

## الهندسة الفضائية

## القدرات المنتظرة

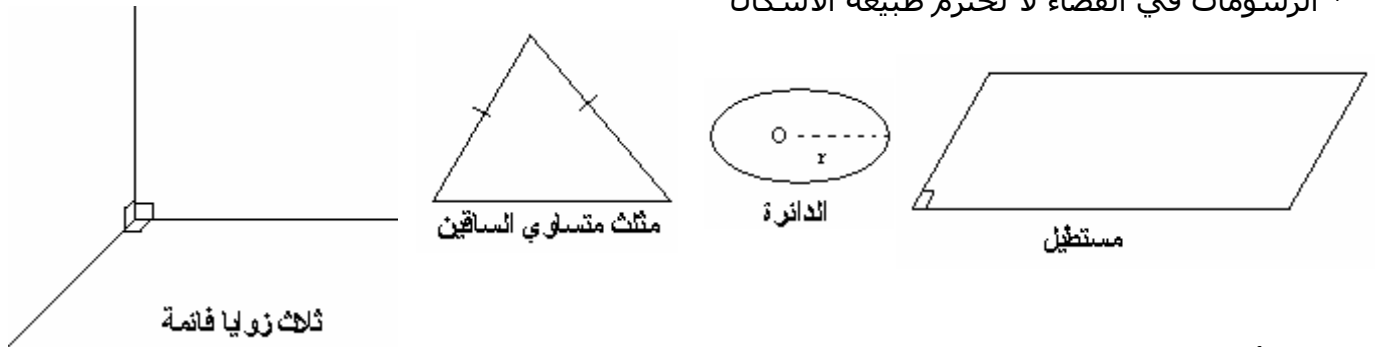
- \*- تعرف وتمثيل أجزاء في الفضاء على المستوى.
- \*- إدراك حالات المماثلة وحالات اللامماثلة بين مفاهيم وخصائص في المستوى ونظيراتها في الفضاء.
- \*- توظيف خصائص الهندسة الفضائية في حل مسائل مستقاة من الواقع.

## التوازي في الفضاء

## I- تذکیر

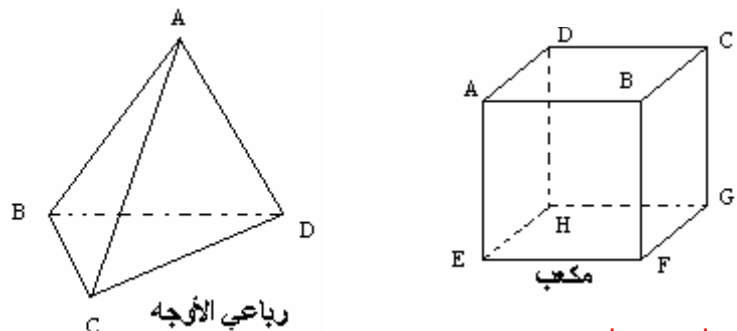
## 1- التمثيل المستوي للأشكال في الفضاء

\* الرسومات في الفضاء لا تحترم طبيعة الأشكال



\* لرسم أشكال في الفضاء نتبع التقنية التالية

- الخطوط المرئية في الواقع نرسمها بخطوط متصلة
- الخطوط الغير المرئية في الواقع نمثلها بخطوط متقطعة
- المستقيمات المتوازية في الواقع نمثلها بمستقيمات متوازي في الرسم
- النقط المستقيمة تمثل بنقط مستقيمة في الرسم.
- قطعتان متقايستان حاملهما متوازيان نمثلهما بقطعتين متقايستين حاملهما متوازيين



## 2- موضوعات و تعاریف

الفضاء مجموعة عناصرها تسمى نقط نرمر لها بالرمز (E)  
المستقيمات و المستويات أجزاء فعلية من الفضاء

## أ- موضوع 1

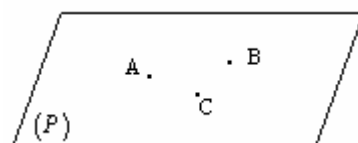
كل نقطتين مختلفتين  $A$  و  $B$  في الفضاء تحدد مستقيما وحيدا نرمز له بـ  $(AB)$

