1 – Synthèse des filtres actifs en cascade.

1.1 – Principe de mise en cascade.

Selon l'ordre *n* du filtre calculé, il est possible d'associer en cascade un certain nombre de cellules élémentaires d'ordre 2 (cellules biquadratiques) et d'ordre 1.

L'ordre est pair ou impair. Pour un ordre impair, la dernière cellule est d'ordre 1 (Fig. 1.1).

Dans les tableaux présentés pour chaque type de filtre selon la fonction d'approximation (BUTTERWORTH, TCHEBYCHEFF, LEGENDRE, BESSEL et CAUER), la colonne « cellule » précise la position de la cellule en partant de la source pour aller vers la charge.

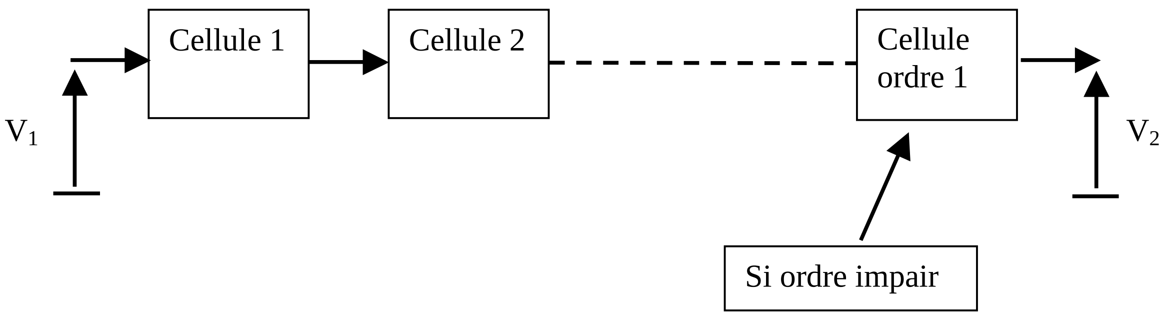


Fig. 1.1 – Principe de mise en cascade.

1.2 – Notations.

Les notations utilisées correspondent aux définitions suivantes :

Fonction de transfert : $F(p) = \frac{V_2\,(p)}{V_1\,(p)}$, Fonction de transmission : $F^{-1}(p) = \frac{V_1\,(p)}{V_2\,(p)}$.

ω_0 : pulsation de coupure,

ω_m : pulsation pour la surtension,

ω_m' : pulsation pour le maximum du temps de groupe,

ω_∞ : pulsation pour un zéro de transmission
(amplitude du module du gain = zéro $\Rightarrow$ amplitude de l'atténuation = ∞),

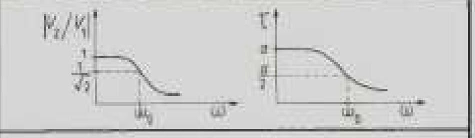
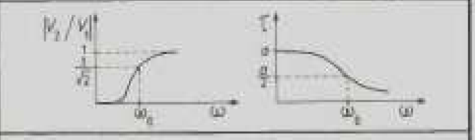
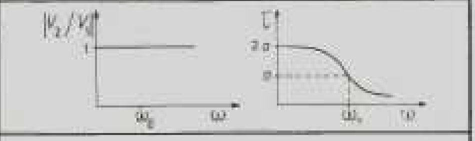
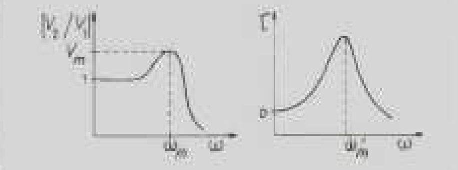
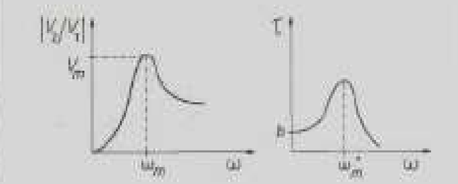
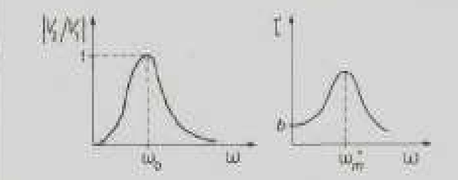
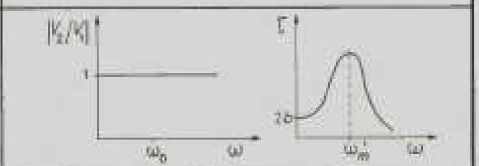
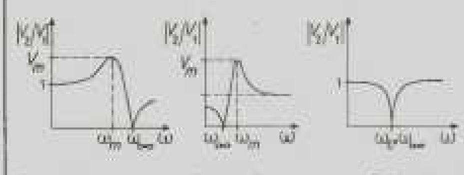
V_m : amplitude du module du gain pour la pulsation de surtension.

