امتحان تجريبي في الرياضيات
ماي 2019

معلومات عامّة

– لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة.
– مدّة إنجاز موضوع الامتحان: 4 ساعات.
– عدد الصفحات: 4 صفحات (الصفحة الأولى تتضمّن معلومات و الصفحات الثانية و الثالثة و الرابعة تتضمّن تمارين الامتحان).
– يمكن للمترشّح إنجاز تمارين الامتحان في التّرتيب الذي يناسبه.
– ينبغي تفادي استعمال اللّون الأحمر عند تحرير الأجوبة.
– بالرّغم من تكرار بعض الرّموز في أكثر من تمرين فكلّ رمز مرتبط بالتّمرين المستعمل فيه و لا علاقة له بالتّمارين السّابقة أو اللاحقة.

معلومات خاصّة

يتكوّن الموضوع من خمسة تمارين مستقلّة فيما بينها و تتوزّع حسب المجالات التّالية:

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	البنيات الجبرية	3.5
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3.5
التمرين الثالث	الحسابيات	3
التمرين الرابع	الدوال و المتتاليات و التكامل	5
التمرين الخامس	دراسة دالة معرفة بتكامل	5

بالتوفيق

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول 3.5 نقطة

نذكر أنّ $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية، صفرها المصفوفة المنعدمة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

و أنّ $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ بالتوفيق فضاء متجهي حقيقي ، لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ نضع $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&x-y\\x-y&x+y\end{pmatrix}$

و نعتبر $E=\{M(x,y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ و بالتوفيق $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ و $K=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

1) بين أنّ $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي 0.5

2) تحقّق أنّ (J,K) أساس في $(E,+,\cdot)$ 0.5

3) أ) تحقّق أنّ $J^2=2J$ و $K^2=2K$ و $J\times K=O$ و $K\times J=O$ 0.5

ب) استنتج أنّ E جزء مستقر بالتوفيق من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ 0.5

4) بين أنّ $(E,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية غير كاملة 0.5

5) حل في E المعادلة بالتوفيق $X^3=X$ 0.5

6) نعتبر التطبيق $\varphi: \begin{array}{l} E \to \mathbb{C} \\ M(a,b)\mapsto a+ib \end{array}$ حدد قانون تركيب داخلي T في $\mathbb{C}$ لكي يكون φ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},T)$ 0.5

التمرين الثاني 3.5 نقطة

ليكن m عدد عقدي غير منعدم

بالتوفيق

الجزء الأول: نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): 2z^2+m(1+i)z+m^2(1+i)=0$

1) تحقق أنّ مميز المعادلة بالتوفيق (E) هو $\Delta=(m(1-3i))^2$ 0.25

2) حدّد z_1 و z_2 حلّي المعادلة (E) 0.25+0.25

3) حدّد قيم m بحيث $z_1\times z_2=\dfrac{7i-1}{2}$ 0.5

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

نعتبر النقط A و بالتوفيق B و C التي ألحاقها على التوالي $a=-mi$ و $b=-\dfrac{m}{2}+\dfrac{1}{2}im$ و $c=-m-\dfrac{1}{2}mi$

1) تحقّق أنّ $\dfrac{b-c}{a-c}=i$ و استنتج طبيعة المثلث ABC 0.5

2) لتكن (C) مجموعة النقط $M(m)$ من المستوى بحيث يكون شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو $\sqrt{10}$ ،
بين أنّ (C) هي الدائرة التي مركزها O و شعاعها 4 0.5

3) نعتبر التحويل f في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M(z')$ بحيث: $z'=2iz-m(2+i)$

أ) حدّد الصيغة العقدية لكل بالتوفيق من الدوران $r=R(A,-\frac{\pi}{2})$ و التحاكي $h=h(A,-2)$ — 0.25+0.25

ب) بين بالتوفيق أنّ $f=h\circ r$ — 0.5

ج) حدّد صورة الدائرة (C) بالتحويل f — 0.25

التمرين الثالث 3 نقط

الجزءان I) و II) مستقلان

I) نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة $(E)\ \ 2x^4+3x+1\equiv 0\ [10]$

1) بين أنّه إذا كان x حل بالتوفيق للمعادلة (E) فإنّ $x\wedge 10=1$ يمكنك استعمال مبرهنة bezout — 0.5

