loi exponentielle

$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \; e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

la fonction de répartition de X est :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} \; e^{-\lambda t} \right]_{0}^{x} = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$= - e^{-\lambda x} + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \; e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

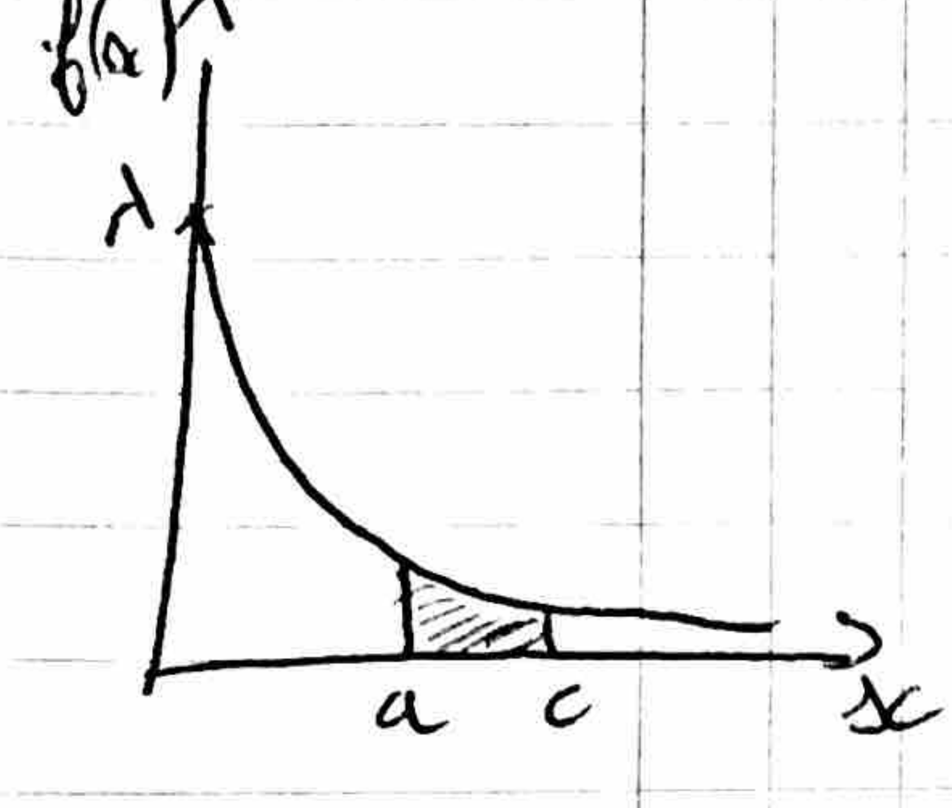
les propriétés de la loi exponentielle :

$$P(X \leqslant a) = \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \lambda \, e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_{0}^{a} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} \; e^{-\lambda x} \right]_{0}^{a}$$

$$= \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} \; e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \right) = \boxed{- e^{-\lambda a} + 1}$$

$$P(a \leq X \leq c) = \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$



$$= \lambda \int_a^c e^{-\lambda x}\,dx$$

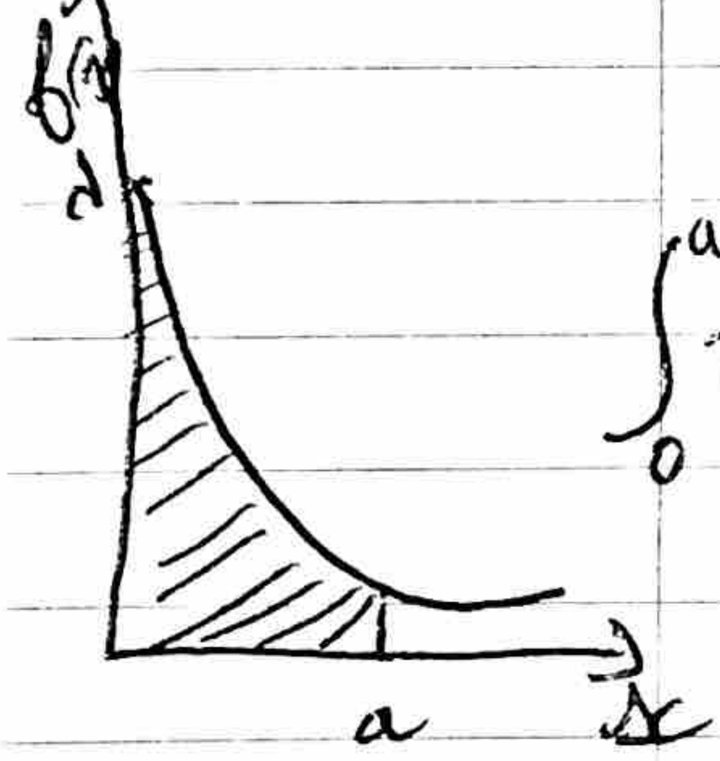
$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_a^c$$

