

السلسلة 2: الدوال الأصلية لدالة

تمرين 1

حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل حالة:

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = x^4 + 4x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1 \quad (1)$$

$$I =]-\infty; 0[\quad \text{و} \quad f(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} + 3 \quad (2)$$

$$I =]0; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{3x^5} \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = (x+1)^3 \quad (4)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = 2x(x^2 + 5)^3 \quad (5)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = 2x(1+x^2)^7 \quad (6)$$

$$I =]-4; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{2}{(x+4)^3} \quad (7)$$

$$I =]-1; 3[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^4} \quad (8)$$

$$I =]0; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = (x^2 + x + 1)\sqrt{x} \quad (9)$$

$$I =]-\frac{1}{2}; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \quad (10)$$

$$I =]0; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^2} - \sqrt{2}x \quad (11)$$

$$I =]0; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x+1} \quad (12)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = 2x\sqrt{x^2+3} \quad (13)$$

$$I =]-1; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad (14)$$

$$I =]-2; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} \quad (15)$$

تمرين 2

حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة:

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \cos(3x) + \sin(2x) \quad (1)$$

$$I = [0; \frac{\pi}{2}[\quad \text{و} \quad f(x) = 1 - \frac{2}{\cos^2(x)} \quad (2)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \cos(x)(\sin^2(x) - 3\sin(x)) \quad (4)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \sin(x)\cos^3(x) \quad (5)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \sin^3(x) \quad (6)$$

$$I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\quad \text{و} \quad f(x) = 1 + \sin(x) + \tan^2(x) \quad (7)$$

$$I =]0; \frac{\pi}{2}[\quad \text{و} \quad f(x) = \tan^2(x) \quad (8)$$

تمرين 3

حدد الدالة الأصلية للدالة f التي تأخذ القيمة y_0 عند النقطة x_0 في كل حالة:

$$y_0 = -1 \quad \text{و} \quad x_0 = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{2}{x^2} + x \quad (1)$$

$$y_0 = 0 \quad \text{و} \quad x_0 = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3} \quad (2)$$

$$y_0 = 0 \quad \text{و} \quad x_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \quad (3)$$

$$y_0 = 1 \quad \text{و} \quad x_0 = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^2} \quad (4)$$

$$y_0 = -1 \quad \text{و} \quad x_0 = 2 \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt[3]{3x+2} \quad (5)$$

تمرين 4

لنكن f دالة عديبة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$.

(1) حدد a و b من \mathbb{R} بحيث لكل $x \neq 1$ لدينا:

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$$

(2) استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $] -\infty; 1[$.

تمرين 5

لنكن g دالة عديبة معرفة على $[1; +\infty[$: $g(x) = x\sqrt{x-1}$.

(1) بين أن لكل x من $[1; +\infty[$ لدينا: $g(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1}$.

(2) استنتج الدالة الأصلية للدالة g التي تأخذ القيمة 1 عند 2.

تمرين 6

لنكن h دالة عديبة معرفة على \mathbb{R} : $h(x) = x \sin(x)$.

(1) بين أن لكل x من \mathbb{R} لدينا: $h''(x) + h(x) = 2 \cos(x)$.

(2) استنتج الدالة الأصلية للدالة h التي نعدم في $-\pi$.

تمرين 7

لنكن f دالة عديبة معرفة على \mathbb{R} : $f(x) = \sin^4(x)$.

(1) أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ لكل x من \mathbb{R} .

(2) عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos(2x)$.

(3) استنتج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

تمرين 8

لنكن g دالة عديبة معرفة بـ: $\begin{cases} g(x) = x+1; & 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) = x^2+x; & 1 < x \leq 3 \end{cases}$

(1) بين أن g قابل دوالا أصلية على المجال $[0; 3]$.

(2) حدد علاقت بين a و b لكي تكون h المعرفة بـ:

$$g \text{ دالة أصلية للدالة } \begin{cases} h(x) = \frac{x^2}{2} + x + a; & 0 \leq x \leq 1 \\ h(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + b; & 1 < x \leq 3 \end{cases} \text{ على } [0; 3]$$