2) باستعمال مبرهنة فيرما بين أنه إذا كان x حل للمعادلة (E) فإنّ $\begin{cases} x\equiv 1\ [2] \\ x\equiv -1\ [5] \end{cases}$ — 0.5

بالتوفيق

3) استنتج أنّ: x حل للمعادلة $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 1\ [2] \\ x\equiv -1\ [5] \end{cases}$ ثم حدد بالتوفيق مجموعة حلول المعادلة (E) — 0.5+0.25

II) نعتبر $a\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ و نضع $S=1+a+a^2+...+a^{2018}$

1) تحقق أنّ بالتوفيق $(a-1)S=a^{2019}-1$ ثم استنتج أنّ $a^{2019}\wedge(a-1)=1$ — 0.25+0.25

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $a^{2019}x+(a-1)y=1$ — 0.75

التمرين الرابع 5 نقط

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2xe^x$

C_f منحنى الدالة f في معلم متعامد بالتوفيق ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1\,cm$

I) **1)** أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و بالتوفيق أدرس رتابة f و ضع جدول التغيرات — 0.5

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب ب cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين C_f والمستقيمات $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ — 0.5

3) بين أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيداً α في $\mathbb{R}$ و أنّ $0<\alpha<1$ — 0.5

4) أ) تحقّق أنّ $\forall x\in[0,1]: |f'(x)|\geq 2$ — 0.25

ب) ليكن g قصور f على $[0,1]$ ، تحقّق أنّ g تقابل و أنّ $\forall x\in[0,1]: |(g^{-1})'(x)|\leq\frac{1}{2}$ — 0.5

ج) نعتبر المتتالية (u_n) بالتوفيق المعرفة بما يلي: $u_0=\alpha$ و $u_{n+1}=g^{-1}(u_n)$ ، بين بالترجع أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: 0<u_n<1$ — 0.25

د) باستعمال متفاوتة التزايدات المنتهية، بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: 0<u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$ — 0.5

هـ) استنتج أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: 0<u_{n+1}\leq(\frac{1}{2})^n\cdot\alpha$ و بالتوفيق حدّد $\lim_{n\to+\infty} u_n$ — 0.5

II) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f_n المعرّفة بالتوفيق على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n(x) = 2x^n e^x$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists ! \alpha_n \in]0,1[) : f_n(\alpha_n) = 1$ 0.5

2) بيّن بالتوفيق أنّ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in]0,1[) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$ 0.5

3) بين أنّ المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا واستنتج أنها متقاربة ثم حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ 0.25+0.25

بالتوفيق

التمرين الخامس 5 نقط

نعتبر الدالة h بالتوفيق المعرّفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:
$$\begin{cases} h(x) = \int_x^{2x} \ln(e^t - 1)\, dt \; ; \; x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

1) تحقّق أنّ الدالة $t \mapsto \ln(e^t - 1)$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ 0.5

2) أ) استنتج أنّ $\forall x > 0 : \; x\ln(e^x - 1) \leq h(x) \leq x\ln(e^{2x} - 1)$ 0.5

ب) بين أنّ h متصلة بالتوفيق على اليمين في 0 0.5

ج) أدرس قابلية اشتقاق h على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة 0.5

د) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$ و أعط تأويلاً بالتوفيق هندسياً للنتيجة 0.5

3) بين أنّ الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أنّ $\forall x > 0 : h^{/}(x) = \ln(e^{3x} + e^{2x} - e^x - 1)$ 0.25+0.25

4) أ) أدرس تغيرات بالتوفيق الدالة $u(x) = e^{3x} + e^{2x} - e^x - 2$ على $[0,+\infty[$ 0.5

ب) استنتج أنّه يوجد a وحيد من $]0,\ln 2[$ بحيث $u(a) = 0$ و أنّ بالتوفيق $h^{/}(a) = 0$ 0.5

5) أدرس رتابة بالتوفيق الدالة h وضع جدول التغيرات 0.5

6) أنشئ منحنى h في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\; cm$ نأخذ: $a \approx 0,2$ و $h(a) \approx -0,3$ و $h(0,5) \approx 0$ 0.5