Prof : Mouad Zillou Niveau : 1BSEF	Résumé 01 Notions de logique	Lycée : Charif El Idrissi –Assoul- Matière : Mathématiques

Proposition – fonction propositionnelle

- On appelle **proposition**, tout énoncé mathématique qui a un sens et qui pouvant être vrai ou faux, et non pas les deux au même temps.
- On appelle **fonction propositionnelle**, tout énoncé mathématique contient une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble bien définie, et qui est susceptible d'être une proposition si on attribue à ses variables certaines valeurs particulier dans cet ensemble.

Opérations sur les propositions

		Conjonct	Disjonct	Implicat	Equival
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Négation

La négation d'une proposition P se note $\overline{P}$

1) Table de vérité

p	$\overline{P}$
V	F
F	V

2) La négation de certains symboles

Symbole	$\forall$	$\exists$	$=$	$\in$	$<$	$>$	$\geq$	$\leq$
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	$\geq$	$\leq$	$<$	$>$

3) Négation d'une proposition quantifiée

- La négation de la proposition $"(\exists x \in E); P(x)"$ est la proposition $"(\forall x \in E); \overline{P(x)}"$.
- La négation de la proposition $"(\forall x \in E); P(x)"$ est la proposition $"(\exists x \in E); \overline{P(x)}"$.

4) Négation de la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence de deux propositions

A) La négation de $(P \text{ et } Q)$ est $(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$

B) La négation de $(P \text{ ou } Q)$ est $(\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$

C) La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } \overline{Q})$

D) La négation de $(P \Leftrightarrow Q)$ est $(\overline{P} \Leftrightarrow Q)$ ou bien $(P \Leftrightarrow \overline{Q})$

Raisonnements mathématiques

1/Raisonnement par contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition de type $((\forall x \in E), P(x))$ est fausse, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse

2/Raisonnement par contraposée

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie car $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

3/ Raisonnement par équivalences successives

- Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$

⊕ On cherche des propositions R_i telles que $P \Leftrightarrow R_1$, $R_1 \Leftrightarrow R_2$, $R_2 \Leftrightarrow R_3$, $R_3 \Leftrightarrow R_4$,….et $R_n \Leftrightarrow Q$.

⊕ On démontre que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

4/ Raisonnement par disjonction des cas

Pour montrer que la proposition Q est vraie Il faut que les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \Rightarrow Q$ soient vraies.

5/ Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose que P est fausse c.-à-d $\overline{P}$ est vraie et on cherche la contradiction avec les données d'exercices et le prérequis.

6/Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$

Pour montrer que $"(\forall n \geq n_0); P(n)"$ est vraie, on suit les étapes suivantes :

- **Initialisation**

Vérifier que $P(n_0)$ est vraie

- **Héridité :**

Pour $n \geq n_0$. On Suppose que $"P(n)"$ est vraie et montrer que $P(n+1)$ est vraie ; c-à-d montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

- **Conclusion**

D'après le principe de récurrence on a $"(\forall n \geq n_0); P(n)"$.