دراسة الدوال و تمثيلها باستعمال دوال مرجعية

1- دراسة و تمثل مبيانيا الدالة $f : x \to ax^2$ حيث $a \neq 0$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = 2x^2$

- ندرس تغيرات f

$D_f = \mathbb{R}$

f دالة زوجية و منه اقتصار دراستها على $[0;+\infty[$

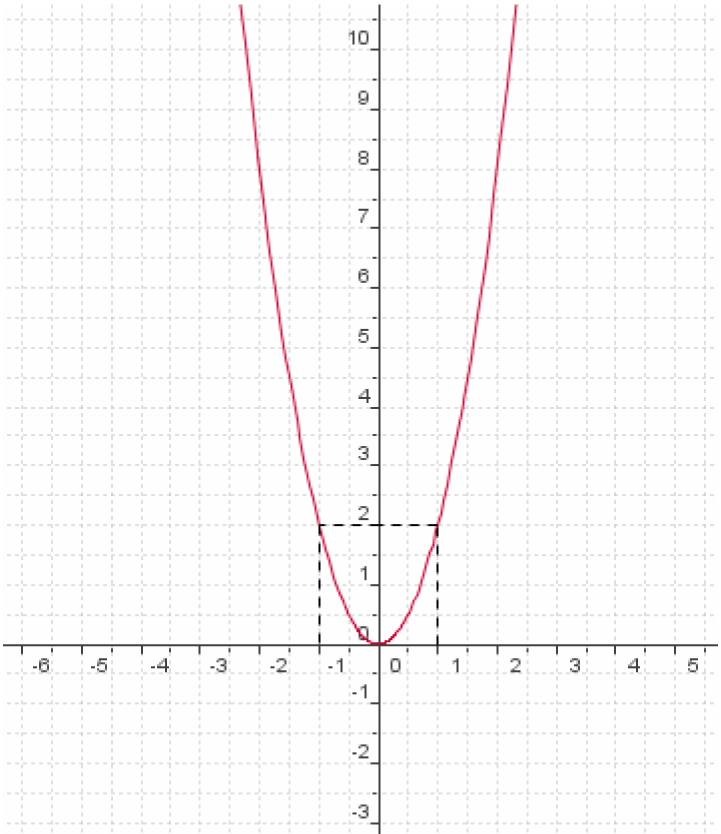
ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 2(x+y)$$

لكل x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$

إذن f تزايدية على $[0;+\infty[$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
f	$\searrow$ 0 $\nearrow$



معادلة C_f هي $y = 2x^2$

C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $0 \prec 2x^2 \prec 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

تحت المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

إذا كان $x \succ 1$ فان $2x^2 \succ 2x$

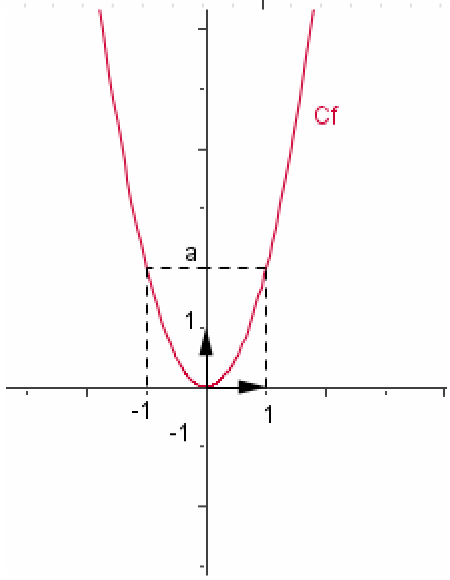
هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

فوق المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

جدول القيم

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل



* بالمثل أدرس الدالة f حيث $f(x) = \frac{-1}{2}x^2$

ب- الحالة العامة

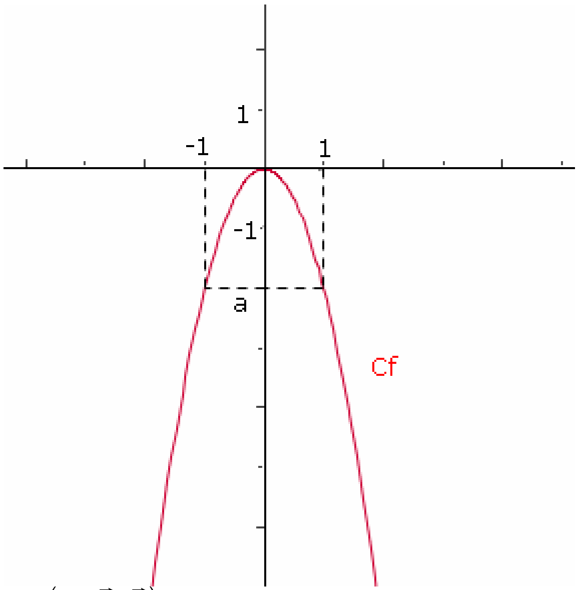
نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ

$f(x) = ax^2$ حيث $a \neq 0$

إذا كان $a \succ 0$ فان

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
f	$\searrow$ 0 $\nearrow$

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل



إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	0	↘

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

تمرين $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$h(x)=3x^2 \quad m(x)=-2x^2$

1- أعط جدول تغيرات f و g و h و m

2- في نفس المعلم المتعامد الممنظم

أنشئ C_f و C_g و C_h و C_m

2- دراسة الدالة $x \to ax^2+bx+c$

لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ متجهة في مستوى منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

و t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$

$t(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ تكافئ $\begin{cases} X-\alpha=x \\ Y-\beta=y \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} X=x+\alpha \\ Y=y+\beta \end{cases}$

مثال1 لندرس f حيث $f(x)=2x^2-4x-3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x)=2(x-1)^2-5$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2(x-1)^2-5$ أي $y+5=2(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;-5)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to 2x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases} X-1=x \\ Y+5=y \end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=2x^2$

تكافئ $Y+5=2(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور تماثله

محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه O' $t(O)=O'$

أي $O'(1;-5)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x=1$

و حيث أن الدالة $x \to 2x^2$ تزايدية على $[0;+\infty[$

و تناقصية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تزايدية على

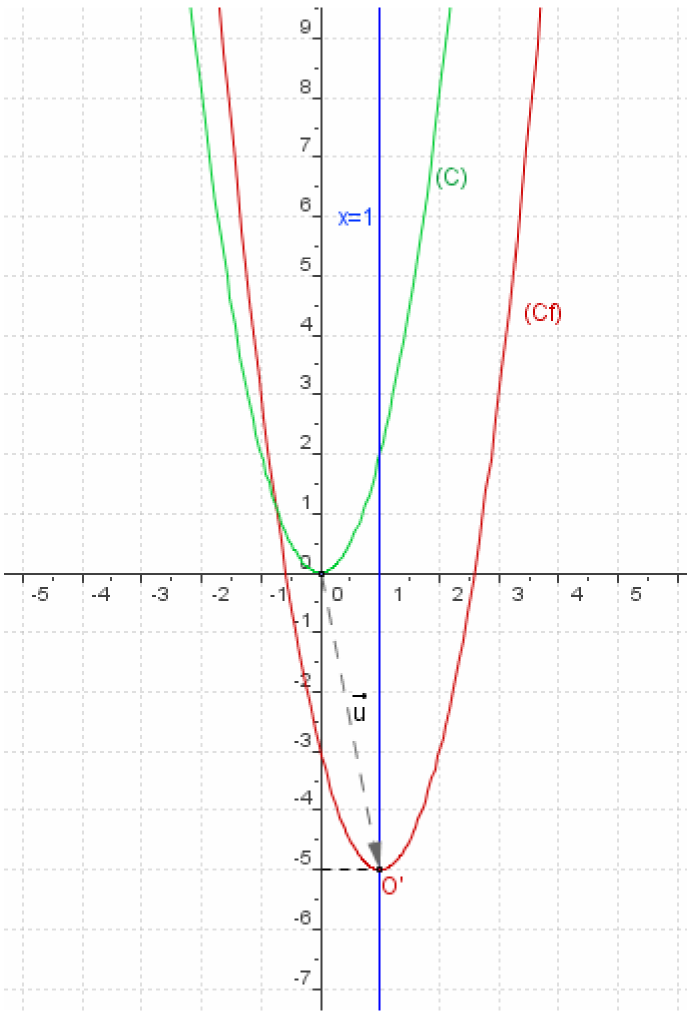
$[1;+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty;1]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	-5	↗

إنشاء المنحنى

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-5	-3	3



مثال2 لندرس f حيث $f(x)=-x^2+2x+3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x)=-(x-1)^2+4$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=-(x-1)^2+4$ أي $y-4=-(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;4)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\to -x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases}X-1=x\\Y-4=y\end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=-x^2$