$$= \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda c} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a}\right)$$

$$= -e^{-\lambda c} + e^{-\lambda a} \boxed{= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda c}}$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$$

$$= 1 - \int_0^a f(x)\,dx$$



$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^a e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^a = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda a}$$

$$\Rightarrow P(X \geq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) \boxed{= e^{-\lambda a}}$$

l'espérance de X $E(X) = ?$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

Intégration par partie : $\boxed{\int_a^b u \times v' = [u.v]_a^b - \int_a^b u'v}$

Soit $u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \longrightarrow v(x) = -e^{-\lambda x}$

$$\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} = \left[x \times (-e^{-\lambda x})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} - e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

d'où $\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$ $\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$

correction de l'exercice 2

TD2

T v.a : la durée de vie d'un circuit électronique

la fonction de répartition F :

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $\boxed{\left(e^{U(x)}\right)' = U' e^{U(x)}}$

la primitive de $\boxed{e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}}$

$$f(t) = \frac{F'(t)}{dt} = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)'$$

$$= -\left(-\frac{1}{2} \times 2t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$$

$$= t\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

d'où $f(t) = \begin{cases} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2) $E(T) = \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

$u(t) = t \longrightarrow u'(t) = 1$

$v'(t) = t\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \longrightarrow v(t) = -e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = \left[t \times (-e^{-\frac{1}{2}t^2}) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

intégrale de Gauss

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad ; a > 0}$$

d'où $E(T) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

3) $P(T \geqslant 3 \setminus T \geqslant 1) = \dfrac{P(\text{"}T \geqslant 3\text{"} \cap \text{"}T \geqslant 1\text{"})}{P(T \geqslant 1)}$

$$= \frac{P(T \geqslant 3)}{P(T \geqslant 1)} = \frac{e^{-\frac{4}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e^{-4}$$

4) $\underbrace{P(T \geqslant 3 \setminus T \geqslant 2)}_{e^{-4}} \neq \underbrace{P(T \geqslant 2)}_{e^{-2}}$

$\Rightarrow$ la loi n'est pas sans mémoire

Définition générale de Probabilité conditionnelle:

Si A est un évènement associé à une expérience aléatoire et B un évènement de probabilité non nul associé à la même expérience aléatoire, alors la probabilité de réalisation de A lorsque B est réalisé s'appelle la probabilité conditionnelle de A sachant B et l'on note :

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{où } P(B) > 0$$

<u>Définition</u> :

Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $a \geqslant 0$

$$P(X \geqslant a+t \setminus X \geqslant a) = P(X \geqslant t)$$

<u>Démonstration</u> : Soit X une v.a qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Soit t et a deux réels strictement positifs. on cherche la probabilité que X soit supérieure ou égale à $a+t$ sachant que X est supérieure à a

$$P(X \geqslant a+t \setminus X \geqslant a) = \frac{P(X \geqslant a+t \text{ et } X \geqslant a)}{P(X \geqslant a)}$$

d'où

$$P(X \geqslant a+t \setminus X \geqslant a) = \frac{P(X \geqslant a+t)}{P(X \geqslant a)} = \frac{e^{-\lambda(a+t)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda t} = P(X \geqslant t)$$

d'où le nom de "loi de durée de vie sans mémoire"
" Vieillissement