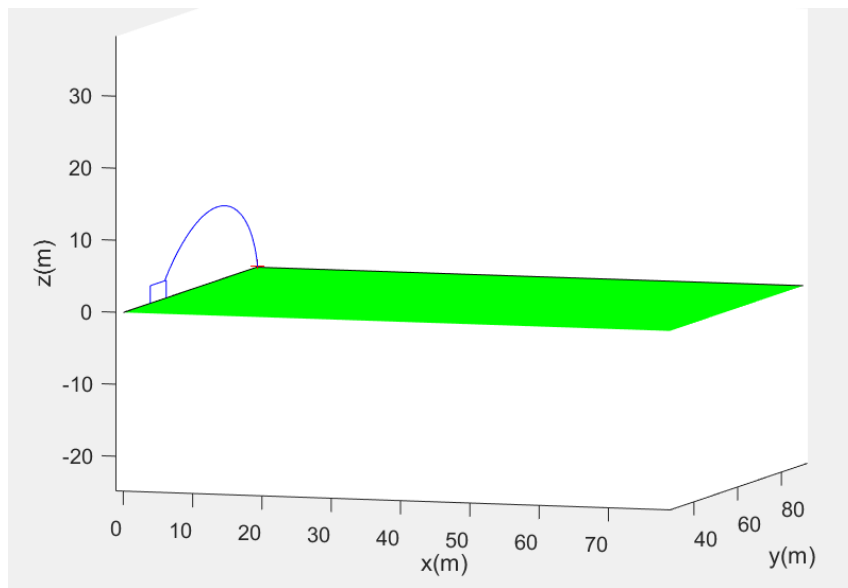


Figure 4 et 5: Trajectoire pour le tir 2.

Nous remarquons effectivement que la trajectoire de la balle semble intercepter celle du montant horizontal du but. La position finale du centre de masse confirme également cela. En effet, la position du centre de masse est égale à (0.033, 47.95, 2.54)m, cela implique que la balle, qui possède un rayon de 0,11 mètre est en intersection avec tout plan Z situé entre $z = 2,39\text{m}$ et $z = 2,61\text{m}$, ainsi que tout plan X allant de $x = -0.077\text{m}$ à $x = 0.143\text{m}$. Le montant du but est situé dans l'intersection des plans $x = 0$ et $z = 2,44$, ce qui correspond à la condition d'intersection.

Tir 3 :

Pour le troisième tir, notre programme a calculé que tout comme pour le tir 1, la balle touchait le sol. En jetant un oeil à la trajectoire de la balle, nous observons ceci :