Q : coefficient de surtension,

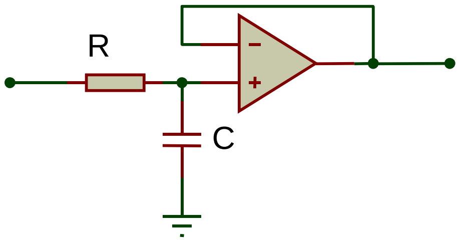
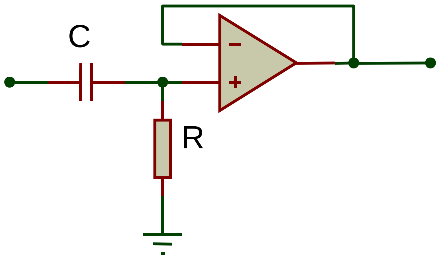
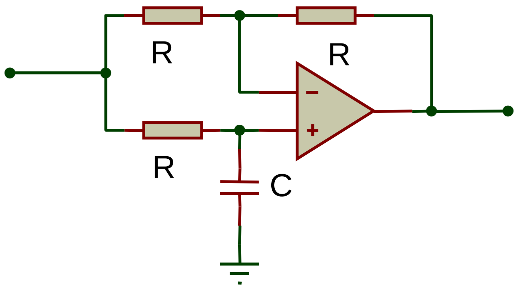
τ : temps de propagation de groupe.

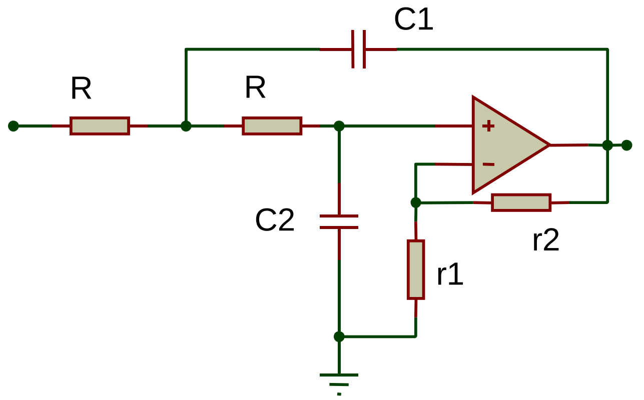
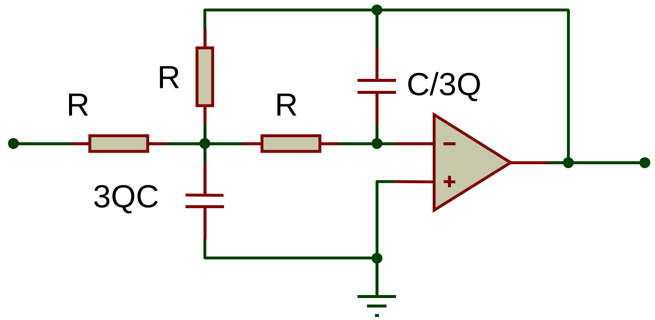
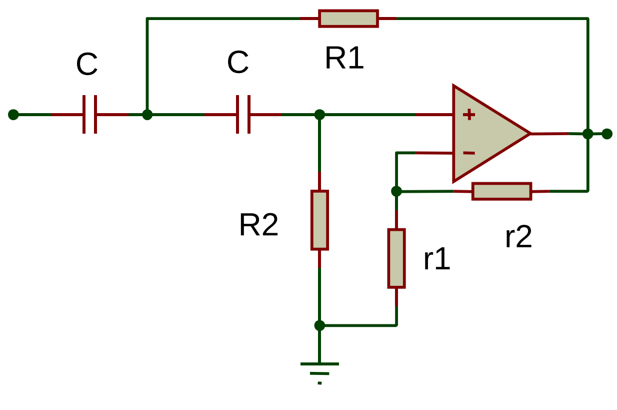
1.3 – Cellules.