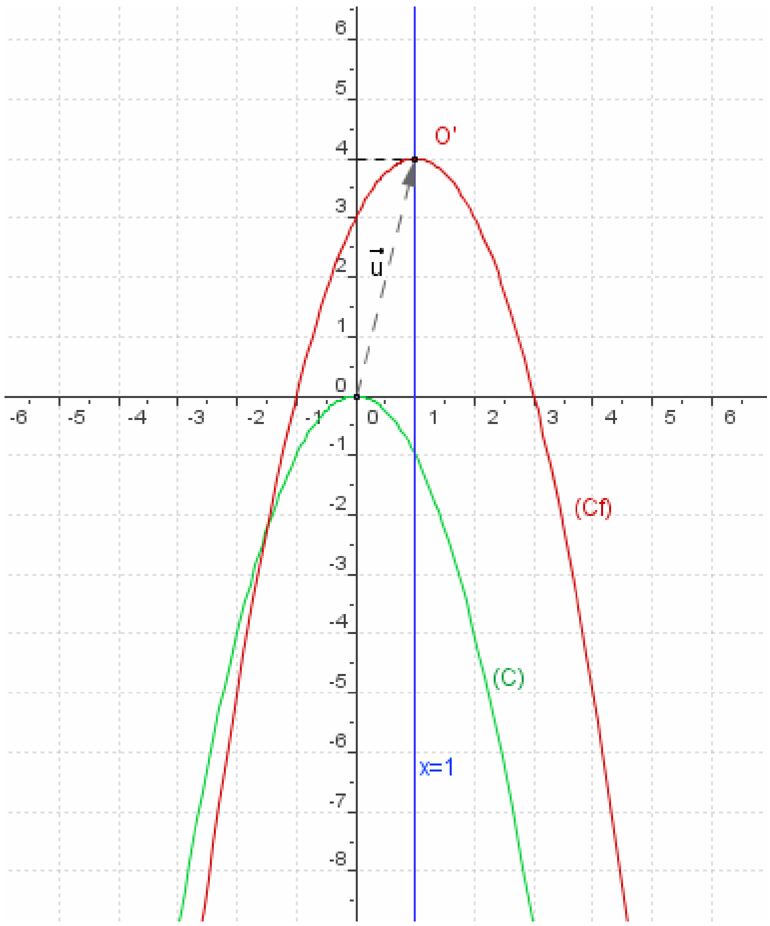
تكافئ $Y-4=-(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور
تماثله محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه
$t(O)=O'$ أي $O'(1;4)$ و محور تماثله المستقيم
ذا المعادلة $x=1$

و حيث أن الدالة $x\to -x^2$ تناقصية على $[0;+\infty[$
و تزايدية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تناقصية على
$[1;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;1]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-1$ أو $x=3$

x	0	1	2	4
$f(x)$	3	4	3	-5

الحالة العامة $x\to ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$

نشاط

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

1/ أعط الشكل القانوني لـ f

2/ بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to ax^2$ بالإزاحة t ذات المتجهة
$\vec{u}\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ و استنتج طبيعة (C_f)
ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد a

خاصيات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

* $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ لكل x من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha=\frac{-b}{2a}$ و $\beta=f(\alpha)$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f

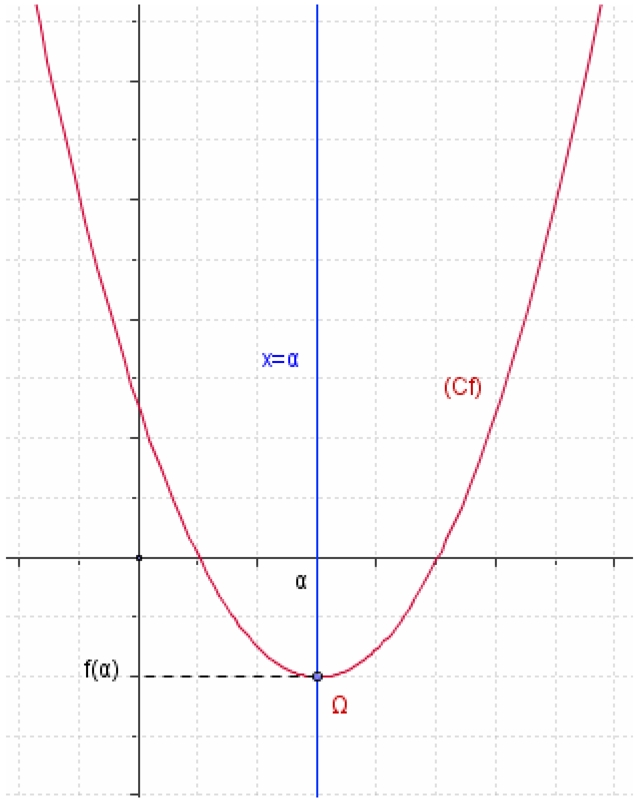
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* منحنى C_f الدالة f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x=\alpha$

