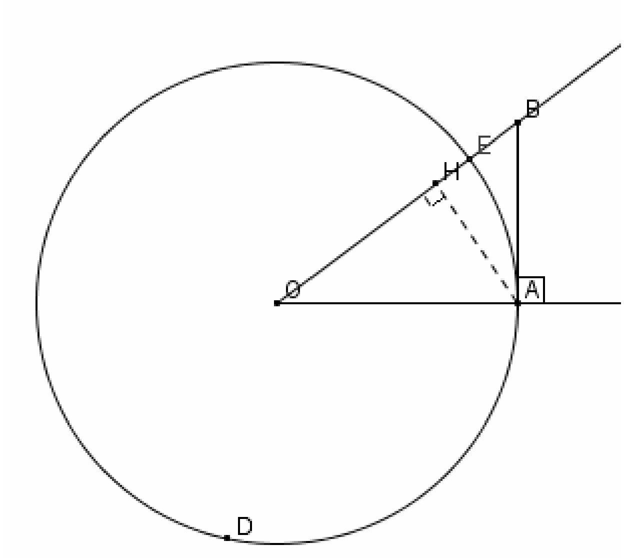
# الحساب المثلثي – الجزء1

| القدرات المنتظرة | |
|---|---|
| -* استعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة ازاوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس.<br>-* التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات | الدورة الأولى<br>15 ساعة |

## I- تذكير و اضافات

### 1- أنشطة للتذكير

**تمرين1**




نعتبر الشكل التالي حيث $OA=4$ و $AB=3$ و $H$ المسقط العمودي لـ $A$ على $(OB)$ :

1- أحسب $OB$

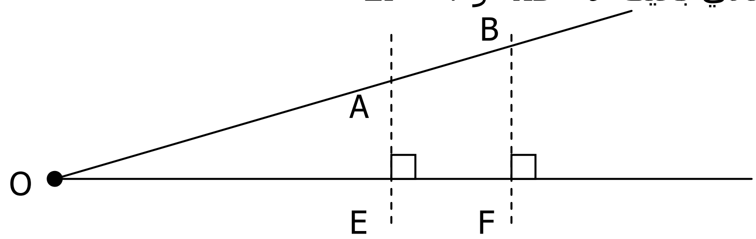
2- أ/ أحسب $\cos\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\left[\widehat{AOB}\right]$

ب/ استنتج المسافة $OH$

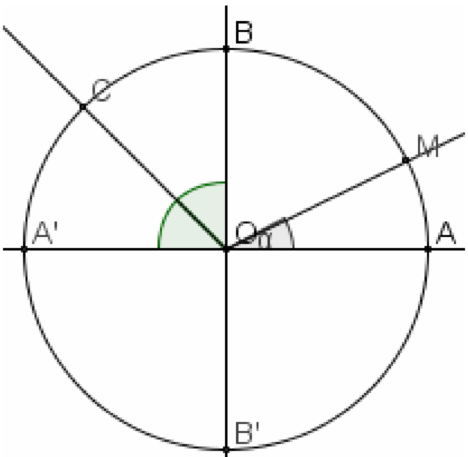
3- أحسب $\tan\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOB}\right)$

**تمرين2**

نعتبر الشكل التالي بحيث $AB=5$ و $EF=4$




أحسب $\cos\left(\widehat{AOE}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOE}\right)$




### 1- وحدات قياس الزوايا و الاقواس الهندسية – زاوية مركزية

#### 1- أنشطة

لتكن $(C)$ دائرة مركزها $O$ و شعاعها $R$. نعتبر $A$ و $B$ و $C$ و $A'$ و $B'$ و $M$ نقط من $(C)$ بحيث $\alpha$ قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOM}\right]$ بالدرجة

1- اتمم الجدول التالي

| الزاوية المركزية | $\left[\widehat{AOA'}\right]$ | $\left[\widehat{AOB}\right]$ | $\left[\widehat{AOC}\right]$ | $\left[A\overset{\vee}{O}B'\right]$ | $\left[\widehat{AOM}\right]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| قياس الزاوية المركزية بالدرجة | | | | | $\alpha°$ |
| طول القوس الهندسية المرتبطة بها | | | | | $l$ |

2- بين أن $180°$ و $90°$ و $135°$ و $270°$ متناسبة و $\pi R$ و $\frac{\pi}{2}R$ و $\frac{3\pi}{4}R$ و $\frac{3\pi}{2}R$ على التوالي

3- حدد $l$ بدلالة $\alpha$ و $\pi$ و $R$

4- لتكن $M'$ نقطة من $(C)$ حيث طول القوس الهندسية $\left[AM'\right]$ هو $R$.



Moutamadris.ma

حدد $\beta$ قياس الزاوية المركزية $[\widehat{AOM'}]$ بالدرجة.

## 2- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

### أ/ تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .
نرمز لها بـ $rd$ أو $rad$

**ملاحظة** $\pi rd = 200gr = 180^\circ$ ( gr : يرمز للغراد)

### ب/ نتيجة

إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالغراد فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

### ج/ قياس قوس هندسية

قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

### د/ طول قوس هندسية

إذا كان $\alpha$ قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو $\alpha R$.

**ملاحظة**

طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس الزاوية المركزية التي تحصرها.

## تمارين تطبيقية

### تمرين1

اتمم الجدول التالي

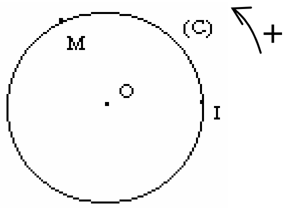
| قياس زاوية بالدرجة | $90^\circ$ | | $45^\circ$ | $30^\circ$ | $0^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|
| قياسها بالراديان | | $\frac{\pi}{3}$ | | | |

### تمرين2

ليكن $ABC$ مثلثا متساوي الاضلاع حيث $AB = 5cm$ و نعتبر $(C)$ الدائرة التي مركزه $A$ و تمر من $B$. أحسب $l$ طول القوس الهندسية المحصورة بالزاوية المركزية $[\widehat{BAC}]$

## II- الدائرة المثلثية

### 1- توجيه دائرة - توجيه مستوى

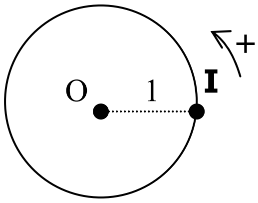



لتكن $(C)$ دائرة مركزها $O$ و شعاعها $R$ و I نقطة من $(C)$.
لو أردنا أن ننطلق من I لندور حول $(C)$ ، لوجدنا أنفسنا أمام منحيين .
توجيه الدائرة $(C)$ هو اختيار أحد المنحيين منحى موجبا ( أو مباشرا)
و الآخر منحى سالبا ( أو غير مباشر).
عادة نأخذ المنحى الموجب المعاكس لحركة عقارب الساعة .
النقطة I تسمى أصل الدائرة $(C)$.

عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيها موحدا فإننا نقول إن المستوى موجه.

### 2- الدائرة المثلثة

**تعريف** الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيها موجبا.



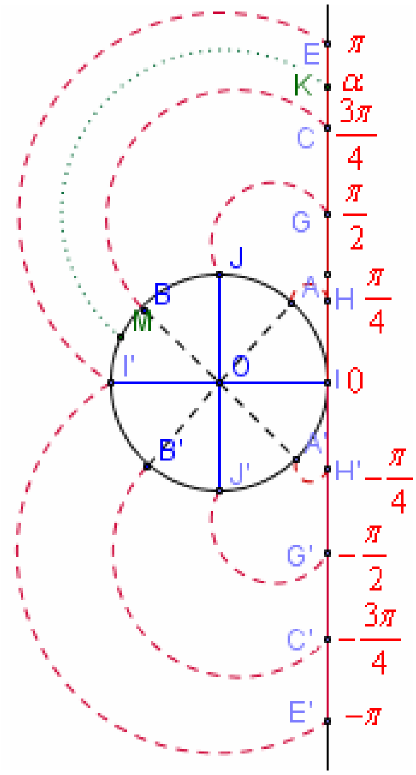

## III– الأفاصيل المنحنية.

### 1- الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثة

لتكن $(C)$ دائرة مثلثية أصلها $I$. نعتبر المجال $]-\pi;\pi]$ حيث 0 أفصول $I$ في المحور العمودي على $(OI)$. حدد محيط الدائرة وشعاع الدائرة.

إذا لففنا القطعة الممثلة للمجال$]-\pi;\pi]$ على الدائرة $(C)$ نلاحظ أن كل عدد $\alpha$ من$]-\pi;\pi]$ ينطبق مع نقطة وحيدة $M$ من $(C)$ و كل نقطة $M$ من $(C)$ تمثل عدد وحيد $\alpha$ من$]-\pi;\pi]$

العدد $\alpha$ يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ $M$




**خاصية و تعريف**

لتكن $(C)$ دائرة مثلثية أصلها $I$.

كل نقطة $M$ من $(C)$ تمثل عدد وحيد $\alpha$ من $]-\pi;\pi]$ و كل عدد $\alpha$ من $]-\pi;\pi]$ يمثل نقطة وحيدة $M$ من $(C)$.

العدد $\alpha$ يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ $M$

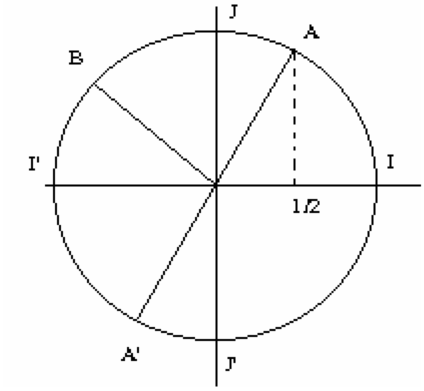
ملاحظة قياس الزاوية الهندسية $[\widehat{IOM}]$ هو $|\alpha|$ راديان

**تمرين1**

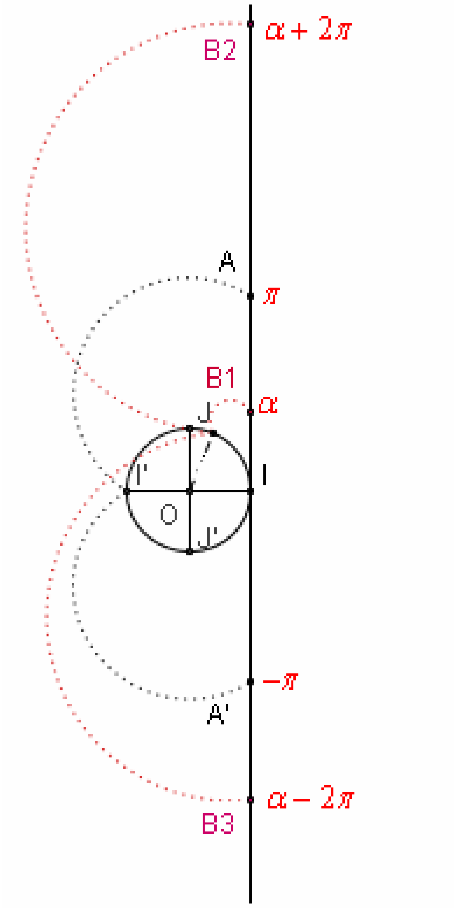
على دائرة مثلثية $(C)$ أصلها $I$. أنشئ النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ و $E$ و $F$ و $G$ و $H$ التي افاصيلها المنحنية الرئيسية هي $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{3\pi}{4}$ على التوالي

**تمرين2**

$(C)$ دائرة مثلثية أصلها I . حدد الأفاصيل المنحنية الرئيسية للنقط I';I ;J ;'J ;A';A ;B الممثلة في الشكل كما يلي




## 2- الأفاصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثة




نعتبر $(C)$ دائرة مثلثية أصلها $I$. نعتبر المحور $(\Delta)=D(I,E)$ حيث $(OI)\perp(\Delta)$.

لتكن نقطة $M$ من $(C)$ أفصولها المنحني الرئيسي $\alpha$.

لنحدد كل الأعداد التي تنطبق مع $M$ اذا لففنا المستقيم العددي على $(C)$

نلاحظ اننا اذا لففنا المستقيم العددي الممثل لـ $\mathbb{R}$ على $(C)$ النقطة $M$ تنطبق مع الأعداد

$$.............\ \alpha+4\pi\ ;\ \alpha+2\pi\ ;\ \alpha\ ;\ \alpha-2\pi\ ;\ \alpha-4\pi\ ...........$$

كل هذه الأعداد تسمى الأفاصيل المنحنية لنقطة $M$

نلاحظ أن هذه الأعداد تكتب بشكل عام عل شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

**تعريف**

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية $(C)$ أصلها I. و ليكن $\alpha$ أفصولها المنحني الرئيسي

كل عدد يكتب على الشكل $\alpha+2k\pi$ بحيث $k$ عنصر من $\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.