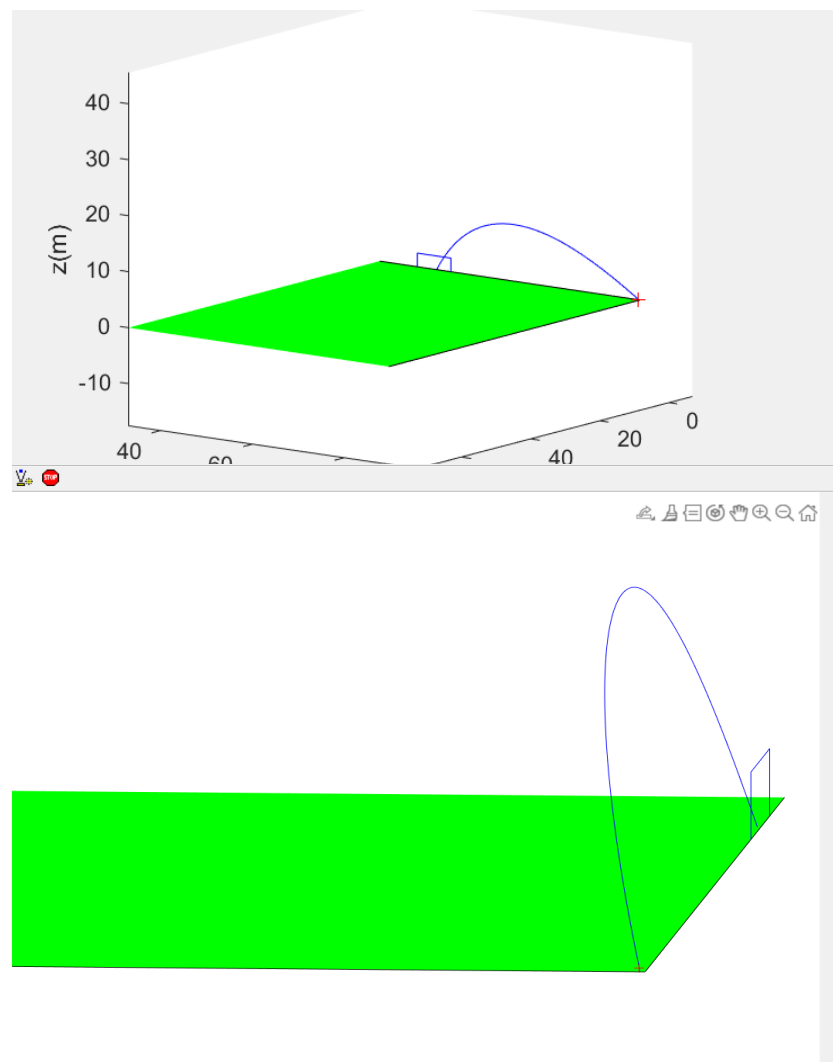


Figure 6 et 7: Trajectoire pour le tir 3

En effectuant un zoom sur la trajectoire, nous observons qu'effectivement, la balle ne rentre pas dans le but, mais qu'elle touche le sol tout juste avant d'y entrer. C'est reflété par la sortie de notre programme, coup = 1. C'est expliqué par le fait que pour ce tir, la position finale du centre de masse de la balle est située en (0.041, 45.65, 0.10). Le centre de masse de la balle en z a atteint une valeur inférieure à son rayon (condition pour que la balle touche le sol), avant que le centre de masse en x ne devienne négatif ou supérieur à 120 (une des condition pour qu'un but soit marqué).

Les 3 tirs demandés dans le même schéma forment donc la figure suivante:

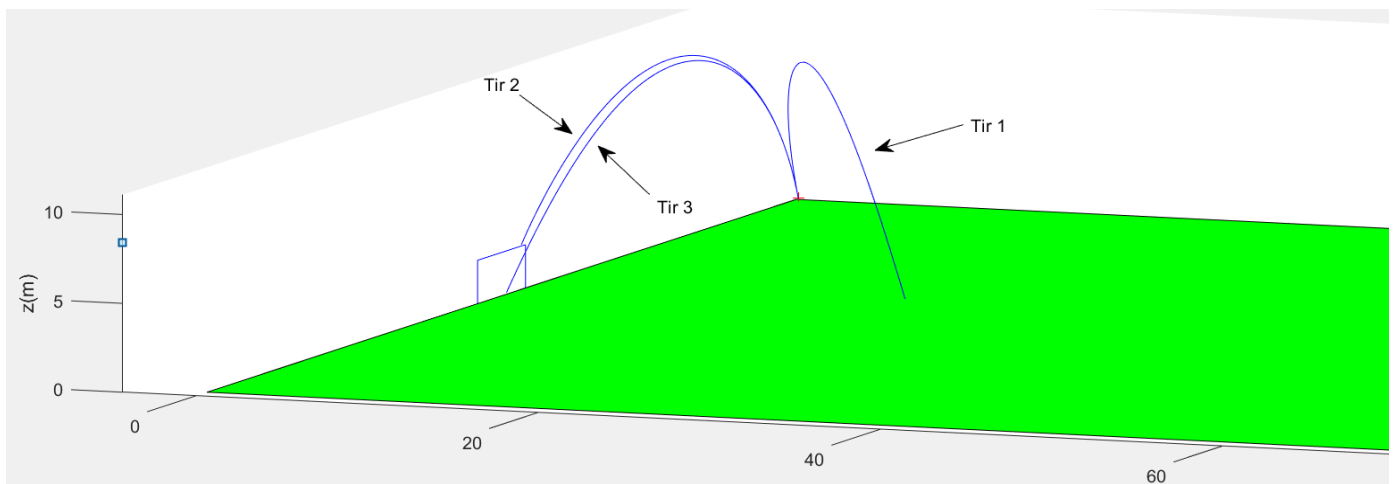


Figure 8: Trajectoire pour les 3 premiers tirs

Tirs supplémentaires

Il est demandé dans le devoir de trouver des valeurs afin que la balle marque un but. Nous avons effectué 2 tirs supplémentaires afin de réaliser cela (un tir pour chacun des deux buts).

Tirs	position initiale	vitesse initiale	vitesse angulaire initiale
4	(0, 1.0, 0.11)	(6.0 , 21.0, 16.5) m/s	(0.00, 0.00, 10.00) rad/s
5	(0, 1.0, 0.11)	(62, 65, 30) m/s	(0, 0, -5) rad/s

Tableau 3: Valeurs initiales des tirs supplémentaires

Tirs	Temps de collision	Position finale	Vitesse finale	coup
4	2.93s	(-0.004, 44.9, 0.81) m	(-3.1, 9.27,-12.13) m/s	0
5	3.771s	(120.0, 43.5, 0.87) m	(16.73, -4.03,-15.43) m/s	0

Tableau 4: Valeurs finales des tirs supplémentaires

Pour le tir 4 nous avons légèrement changé les valeurs du tir 3. Il est demandé que la position initiale du tir 4 soit au coin opposé à celui du tir 3. Nous avons donc inversé la vitesse en y et augmenté légèrement l'accélération angulaire afin que la balle puisse avoir plus de hauteur et donc d'entrer dans le but. Cela a en effet bien fonctionné, nous avons obtenus la trajectoire suivante :

