تمرين 1

❶ نعتبر المتتاليتين: $u_n=\frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}$ و $v_n=2\sqrt{n}$.

بين باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

❷ حدد نهاية المتتاليات التالية : $a_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

و $b_n=\frac{2011^n-2012^n}{2011^n+2012^n}$ و $c_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt{n}$

و $d_n=\frac{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n+3^n}}$ و $e_n=\frac{4n+(-1)^n}{3n-2(-1)^n}$

و $f_n=\frac{(-1)^n}{n}$ و $g_n=\frac{(-2)^n+1}{5^n+7}$ و $h_n=\frac{1}{n(3-\sin n)}$

و $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n} k$ و $v_n=\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i$ و $w_n=\frac{7^n+\sin(n)}{7^n+\cos(5^n)}$

و $z_n=\frac{E(\pi)+E(2\pi)+E(3\pi)+\ldots+E(n\pi)}{n^2}$.

تمرين 2

لتكن $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.

بين أن: $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$. ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 3

نعتبر المتتالية: $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

❶ أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n).

❷ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant u_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 4

نعتبر $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.

❶ أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n).

❷ تحقق أن: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$.

ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 5

نعتبر المتتالية: $u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.

❶ أدرس رتابة المتتالية (u_n).

❷ تحقق أن: $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ $\forall k\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

استنتج أن (u_n) متقاربة.

تمرين 6

نعتبر : $u_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.

ا) أدرس رتابة المتتالية (u_n).

ب) بين أن: $(\forall k\in\mathbb{N}^*):k!\geqslant 2^k$. استنتج أن (u_n) متقاربة

تمرين 7

نعتبر المتتالية: $u_n=\frac{2^n}{n!}$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.

بين أن: $(\forall n\geqslant 3):\ u_n\leqslant u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$. ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 8

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 1}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_1=1; \\ u_{n+1}=\frac{1}{16}\left(1+4u_n+\sqrt{1+24u_n}\right)\end{cases}$$

نضع $v_n=\sqrt{1+24u_n}$. بين أن $v_{n+1}-3=\frac{1}{2}(v_n-3)$

ثم أحسب u_n بدلالة n و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 9

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0=0 \text{ و } u_1=1 \\ u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n\end{cases}$$

نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n u_n$

❶ بين أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n.

❷ ا) بين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5.

ب) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

❸ ا) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ 0<u_{n+1}\leqslant\frac{2}{5}u_n$.

ب) استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*):0<u_n\leqslant\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 10

بين أن المتتاليتان $(u_n)_{n\geqslant 1}$ و $(v_n)_{n\geqslant 1}$ المعرفتان بما يلي:

$u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}$ و $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$

متحاديتان.

تمرين 11

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2; \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$$

❶ بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ -1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

❷ أدرس رتابة المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة .

❸ نعتبر المتتالية : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

ا) بين أن (v_n) هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

ب) حدد v_n ثم u_n بدلالة n، استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) أحسب بدلالة n كل من

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

و $$P_n = \prod_{i=0}^{n} v_i = v_0 . v_1 \cdots v_n$$

د) استنتج النهايتين $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

تمرين 12

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ و } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

❶ أحسب u_2 و u_3. ثم بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ u_n \geqslant n$.

❷ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

❸ نعتبر المتتاليتين: $\alpha_n = \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ و $\beta_n = \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$.

ا) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad \beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n}u_{2n+1}}$.

ب) استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad \alpha_n < \beta_n$

و أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad 0 < \beta_n - \alpha_n < \dfrac{1}{n}$.

ج) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n}u_{2n+2}}$.

د) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ \alpha_n = \dfrac{1}{\beta_n} - 1$. ثم استنتج أن (α_n) و (β_n) متحاديتان و أحسب نهايتهما المشتركة.

❹ بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين 13

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geqslant 1$.

❶ بين أن المعادلة $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$ تقبل حلا وحيدا a_n ينتمي إلى المجال $[0;1]$.

❷ بين أن المتتالية (a_n) تناقصية و مصغورة بالعدد $\dfrac{1}{2}$.

❸ بين أن المتتالية (a_n) متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

تمرين 14

نعتبر المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بحيث:

$$\begin{cases} a_1 < 0; \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} b_1 > 0; \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) : b_{n+1} = \dfrac{b_n}{n} \end{cases}$$

❶ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad a_n < 0 < b_n$.

❷ أدرس رتابة كل من المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

❸ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{(n-1)!}$.

❹ إستنتج أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متحاديتان.

❺ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

تمرين 15

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث:

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = \sqrt{2}; \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}.v_n} \end{cases}$$

❶ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 0 < u_n < v_n$.

❷ أدرس رتابة كل من المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❸ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.

❹ إستنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ v_n - u_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

❺ حدد $\lim(v_n - u_n)$ ثم إستنتج أن (u_n) و (v_n) متحاديتان .

❻ بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad v_n = \dfrac{1}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$

و أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad u_n = v_n \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

❼ حدد النهايتين : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

تمرين 16

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_o = 1; \\ (\forall n \in \mathbb{N}) : \ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{(n+1)^2}} \end{cases}$$

❶ بين أن $\quad u_n > 0 \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$. و أن (u_n) تزايدية.

❷ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ: $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

ا) بين أن $\quad v_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \quad :(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

ب) بين أن $\quad u_n = \sqrt{1+v_n} \quad :(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

ج) إستنتج أن $u_n \leqslant \sqrt{3}$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. و أن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ

❸ ا) بين أن $\quad 2^{k+1} \geqslant (k+1)^2 \quad :(\forall k \in \mathbb{N}^*\backslash\{1;2\})$.