Moutamadris.ma

**تمرين** حدد الأفاصيل المنحنية للنقطتين $A$ و $B$ ذات الافصولين المنحنيين الرئيسيين $\frac{\pi}{5}$ و $-\frac{2\pi}{3}$ على التوالي

**تمرين** $(C)$ دائرة مثلثية أصلها I .

نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحنى لنقطة M . أنشئ M

**ب- خاصيات**

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية $(C)$ أصلها I. و ليكن $\alpha$ أفصولها المنحنى الرئيسي

بين اذا كانx و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر $\lambda$ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$

**خاصية** - إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر $\lambda$ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$ و نكتب $x \equiv y \quad [2\pi]$ و نقرأ x يساوي y بترديد $2\pi$.

- إذا كان x أفصول منحنى للنقطة M فان جميع الأفاصيل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

**تمرين** حدد الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة التي إحدى أفاصيلها المنحنية $\alpha = \frac{-227\pi}{6}$

**تمرين** مثل على الدائرة المثلثية النقط $A;B;C$ التي أفاصيلها المنحنية على التوالي هي $7\pi \quad ; \quad \frac{37\pi}{3} \quad ; \quad \frac{-108\pi}{12}$

**تمرين** أنشئ على الدائرة المثلثية النقط $M_k$ التي أفاصيلها المنحنية $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ .

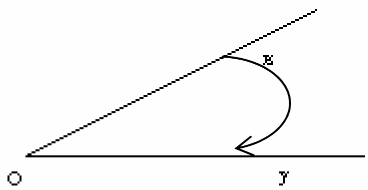
## IV– الزوايا الموجهة

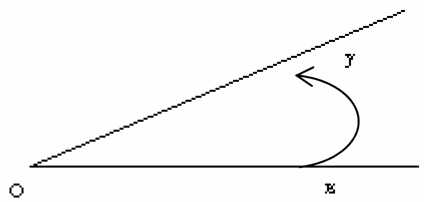
### 4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم

**أ- تعريف**

في المستوى الموجه نعتبر $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل

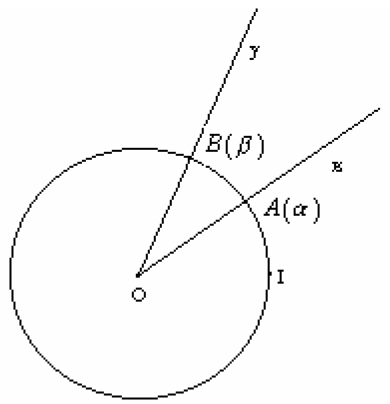
الزوج $([O;x[;[O;y[)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\widehat{Ox;Oy})$




**ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم**

**تعريف وخاصة**




لتكن $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و $(C)$ دائرة مثلثية مركزها O ، A و B نقطتي تقاطع $(C)$ و نصفي مستقيم $[O;x[$ و $[O;y[$ على التوالي

ليكن $\alpha$ و $\beta$ أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي .

العدد $\beta-\alpha$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

نرمز لقياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox;Oy})$ نكتب $k \in \mathbb{Z}$ $\quad (\overline{Ox;Oy})=\beta-\alpha+2k\pi$

و نكتب أيضا $(\overline{Ox;Oy}) \equiv \beta-\alpha \quad [2\pi]$



Moutamadris.ma

**خاصية و تعريف**

لكل زاوية موجهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

**خاصية**

إذا كان $\theta$ قياس للـزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ فان $\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ قياس للزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$.

إذا كان $\alpha$ و$\beta$ قياسين للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ فان $\alpha-\beta\equiv 0 \quad [2\pi]$

أي $(k\in\mathbb{Z}/ \quad \alpha-\beta=2k\pi)$

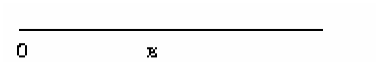
**ملاحظات**

* إذا كانت $M$ نقطة من دائرة مثلثية أصلها $I$ و مركزها $O$ فان الأفاصيل المنحنية للنقطة $M$ هي قياسات الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{OI};\overline{OM}}\right)$ و أن الافصول المنحني الرئيسي لـ $M$ هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{OI};\overline{OM}}\right)$

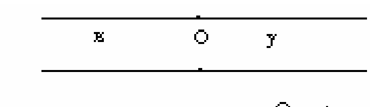
* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ هي قياس الزاوية الهندسية $\left(\widehat{xOy}\right)$.

**بعض الزوايا الخاصة**

الزاوية المنعدمة $\left(\overline{Ox};\overline{Ox}\right)\equiv 0 \quad [2\pi]$

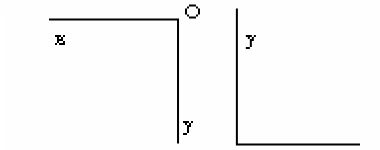



الزاوية المستقيمية $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv \pi \quad [2\pi]$ $\quad \left(\overline{Oy};\overline{Ox}\right)\equiv \pi \quad [2\pi]$



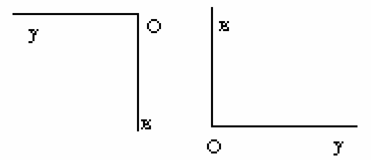

الزاوية القائمة - $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ .

الزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ زاوية قائمة موجبة




- $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ .

الزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ زاوية قائمة سالبة.




**تمرين**

1- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\dfrac{601\pi}{6}$ ; $\dfrac{-143\pi}{6}$ ; $\dfrac{25\pi}{6}$

2- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات $47\pi$ ; $-36\pi$ ; $\dfrac{52\pi}{5}$ ; $-\dfrac{25\pi}{3}$

3- أنشئ زاوية موجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ قياسها $\dfrac{-234\pi}{5}$.

**تمرين** أنشئ $ABC$ مثلث متساوي الأضلاع حيث $\left(\overline{AB};\overline{AC}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

**ج- علاقة شال ونتائجها**

**علاقة شال**

إذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فان

$$\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)+\left(\overline{Oy};\overline{Oz}\right)\equiv\left(\overline{Ox};\overline{Oz}\right) \quad [2\pi]$$

**نتائج**

* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم فان $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv-\left(\overline{Oy};\overline{Ox}\right) \quad [2\pi]$

* اذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv\left(\overline{Ox};\overline{Oz}\right) \quad [2\pi]$ فان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم منطبقان.

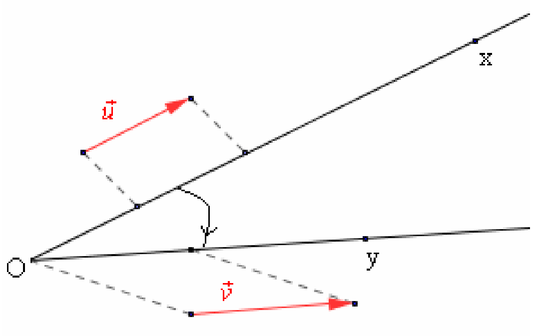


Moutamadris.ma

و هذا يعني أنه اذا كان $[Ox[$ نصف مستقيم و $\alpha$ عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد $[O;y[$ بحيث $(\widehat{Ox;Oy}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$.

