تمرين 1 . استعمال دالة أصلية لحساب تكامل.

أحسب التكاملات التالية: $\int_1^2 (4x^3-5x)\,dx$

$\int_0^1 e^{-x}\,dx$ • $\int_{-1}^2 (2x-1)^3\,dx$ • $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$

• $\int_1^9 x\sqrt{x}\,dx$ • $\int_4^5 \frac{1}{x-3}\,dx$ • $\int_1^8 \frac{x^4+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

• $\int_7^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$ • $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ • $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

$\int_0^{\pi} \cos(x)\cos(2x)\,dx$ • $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(x)\,dx$ • $\int_0^1 2^{5x}\,dx$

• $\int_0^1 \sqrt{x}(x+1)\,dx$ • $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)dx$

• $\int_1^2 \frac{x^2-2x}{\sqrt{3x^2-x^3}}\,dx$ • $\int_3^4 \frac{x^2+x-2}{x^3-2x^2}\,dx$

$\int_{-3}^{-2} \frac{x^3+x^2-2}{x+1}\,dx$ • $\int_{-1}^3 \left|x^2-2x\right|dx$

$\int_{-1}^1 \left|e^x-1\right|dx$ • $\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}\,dx$ • $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin(2x)|\,dx$

$\int_1^3 \frac{dx}{x^2-x-2}$ • $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+7}}$ • $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{|\ln(x)|}{x}\,dx$

• $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$ • $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))^2}$ •

$\int_{-1}^1 \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ • $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ • $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx$

• $\int_{\ln 2}^1 e^{3x+1}\,dx$ • $\int_{-1}^0 xe^{x^2+1}\,dx$ • $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ •

$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ • $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2}$ • $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

تمرين 2 . استعمال تقنية المكاملة بالأجزاء.

أحسب التكاملات التالية: $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}(x)\,dx$ • $\int_1^e x\ln(x)\,dx$

$\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$ • $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$ • $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ • $\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}\,dx$ • $\int_2^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(1+\cos(x))\,dx$ • $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2(x)}\,dx$ • $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ • $\int_0^1 (x^2-2x)e^x\,dx$

تمرين 3 . استعمال تقنية المكاملة بتغيير المتغير.

أحسب التكاملات التالية: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ $\left(t=\sqrt{1+x}\right)$ •

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1}$ $\left(t=x^2\right)$ • $\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dt$ $\left(x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$

• $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dt$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2};\, x=\sin(t)\right)$ •

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos(t)}{1-\cos(t)}\,dt$ $\left(x=\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ • $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ $\left(t=e^{-x}\right)$

• $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ $\left(t=\sqrt{x}\right)$ • $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)\,dx}{1+\sin^2(x)}$ $\left(t=\sin(x)\right)$

• $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctg}(x)\,dx$ $\left(t=\frac{1}{x}\right)$.

تمرين 4 .

أحسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج قيمتي I و J في الحالات التالية:

◄ $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2t)\cos(4t)\,dt$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2t)\sin(4t)\,dt$.

◄ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,dt$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,dt$.

◄ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin(\theta)}\,d\theta$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin(\theta)}\,d\theta$.

◄ $I=\int_0^{\pi} e^x\cos^2(x)\,dx$ و $J=\int_0^{\pi} e^x\sin^2(x)\,dx$.

◄ $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1-t}\cos(t)\,dt$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1-t}\sin(t)\,dt$.

تمرين 5 .

نعتبر التكاملات التالية: $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$

و $J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$ و $K=\int_0^1 \sqrt{2+x^2}\,dx$.

❶ نضع $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)$. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج I .

❷ تحقق أن $J+2I=K$ بين أن $K=\sqrt{3}-I$ ، استنتج K و J .

تمرين 6 .

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

❶ أحسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة $I=\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

❷ نعتبر $J=\int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2-1}\,dx$. أحسب $J+I$ بدلالة I و استنتج قيمة J .

تمرين 7 . أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$$(\forall x\in\mathbb{R}^*):\ \frac{1}{e^x-1}=a+\frac{be^x}{e^x-1}$$

استنتج حساب التكامل $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-1}$.

❷ حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$$(\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1;2\}):\ \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}$$

استنتج حساب التكامل $I=\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

❸ حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث:

$$(\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}):\ \frac{x^2}{(x-1)^2}=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

استنتج قيمة التكامل $I=\int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2}\,dx$.

❹ حدد العددين a و b بحيث:

$$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}) : \frac{x}{(x+1)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

باستعمال المتغير $x=t^4$ أحسب $I=\int_1^{16}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^2}$.