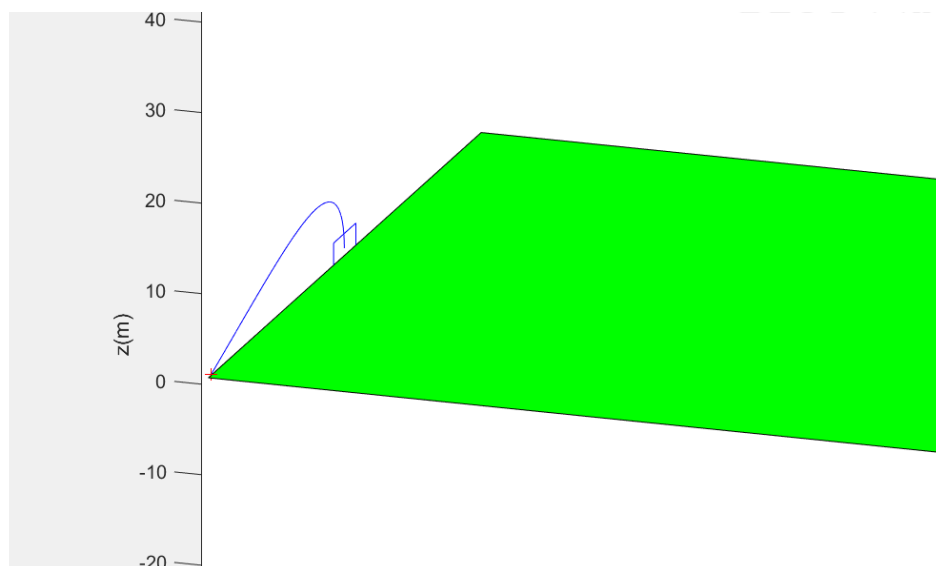


Figure 9: Trajectoire pour le tir 4

Pour le 5, nous avons tenté de marquer le but qui est plus éloigné. Cela explique la grande vitesse initiale qu'on a mise. Voici le résultat de la simulation:

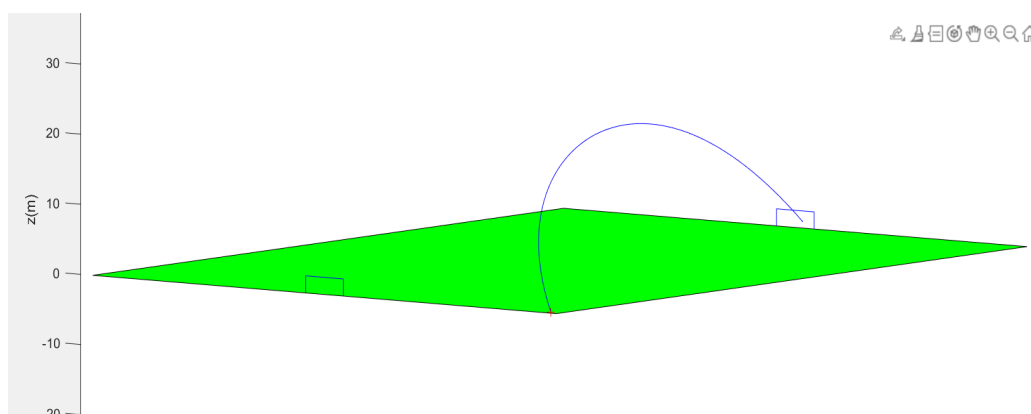


Figure 10: Trajectoire pour le tir 5

IV) Conclusion

Pour conclure, nous avons eu à appliquer des notions de dynamique des solides dans le but de calculer la position du centre de masse, la vitesse linéaire du centre de masse et la vitesse angulaire du ballon. De plus, on a été amené à calculer les différentes forces qui sont appliquées sur le ballon à différents moments et d'évaluer les conséquences de ces forces sur la position finale du ballon. Nous avons calculé la force gravitationnelle, la force de frottement visqueux, la force de magnus ainsi que l'accélération. Ensuite, les équations de la cinématique nous permettent de calculer la position ainsi que la vitesse du ballon à différents moments dans le temps. Ceci nous a permis de simuler le comportement du ballon et les résultats de la simulation nous permettent de savoir si le ballon est rentré dans le but, sorti du terrain, a touché un des montants des buts ou si le ballon a atterri sur le terrain. Nous avons rencontré quelques problèmes lors de la réalisation de ce lab. Premièrement, avec la mi-session en cours, chacun des membres avait des disponibilités différentes ce qui a compliqué la planification et la répartition des tâches au sein des membres de l'équipe. Pour remédier à cette situation, nous avons trouvé des moments où nous avions des plages horaires libres pour travailler dessus. Une autre difficulté fut l'utilisation de matlab puisqu'il fallait se déplacer à l'école pour pouvoir utiliser les ordinateurs de Poly qui contiennent matlab. Finalement, nous avons eu de la difficulté à implémenter l'algorithme de Runge kutta. Chacun a compris ce dernier de façon légèrement différente et a proposé une implémentation différente. Nous avons décidé de réviser l'algo en équipe et de l'implanter de façon à ce que cela convient à tous les membres.