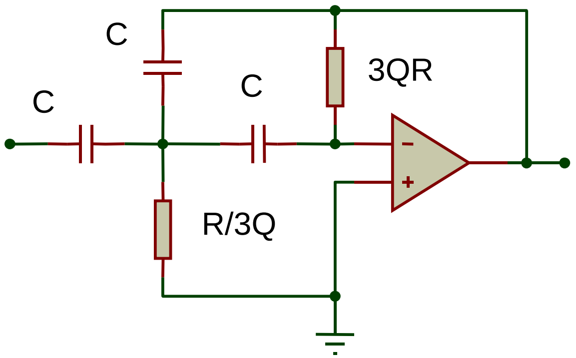
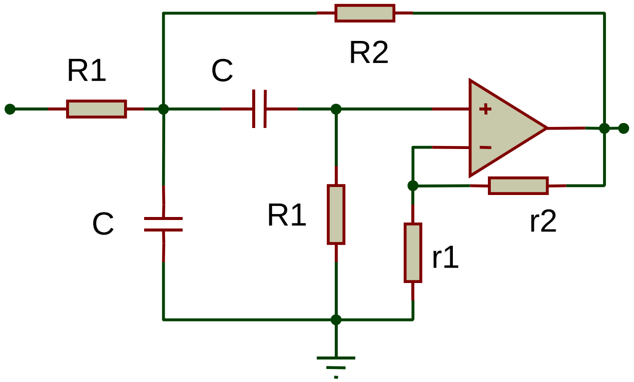
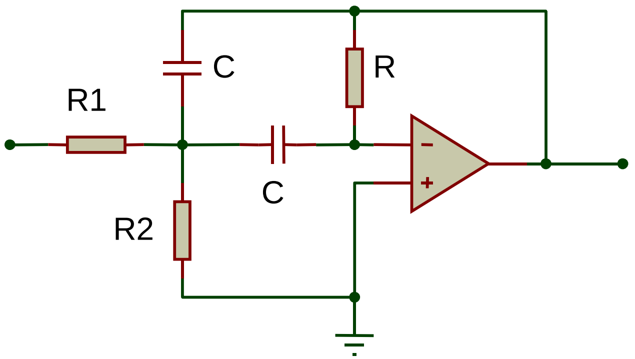
Quelques exemples de cellules sont proposés dans les tableaux ci-après. Il en existe de nombreuses autres. Celles présentées ici sont les plus simples et sont faiblement à moyennement sensibles. Pour les calculs de sensibilité se reporter au cours d'électronique de GE3.

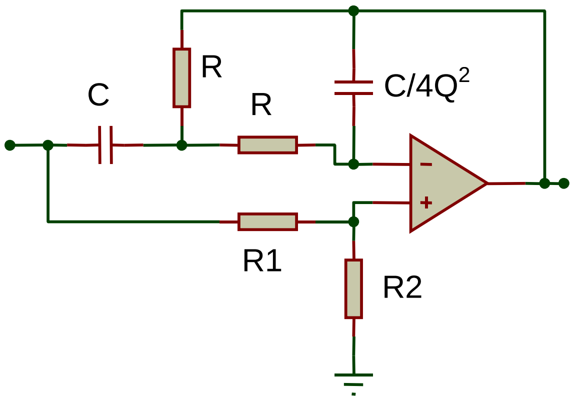
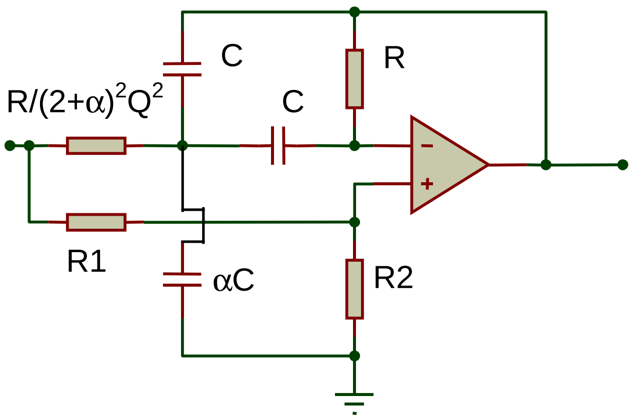
Type de filtre		Fonction de transfert $F(p) = V_2/V_1$	Paramètres usuels	Courbes de réponse
Premier ordre	Passe-bas	$\dfrac{1}{ap+1}$	$\omega_0 = 1/a$ $\tau = \dfrac{a}{1+a^2\omega^2}$	
	Passe-haut	$\dfrac{ap}{ap+1}$	$\omega_0 = 1/a$ $\tau = \dfrac{a}{1+a^2\omega^2}$	
	Passe-tout	$\dfrac{ap-1}{ap+1}$	$\omega_0 = 1/a$ $\tau = \dfrac{2a}{1+a^2\omega^2}$	
Deuxième ordre sans zéro de transmission	Passe-bas	$\dfrac{1}{ap^2+bp+1}$	$Q = \sqrt{a}/b$ $\omega_0^2 = 1/a$ $\omega_m = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$ $V_m = Q\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$ $\omega'_m \approx \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$	
	Passe-haut	$\dfrac{ap^2}{ap^2+bp+1}$	$Q = \sqrt{a}/b$ $\omega_0^2 = 1/a$ $\omega_m = \omega_0\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}}$ $V_m = Q\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$ $\omega'_m \approx \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$	
	Passe-bande	$\dfrac{bp}{ap^2+bp+1}$	$Q = \sqrt{a}/b$ $\omega_0^2 = 1/a$ $\omega_m = \omega_0$ $V_m = 1$ $\omega'_m \approx \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$	
	Passe-tout	$\dfrac{ap^2-bp+1}{ap^2+bp+1}$	$Q = \sqrt{a}/b$ $\omega_0^2 = 1/a$ $\omega'_m \approx \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$	
Deuxième ordre avec zéro de transmission	Passe-bas Passe-haut et réjecteur	$\dfrac{p^2+\omega_\infty^2}{ap^2+bp+1}$ Passe-bas : $\omega_0 < \omega_\infty$ Passe-haut : $\omega_0 > \omega_\infty$ Réjecteur : $\omega_0 = \omega_\infty$	$Q = \sqrt{a}/b$ $\omega_0^2 = 1/a$ τ identique aux filtres de 2ᵉ ordre sans zéro de transmission	 Passe-bas Passe-haut Réjecteur