## د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

**تعريف**




لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه. و $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم موجهين على التوالي بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

زاوية زوج المتجهتين $(\vec{u};\vec{v})$ هي الزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$

و يرمز لها بالرمز $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ .

**ملاحظة**

مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ هي مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ .

## علاقة شال ونتائجها

**علاقة شال**

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة فان

$$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) + (\overline{\vec{v};\vec{w}}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{w}}) \quad [2\pi]$$

**نتائج**

* اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فان $(\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv -(\overline{\vec{u};\vec{v}}) \quad [2\pi]$

* اذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة تحقق $(\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{w}}) \quad [2\pi]$ فان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى.

**تمرين**

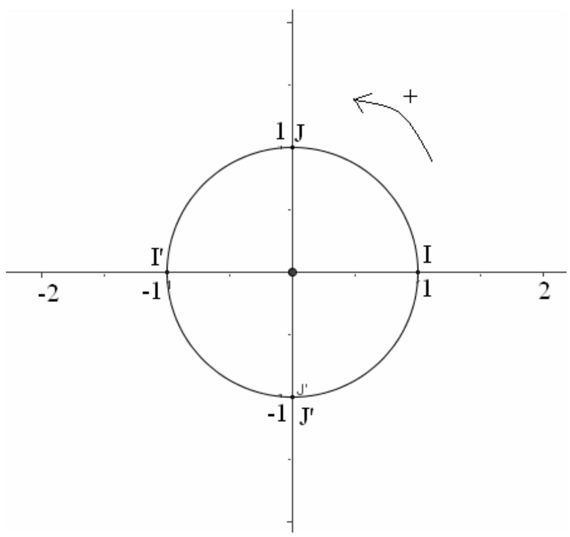
لتكن $(C)$ دائرة مثلثية مركزها $O$ و أصلها $I$. نعتبر على $(C)$ النقط التالية المعرفة بأفاصيلها المنحنية $A(\pi)$ $\quad B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ $\quad E\left(\frac{23\pi}{4}\right)$ $\quad F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$

أعط قياسا لكل من الزاوايا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}}) \ ; \ (\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}) \ ; \ (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}}) \ ; \ (\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}})$$

## V - النسب المثلثة

### 1- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثة




لتكن $(C)$ دائرة مثلثية مركزها $O$ و أصلها $I$ .

ولتكن $J$ من $(C)$ بحيث $(\widehat{OI;OJ})$ زاوية قائمة موجبة

المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثة $(C)$.

لتكن $J'$ من $(C)$ بحيث $(\widehat{OI;OJ'})$ زاوية قائمة سالبة .

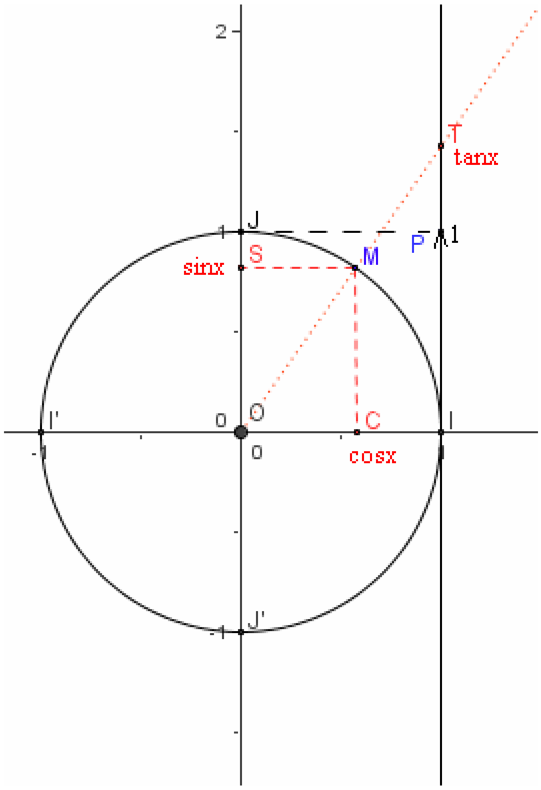
المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ'})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثة $(C)$.



Moutamadris.ma

## 2- النسب المثلثة

### 2-1 تعاريف




لتكن $(C)$ دائرة مثلثة و $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن $M$ نقطة من $(C)$ و $x$ أفصولا منحنيا لها . نعتبر $C$ المسقط العمودي لـ $M$ على $(OI)$ و $S$ المسقط العمودي لـ $M$ على $(OJ)$

*- العدد الحقيقي أفصول النقطة $M$ في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي $x$ نرمز له بـ $\cos x$

*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة $M$ في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب العدد الحقيقي $x$ . نرمز له بـ $\sin x$

*- ليكن $\Delta$ المماس لـ $(C)$ عند $I$ و النقطة $P(1;1)$ .

لتكن $T$ نقطة تقاطع $(OM)$ و $\Delta$ أي

$$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

العدد الحقيقي أفصول $T$ في المعلم $(I;P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي $x$ نرمز له بـ $\tan x$ .

### ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان $x$ أفصول منحنى لنقطة $M$ فان $M(\cos x;\sin x)$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\cos x\end{array}$ تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\cos$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\sin x\end{array}$ تسمى دالة الجيب حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\sin$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\tan x\end{array}$ تسمى دالة الظل حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ يرمز لها بـ $\tan$

### 2-2- خاصيات

*- كيفما كان وضع $M$ نقطة من $(C)$ أفصولها منحى $x$ النقطة $C$ تنتمي الى القطعة $[II']$ و $S$ تنتمي الى $[JJ']$ حيث $J(0;1)$ ; $J'(0;-1)$ ; $I'(-1;0)$ ; $I(1;0)$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad -1\le\sin x\le 1 \quad -1\le\cos x\le 1$

*- لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1$

*- لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، أفاصيل منحنية لنفس النقطة $M$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad \sin(x+2k\pi)=\sin x \quad ; \quad \cos(x+2k\pi)=\cos x$

- مهما كانت $M(x+k\pi)$ لدينا أفصـول $T$ هو $\tan x$

لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan(x+k\pi)=\tan x$

**حالة خاصة** لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan(x+\pi)=\tan x$



Moutamadris.ma

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

- $\sin(-x) = -\sin x \quad ; \quad \cos(-x) = \cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

نعبرعن هذا بقولنا ان الدالة cos زوجية و أن الدالة sin فردية.

- $\tan(-x) = -\tan x$ لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة tan فردية.