## تعريف

نقول عن عدة نقط أنها مستقيمية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نفس المستقيم

## ب- موضوعة 2

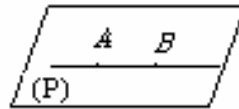
كل ثلاث نقط غير مستقيمة  $A$  و  $B$  و  $C$  في الفضاء تحدد مستوى وحيد نرمز له بـ  $(ABC)$  أو  $(P)$



## تعريف

\* نقول عن عدة نقط أنها مستوائية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نفس المستوى.  
 \* نقول عن مستقيمين ( أو مستقيمات ) أنهما مستويين ( أو مستوائية ) إذا كانا ( أو كانوا ) ضمن نفس المستوى.

إذا انتمت نقطتان مختلفتان من مستقيم (D) إلى مستوى (P) فان (D) ضمن (P).

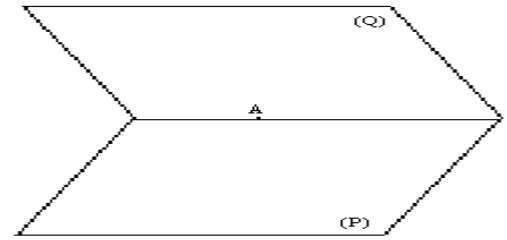
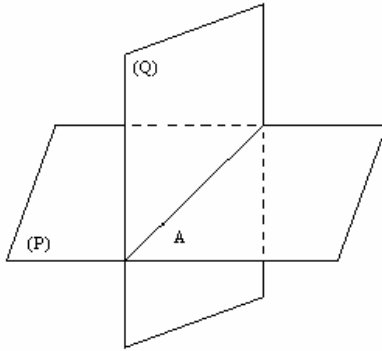


### ملاحظة هامة

جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صالحة في كل مستوى من مستويات الفضاء و كل مستقيم من مستقيماته.

### د- موضوعة 4

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فانهما يتقاطعان وفق مستقيم يمر من هذه النقطة.



### ذ- نتائج

#### نتيجة 1

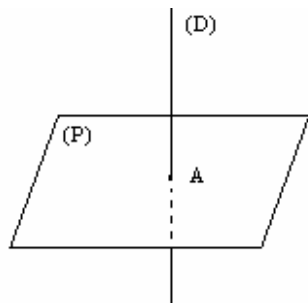
كل مستقيم ونقطة خارجه يحددان مستوى وحيدا في الفضاء

#### نتيجة 2

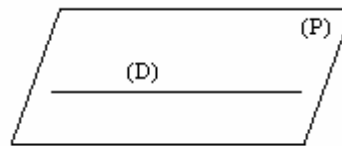
كل مستقيمين متقاطعين في الفضاء يحددان مستوى وحيد في الفضاء

### 3- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى

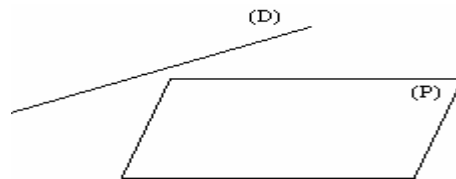
ليكن (D) مستقيم و (P) مستوى من الفضاء  
لدينا ثلاث وضعيات ممكنة  
الوضعية 1: (D) يخترق (P)

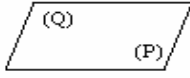
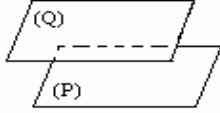
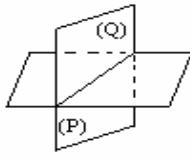


الوضعية 2:  $(D) \subset (P)$



الوضعية 3: (D) و (P) منفصلان ( أي ليست لهما أية نقطة مشتركة )





#### 4- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

ليكن  $(P)$  و  $(Q)$  مستويين في الفضاء. لدينا ثلاث حالات  
\*  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق مستقيم

\*  $(P)$  و  $(Q)$  منفصلان

(أي ليست لهما أية نقطة مشتركة)

