POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

PHS4700
Physique pour les applications multimédia

Numéro du groupe : 02

Numéro de l'équipe: 1

Numéro du devoir: 1

Nom: Islam signature:	Prénom: Mohammed Ariful	matricule: 1950221
Nom: Bakkouri signature:	Prénom: Ismail	matricule: 1954157
Nom: Maliha signature:	Prénom: John	matricule: 1984959
Nom: Esse signature:	Prénom: Dawut	matricule: 1956802

I) Introduction

Le but de ce devoir est de réaliser un programme capable de simuler le comportement d'un missile représenté par un cône, un cylindre et quatres parallélépipèdes. Nous allons devoir écrire une fonction Matlab ou Octave capable de calculer le centre de masse (*pcm*), le moment d'inertie (*MI*) et l'accélération angulaire (*aa*) du missile, en fonction de la position de la base (*pos*), de l'angle de rotation autour de l'axe x (*ar*), du vecteur vitesse angulaire (*va*) et de la force (*Force*), qui sont les paramètres initiaux donnés à la fonction de simulation. Deux simulations seront ensuite faites, à la première, les paramètres sont tous nuls, sauf la force de propulsion, et à la seconde, le missile a une position initiale, une rotation et une vitesse angulaire à considérer, les résultats seront analysés et commentés.

II) Théorie et équations

a) Le centre de masse.

Pour calculer le centre de masse du missile. Il faut calculer le centre de masse de chacune des parties individuelles qui composent le missile à savoir le cylindre, le cône et les parallélépipèdes.

Étant donné que le système d'axe lié au missile a comme origine le centre de la base inférieure du cylindre, le calcul du centre de masse se simplifie. En effet, pour le cylindre, on peut déduire son centre de masse en x et en y à l'aide de la symétrie. Pour le centre de masse en z du cylindre, on peut le calculer à la moitié de sa longueur. On a donc

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 0 \qquad z_{cm} = \frac{L_{cyl}}{2}$$

On peut procéder de la même manière pour déterminer les coordonnées de centre de masse du cône. Cependant, le point du centre de masse en z serait au quart de sa hauteur. Il ne faut également pas oublié que le cône est surmontée au cylindre, donc il faudra ajouter la longueur du cylindre au centre de masse en z du cône. Ainsi, on se retrouve avec les valeurs suivantes:

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 0 \qquad z_{cm} = L_{cyl} + \frac{h}{4}$$

Pour les parallélépipèdes, la coordonnée en z de la centre de masse se trouve à la moitié de sa hauteur. Pour les coordonnée en x et en y, ils seront égale à 0 ou à la moitiée de la largeur du parallélépipèdes dépendant de leur position sur l'axe. Encore une fois, il ne faut pas oublier d'ajouter le rayon, car les parallélépipèdes ne sont pas centrés à l'origine.

$$x_{cm} = \pm\ (\frac{l}{2} + r) \text{ ou } x_{cm} = 0$$

$$y_{cm} = \pm\ (\frac{l}{2} + r) \text{ ou } y_{cm} = 0$$

$$z_{cm} = \frac{h}{2}$$

Nous allons également avoir besoin des masses de chaque partie du missile. À l'aide de la masse volumique donnée pour le cylindre et le cône ainsi que le volume de chacun, on peut calculer leur masse. Quant à la masse des parallélépipèdes, elle nous a été fournie dans l'énoncé du laboratoire.

$$V_{cyl} = \pi r^2 h \qquad V_{cône} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$m = \rho_c V$$

Nous pourrons ainsi calculer le centre de masse du missile quand il n'y a aucune rotation ou translation à l'aide de la formule suivante:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_{c,n}$$

Figure 1: Formule pour la centre de masse du missile

Nous pouvons par la suite calculer le centre du missile lorsqu'il y'a translation et rotation. Dans l'énoncé il est précisé que la rotation s'applique seulement sur l'axe OX, donc il faudra prendre la matrice de rotation pour l'axe X :

$$\boldsymbol{R}_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

où θx représente l'angle (*ar*).

Figure 2: Matrice de rotation par rapport à l'axe des x

Le centre de masse est un point. Donc, pour obtenir la position du centre de masse par rapport à un vecteur position différent de l'origine, il suffira d'additionner la valeur obtenue du centre de masse obtenue après rotation au vecteur position (*pos*).

La formule pour finale du centre de masse s'écrit donc comme suit :

$$\vec{pcm} = \vec{pos} + (R_x(ar) * \vec{r}_c)$$

où:

$\vec{pcm}$ représente le centre de masse après translation et rotation;

$\vec{pos}$ représente la position initiale du missile

$\vec{r}_c$ représente le centre de masse avant rotation et translation (centrée à l'origine des axes);

$R_x(ar)$ représente la matrice de rotation par rapport à l'axe des x et appliquée à l'angle ar.

b) Le moment d'inertie

Pour calculer le moment d'inertie du missile, il faut premièrement calculer le moment d'inertie de chaque composant du missile individuellement par rapport à leur centre de masse.