Tab. 2.1 – Fonctions de transfert et courbes de réponse en amplitude et en temps de propagation de groupe des circuits élémentaires du 1er et du 2ème ordre.

Schéma du filtre – cellule	**Fonction de transfert**	**Paramètres**
	Passe-bas $$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1+RCp}$$	$RC\omega_0 = 1$
	Passe-haut $$\frac{V_2}{V_1} = \frac{RCp}{1+RCp}$$	$RC\omega_0 = 1$
	Passe-tout $$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1-RCp}{1+RCp}$$	$RC\omega_0 = 1$

	Passe-bas – SALLEN-KEY $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{1+\alpha}{R^2C_1C_2p^2+Rp(2C_2-\alpha C_1)+1}$$	$R^2C_1C_2\omega_0^2=1$ $\alpha=\frac{r_2}{r_1}$ $Q=\frac{\sqrt{C_1C_2}}{2C_2-\alpha C_1}$ Si $r_2=0$, $\alpha=0$ alors : $C_1=4Q^2C_2$
	Passe-bas – RAUCH $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{-1}{R^2C^2p^2+\frac{RC}{Q}p+1}$$	$R^2C^2\omega_0^2=1$
	Passe-haut – SALLEN-KEY $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{(1+\alpha)R_1R_2C^2p^2}{R_1R_2C^2p^2+Cp(2R_1-\alpha R_2)+1}$$	$R_1R_2C^2\omega_0^2=1$ $\alpha=\frac{r_2}{r_1}$ $Q=\frac{\sqrt{R_1R_2}}{2R_1-\alpha R_2}$ Si $r_2=0$, $\alpha=0$ alors : $R_1=\frac{R_2}{4Q^2}$

	Passe-haut – RAUCH $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{-R^2C^2p^2}{R^2C^2p^2+\frac{RC}{Q}p+1}$$	$R^2C^2\omega_0^2 = 1$
	Passe-bande – SALLEN-KEY $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{(1+\alpha)R_2Cp}{R_1R_2C^2p^2+Cp(3R_2-\alpha R_1)+1+\frac{R_2}{R_1}}$$	$R_1R_2C^2\omega_0^2 = 1+\frac{R_2}{R_1}$ $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$ $Q = \frac{\sqrt{R_2(R_1+R_2)}}{3R_2-\alpha R_1}$ Si $r_2=0$, $\alpha=0$ alors : $R_1 = (9Q^2-1)R_2$
	Passe-bande – RAUCH $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{-2\alpha\frac{RC}{Q}p}{rRC^2p^2+\frac{RC}{Q}p+1}$$	$R_1 // R_2 = \frac{R}{4Q^2} = r$ $\alpha = \frac{R}{4R_1}$ $R^2C^2\omega_0^2 = 4Q^2$