نضع $\alpha=\frac{-b}{2a}$

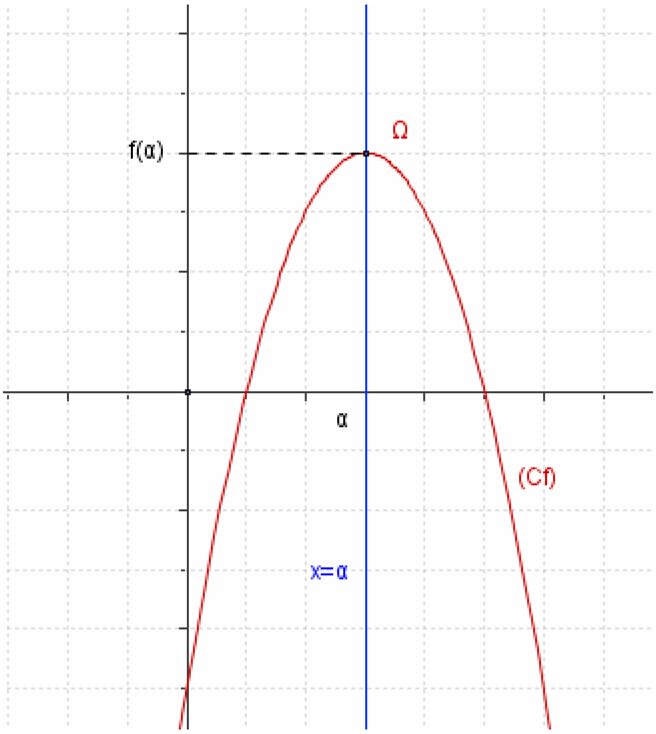
-* إذا كان $a\succ 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↘	$f(\alpha)$	↗



* إذا كان $a\prec 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↗	$f(\alpha)$	↘



3- دراسة الدالة $x\to\frac{a}{x}$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة $f(x)=\frac{2}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f=\mathbb{R}^*$

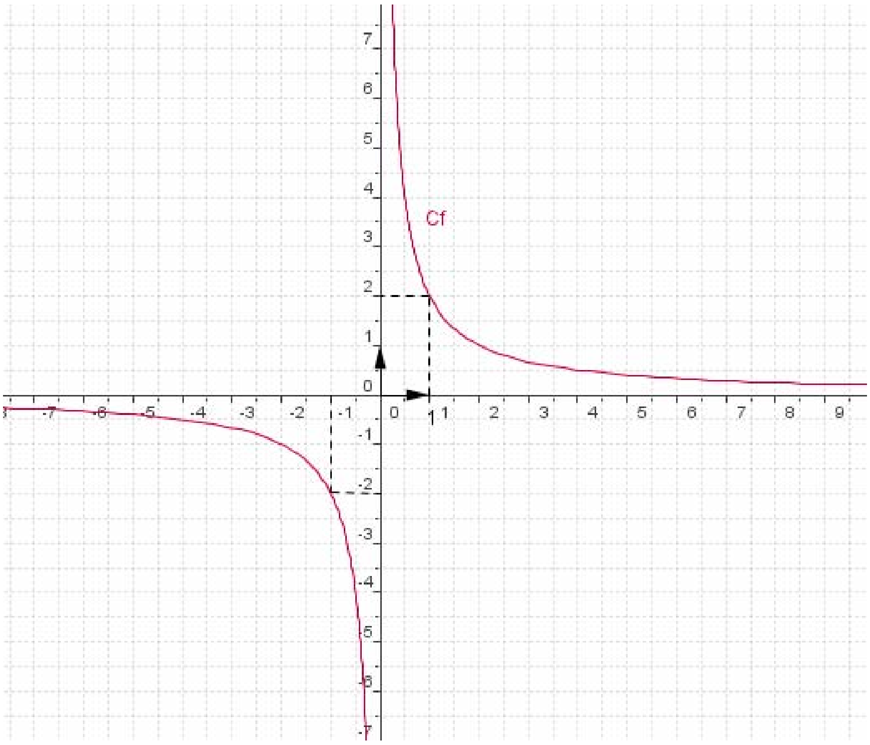
f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ $\qquad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{-2}{xy}$

لكل x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ $\qquad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\prec 0$

إذن f تناقصية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘



ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $\frac{2}{x} \succ 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

