

مبادئ في المنطق

I- تعاريف ومصطلحات

1- العبارة – الدالة العبارية

أ- تعريف

كل جملة صحيحة نحويًا ويمكن الحكم عن صحتها معناها أو خطأها بدون نقاش تسمى عبارة.

أمثلة

نعتبر النصوص التالية

$$p_1: -2 \times 4 = -8 \quad p_2: 3 \text{ عدد زوجي}$$

$$p_3: 5 + 7 > 4$$

p_1 و p_3 عبارتان صحيحتان

p_2 عبارة خاطئة

ب- تعريف

كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة يسمى دالة عبارية.

أمثلة

$$x \in \mathbb{R} \quad x \leq 3 \quad \text{دالة عبارية}$$

$$(x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad x - 2y = 3 \quad \text{دالة عبارية}$$

2- المكملات – العبارات المكمنة

أ- المكمل الوجودي

لتكن $p(x)$ دالة عبارية $x \in E$;

العبارة $(\exists x \in E): p(x)$ تعني يوجد على الأقل عنصراً x من E يحقق $p(x)$.

الرمز \exists يسمى المكمل الوجودي .

إذا كان يوجد عنصراً وحيداً x من E يحقق $p(x)$ فإننا نكتب $(\exists! x \in E): p(x)$

أمثلة

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -1 \quad \text{عبارة خاطئة}$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} \quad \frac{x}{4} \in \mathbb{Z} \quad \text{عبارة صحيحة}$$

$$\exists! x \in [0; \pi] \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{عبارة صحيحة}$$

$$\exists! x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \quad \text{عبارة خاطئة}$$

ب- المكمل الكوني

لتكن $p(x)$ دالة عبارية $x \in E$;

العبارة $(\forall x \in E): p(x)$ تعني أن جميع عناصر E تحقق $p(x)$. تقرأ لكل x من E , $p(x)$ محقق (أو صحيحة).

الرمز \forall يسمى المكمل الكوني.

أمثلة

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0 \quad \text{عبارة صحيحة.}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad x - y = 1 \quad \text{عبارة خاطئة}$$

د- العبارات المكمنة

لتكن $p(x; y)$ دالة عبارية معرفة معرفة على $E \times F$

نطبق أحد المكملين على الخاصية $p(x; y)$ بالنسبة للمتغير x

مثلاً المكمل الكوني، نحصل على $(\forall x \in E): p(x; y)$

دالة عبارية للمتغير y وهي غير مرتبطة بـ x .

نطبق عليها أحد المكملين بالنسبة للمتغير y . مثلاً المكمل الوجودي،

فنحصل على العبارة $(\exists y \in F) (\forall x \in E) p(x; y)$.

أمثلة

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) y^2 = x \text{ عبارة خاطئة}$$

(نأخذ $x = -1$)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x + y = -2 \text{ عبارة صحيحة}$$

$$(\exists y \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) x + y = -2 \text{ عبارة خاطئة}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) |x + y| \leq |x| + |y| \text{ عبارة صحيحة.}$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x + y = 3 \text{ عبارة صحيحة.}$$

ملاحظة هامة

ترتيب مكملات من نفس الطبيعة ليس له أهمية في تحديد المعنى التي تحملها العبارة المكملية .
ترتيب مكملات من طبيعة مختلفة له أهمية في تحديد المعنى التي تحملها العبارة المكملية .

II- العمليات المنطقية

1- نفي عبارة

أ- تعريف

نفي عبارة p هي عبارة نرمز لها بـ \bar{p} أو $\neg p$ تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة. \bar{p} تقرأ نفي p

جدول حقيقة \bar{p}

\bar{p}	p
1	1
0	0

أمثلة

نفي العبارة $1 < \sqrt{2}$ هي العبارة $1 \geq \sqrt{2}$

نفي العبارة $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ هي العبارة $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

ب- نفي عبارة مكملية

* نفي العبارة $(\forall x \in E) A(x)$ هي العبارة $(\exists x \in E) \overline{A(x)}$

* نفي العبارة $(\exists x \in E) A(x)$ هي العبارة $(\forall x \in E) \overline{A(x)}$

* نفي العبارة $(\forall x \in E) (\forall y \in F) A(x; y)$ هي العبارة $(\exists x \in E) (\exists y \in F) \overline{A(x; y)}$

نفي العبارة $(\exists x \in E) (\forall y \in F) A(x; y)$ هي العبارة $(\forall x \in E) (\exists y \in F) \overline{A(x; y)}$

مثال اعط نفي العبارة التالية $(\forall z > 0) (\exists x \in]0; 1[) (\exists y \in]0; 1[): x^2 + y^2 < z$

د- نتيجة (الاستدلال بالمثال المضاد)

للبرهان على أن عبارة ما p خاطئة ، يكفي أن نبين أن نفيها \bar{p} صحيحة.