\*  $(P)$  و  $(Q)$  منطبقان

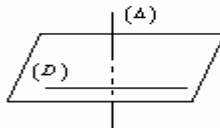
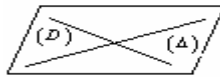
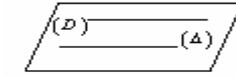
#### 5- الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين مختلفين. هناك ثلاث حالات

\*  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستويان ومنفصلان

\*  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستويان ومتقاطعان

\*  $(D)$  و  $(\Delta)$  غير مستويين



تمرين

ليكن  $EFGH$  رباعي الأوجه النقطة  $I$  من  $[FG]$  مخالفة عن

$F$  و  $G$  و النقطة  $J$  من  $[EG]$  مخالفة عن  $E$  و  $G$  و النقطة  $K$  من  $[EH]$  مخالفة عن  $E$  و  $H$

هل  $(EI)$  و  $(JK)$  متقاطعان

تمرين

$ABCDEFGH$  مكعب

حدد تقاطع  $(ACG)$  و  $(BDG)$

**لبرهنة على استقامية نقط في الفضاء ، نبحث غالبا على مستويين متقاطعين و نبين أن هذه النقط مشتركة**

تمرين  $ABCD$  رباعي الأوجه و  $P$  و  $Q$  و  $R$  نقط من  $[AB]$

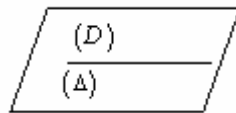
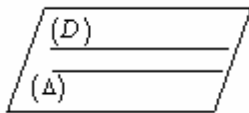
و  $[AC]$  و  $[AD]$  حيث  $(PR)$  يقطع  $(BD)$  في  $J$  و  $(PQ)$  يقطع  $(BC)$  في  $K$  و  $(QR)$  يقطع  $(CD)$  في  $I$   
أثبت أن  $J$  و  $K$  و  $I$  مستقيمة

التوازي في الفضاء

#### 1- المستقيمات المتوازية

أ- تعريف

نقول إن مستقيمين  $(D)$  و  $(\Delta)$  متوازيان في الفضاء إذا تحقق الشرطان التاليان



- أن يكون  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستوائيين

- أن يكون  $(D)$  و  $(\Delta)$  منفصلان أو منطبقان

نكتب  $(\Delta) \parallel (D)$

ملاحظة

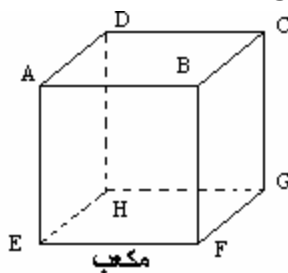
لا يكفي أن يكون  $(D)$  و  $(\Delta)$  منفصلين لكي يكون متوازيين

مثال

$(AE)$  و  $(BC)$  منفصلان و لكن غير متوازيين.

$(BC) \parallel (AD)$

$(EF) \parallel (DC)$



### ب- مبرهنة

من نقطة معلومة خارج مستقيم يمر مستقيم وحيد يوازيه في الفضاء

البرهان

لدينا  $A \notin (D)$  و بالتالي يوجد مستوى

وحيد  $(P)$  يحتوي على  $A$  و  $(D)$

وحسب موضوعة اقليدس في المستوى  $(P)$  ، يمر مستقيم وحيد

$(\Delta)$  يوازي  $(D)$

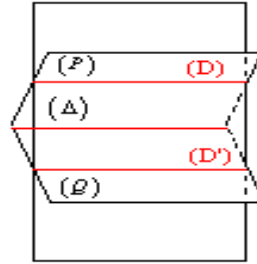
إذن  $(D)$  و  $(\Delta)$  متوازيان في الفضاء

### ج- مبرهنة

كل مستقيمين متوازيين قطعاً في الفضاء يحددان مستوى وحيداً

### د- مبرهنة (نقلها)

إذا احتوى مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعاً فان تقاطعهما هو مستقيم مواز لهذين المستقيمين.