	Passe-tout $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{R^2C^2p^2-\frac{RC}{Q}p+1}{R^2C^2p^2+\frac{RC}{Q}p+1}$$	$$\frac{R_2}{R_1}=Q^2$$ $$R^2C^2\omega_0^2=1$$
	Passe-bas ou passe-haut avec zéro de transmission $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{R_2}{\omega_\infty(R_1+R_2)}\,\frac{p^2+\omega_\infty^2}{R^2C^2p^2+\frac{RC}{Q}p+1}$$	$$\frac{R_2}{R_1}=(2+\alpha)Q^2$$ $$R^2C^2\omega_0^2=1$$ $$\omega_\infty^2=\frac{\omega_0^2}{(1+\alpha)}=\frac{1}{(1+\alpha)R^2C^2}$$

Tab. 2.2 – Exemples de cellules élémentaires avec leurs principales caractéristiques.

1.4 – Abaques et fonctions de transmissions des cellules.

Les abaques qui permettent la détermination graphique de l'ordre d'un filtre sont présentés ci-après ainsi que les fonctions de transmission de chaque cellule.

D'après Paul BILDSTEIN – Filtres actifs – Editions RADIO – 1976

1.4.1 – Fonctions de transmission de BUTTERWORTH.

$n : D(\underline{s}) = H(\underline{s})^{-1}$

$1 : \underline{s} + 1$

$2 : \underline{s}^2 + \sqrt{2}\underline{s} + 1$

$3 : \underline{s}^3 + 2\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 1 = (1+\underline{s})(1+\underline{s}+\underline{s}^2)$

$4 : \underline{s}^4 + 2.613\underline{s}^3 + 3.414\underline{s}^2 + 2.613\underline{s} + 1 = (1+0.7653\underline{s}+\underline{s}^2)(1+1.848\underline{s}+\underline{s}^2)$

$5 : \underline{s}^5 + 3.236\underline{s}^4 + 5.236\underline{s}^3 + 5.236\underline{s}^2 + 3.236\underline{s} + 1 = (1+\underline{s})(1+0.618\underline{s}+\underline{s}^2)(1+1.618\underline{s}+\underline{s}^2)$

$6 : (1+0.517\underline{s}+\underline{s}^2)(\underline{s}^2+\sqrt{2}\underline{s}+1)(1+1.932\underline{s}+\underline{s}^2)$

1.4.2 – Polynômes caractéristiques de TCHEBYCHEFF.

Les polynômes de TCHEBYCHEFF sont définis de la façon suivante :

$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{pour} \quad |x| \le 1$

$T_n(x) = \cosh(n \arg\cosh x) \quad \text{pour} \quad |x| > 1$

$$\text{avec :} \begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ \text{cas général : } T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{cases}$$

1.4.3 – Fonctions de transmission de TCHEBYCHEFF.

Selon les valeurs de A_{max} et de ε, les fonctions de transmission sont différentes.

$A_{max} = 0.1 dB, \qquad \varepsilon = 0.15262$

$n=2$: $0.3017\underline{s}^2+0.7158\underline{s}+1$

$n=3$: $0.6105\underline{s}^3+1.1836\underline{s}^2+1.6052\underline{s}+1$

$n=4$: $1.2069\underline{s}^4+2.1771\underline{s}^3+3.1705\underline{s}^2+2.4447\underline{s}+1$

$n=5$: $2.4419\underline{s}^5+4.2586\underline{s}^4+6.7658\underline{s}^3+5.8531\underline{s}^2+3.5055\underline{s}+1$

$n=6$: $4.8279\underline{s}^6+8.2662\underline{s}^5+14.32\underline{s}^4+13.42\underline{s}^3+9.8868\underline{s}^2+4.3536\underline{s}+1$

$A_{\max} = 0.5dB, \qquad \varepsilon = 0.34931$

$$n=2 : \; 0.6595\underline{s}^2+0.9402\underline{s}+1$$
$$n=3 : \; 1.3972\underline{s}^3+1.7506\underline{s}^2+2.1446\underline{s}+1$$
$$n=4 : \; 2.6381\underline{s}^4+3.1589\underline{s}^3+4.5293\underline{s}^2+2.7053\underline{s}+1$$
$$n=5 : \; 5.589\underline{s}^5+6.553\underline{s}^4+10.83\underline{s}^3+7.319\underline{s}^2+4.2058\underline{s}+1$$
$$n=6 : \; 10.552\underline{s}^6+12.232\underline{s}^5+22.918\underline{s}^4+16.776\underline{s}^3+12.366\underline{s}^2+4.563\underline{s}+1$$