للبرهنة على خطأ $(\forall x \in E): A(x)$ يكفي أن نبرهن صحة $(\exists x \in E): \overline{A(x)}$

تطبيق بين أن $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$) خاطئة

نعتبر $x = -2$ $-2 + \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2} < 2$ إذن لدينا $(\exists x \in \mathbb{R}^*): x + \frac{1}{x} < 2$ عبارة صحيحة

و منه $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$) خاطئة

2- الفصل المنطقي

تعريف

فصل العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين p و q صحيحتين .
و تكتب (p أو q) نكتبها أيضا $p \vee q$

جدول حقيقة $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ أو $5 > 2$ صحيحة

العبارة $2^2 = -4$ أو $-3 \geq 1$ خاطئة

ملاحظة

* العبارتان $(p \text{ أو } q)$ و $(q \text{ أو } p)$ تحملان نفس المعنى نقول عملية الفصل تبادلية
* العبارتان r أو $(p \text{ أو } q)$ و $(r \text{ أو } p)$ أو q تحملان نفس المعنى، نقول عملية الفصل تجميعية.

3- العطف المنطقي

تعريف

عطف العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا.

و تكتب $(p \text{ و } q)$ نكتبها أيضا $p \wedge q$

جدول حقيقة $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ و $5 > 2$ خاطئة

العبارة $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0)$ و $-3 < 1$ صحيحة

ملاحظة

* العبارتان $(p \text{ و } q)$ و $(q \text{ و } p)$ تحملان نفس المعنى نقول عملية العطف تبادلية
* العبارتان r و $(p \text{ و } q)$ و $(q \text{ و } p)$ و $(p \text{ و } r)$ و q تحملان نفس المعنى، نقول عملية العطف تجميعية.
* $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ و $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ بين ذلك

4- الاستلزام

تعريف

استلزام العبارتين p و q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة.

و تكتب $p \Rightarrow q$ تقرأ p تستلزم q

جدول حقيقة $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

أمثلة

العبارة $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0) \Rightarrow 4+1=5$ صحيحة

العبارة $2 > 1 \Rightarrow -1 = 2+3$ خاطئة

العبارة $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5-1=20$ صحيحة

العبارة $(\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0) \Rightarrow 2-1=1$ صحيحة

اصطلاح إذا كانت العبارة $p \Rightarrow q$ صحيحة ، نقول إن q استنتاج منطقي للعبارة p .

ملاحظة

* العبارتان $p \Rightarrow q$ و $(\bar{p} \vee q)$ تحملان نفس المعنى

* $q \Rightarrow p$ يسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $p \Rightarrow q$.

* للبرهنة على أن $p \Rightarrow q$ صحيحة ، يكفي أن نفترض أن p صحيحة و نبين أن q صحيحة.
نقول إن p شرط كاف لتحقيق q

تمرين تطبيقي

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\text{بين أن } -2 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3x+5}{x+4} \leq \frac{11}{2}$$

$$(\text{نفترض أن } -2 \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ و نبين أن } \frac{-3x+5}{x+4} \leq \frac{11}{2})$$

5- التكافؤ المنطقي

تعريف

ليكن p و q عبارتين
العبارة $(p \Rightarrow q \text{ و } q \Rightarrow p)$ تسمى تكافؤ العبارتين p و q وتكون صحيحة إذا كانت p و q لهما نفس قيم الحقيقة و نرمز لها بـ $p \Leftrightarrow q$ و تقرأ p تكافئ q أو p إذا وفقط إذا q أو p شرط لازم و كاف لتحقيق q

جدول حقيقة $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

أمثلة العبارة $(5 \text{ عدد فردي} \Leftrightarrow 3 > 2)$ صحيحة
العبارة $(-1 \text{ عدد موجب} \Leftrightarrow 5+2=3)$ صحيحة
العبارة $(-1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2 > 1)$ خاطئة

ملاحظة

* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ نقول إن التكافؤ عملية تبادلية
* $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$ نقول إن التكافؤ عملية تجميعية

تمرين

باستعمال جداول الحقيقة بين أن
 $(\bar{p} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ و $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$
صحيحة $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge q)$

III- القوانين المنطقية

كل عبارة مكونة من عبارتين أو عدة عبارات p, q, r, \dots مرتبطة بينها بالعمليات المنطقية و تكون صحيحة مهما كانت العبارات p, q, r, \dots تسمى قانونا منطقيا