- $cos(\pi - x) = -\cos x \quad ; \quad \sin(\pi - x) = \sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $cos(\pi + x) = -\cos x \quad ; \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

## 2-3- نسب مثلثة اعتيادية

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sinx | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| cosx | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| tanx | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | غير معرف | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

## تمارين

**تمرين1** أحسب $\sin\frac{-7\pi}{2} \; ; \sin\frac{53\pi}{6} \; ; \cos\frac{-37\pi}{4} \; ; \cos\frac{34\pi}{3}$

**تمرين2** أ- حدد $1 + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{6} + .... + \cos\frac{11\pi}{6}$

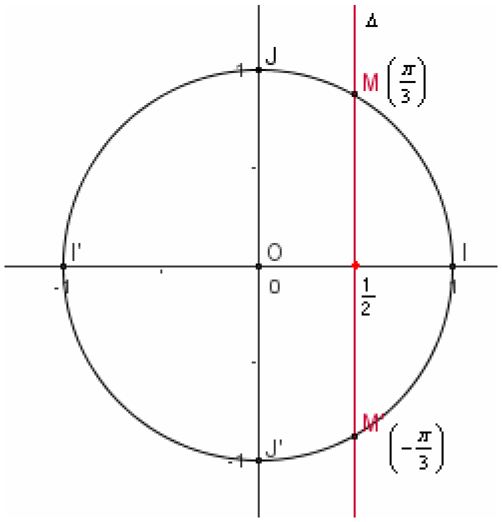
ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi - x)$



Moutamadris.ma

# الحساب المثلثي – الجزء 2-

| | |
|---|---|
| القدرات المنتظرة<br>التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية | الدرس الأول     الدورة الثانية<br>عدد الساعات: 15 |




## I- المعادلات المثلثية

### 1- المعادلة $\cos x = a$

**مثال1** حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم $\Delta :\ x = \frac{1}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين $M$ و $M'$ أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين

على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ .

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة $M$

و $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة $M'$

فإننا نستنتج أن $\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

**مثال 2** حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in [-2\pi; 2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 2\pi]$

فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ أو $-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \le k \le \frac{5}{6}$ تكافئ $k = -1$ أو $k = 0$

ومنه $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{5}{6} \le k \le \frac{7}{6}$ تكافئ $k = 1$ أو $k = 0$

ومنه $x = -\frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

إذن $S = \left\{\frac{-5\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

**خلاصة**

* المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

* $\cos x = 1$ $\quad x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z} /$

* $\cos x = -1$ $\quad x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = \pi + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z} /$

* إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر $\alpha$ من $]0;\pi[$ حيث $\cos\alpha = a$

و بالتالي حلول المعادلة $\cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = -\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$



Moutamadris.ma

**تمرين** حل المعادلات

$x \in \mathbb{R} \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x) \qquad\qquad x \in ]-\pi;3\pi] \quad \cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x \in [\pi;2\pi[ \qquad 2\cos^2 x+3\cos x+1=0$

**الحل**

* نحل $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x) \qquad x \in \mathbb{R}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$ تكافئ $2x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $2x=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $3x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

* نحل $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x \in ]-\pi;3\pi]$

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و بالتالي $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $2x-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $2x=\frac{19\pi}{12}+2k\pi$ أو $2x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in ]-\pi;3\pi]$ فان

من أجل $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi \prec \frac{19\pi}{24}+k\pi \leq 3\pi$ أي $-1 \prec \frac{19}{24}+k \leq 3$

ومنه $-\frac{43}{24} \prec k \leq \frac{53}{24}$

و حيث $k \in \mathbb{Z}$ فان $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$

إذن $x=\frac{19\pi}{24}-\pi=-\frac{5\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+\pi=\frac{43\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+2\pi=\frac{67\pi}{24}$

من أجل $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi \prec -\frac{\pi}{24}+k\pi \leq 3\pi$ أي $-1 \prec -\frac{1}{24}+k \leq 3$

ومنه $-\frac{23}{24} \prec k \leq \frac{73}{24}$

و حيث $k \in \mathbb{Z}$ فان $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$ أو $k=3$

إذن $x=-\frac{\pi}{24}+0\cdot\pi=-\frac{\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{23\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+2\pi=\frac{47\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+3\pi=\frac{71\pi}{24}$

إذن $S=\left\{-\frac{5\pi}{24};-\frac{\pi}{24};\frac{19\pi}{24};\frac{23\pi}{24};\frac{43\pi}{24};\frac{47\pi}{24};\frac{67\pi}{24};\frac{71\pi}{24}\right\}$

* نحل $2\cos^2 x+3\cos x+1=0 \qquad x \in [\pi;2\pi[$

نضع $\cos x = X$ المعادلة تصبح $2X^2+3X+1=0$

ليكن $\Delta$ مميز المعادلة



Moutamadris.ma

$\Delta = 3^2 - 4\times 2\times 1 = 1$

ومنه $X = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$ أو $X = \frac{-3-1}{4} = -1$

و بالتالي $\cos x = -\frac{1}{2}$ أو $\cos x = -1$

لدينا $\cos x = -1$ تكافئ $x = \pi + 2k\pi$ $/ k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in [\pi;2\pi[$ فان $\pi \le \pi + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $0 \le k \prec \frac{1}{2}$ ومنه $k = 0$ اذن $x = \pi$

لدينا $\cos x = -\frac{1}{2}$ أي $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

ومنه $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in [\pi;2\pi[$ فان

من أجل $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\frac{5}{6} \le k \prec \frac{4}{3}$ ومنه $k = 1$

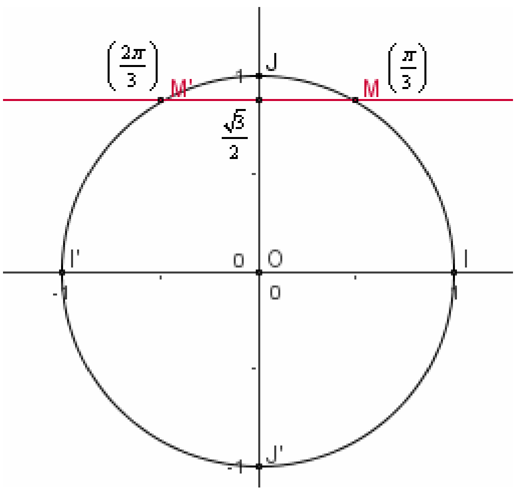
إذن $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$

من أجل $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\frac{1}{6} \le k \prec \frac{2}{3}$ لا يوجد عدد صحيح نسبي
يحقق المتفاوتة الأخيرة

إذن $S = \left\{\pi;\frac{4\pi}{3}\right\}$

## 2- المعادلة $\sin x = a$

**مثال1** حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$




لدينا المستقيم $\Delta :\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية
في نقطتين $M$ و $M'$ أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين
على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ .

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية
للنقطة $M$ و $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل
المنحنية للنقطة $M'$ فإننا نستنتج أن

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x \in [-2\pi;3\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi;3\pi]$



Moutamadris.ma

فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ أو $-2\pi \le \frac{2\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \le k \le \frac{8}{6}$

تكافئ $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

ومنه $x=\frac{7\pi}{3}$ أو $x=\frac{\pi}{3}$ أو $x=-\frac{5\pi}{3}$

لدينا لدينا $-2\pi \le \frac{2\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ تكافئ $-\frac{8}{6} \le k \le \frac{7}{6}$

تكافئ $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

ومنه $x=\frac{8\pi}{3}$ أو $x=\frac{2\pi}{3}$ أو $x=-\frac{4\pi}{3}$

إذن $S=\left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-4\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$

**خلاصة** المعادلة $\sin x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

$\sin x = 1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}/$

$\sin x = -1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}/$

إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر $\alpha$ من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin\alpha = a$

حلول المعادلة $\sin x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x=\alpha+2k\pi$ أو $x=\pi-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مجموعة حلول المعادلة $S=\{\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

**تمرين** حل المعادلات $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x) \qquad x\in\mathbb{R}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad x\in]-\pi;2\pi]$

**الحل**

---

نحل $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x) \qquad x\in\mathbb{R}$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x)$ تكافئ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

تكافئ $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ أو $2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $5x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $-x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2(-k)\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2(-k)\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نحل $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad x\in]-\pi;2\pi]$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

تكافئ $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$



Moutamadris.ma

تكافئ $2x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ أو $2x=\frac{17\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{24}+k\pi$ أو $x=\frac{17\pi}{24}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و حيث أن $x\in]-\pi;2\pi]$ فان

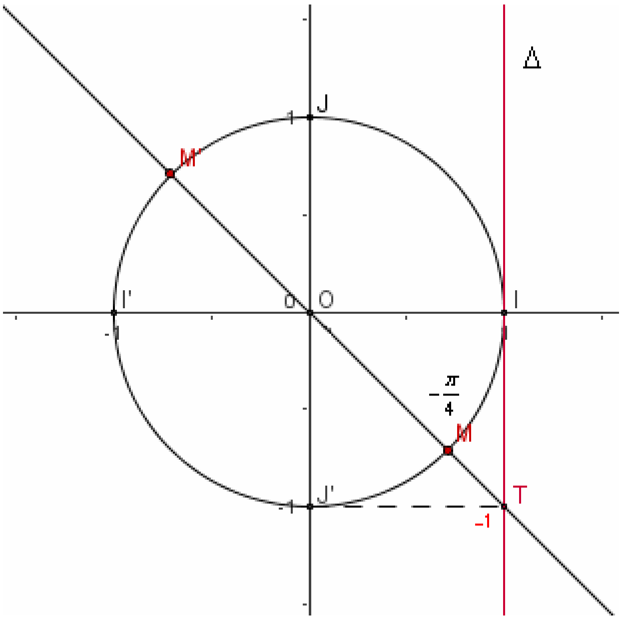
من أجل $x=\frac{\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi\prec\frac{\pi}{24}+k\pi\leq 2\pi$ أي $-\frac{25}{24}\prec k\leq\frac{47}{24}$ و منه $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

إذن $x=\frac{\pi}{24}-\pi=-\frac{23\pi}{24}$ أو $x=\frac{\pi}{24}$ أو $x=\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{25\pi}{24}$

من أجل لدينا $-\pi\prec\frac{17\pi}{24}+k\pi\leq 2\pi$ ومنه $-\frac{41}{24}\prec k\leq\frac{31}{24}$ و منه $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

إذن $x=\frac{17\pi}{24}-\pi=-\frac{7\pi}{24}$ أو $x=\frac{17\pi}{24}$ أو $x=\frac{17\pi}{24}+\pi=\frac{41\pi}{24}$

ومنه $S=\left\{-\frac{23\pi}{24};-\frac{7\pi}{24};\frac{\pi}{24};\frac{17\pi}{24};\frac{25\pi}{24};\frac{41\pi}{24}\right\}$




## 3- المعادلة $\tan x=a$

حل المعادلة $\tan x=-1$ $x\in\mathbb{R}$

نعتبر $\Delta$ المماس الدائرة المثلثية $(C)$ في أصلها $I$ ،

نأخذ النقطة $T$ من $\Delta$ حيث $-1$ أفصول $T$ في المحور $\Delta$

المستقيم $(OT)$ يقطع الدائرة المثلثة $(C)$

في النقطتين $M$ و $M'$ نعلم أن $\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$

و بالتالي $-\frac{\pi}{4}$ أفصول منحنى للنقطة $M$

وبما أن $\tan(x+k\pi)=\tan x$ لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

فان حلول المعادلة هي $x=\frac{-\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$

اذن $S=\left\{\frac{-\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

**خاصية**

| |
|---|
| $\tan x=a\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\quad /k\in\mathbb{Z}$ حيث $\alpha$ حل للمعادلة $\tan x=a$ في $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ |

تمرين حل المعادلتين

$\tan 2x=\sqrt{3}\qquad x\in[0;3\pi]$

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan x\qquad x\in\mathbb{R}$

## II- المتراجحات المثلثة

**مثال1**

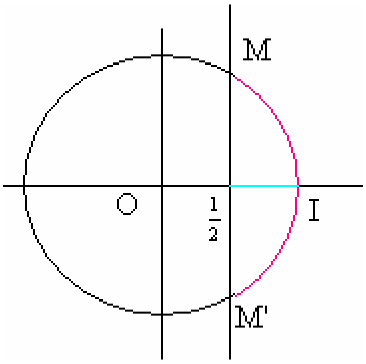
حل $\cos x\geq\frac{1}{2}\qquad x\in]-\pi;\pi]$

نحل أولا المعادلة $\cos x=\frac{1}{2}\qquad x\in]-\pi;\pi]$

بإتباع خطوات حل المعادلات نحصل على



Moutamadris.ma



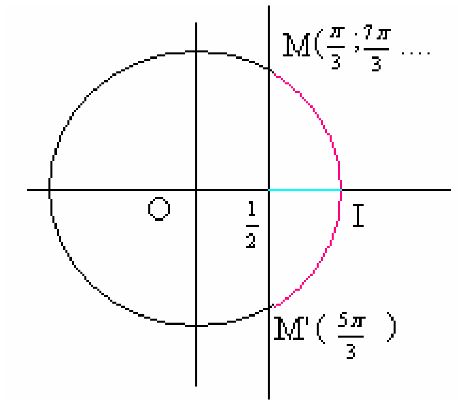

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in ]-\pi;\pi]$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{\pi}{3}$

