Réseaux de Manhattan dans un polygone rectilinéaire simple

Encadrants : Victor Chepoi et Yann Vaxès

Laboratoire : Laboratoire d'Informatique et Systèmes (LIS)

Étant donnés un ensemble T de points du plan, appelés terminaux, un *réseau de Manhattan* sur T est un réseau N composé d'arêtes qui sont des segments horizontaux et verticaux tel que chaque paire $p,q \in T$ de terminaux est relié dans N par un plus court chemin dans le plan muni de la métrique ℓ_1, c'est à dire un chemin dont la longueur est égale à la somme $|x_p - x_q| + |y_p - y_q|$ des différences des abscisses et des ordonnées des points p et q. Un *réseau de Manhattan minimum* est un réseau de Manhattan dont la somme des longueurs des arêtes est minimum.

Le problème de trouver un réseau de Manhattan minimum est NP-difficile [4] (cela signifie qu'il est au moins aussi difficile qu'une grande classe de problèmes pour lesquels aucun algorithme polynomial exact n'est connu). Il a été formulé en 1999 par Gudmundsson, Levcopoulos et Narasimhan [7] qui ont proposé deux algorithmes d'approximation avec des facteurs 4 et 8 et ont conjecturé l'existence d'un algorithme d'approximation avec un facteur 2, i.e. un algorithme qui fournit en temps polynomial une solution dont le coût est au plus deux fois celui d'une solution optimale. Un tel algorithme a été obtenu en 2005 en utilisant d'abord une méthode d'arrondis à partir d'une solution optimale fractionnaire [3] puis grâce à un algorithme primal-dual [8]. Par la suite, plusieurs variantes de ce problème ont été étudiées. L'une d'elle consiste à généraliser le problème au plan normé avec des boules polygonales. (Par exemple, dans le cas de la métrique ℓ_1, le polygone est un lozenge.) Pour cette version, un algorithme facteur 2.5 a été obtenu dans [2]. D'autres variantes du problème restent largement ouverts: l'existence d'un algorithme d'approximation facteur constant pour le problème du réseau de Manhattan minimum dans $(\mathbb{R}^3, \ell_1)$, le problème du réseau de Manhattan minimum F-restreint dans $(\mathbb{R}^2, \ell_1)$, ou encore le problème du réseau de Manhattan minimum dans un polygone rectilinéaire simple avec la métrique ℓ_1 (pour les résultats existants sur les deux prémiers versions, voir [5, 6]).

Un des objectifs du stage sera de se familiariser avec le problème du réseau de Manhattan et ces variantes, en particulier essayer de comprendre l'algorithme décrit dans [2] et de l'implémenter le plus efficacement possible. Un autre objectif sera d'étendre les notions de coupes, bandes et éscaliers aux polygones rectilinéaires simples et de les utiliser pour essayer de developer un algorithme d'approximation pour le problème du réseau de Manhattan dans des polygones rectilinéaire simples (i.e., polygones sans trous dont les côtes sont axe-paralleles).

References

[1] M. Benkert, A. Wolff, F. Widmann, and T. Shirabe, The minimum Manhattan network problem: approximations and exact solutions, Comput. Geom. 35 (2006) 188–208.

[2] N. Catusse, V. Chepoi, K. Nouioua, and Y. Vaxès, Minimum Manhattan network problem in normed planes with polygonal balls: a factor 2.5 approximation algorithm, Algorithmica 63 (2012) 551–567.

[3] V. Chepoi, K. Nouioua, and Y. Vaxès, A rounding algorithm for approximating minimum Manhattan networks, Theor. Comput. Sci. 390 (2008), 56–69 and APPROX-RANDOM 2005, pp. 40–51.

[4] F.Y.L. Chin, Z. Guo, and H. Sun, Minimum Manhattan network is NP-complete, Symposium on Computational Geometry, 2009, pp. 393–402.

[5] A. Das, K. Fleszar, S. G. Kobourov, J. Spoerhase, S. Veeramoni, A. Wolff, Approximating the generalized minimum Manhattan network problem, Algorithmica 80 (2018), 1170-1190.

[6] A. Das, E. R. Gansner, M. Kaufmann, S. G. Kobourov, J. Spoerhase, A. Wolff, Approximating minimum Manhattan networks in higher dimensions, Algorithmica 71 (2015), 36–52.

[7] J. Gudmundsson, C. Levcopoulos, and G. Narasimhan, Approximating a minimum Manhattan network, Nordic J. Computing 8 (2001) 219–232 and APPROX-RANDOM 1999, pp. 28–37.

[8] K. Nouioua, Enveloppes de Pareto et Réseaux de Manhattan: caractérisations et algorithmes, Thèse de Doctorat en Informatique, Université de la Méditerranée, 2005.