Calcul trigonométrique

I. Rappel

☞Activité

1) Définir un cercle trigonométrique.
2) Soit (C) un cercle trigonométrique et $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ un repère orthonormé direct lié au (C) Soit M un point de (C) d'abscisse curviligne $\dfrac{17\pi}{3}$
   a) Déterminer la valeur de α et k sachant que $-\pi < \alpha \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ pour que $\dfrac{17\pi}{3} = \alpha + 2k\pi$
   b) Déduire l'abscisse curviligne principale du point M .
3) Déterminer les abscisses curvilignes principales puis les placer sur (C) :

$$A\left(\frac{7\pi}{2}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{67\pi}{4}\right) \quad ; \quad C\left(\frac{267\pi}{6}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$$

4) Simplifier l'expression suivante : $A(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x) - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 3\cos(\pi - x)$

II. Formules de transformation

☞Activité ①

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct lié au (C)

1) Les assertions suivantes sont-elles vraies ? en justifiant la réponse
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $\cos(x+y) = \cos(x) + \cos(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $\sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)$

2) Soient A et B deux points de (C) d'abscisse curvilignes a et b respectivement

a) Remarquons que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv b - a\,[2\pi]$. Montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos(a-b)$

b) Ecrire $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$

c) En utilisant l'expression analytique du produit scalaire calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

d) Déduire que $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

e) Remarquons que $a + b = a - (-b)$ déduire que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

f) Remarquons que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

Déduire que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

Propriété

Soient a et b des nombres réels on a

$\otimes \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$; $\otimes \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

$\otimes \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$; $\otimes \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Application ①

1) Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$.

2) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

3) Soit $x\in\mathbb{R}$; simplifier les expressions suivantes

$A(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ et $B(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

☞Activité ②

Soient a et b des nombres réels tels que

$a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$, $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$, $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ et $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$

Montrer que $\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ et $\tan(a-b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Propriété ②

Soient a et b des nombres réels tels que $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ et $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$, et

- Si $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ on a $\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.
- Si $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ on a $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

Application ②

1) Soit x un nombre réel tel que $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ et $x\neq\frac{-\pi}{4}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$

Simplifier l'expression suivantes $A=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

2) Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$.

Propriété ③ :

Soit $a\in\mathbb{R}$ on a

- $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$; • $\cos(2a)=2\cos^2(a)-1$ • $\cos^2(2a)=1-2\sin^2(a)$
- $\sin(2a)=2\cos(a)\sin(a)$; • $\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$ • $\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$
- si $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ et $2a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ alors $\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

Application③

1) On remarque que $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$ .montrer que $1+\cos(x)+2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=2$

3) Soit $x\neq k\pi / k\in\mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

III. Transformation d'un produit en une somme – Transformation d'une somme en un produit

1. Transformation d'un produit en une somme

Activité③

Simplifier les expressions suivantes

a) $cos(a+b)+cos(a-b)$

b) $cos(a+b)-cos(a-b)$

c) $sin(a+b)+sin(a-b)$

d) $sin(a+b)-sin(a-b)$

Propriété④

Soient a et b deux nombres réels on a

- $cos\,a\,cos\,b=\frac{1}{2}[cos(a+b)+cos(a-b)]$
- $sin\,a\,sin\,b=-\frac{1}{2}[cos(a+b)-cos(a-b)]$
- $sin\,a\,cos\,b=\frac{1}{2}[sin(a+b)+sin\,(a-b)]$
- $cos\,a\,sin\,b=\frac{1}{2}[sin(a+b)-sin\,(a-b)]$

Application④

1) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2) Montrer que $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2(x)-\frac{3}{4}$

3) Ecrire sous forme d'une somme les expressions suivantes

$A(x)=\sin(x)\sin(3x)\sin(5x)$ et $B(x)=\cos(x)\cos(3x)\cos(5x)$

2. Transformations d'une somme en un produit

On pose $p=a+b$ et $q=a-b$ alors $a=\frac{p+q}{2}$ et $b=\frac{p-q}{2}$

Propriété⑤

Soient p et q deux nombres réels on a

- $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

- $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$; • $\cos(p)+\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Application ⑤

1) a. Transformer en produit les expressions suivantes $A(x)=\sin(x)+\sin(7x)$ et $B(x)=\sin(3x)+\sin(5x)$

b. Déduire que $A(x)+B(x)=4\cos(x)\cos(2x)\sin(4x)$

2) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

IV. Transformation de l'expression $a\cos(x)+b\sin(x)$

Introduction

Soient a et b deux nombres réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$

On considère l'expression suivante $a\cos(x)+b\sin(x)$

On a $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

Or on a $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

Donc $\exists\alpha\in\mathbb{R} / \begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

D'où $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right)$.

Par conséquent $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\alpha\right)$.

Propriété ⑥

Soient a et b deux nombres réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$

Il existe un nombre réel α tel que $a\cos x+b\sin x=r\cos\left(x-\alpha\right)$.

Avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Remarque

On peut écrire l'expression $a\cos(x)+b\sin(x)$ sous forme $a\cos x+b\sin x=r\sin\left(x+\beta\right)$

Avec $\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple

Transformer l'expression suivante $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)$

On a $a=\sqrt{3}$ et $b=1$ donc $r=\sqrt{a^2+b^2}=2$

Donc $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

Et aussi $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

Application ⑥

Ecrire sous forme de $r\cos(x-\alpha)$ les expressions suivantes

$A(x)=\cos(x)+\sin(x)$; $C(x)=\sqrt{2}\cos(x)+\sqrt{2}\sin(x)$

$B(x)=\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)$; $D(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

V. Equations et inéquations trigonométriques

Rappel

⊗ $\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases} \quad / k\in\mathbb{Z}$

⊗ $\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases} \quad / k\in\mathbb{Z}$

⊗ $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

Remarque

Les inéquations trigonométriques se résoudre à l'aide du cercle trigonométrique

Application ⑦

1) Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I

$2\cos x-\sqrt{3}=0$	$I=]-\pi;\pi]$
$\sqrt{2}sin\,x+1=0$	$I=]-\pi;\pi]$
$tanx=\sqrt{3}$	$I=[0,2\pi]$
$\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{2}$	$I=[-\pi,\pi]$

2) Résoudre dans I les inéquations suivantes :

* $2\cos x-\sqrt{3}\geq 0$; $I=]-\pi;\pi]$
* $\sqrt{2}\sin x+1\leq 0$; $I=]-\pi;\pi]$
* $\cos x>\frac{-\sqrt{2}}{2}$; $I=[0;2\pi]$
* $(\sqrt{2}\sin x+1)(2\cos x-\sqrt{3})\geq 0$ $I=]-\pi;\pi]$