لتكن $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ نقطتين من الدائرة المثلثية

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل

المنحنية للنقط $(C)$ التي تنتمي إلى القوس $\left[\overset{\frown}{M'IM}\right]$ في $]-\pi;\pi]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$




**مثال 2** حل $\cos x \geq \frac{1}{2}$ $\quad x \in [0;3\pi[$

نحل أولا المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in [0;3\pi[$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in [0;3\pi[$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{7\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

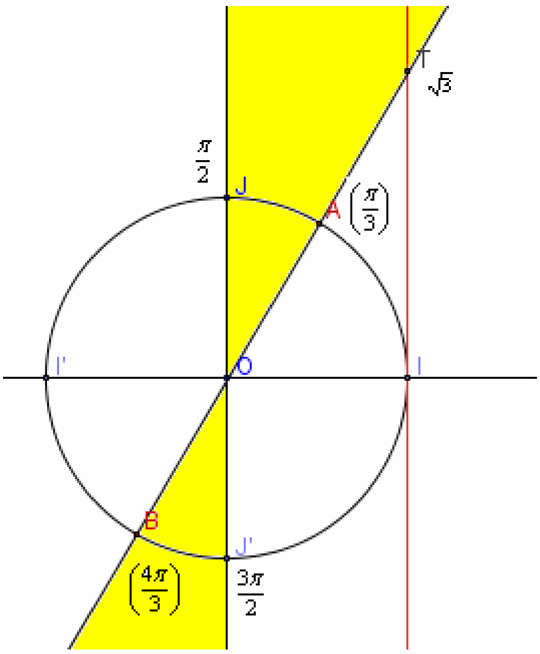
$\frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{3}$ أفصولين منحنيين لنفس النقطة $M$ ،

نعتبر $\frac{5\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة $M'$

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية للنقط $(C)$

التي تنتمي الى القوس $\left[\overset{\frown}{M'IM}\right]$ في $[0;3\pi[$

وهذه المجموعة هي $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$




مثال3

حل $\tan x \geq \sqrt{3}$ $\quad x \in [0;2\pi]$

نحل المعادلة $\tan x = \sqrt{3}$ $\quad x \in [0;2\pi]$

$\tan x = \sqrt{3}$ $\quad x \in [0;2\pi]$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{4\pi}{3}$

نعتبر $\frac{\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة $A$

و $\frac{4\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة $B$

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية

للنقط $(C)$ التي تنتمي إلى اتحاد القوسين $\left[\overset{\frown}{AJ}\right[$ و $\left[\overset{\frown}{BJ'}\right[$

في $[0;2\pi]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right[$

**تمرين**

حل $\quad \sin x \succ \frac{-1}{2}$ $\quad x \in ]-\pi;\pi]$

$\sin x \succ \frac{-1}{2}$ $\quad x \in ]0;4\pi]$

$\tan x \prec 1$ $\quad x \in [0;2\pi]$


Moutamadris.ma

## متراجحات تؤول في حلها إلى متراجحات أساسية

### تمرين

حل

$$x \in [-\pi;\pi] \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{2}$$

$$x \in [0;\pi] \quad \tan 3x \succ \sqrt{3}$$

$$x \in ]-\pi;\pi] \quad 4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} \le 0$$

$$x \in ]-\pi;\pi] \quad \frac{1+\tan x}{\sin 2x} \ge 0$$

## III- الزوايا المحيطية – الرباعيات الدائرية

### 1- تعريف

- **الزاوية المركزية** : هي زاوية رأسها مركز الدائرة
- **الزاوية المحيطية** : هي زاوية ينتمي رأسها للدائرة وتحصر بين ضلعيها قوسا من هذه الدائرة

### 2-خاصيات

**نشاط1**

لتكن $(C)$ دائرة مركزها $O$ نعتبر $A$ و $B$ نقطتين مختلفتين من $(C)$ غير متقابلتين قطريا

و $M$ نقطة من $(C)$ بحيث $\widehat{AOB}$ و $\widehat{AMB}$ تحصران نفس القوس $\left[\overset{\frown}{AB}\right]$

1- بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ في الحالات التالية

أ/ $M$ و $O$ و $A$ مستقيمية

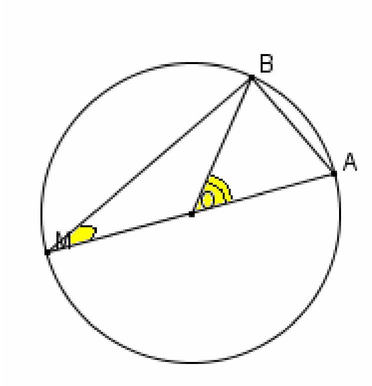
ب/ $M$ و $O$ و $A$ غير مستقيمية

يمكن اعتبار نقطة $N$ من $(C)$ حيث $N$ و $O$ و $M$ مستقيمية

و باستعمال أ/ مرتين بين المطلوب

2- نعتبر $(AT)$ المماس للدائرة $(C)$. الزاوية $\widehat{BAT}$ محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره الالزاوية المركزية $\widehat{AOB}$

بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB}$




**الحل**---------------------------

1- أ/ $M$ و $O$ و $A$ مستقيمية

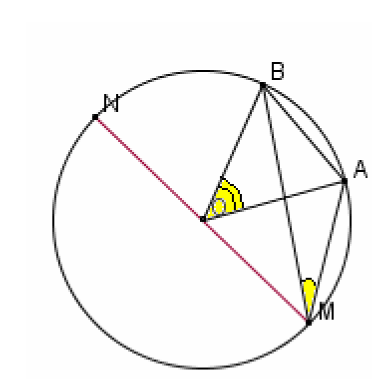
المثلث $OBM$ متساوي الساقين في الرأس $O$