فوق المستقيم $(\Delta): y=2$

إذا كان $x \geq 1$ فان $0 \prec \frac{2}{x} \leq 2$

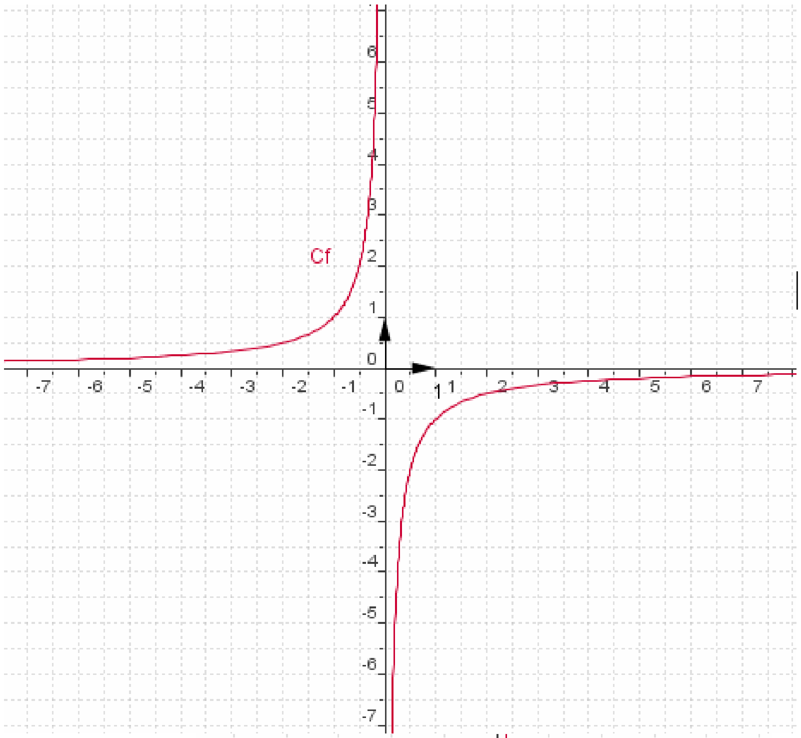
هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

تحت المستقيم $(\Delta): y=2$

جدول القيم

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	2

C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم



* نعتبر الدالة $f(x)=\frac{-1}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f=\mathbb{R}^*$

f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

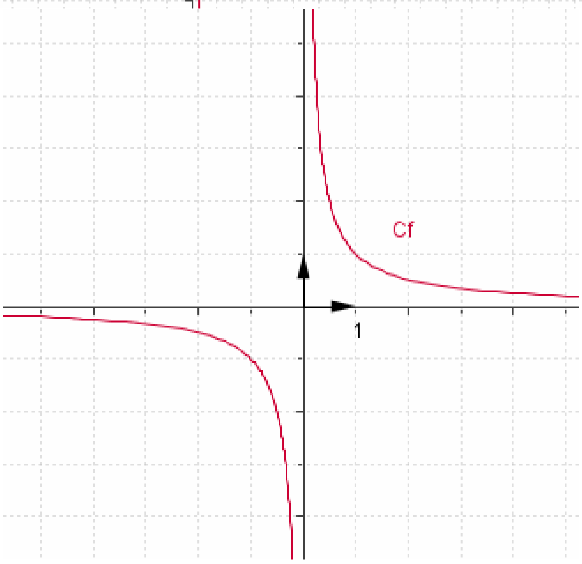
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{1}{xy}$$

إذن f تزايدية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	‖	↗

C_f هدلول مركزه O و مقارباه

محورا المعلم



ب- الحالة العامة

نعتبر $f(x)=\frac{a}{x}$

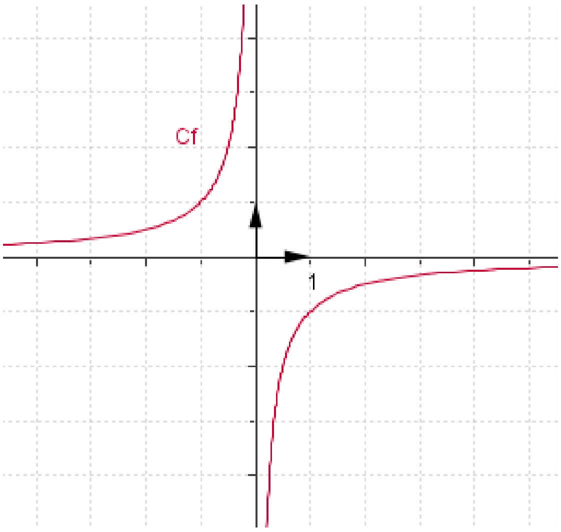
إذا كان $a \succ 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘

C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	$\|$	↗	



C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

4 - دراسة الدالة $x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

مثال 1 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

-* $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

-* بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن $f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2+\dfrac{3}{x-1}$ أي $y-2=\dfrac{3}{x-1}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to \dfrac{3}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases} X-1=x \\ Y-2=y \end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=\dfrac{3}{x}$ تكافئ $Y-2=\dfrac{3}{X-1}$ تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه

$t(O)=O'$ أي $O'(1;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x=1$ و $y=2$

و حيث أن الدالة $x \to \dfrac{3}{x}$ تناقصية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]-\infty;1]$

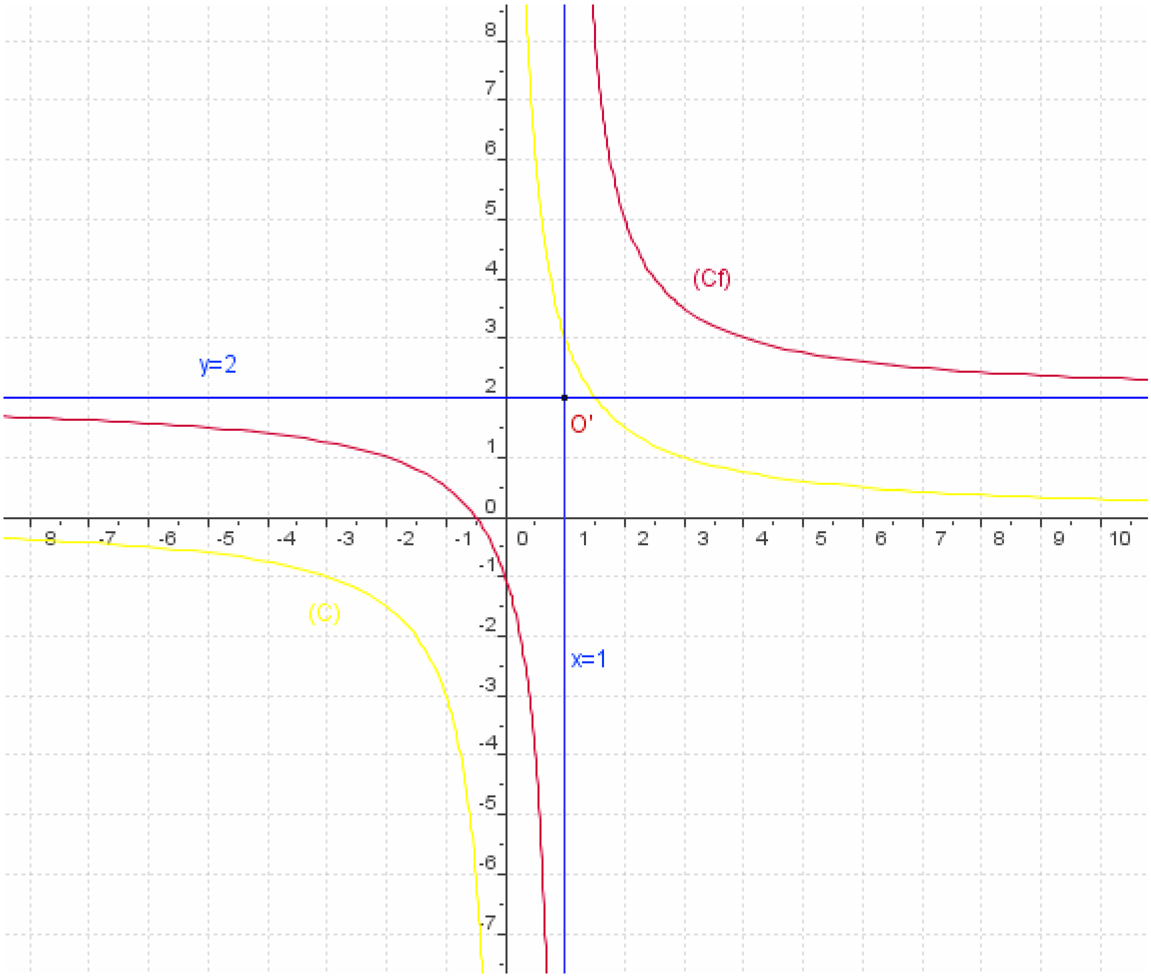
جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	$\|$	↘	

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-\dfrac{1}{2}$

x	0	1	2	5
$f(x)$	-1	//	5	$\dfrac{11}{4}$



مثال 2 $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

*- $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

$$f(x)=2+\frac{-1}{x+2}$$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2+\frac{-1}{x+2}$ أي $y-2=\frac{-1}{x+2}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\to\frac{-1}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases}X+2=x\\ Y-2=y\end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=\frac{3}{x}$ تكافئ $Y-2=\frac{-1}{X+2}$ تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