1- أنشطة

بين أن العبارات التالية قوانين منطقية
 $p \vee \bar{p}$ ، $p \Leftrightarrow \bar{p}$ ، $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
 $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

ملاحظة و اصطلاح

* لدينا $q \Rightarrow (p \wedge (p \Rightarrow q))$ قانون منطقي و يسمى القاعدة العامة للاستدلال الاستنتاجي .
لبرهان على صحة العبارة q

نبين أن الاستلزام $p \Rightarrow q$ صحيحا حيث p عبارة ما صحيحة، ثم نستنتج أن q صحيحة.
* لدينا $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ قانون منطقي نقول إن الاستلزام عملية متعدية.

2- بعض القوانين المنطقية

*- قوانين مورگان LOIS DE MORGAN

العبارات التالية قوانين منطقية

$$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q} \quad \overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

تطبيق حل في \mathbb{R}^2 النظام

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

الحل

$$(x; y) \in S \Leftrightarrow 2x - y = 2 \wedge (x - y = 0 \vee x + y = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y = 2 \wedge x - y = 0) \\ \vee (2x - y = 2 \wedge x + y = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \wedge y = 2) \vee \left(x = \frac{2}{3} \wedge y = -\frac{2}{3} \right)$$

$$S = \left\{ (2; 2); \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right) \right\} \text{ إذن}$$

تمرين

اعط نفي العبارات $\forall x \in \mathbb{R}: x + 1 \geq 0 \vee x^2 - 1 < 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (x; y) \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x + y}{1 + xy} \leq 1$$

*- قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ قانون منطقي.

نتيجة (الاستدلال بالتكافؤات المتتالية)

نستنتج من هذا القانون أنه إذا كان $(A \Leftrightarrow B)$ و $(B \Leftrightarrow C)$ فإن $(A \Leftrightarrow C)$ صحيحا.

تمرين

ليكن $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x; y) = (2; 8) \text{ بين أن}$$

*- د- قانون الاستلزام المضاد للعكس

العبارة $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ قانون منطقي

ملاحظة

في بعض الأحيان يصعب البرهان على صحة $A \Rightarrow B$

فلنجأ الى البرهان على صحة $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ثم نستنتج صحة $A \Rightarrow B$

هذا البرهان يسمى الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

تمرين ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2 \text{ بين أن}$$

نتيجة

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B})$ قانون منطقي

*- ج- قانون الخلف

قانون منطقي $((\bar{B} \Rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{B} \Rightarrow C)) \Rightarrow B$

نتيجة (الاستدلال بالخلف)

نفترض أن \bar{B} صحيحة ، ونبين أن $\bar{B} \Rightarrow \bar{C}$ صحيحة (أي \bar{C} صحيحة)
حيث C عبارة ما صحيحة (أي $\bar{B} \Rightarrow C$ صحيحة)
و هذا تناقض لأن C لا يمكن أن تكون صحيحة و خاطئة في نفس الوقت . ثم نستنتج أن B صحيحة.
هذا نوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالخلف.

تمرين برهن أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

* ر- قانون فصل الحالات

قانون منطقي $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow C]$

ملاحظة

إذا كانت $A \vee B$ صحيحة فانه للبرهنة على صحة C ، نبين أن $A \Rightarrow C$ صحيحة و $B \Rightarrow C$ صحيحة ،
ثم نستنتج أن C صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بفصل الحالات
عمليا نطبق $C \Rightarrow [(A \Rightarrow C) \wedge (\bar{A} \Rightarrow C)]$ لأن $A \vee \bar{A}$ صحيحة دائما.

تمرين حل في \mathbb{R} المعادلة $x^2 - |x - 1| + 1 = 0$

VI- مبدأ التراجع

خاصية

لتكن $p(n)$ خاصية لمتغير n صحيح طبيعي

إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون العبارة $p(n_0)$ صحيحة .

و إذا كانت العبارة $p(n) \Rightarrow p(n+1) \forall n \geq n_0$ صحيحة. فان العبارة $p(n) : (\forall n \geq n_0)$ صحيحة.

ملاحظة

للبرهان على أن $p(n) : (\forall n \geq n_0)$ صحيحة، نتبع الخطوات التالية

• التحقق:

نتحقق أن العبارة $p(n_0)$ صحيحة

• افتراض التراجع:

نفترض أن العبارة $p(n)$ صحيحة $n \geq n_0$ و نبين أن $p(n+1)$ صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بالتراجع

تمرين بين بالتراجع $2^n \geq n^2 \forall n \geq 4$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$