ومنه $\widehat{BOM} = \pi - 2\widehat{BMO}$

و حيث $\widehat{BOM} = \pi - \widehat{AOB}$ لأن $M$ و $O$ و $A$ مستقيمية

فان $\widehat{AOB} = 2\widehat{BMO}$

اذن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$




ب/ $M$ و $O$ و $A$ غير مستقيمية

$N$ من $(C)$ حيث $N$ و $O$ و $M$ مستقيمية

حسب أ/ لدينا $\widehat{NOB} = 2\widehat{NMB}$

لدينا $OAM$ مثلث متساوي الساقين في الرأس $O$

و منه $\widehat{AOM} = \pi - 2\widehat{AMO}$

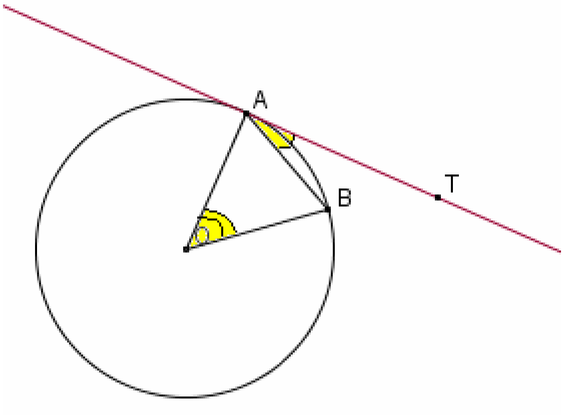
لدينا $\widehat{AOB} = \pi - \left(\widehat{NOB} + \widehat{AOM}\right)$

ومنه $\widehat{AOB} = \pi - \left(2\widehat{NMB} + \pi - 2\widehat{AMO}\right)$

$\widehat{AOB} = 2\left(\widehat{AMO} - \widehat{NMB}\right)$



Moutamadris.ma




إذن $\widehat{AOB}=2\widehat{AMB}$

2/ بين أن $\widehat{AOB}=2\widehat{TAB}$

$(AT)$ المماس للدائرة $(C)$ ومنه $\widehat{OAB}=\frac{\pi}{2}-\widehat{BAT}$

لدينا $OAB$ متساوي الساقين في الرأس $O$

ومنه $\widehat{OAB}=\pi-2\widehat{OAB}$

و بالتالي $\widehat{OAB}=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{BAT}\right)$

إذن $\widehat{AOB}=2\widehat{TAB}$

**خاصية1**

قياس زاوية مركزية في دائرة هو ضعف قياس زاوية محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره هذه الزاوية المركزية

**نشاط2**

لتكن $A$ و $B$ و $C$ و $D$ نقط مختلفة من دائرة $(C)$ مركزها $O$

بين أن $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=\pi$ أو $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$

**خاصية2**

$A$ و $B$ و $C$ ثلاث نقط من دائرة $(C)$ و $D$ نقط مختلفة من المستوى

تكون $D$ من الدائرة $(C)$ إذا و فقط إذا كان $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=\pi$ أو $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$

## 3- علاقات الجيب في مثلث

**نشاط 3**

ليكن $ABC$ مثلثا و $R$ شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$

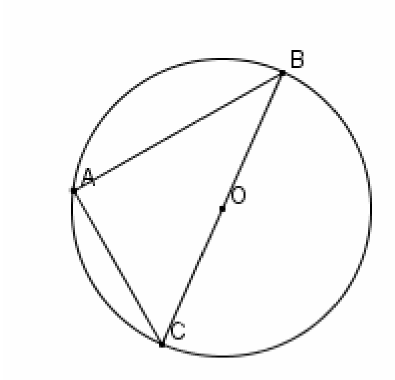
بين أن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$ في الحالات التالية

أ/ $ABC$ قائم الزاوية في $A$

ب/ جميع زوايا المثلث $ABC$ حادة

ج/ إحدى زوايا المثلث $ABC$ منفرجة

**الجواب**



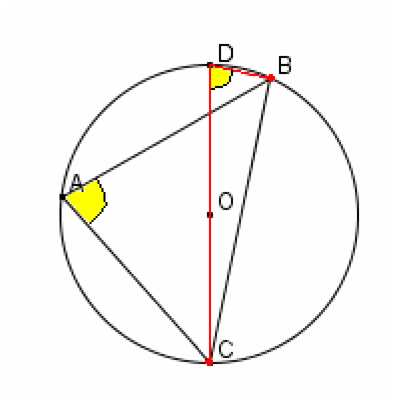

أ/ $ABC$ قائم الزاوية في $A$

$\sin\widehat{A}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ ومنه $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=BC=2R$

$\sin\widehat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=2R$

$\sin\widehat{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{2R}$ ومنه $\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$

إذن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$




ب/ جميع زوايا المثلث $ABC$ حادة

نعتبر $D$ نقطة مقابلة قطريا مع $C$

$DBC$ قائم الزاوية في $B$

لدينا $\widehat{A}\equiv\widehat{D}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$\sin\widehat{D}=\frac{BC}{DC}=\frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{BC}{\sin\widehat{D}}=2R$ إذن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=2R$



Moutamadris.ma

لدينا $DAC$ قائم الزاوية في $A$

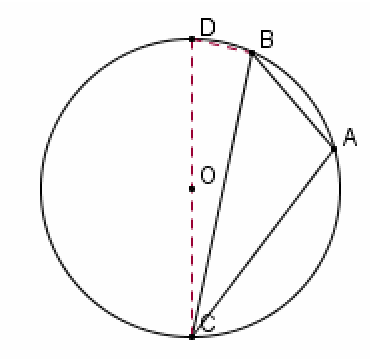
و $\widehat{CDA} \equiv \widehat{B}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$\sin \widehat{CDA} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{2R}$ ومنه $\sin \widehat{B} = \frac{AC}{2R}$ إذن $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$

بالمثل نعتبر نقطة مقابلة قطريا مع $A$ و نبين $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

ج/ إحدى زوايا المثلث $ABC$ منفرجة




لنفترض أن $\widehat{A}$ منفرجة

نعتبر $D$ نقطة مقابلة قطريا مع $C$

$\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ متكاملتان ومنه $\sin \widehat{D} = \sin \widehat{A}$

$\sin \widehat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{BC}{\sin \widehat{D}} = 2R$ إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R$

الزاويتان $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ حادتان

حسب ب/ نحصل على $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$ و $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

**خاصية**

ليكن $ABC$ مثلثا و $R$ شعاع الدائرة المحيطة به

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

## 4- علاقات في المثلث (المساحة - المحيط)

**نشاط**

ليكن $ABC$ مثلثا و $H$ المسقط العمودي لـ $A$ على $(BC)$ و $S$ مساحته

1- بين أن $S = \frac{1}{2}\left(BC \times AC \times \sin \widehat{C}\right)$

2- ليكن $r$ شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث $ABC$ و $O$ مركزها

أ/ أحسب مساحة $AOC$ بدلالة $r$ و $AC$

ب/ بين أن $S = \frac{1}{2} p \times r$ حيث $p$ محيط المثلث $ABC$

**خاصية**

ليكن $ABC$ مثلثا و $r$ شعاع الدائرة المحاطة به و $S$ مساحته $p$ محيطه

$$S = \frac{1}{2}\left(BC \times AC \times \sin \widehat{C}\right)$$

$$S = \frac{1}{2} p \times r$$



Moutamadris.ma