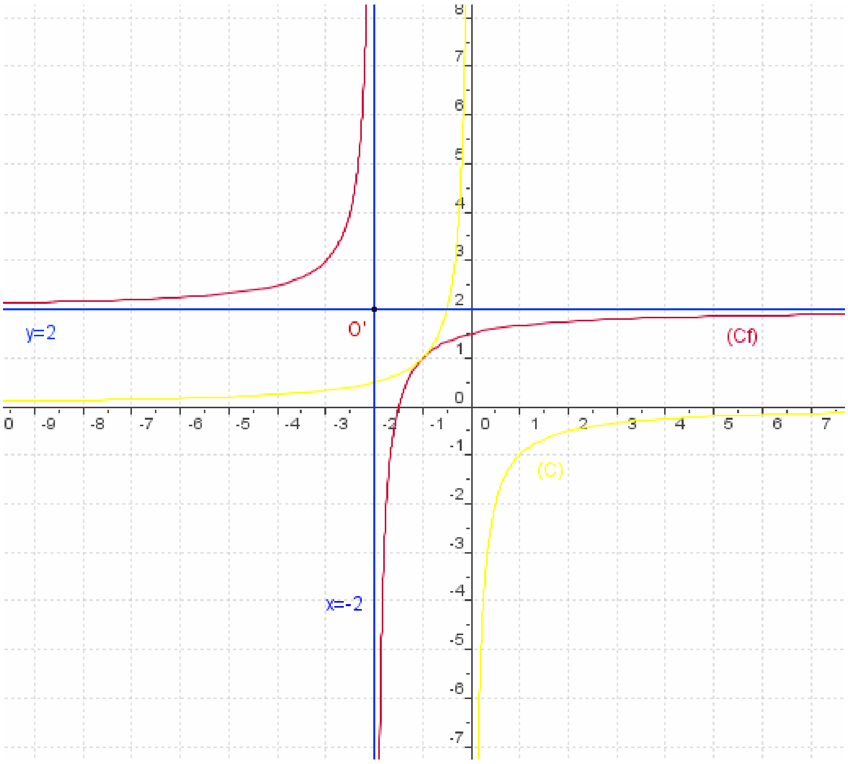
إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه

$t(O)=O'$ أي $O'(-2;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x=-2$ و $y=2$

و حيث أن الدالة $x\to\frac{-1}{x}$ تزايدية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تزايدية على

كل من $]-\infty;-2[$ و $]-\infty;-2]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-\frac{3}{2}$

x	-3	-2	-1	0	2
$f(x)$	1	//	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$

الحالة العامة $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

نشاط

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

1- حدد α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

2- بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to \frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

و استنتج طبيعة (C_f)

3- بين أن تغيرات f مرتبطة بالعدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

خاصيات

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

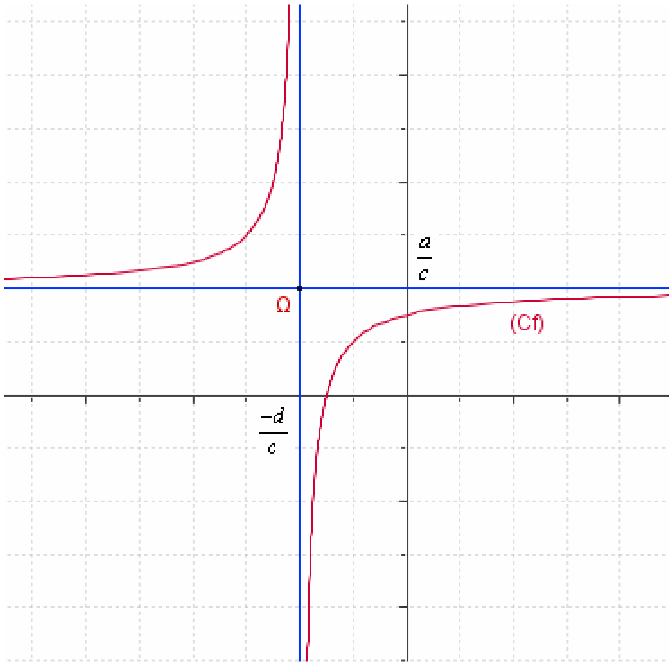
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to \frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ $x=\alpha$ و $y=\beta$