Nous utiliserons les formules suivantes pour obtenir notre matrice d'inertie. (Les composantes non mentionnées sont nulles).

corps (cylindre):

$$I_{c,zz} = \frac{m}{2} r^2$$

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m}{4} r^2 + \frac{m}{12} l^2$$

Figure 3: Formules du moment d'inertie d'un cylindre

ailerons (parallélépipèdes) :

$$I_{c,xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_{c,yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$I_{c,zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

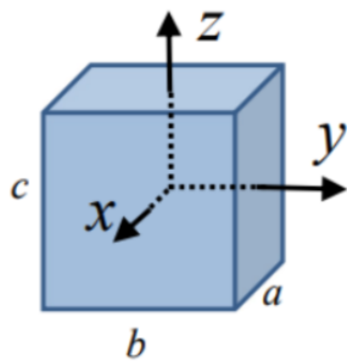

Figure 4: Formules du moment d'inertie d'un parallélépipède

tête (cône) :

$$\boldsymbol{I} = m \begin{pmatrix} \frac{12r^2 + 3h^2}{80} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12r^2 + 3h^2}{80} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3r^2}{10} \end{pmatrix}$$

Figure 5: Formules du moment d'inertie d'un cône

Ces matrices donnent le moment d’inertie par rapport au centre de masse de l’objet. Pour obtenir l’inertie par rapport au centre de masse du missile, il faut appliquer la formule suivante:

$$\boldsymbol{I}_d = \boldsymbol{I}_c + m\begin{pmatrix} d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2 & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2 & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_c + m\boldsymbol{T}(\vec{d}_c)$$

$$\text{avec } \vec{d}_c = (d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z}) = \vec{d} - \vec{r}_c$$

Figure 6: Formule du moment d’inertie par rapport au point $\vec{d}$

où d_c représente la différence entre le centre de masse du missile et le centre de masse du composant, et I_c le moment d’inertie du composant par rapport à son centre de masse.

Une fois le moment d’inertie par rapport au centre de missile de chaque composante trouvé, il suffira de tous les additionner pour obtenir le moment d’inertie du missile.

$$\boldsymbol{I}_C = \sum_i \boldsymbol{I}_{i,c}^{RT} ,$$

Figure 7: Formule du moment d’inertie du missile

Et finalement, appliquer une matrice de rotation sur la matrice de rotation. Nous avons choisi d’appliquer la rotation a la toute fin pour avoir moins de calcul, mais le résultat est le même. Dans notre exemple, nous utiliserons la formule suivante :

$$\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{R}^{2\leftarrow1}\boldsymbol{I}^1(\boldsymbol{R}^{2\leftarrow1})^T$$

Figure 8: Formule du moment d’inertie après rotation

où

I^2 est la matrice d'inertie du missile après translation;

$R^{2\leftarrow 1}$est la matrice de rotation selon l'axe des x (donnée à la section 1);

I^1 est la matrice d'inertie du missile avant la rotation;

Nous aurons ainsi la matrice du moment d'inertie du missile par rapport au référentiel du laboratoire représentée par la valeure de I^2.

c) Accélération angulaire

Pour calculer l'accélération angulaire du missile, nous avons besoins de 4 composantes:

$$\boxed{\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \underbrace{(\boldsymbol{I}(t))^{-1}}_{\mathbf{a}}\Big(\underbrace{\vec{\tau}(t)}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\vec{L}(t)}_{\mathbf{c}} \times \underbrace{\vec{\omega}(t)}_{\mathbf{d}}\Big)}$$

Figure 9: Formule de l'accélération angulaire

a) Le moment d'inertie du missile;
b) Le moment de force appliqué sur le missile;
c) Le moment cinétique du missile;
d) La vitesse angulaire du missile.

Le moment d'inertie à été calculé à l'étape précédente.

Le moment de force est un produit vectoriel qui ce calcul comme comme suit :

$$\vec{\tau}_{j,i}(t) = \big(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\big) \times \vec{F}(t)$$

Figure 10: Formule du moment de force

où

r_j est l'endroit où est appliquée la force (base du missile);

r_i est le centre de masse du missile;

$F(t)$ est la force appliquée sur le missile.

Le moment cinétique L_i se calcul comme suit :

$$L_{i,x} = I_{i,xx}\,\omega_x + I_{i,xy}\,\omega_y + I_{i,xz}\,\omega_z$$
$$L_{i,y} = I_{i,yx}\,\omega_x + I_{i,yy}\,\omega_y + I_{i,yz}\,\omega_z$$
$$L_{i,z} = I_{i,zx}\,\omega_x + I_{i,zy}\,\omega_y + I_{i,zz}\,\omega_z$$

Figure 11: Formule du moment cinétique

Ou I est la matrice d'inertie du missile et ω est la vitesse angulaire.

La vitesse angulaire quant à elle, est donnée dans l'énoncé.

Nous avons donc tous les composants nécessaires pour calculer l'accélération angulaire du missile.

