Lycée charif El Idrissi Assoul	Notions de logique 1 bac sciences expérimentales	Professeur : Zillou Mouad Année scolaire : 2021/2022

Exercice 01 :

À l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques, écrire les propositions suivantes :

P : « le carré de tout nombre réel est toujours un nombre réel positif »

Q : « l'équation $x^2-3x+2=0$ admet au moins une solution réelle »

R:«il n'existe aucun nombre rationnel x tel que $x^2=3$ »

S : « il existe au moins un réel a, tel que pour tout réel x positif on a $a \le x$ »

Exercice 02

1) Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes s'il est possible

$P:"(\forall x\in\mathbb{R});x^2-x+1<0"$

$Q:"(\exists x\in\mathbb{Q});2x^2+3x=0"$

$R:"(\forall x\in\mathbb{Z});(\exists y\in\mathbb{N});x^2+y^2\ge 1"$

$V;"(\exists y\in\mathbb{Z});(\forall x\in\mathbb{N}^*);x+y=0"$

$S:"(\exists p\in\mathbb{Z});\dfrac{8}{p+4}\in\mathbb{N}"$

$T:"(\forall x\in\mathbb{R}_+^*);x>0\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}\ge 2"$

$U:"(\forall x\in\mathbb{R});-1\le\cos(x)\le 1"$

Exercice 03 : Raisonnement par disjonction des cas

En utilisant le résonnement par disjonction des cas :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+|x-5|-5=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}2|x-1|-y=0\\ x+2y=-2\end{cases}$

3) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});\dfrac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$

Exercice 04 : Raisonnement par contraposée

En utilisant le raisonnement par contraposée Montrer que :

1) $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\});\left(x\ne\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{3x}{x+1}\ne 1\right)$

2) $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});(x\ne 1 \text{ et } y\ne 1\Rightarrow 1+xy\ne x+y)$

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*)(\forall y\in\mathbb{R}^*);\left(y\ne\dfrac{-3}{4}x\Rightarrow\dfrac{x-y}{x+y}\ne 7\right)$

4) $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});(x\ne y\Rightarrow(x-1)(y+1)\ne(x+1)(y-1))$

5) $(\forall x\in\mathbb{R});(x\ne -2\Rightarrow x^3+2x^2+x+2\ne 0)$

Exercice 05 : Raisonnement par équivalence :

1) Soient $a;b$ et c des réels.

Montrer que $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Montrer que : $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\le\dfrac{4}{3}\sqrt{x}$

3) Soient x et y deux réels positifs . Montrer que :

$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\Leftrightarrow(x=0 \text{ ou } y=0)$

4) Soient x un nombre réel , Montrer que :

$|x-2|<\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{3}{13}<\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{11}$

5) Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{R}^+);(\forall b\in\mathbb{R}^+)$

$2(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a+b+2\Leftrightarrow a=1 \text{ et } b=1$

Exercice 06 : Raisonnement par contre-exemple

1) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R});2x-4>0$ est une proposition fausse

2) Montrer que $a\ne b \text{ et } c\ne d\Rightarrow a+c\ne b+d$ est une proposition fausse

3) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*);x+\dfrac{1}{x}\ge 2$ est fausse

Exercice 07 : Raisonnement par absurde

1) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x)=2x^3+3x-1$

2) Soit ABC un triangle qui a pour dimension $AB=3$ $AC=4$ et $BC=6$. Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*).\sqrt{1+\dfrac{2x^2}{3}}\ne 1+\dfrac{x^2}{3}$

4) Montrer que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

5) Soient $a\in\mathbb{Q}$ et $b\notin\mathbb{Q}$. montrer que $a+b\notin\mathbb{Q}$

6) Montrer que le système $\begin{cases}2x-3z>3\\ 3y-2x\ge 3\\ y-z\le 2\end{cases}$ n'admet pas de solution.

Exercice 08 : Raisonnement par récurrence

Montrer que :

1) $(\forall n\in\mathbb{N});1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

2) $(\forall n\in\mathbb{N}^*);1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) $(\forall n\in\mathbb{N}^*);1\times 2+2\times 3+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

4) $(\forall n\in\mathbb{N}^*);1+3+5+\cdots\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$

5) $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

6) $(\forall n\in\mathbb{N}^*);$ 10^n-1 est divisible par 9

7) $(\forall n\in\mathbb{N}^*);$ $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7