ب) إستنتج أن $\quad u_{k+1}^2 - u_k^2 \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \quad :(\forall k \geqslant 3)$.

ج) إستنتج أن ℓ تحقق: $\sqrt{\frac{179}{72}} \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$

تمرين 17

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} u_0 = 2; \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

❶ بين أن: $\quad 2 \leqslant u_n \leqslant 3 \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

❷ نعتبر المتتاليتين : $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$. بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $v_{n+1} = 2 + \frac{v_n}{1+2v_n}$ و $w_n = 2 + \frac{1}{v_n}$ و $w_{n+1} = 2 + \frac{w_n}{1+2w_n}$.

❸ ا) أثبت أن: $\quad v_n \leqslant w_n \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

ب) أدرس رتابة كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n).

❹ ا) بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : w_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{25}(w_n - v_n)$$

ب) أستنتج أن (v_n) و (w_n) متحاديتين و حدد نهايتهما.

تمرين 18

f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t}}$.

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ و $(v_n)_{n\geqslant 1}$ متتاليتين معرفتين كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$$

$$v_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

نضع $w_n = u_n - v_n$.

❶ بين أن لكل t من $\mathbb{R}^+$: $|f(t) - t| \leqslant \frac{t^2}{2}$.

❷ بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $|w_n| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4}$.

❸ أستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $|w_n| \leqslant \frac{1}{2n}$.

و أن $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

تمرين 19

ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o > 0; \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$

❶ بين أن $\quad u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

❷ بين أن $\quad u_n \geqslant \sqrt{a} \quad :(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

❸ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية.

❹ استنتج أن (u_n) متقاربة. و أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

❺ بين أن $u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

❻ نفترض أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$.

بين : أن $u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}} \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

❼ نأخذ $u_o = 3$ ، أعط قيمة مقربة للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-8}.

تمرين 20

f دالة معرفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي: $f(x) = x + \cos(x)$.

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} u_0 = \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]; \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

❶ أدرس تغيرات الدالة f ثم استنتج أن: $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

❷ ا) بين أن: $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2} \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية.

ج) أستنتج أن (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

❸ نعتبر المتتالية : $v_n = \frac{\pi}{2} - u_n$

ا) تحقق أن: $\quad 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{\pi}{2} \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن: $\quad v_{n+1} = v_n - \sin(v_n) \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

❹ نقبل أن: $\quad 0 \leqslant x - \sin(x) \leqslant \frac{x^3}{6} \quad :\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

ا) بين أن: $\quad 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{6}v_n^3 \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

ب) أستنتج أن: $(v_0)^{3^n} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}} \geqslant v_n \geqslant 0 \quad :(\forall n \in \mathbb{N})$.

تمرين 21

لتكن f دالة معرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+4}$.

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2}; \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

❶ ا) أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$.

ب) بين أن $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$.

ج) بين أن:

$$\left(\forall(x,y)\in[0;1]^2\right):|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$$

❷ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 0<u_n\leqslant\dfrac{1}{2}$.

❸ ا) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

ب) أستنتج أن (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

❹ نعتبر المتتاليتين : $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$.

ا) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ w_n\leqslant\alpha\leqslant v_n$.

ب) أدرس رتابة كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n).

❺ ا) بين أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}):v_{n+1}-w_{n+1}\leqslant\frac{1}{4}(v_n-w_n)$$

ب) أستنتج أن (v_n) و (w_n) متحاديتان و حدد نهايتهما.

تمرين 22

نعتبر الدالة g المعرفة على $I=[1;+\infty[$ بما يلي:

$$g(x)=x^3-3x-5$$

❶ أدرس تغيرات الدالة g على I. ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2<\alpha<\dfrac{5}{2}$.

❷ أدرس إشارة $g(x)$ على I ثم استنتج حلول المتراجحة $x-\sqrt[3]{3x+5}\geqslant 0$ على I.

❸ f دالة معرفة على $I=[1;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=\sqrt[3]{3x+5}$$

أدرس تغيرات الدالة f على I ثم بين أن:

$$f\left(\left[\alpha;\frac{5}{2}\right[\right)\subset\left[\alpha;\frac{5}{2}\right[$$

❹ نعتبر المتتالية (u_n) بحيث: $\begin{cases} u_0\geqslant 1; \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

ا) حدد u_o بحيث تكون (u_n) ثابتة.

ب) نأخذ $u_o=\dfrac{5}{2}$.

(a) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ \alpha<u_n<\dfrac{5}{2}$.

(b) بين أن (u_n) تناقصية قطعا.

(c) أستنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

ج) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_{n+1}-\alpha\leqslant\dfrac{1}{\alpha^2}(u_n-\alpha)$.

د) بين أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_{n+1}-\alpha\leqslant\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n}\left(\frac{5}{2}-\alpha\right)$$

ه) حدد من جديد نهاية المتتالية (u_n).

تمرين 23

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=2\text{Arctg}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ مجموعة تعريف الدالة f. ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

❷ أدرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها.

❸ ليكن g قصور f على المجال $I=[1;+\infty[$.

ا) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب) حدد صيغة $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

❹ بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[1;2]$.

❺ نعتبر المتتالية المعرفة بـ: $\begin{cases} u_o=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

ا) بين أن : $f(2)>\dfrac{\pi}{3}$.

ب) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 1\leqslant u_n\leqslant 2$.

ج) نقبل أن :

$$\left(\forall(x,y)\in[1;2]^2\right):|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{4}|x-y|$$

بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$

د) استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ |u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{1}{4}\right)^n(\alpha-1)$.
ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.