II) Présentation et analyse des résultats

Pour le premier cas, le missile est au sol et le système d'axe du missile $(oxyz)$ coïncide avec le systèmes d'axes du laboratoire $(OXYZ)$. Autrement dit, le centre de la base du inférieur du cylindre se trouve à l'origine. Dans cette première situation, la vitesse angulaire est nulle et le missile ne subit aucune rotation. Alors, on trouve les valeurs suivantes pour la position du centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire

```
Resultats missile verticale
  Centre de masse = (    0.00000     0.00000     5.40304 )
  Moment inertie  =
          3595662                0                0 \\
                0          3595662                0 \\
                0                0           401853 \\
  acc angulaire   = (    0.00000     0.00000     0.00000 )
```

Figure 11: Résultats pour le cas #1

Pour le deuxième cas, le missile n'est pas situé à l'origine, la position de sa base est donnée par un vecteur position de coordonnées (0, -20, 300), et possède une rotation de 0,5 radians autour de l'axe X, de plus, le missile est soumis à une force de $5 * 10^6 N$ avec des angles θ = 0,10 radian et φ = 1,40 radians et à une vitesse angulaire de composantes (0.05, 0, 0.01) radian/s.

```
Resultats missile incline
  Centre de masse = (    0.00000   -22.59036   304.74162 )
  Moment inertie  =
          3595662                0                0 \\
                0          2861568          1343749 \\
                0          1343749          1135946 \\
  acc angulaire   = (    4.23274    -0.11201    -0.06097 )
```

Figure 12: Résultats pour le cas #2

<u>Centre de masse</u>

Dans la première situation, on s'attendait à une valeur non nulle pour la coordonnée en z du centre de masse. Les résultats confirment effectivement celà. On constate que le centre de masse en x et en y pour le système seront nul et le centre de masse en z se trouvera à environ la moitié de l'hauteur du missile. Dans la deuxième situation, puisque le missile a subi une translation et une rotation, le centre de masse sera différent. Il n'y aucune translation en x et le missile a subit une rotation autour de l'axe OX, donc le missile garde sa symétrie par rapport à l'axe OX. Donc, le centre de masse en x demeure 0. Pour ce qui est des coordonnées en x et en y de la centre de masse, on constate que le centre de masse c'est déplacée un peu sur l'axe OX. Cela est dû au fait qu'une plus grande partie de la masse se trouve sur l'axe OY en raison de la rotation.

<u>Moment d'inertie</u>

Pour le moment d'inertie du cas 1, nous remarquons qu'il s'agit d'une matrice symétrique, car le missile est une figure symétrique par rapport à tous ses axes et est uniforme. De plus, en raison de la symétrie, on peut voir que le moment d'inertie est une matrice diagonale. Donc, puisque l'axe oz passe par le centre du missile, il est beaucoup plus facile d'appliquer une rotation autour de cet axe plutôt que les axes x et y. Cela explique donc la raison pourquoi le moment d'inertie en x et en y est beaucoup plus élevé que le moment d'inertie par rapport à l'axe z.

Pour le moment d'inertie du cas 2, on observe cette fois que le moment a légèrement changé suite à la rotation par rapport à l'axe X. Le missile n'est plus symétrique, ce qui a induit un moment d'inertie selon le plan YZ qui est visible dans la matrice d'inertie. On remarque également que contrairement au cas 1 la valeur du moment d'inertie en Y n'est plus égale à celle en X, car le missile n'est plus symétrique par rapport à l'axe Y du référentiel laboratoire.

Accélération angulaire

Dans le cas #1, on constate que l'accélération angulaire est nulle. Ceci est toute à fait normale, car le missile est initialement immobile et la force de poussée $\vec{F}$ est appliqué sous le centre de masse. Donc, le missile n'aura pas tendance à tourner dans aucune direction. Dans le cas #2, on constate que la composante en x de l'accélération angulaire est assez prononcée. Encore fois, on peut expliquer ça principalement à l'aide de force de poussée. En raison des angles de celui-ci, on s'attend à voir que le missile développera une rotation autour de l'axe x.

IV) Conclusion

Pour conclure, nous avons eu à appliquer des notions de dynamique afin de calculer la position du centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire du missile et ainsi de simuler son comportement suivant différents paramètres à l'aide d'un programme. Nous avons rencontré quelques problèmes lors de la réalisation de ce lab. Premièrement, aucun membre de notre équipe n'était à l'aise avec matlab, nous avons donc dû nous familiariser avec le langage avant de commencer à discuter de la façon d'aborder le problème. Ensuite, nous avons eu quelques soucis au moment de vérifier la légitimité de nos résultats, en effet, les chiffres donnés par matlab peuvent difficilement être compris, pour vérifier si les donnés par la simulation étaient bonnes, il nous a fallu effectuer certains des calculs à la main pour nous en assurer. Finalement, nous avons eu de la difficulté à organiser des rencontres de travail car pour utiliser matlab, ils nous a fallu passer par un ordinateur de Polytechnique qui possède la licence.