ملاحظة: $\alpha=\frac{-d}{c}$ و $\beta=\frac{a}{c}$

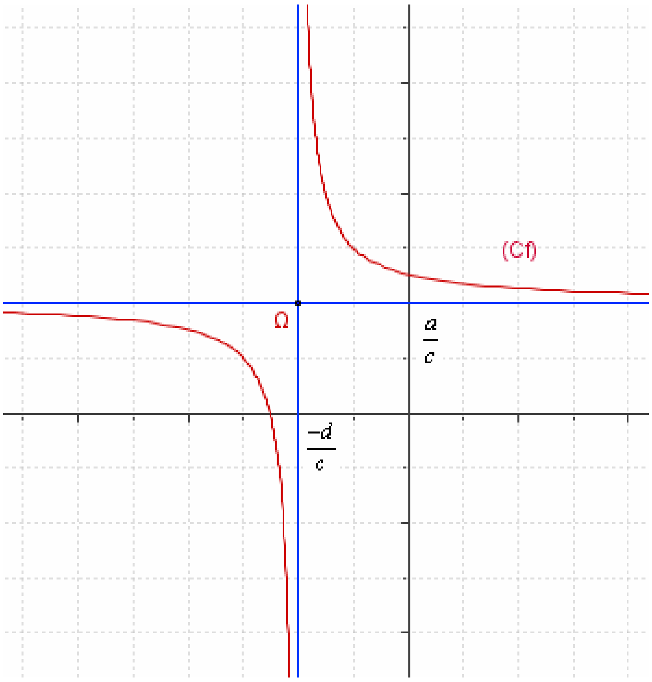
*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \succ 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$



*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \prec 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$



5- دالة الجيب $\sin$ - دالة جيب التمام $\cos$

أ/ دالة الجيب $\sin$

تعريف

الدالة $\sin us$ هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيبه $\sin x$
نكتب $\sin : x \to \sin x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$ نقول ان الدالة $\sin$ فردية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$
ومنه $\sin x = \sin(x + 2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ نقول ان الدالة $\sin$ دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و حيث $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى على مجال سعته 2π مثلا $]-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى

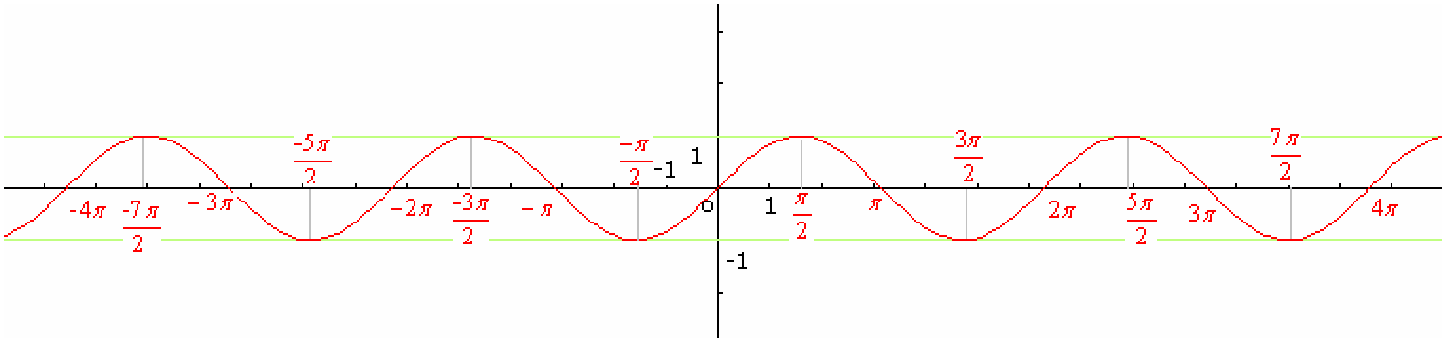
في المجالات $]-\pi + 2k\pi;\pi + 2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

$\sin$ فردية و منه المنحنى متماثل بالنسبة لأصل المعلم

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\sin})$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $(C_{\sin})$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة $\sin$



ب/ دالة جيب التمام $\cos$

تعريف

الدالة $\cos\sin us$ هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيب تمامه $\cos x$

نكتب $\cos : x \to \cos x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos x$ نقول إن الدالة $\cos$ زوجية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\cos x = \cos(x+2k\pi)$

ومنه $\cos x = \cos(x+2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos x = \cos(x+2\pi)$ نقول إن الدالة $\cos$ دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;\cos x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و حيث $\cos x = \cos(x+2k\pi)$ فان $M'(x+2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى $(C_{\cos})$ على مجال سعته 2π مثلا $]-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى في المجالات $]-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

$\cos$ زوجية و منه المنحنى $(C_{\cos})$ متماثل بالنسبة لمحو الاراتيب

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\cos})$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $(C_{\cos})$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة $\cos$