Apprentissage statistique
TP2 : descente de gradient et perceptron

Olivier Schwander <olivier.schwander@lip6.fr>

2018-2019

Exercice 1 *Descente de gradient*

On cherche à minimiser une fonction $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^d$. On note ∇F son gradient.

La descente de gradient correspond à l'algorithme itératif suivant :

— **Initialisation** $x_0 \in \mathbb{R}^d$
— **Itération** $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla F(x_k)$

L'itération est répétée jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint.

Question 1

Proposer des critères d'arrêt.

Question 2 *Python*

Implanter cet algorithme en Python. On définira une fonction qui prendra entre autre en argument la fonction F et son gradient ∇F.

Question 3 *Convexité*

Que se passe-t-il si la fonction F n'est pas convexe ?

Question 4

Discuter (informellement) l'influence du point x_0, d'abord dans le cas non convexe puis dans le cas convexe.

Exercice 2 *Perceptron*

Un perceptron à n entrées $x_1 \dots x_n$ et une sortie est défini par par $n+1$ constantes : le vecteur de poids synaptiques $w_1 \dots w_n$ et le biais θ. Le potentiel $F(x)$ de la sortie est $F(x) = \sum_i w_i x_i$. L'activation O de la sortie vaut 1 si $\sum_i w_i x_i > \theta$ et 0 sinon.

Question 1 *Séparation linéaire*

Montrer qu'un perceptron divise l'espace des entrées en deux sous-espaces séparés par un hyperplan. Que représente le vecteur w ?

Question 2

Dans la définition précédente, le biais θ est présenté comme un hyper-paramètre. Montrer que l'on peut traiter θ comme un poids synaptique particulier. Comment adapter le problème de l'estimation des paramètres du perceptron ?

Question 3

Le perceptron ne peut classifier correctement que des classes séparées par un hyper-plan (dites *linéairement séparables*). Donner un exemple (simple) d'un jeu de points non-linéairement séparable.

Question 4

Étant donné deux classes linéairement séparables, combien de points faut-il rajouter pour les rendre non linéairement séparables ?

Question 5

Calculer la distance entre un point et l'hyperplan.

Exercice 3 *Algorithmes*

Un premier algorithme

- `Entrée` : un échantillon de N observations $X = \{x^{(1)} \dots x^{(N)}\}$ et les étiquettes associées $T_1, \dots, T_N$ (-1 ou $+1$).
- $t = 0$
- $w(t) = 0$
- `Répéter`
  - Choisir un échantillon : $x^{(k)} = (x_1, \dots, x_d)$ et son étiquette T_k
  - Calculer la sortie : $O(x^{(k)}) = h(\sum_i w_i x_i - \theta)$
  - `Si` $O \neq T_k$:
    - Mettre à jour les poids : $w_i(t+1) = w_i(t) + (T_k - O)x_i$

  `Jusqu'à` la présentation de tous les échantillons et l'absence de changement dans les poids

La fonction h est la fonction de Heaviside :

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme dans l'exercice précédent, on notera $F(x) = \sum_i w_i x_i$.

Question 1

Que se passe-t-il si l'échantillon n'est pas linéairement séparable ?

Méthode des moindres carrés ou de Widrow-Hoff

On rédéfinit $O(x)$ comme étant $O(x) = F(x) - \theta$ (c'est donc un réel, et non plus une valeur binaire).

On définit l'erreur pour l'entrée x :

$$e(x) = \frac{1}{2}(T_x - O(x))^2$$

et l'erreur globale

$$E(X) = \frac{1}{|X|} \sum_x e(x)$$

Pour estimer les poids synaptiques, on cherche à minimiser l'erreur globale.

La règle de mise à jour devient : $w_i(t+1) = w_i(t) + \epsilon\,(T_x - O(x))\,x_i$ (où ϵ est un paramètre).

Question 2

Montrer qu'il s'agit d'une descente de gradient (stochastique).

Exercice 4 *Programmation*

On cherche à implanter en `Python` la méthode des moindres carrés.

Dans un premier temps, on pourra tester les fonctions sur le jeu de données suivant :

x_1	x_2	Étiquette : $x_1 \vee x_2$
0	0	-1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Dans un deuxième temps, on utilsera des données artificielles (voir Question **??**).

Dans un troisième temps, on utilisera un jeu de données réel, la base de chiffres manuscrits USPS (voir partie **??**).

Question 1

Écrivez une fonction prenant en argument le vecteur de poids, une observation et l'étiquette associée et réalisant la mise à jour du vecteur (on pourra modifier le vecteur des poids).

Question 2

Écrivez une fonction qui réalise la boucle et qui renvoie le vecteur des poids. Quelle condition d'arrêt choisir ?

Question 3

Écrivez une fonction qui prédit l'étiquette d'une entrée.

Question 4

Modifier la fonction précédente pour afficher l'erreur globale au cours des itérations.