### ذ- مبرهنة

إذا كان مستقيمان متوازيين في الفضاء فن كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

### ملاحظة

إذا كان مستقيمان متوازيين فكل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر

### تمرين

ليكن  $ABCDE$  هرماً قاعدته متوازي أضلاع لتكن  $B'$  و  $C'$  منتصفي  $[AB]$  و  $[AC]$  على التوالي.

أنشئ الشكل

1- أثبت أن  $(DE) \parallel (B'C')$

2- ليكن  $(\Delta)$  تقاطع المستويين  $(ABC)$  و  $(ADE)$

بين أن  $(\Delta) \parallel (B'C')$

### 2- توازي مستقيم و مستوى

#### أ- تعريف

يكون مستقيم  $(D)$  موازياً لمستوى  $(P)$  إذا و فقط إذا كان  $(D)$  و  $(P)$  منفصلان أو  $(D)$  ضمن  $(P)$

نكتب  $(D) \parallel (P)$

### ب- مبرهنة

يكون مستقيم  $(D)$  موازياً لمستوى  $(P)$  إذا و فقط إذا وجد مستقيم ضمن  $(P)$  يوازي  $(D)$

### تمرين

ليكن  $ABCDEFGH$  مكعباً .  $I$  و  $J$  و  $K$  منتصفات  $[AB]$

و  $[EF]$  و  $[HG]$  على التوالي

أثبت أن  $(HI)$  يوازي المستوى  $(JKC)$

### 3- توازي مستويين

#### أ- تعريف

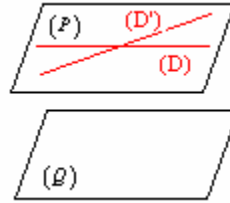
يكون مستويان  $(P)$  و  $(Q)$  متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا كانا منطبقين أو منفصلين.

نكتب  $(P) \parallel (Q)$

إذا كان  $(P) \parallel (Q)$  فإن كل مستقيم ضمن أحدهما يوازي المستوى الآخر.

## ب- مبرهنة

يكون مستويان متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين يوازيين المستوى الآخر



## ج- مبرهنة

إذا وازى مستويان مستوى ثالثا فانهما يكونان متوازيين

## د- مبرهنة

من نقطة في الفضاء يمر مستوى و حيد مواز لمستوى معلوم

## البرهان

ليكن  $(P)$  مستوى و  $A$  نقطة في الفضاء

نعتبر  $(D)$  و  $(\Delta)$  متقاطعين ضمن المستوى  $(P)$

يوجد مستقيم وحيد  $(D')$  مار من  $A$  و يوازي  $(D)$

يوجد مستقيم وحيد  $(\Delta')$  مار من  $A$  و يوازي  $(\Delta)$

$(D')$  و  $(\Delta')$  يحددان مستوى وحيد  $(Q)$

$(Q)$  يوازي  $(P)$

## ذ- نتائج

- إذا توازي مستويان فإن كل مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر

- إذا توازي مستويان فإن كل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر

- إذا توازي مستويان فإن كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

## تمرين

ليكن  $(P)$  و  $(Q)$  مستويين متوازيين قطعاً . نعتبر  $A \in (P)$

و  $BCD$  مثلث ضمن  $(Q)$  . لتكن  $I$  و  $J$  و  $K$  منتصفات  $[AB]$  و  $[AC]$  و  $[AD]$  على التوالي. المستقيم

$(CK)$  يخترق المستوى  $(P)$  في  $R$  .

1- أنشئ الشكل

2- أثبت أن المستوى  $(IJK)$  يوازي  $(P)$

3- أثبت أن  $(CD) \parallel (AR)$

## تمرين

ليكن  $ABCDEFGH$  متوازي المستطيلات و  $I$  منتصف  $[GH]$

1- لتكن  $(EI) \cap (FH) = \{M\}$

بين أن المستويين  $(AEI)$  و  $(AFH)$  يتقاطعان وفق  $(AM)$

2- أ- بين أن النقط  $E$  و  $F$  و  $D$  و  $C$  مستوائية

ب- بين أن  $(CF) \parallel (DE)$

3- بين أن  $(CFH) \parallel (BDE)$

4- بين أن  $(CI)$  يخترق المستوى  $(ADH)$