$A_{\max} = 1dB, \qquad \varepsilon = 0.50884$

$$n=2 : \; 0.907\underline{s}^2+0.9957\underline{s}+1$$
$$n=3 : \; 2.0353\underline{s}^3+2.0116\underline{s}^2+2.5206\underline{s}+1$$
$$n=4 : \; 3.628\underline{s}^4+3.4568\underline{s}^3+5.2749\underline{s}^2+2.6942\underline{s}+1$$
$$n=5 : \; 8.1415\underline{s}^5+7.6271\underline{s}^4+13.75\underline{s}^3+7.933\underline{s}^2+4.7264\underline{s}+1$$
$$n=6 : \; 14.512\underline{s}^6+13.47\underline{s}^5+28.02\underline{s}^4+17.445\underline{s}^3+13.632\underline{s}^2+4.456\underline{s}+1$$

1.4.4 – Polynômes caractéristiques de LEGENDRE.

Les polynômes de LEGENDRE sont donnés par les relations suivantes :

$L_1(x^2)=x^2$

$L_2(x^2)=x^4$

$L_3(x^2)=3x^6-3x^4+x^2$

$L_4(x^2)=6x^8-8x^6+3x^4$

$L_5(x^2)=20x^{10}-40x^8+28x^6-8x^4+x^2$

$L_6(x^2)=50x^{12}-120x^{10}+105x^8-40x^6+6x^4$.....

1.4.5 – Fonctions de transmission de LEGENDRE.

$$n=2 : \; \underline{s}^2+1.4142\underline{s}+1$$
$$n=3 : \; (1.0744\underline{s}^2+0.7417\underline{s}+1)(1.612\underline{s}+1)$$
$$n=4 : \; (2.3213\underline{s}^2+2.5522\underline{s}+1)(1.055\underline{s}^2+0.4889\underline{s}+1)$$
$$n=5 : \; (2.0115\underline{s}^2+1.5614\underline{s}+1)(1.0406\underline{s}^2+0.3196\underline{s}+1)(2.136\underline{s}+1)$$
$$n=6 : \; (3.9963\underline{s}^2+3.508\underline{s}+1)(1.0313\underline{s}^2+0.2376\underline{s}+1)(1.7155\underline{s}^2+1.060\underline{s}+1)$$

1.4.6 – Polynômes caractéristiques et fonctions de transmission de BESSEL.

Pour une fonction polynomiale, la fonction de transfert est de la forme :

$H(\underline{s}) = \dfrac{1}{D(\underline{s})}$, soit $H(\underline{s}) = \dfrac{1}{B_n(\underline{s})}$ pour BESSEL.

Les polynômes de BESSEL sont définis par la formule de récurrence suivante :

$$B_n(\underline{s}) = (2n-1)B_{n-1}(\underline{s}) + \underline{s}^2 B_{n-2}(\underline{s})$$

ils sont inscrits dans des tables, les premiers de ces polynômes sont :

$$B_0(\underline{s}) = 1$$
$$B_1(\underline{s}) = \underline{s} + 1$$
$$B_2(\underline{s}) = \underline{s}^2 + 3\underline{s} + 3$$
$$B_3(\underline{s}) = \underline{s}^3 + 6\underline{s}^2 + 15\underline{s} + 15$$
$$B_4(\underline{s}) = \underline{s}^4 + 10\underline{s}^3 + 45\underline{s}^2 + 105\underline{s} + 105$$
$$B_5(\underline{s}) = \underline{s}^5 + 15\underline{s}^4 + 105\underline{s}^3 + 420\underline{s}^2 + 945\underline{s} + 945$$
$$B_6(\underline{s}) = \underline{s}^6 + 21\underline{s}^5 + 210\underline{s}^4 + 1260\underline{s}^3 + 4725\underline{s}^2 + 10395\underline{s} + 10395$$

1.4.7 – Fonctions de transmission de CAUER.

Selon les valeurs de A_{max} et de A_{min}, les fonctions de transmission sont différentes. Dans ce formulaire, les seules qui sont données correspondent à A_{max}=50dB et de A_{min}=1dB.