Question 5

Tracer la courbe de l'erreur globale (éventuellement en modifiant le code pour stocker les valeurs de l'erreur).

Question 6

Afficher sous forme d'image le vecteur des poids. Générer la séquence d'images correspondants aux itérations.

Question 7

Écrire une fonction pour calculer la précision de la classification.

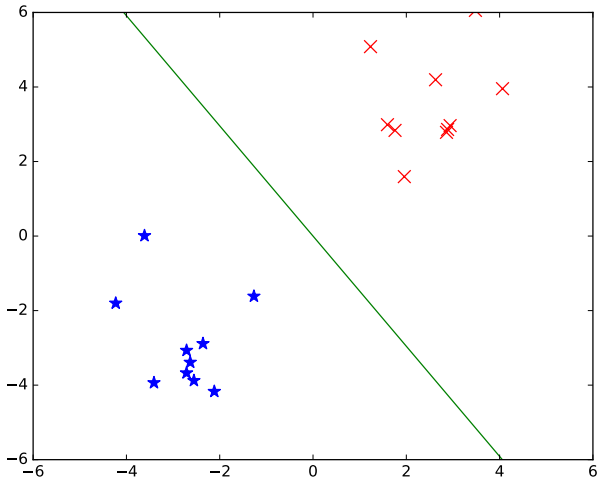
Question 8

Évaluer le perceptron sur des données artificielles.

On pourra générer des données aléatoirement de la façon suivante :

```
In [1]: import numpy as np

In [2]: data0 = np.random.randn(10, 2) + 3
In [3]: data1 = np.random.randn(10, 2) - 3

In [4]: labels0 = np.ones(10)
In [5]: labels1 = -np.ones(10)

In [6]: data = np.concatenate([data0, data1])
In [7]: data.shape
Out[7]: (20, 2)

In [8]: labels = np.concatenate([labels0, labels1])
In [9]: labels.shape
Out[9]: (20,)
```

On pourra générer plus de points, augmenter la dimension, tracer les points générés, etc. Par exemple :



Exercice 5 *Jeu de données USPS*

Les chiffres sont représentées par des images en niveau de gris de taille 16×16.

Les fichiers sont disponibles sur la page https://web.stanford.edu/~hastie/ElemStatLearn/data.html (rubrique *ZIP code*). On trouve une description des données ainsi qu'une base d'apprentissage (*Training*) et une base de test (*Test*). On effectuera l'estimation des paramètres sur la base d'apprentissage et l'évaluation de performances sur la base de test.

Les données sont formatées comme suit :

```
CHIFFRE PIXEL1 PIXEL2 PIXEL3 ... PIXEL256
```

Par exemple :

```
6.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.6310 0.8620 -0.1670 -
1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -
1.0000 -1.0000 -0.9920 0.2970 1.0000 0.3070 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -
1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.4100 1.0000 0.9860 -0.5650 -
1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -
1.0000 -0.6830 0.8250 1.0000 0.5620 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -
1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.9380 0.5400 1.0000 0.7780 -0.7150 -1.0000 -
1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 0.1000 1.0000 0.9220
0.4390 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -
1.0000 -1.0000 -0.2570 0.9500 1.0000 -0.1620 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.9870 -0.7140 -
0.8320 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.7970 0.9090 1.0000 0.3000 -0.9610 -
1.0000 -1.0000 -0.5500 0.4850 0.9960 0.8670 0.0920 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 0.2780 1.0000 0.8
0.8240 -1.0000 -0.9050 0.1450 0.9770 1.0000 1.0000 1.0000 0.9900 -0.7450 -1.0000 -
1.0000 -0.9500 0.8470 1.0000 0.3270 -1.0000 -1.0000 0.3550 1.0000 0.6550 -0.1090 -
0.1850 1.0000 0.9880 -0.7230 -1.0000 -1.0000 -0.6300 1.0000 1.0000 0.0680 -0.9250 0.1130 0.9600 0.30
0.8840 -1.0000 -0.0750 1.0000 0.6410 -0.9950 -1.0000 -1.0000 -0.6770 1.0000 1.0000 0.7530 0.3410 1.0
0.9420 -1.0000 -1.0000 0.5450 1.0000 0.0270 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.9030 0.7920 1.0000 1.0000 1.0
0.6300 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.4520 0.8280 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.00
1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.4830 0.8130 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0
0.9430 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -0.9740 -0.4290 0.3040 0.8230 1.0000
0.4740 -0.9910 -1.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000
```

Question 1

Écrire une fonction qui charge les données.

On utilisera la fonction Python `loadtxt` disponible dans le module `numpy` :

```
In [1]: import numpy as np

In [2]: train = np.loadtxt("zip.train.gz")
In [3]: train.shape
Out[3]: (7291, 257)
```

Question 2

Évaluer le perceptron sur ces données.