تمرين 8

. أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ نضع $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$. باستعمال المتغير $t=-x$

بين أن: $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{2t}\cos(t)}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t$ و استنتج أن: $I=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

❷ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و $\alpha\in\mathbb{R}^*$ نضع:

$$I_n(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\cos^\alpha(nx)}{\cos^\alpha(nx)+\sin^\alpha(nx)}\,\mathrm{d}x .$$

أحسب $I_n(\alpha)$ و تحقق أنه غير مرتبط بالعدد α .

❸ لتكن f متصلة على $[a;b]$ حيث $a<b$.

بين أن $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$

استنتج قيمة التكامل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{\cos(x)}-\sqrt{\sin(x)}\right)\mathrm{d}x$.

❹ ليكن a من $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$. بين أنه إذا كانت f دالة زوجية و متصلة على $[-a;a]$ فإن: $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

استنتج قيمة التكامل $\int_{-a}^a\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+e^x)}$.

❺ لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث: $(\exists\lambda\in\mathbb{R})\ (\forall x\in\mathbb{R}) : \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lambda$. بين أن f فردية.

❻ ليكن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ و g تقابله العكسي حيث f و g متصلتان على $\mathbb{R}^+$.

بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right) : \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t=xf(x)$

استنتج قيمة التكامل $\int_0^x \mathrm{Arctg}(t)\,\mathrm{d}t$

❼ α و β و a أعداد حقيقية بحيث $a>0$.

f و g دالتين متصلتين على $[-a;a]$ بحيث: $\int_{-a}^a\frac{f(x)}{1+e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^a\frac{g(x)}{1+e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x$.

بين أنه يوجد λ من $[-a;a]$ بحيث: $f(\lambda)=g(\lambda)$.

❽ f و g دالتان متصلتان على $[a;b]$ بحيث: g غير منعدمة و موجبة على $[a;b]$ و $a<b$. بين أن: $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$

و أن: $(\exists c\in[a;b]) : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

❾ لكل n و m من $\mathbb{N}$ نضع: $I_{n,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\cos^m(t)\,\mathrm{d}t$.

حدد علاقة ترجعية تربط بين $I_{n,m}$ و $I_{n,m-2}$ ، ثم بين $I_{n,m}$ و $I_{n-2,m}$. استنتج قيمة $I_{n,m}$ بدلالة n و m.

❿ أحسب نهاية كل من المتتاليات التالية: $u_n=\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2+k^2}$

• $v_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ • $w_n=\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^3+nk^2}$

• $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n e^{\frac{k}{n}\sqrt{2}}$ • $b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{kx}{n}\right)\ (x>0)$

• $(a>0)$; $c_n=\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^n(a+k)\right)^{\frac{1}{n}}$ • $d_n=\sum_{k=1}^n\frac{n+k}{n^2+k}$

• $x_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$ • $y_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n E\left(\sqrt{k}\right)$

• $z_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ • $t_n=n\sum_{k=1}^n\frac{e^{-n/k}}{k^2}$.

تمرين 9

نضع: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ و $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x$

❶ أحسب I_0 و J_0 .

❷ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \begin{cases} I_n+nJ_n=1 \\ -nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}}\end{cases}$.

❸ استنتج I_n و J_n بدلالة n ، ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

تمرين 10

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع: $I_n=\int_1^e x\left(\ln(x)\right)^n\,\mathrm{d}x$.

❶ أحسب I_0 .

❷ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$.

❸ بين أن المتتالية (I_n) تناقصية.

❹ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : I_n\geqslant 0$.

❺ استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : I_n\leqslant\frac{e^2}{n+1}$. ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

تمرين 11

نعتبر التكامل: $n\in\mathbb{N}$ ؛ $I_n=\int_0^1 x^ne^x\,\mathrm{d}x$.

❶ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.

❷ أحسب I_1 و I_2 و I_3.

❸ استنتج قيمة التكامل: $\int_0^1(x^3+2x^2-2x)e^x\,\mathrm{d}x$.

تمرين 12

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـما يلي:

$u_o=\int_0^1\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$ و $u_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

❶ أحسب u_o ، ثم بين أن: $u_1=\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$.

❷ بين أن: $(\forall t\in[0;1])\ (\forall n\in\mathbb{N}^*) : \ t^{n+1}\leqslant t^n$.

❸ أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

❹ تحقق أن: $(\forall t\in[0;1])\ \ 1\leqslant\sqrt{1+t}\leqslant\sqrt{2}$.

❺ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : \frac{1}{n+1}\leqslant u_n\leqslant\frac{\sqrt{2}}{n+1}$. استنتاج ؟

تمرين 13

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $I_n=\frac{1}{n!2^{n+1}}\int_0^1(1-x)^n\,e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

❶ أحسب I_1 .

❷ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$.

❸ استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : I_n=\sqrt{e}-\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!2^k}$.

❹ بين أن: $\left(\exists M\in\mathbb{R}^+\right)(\forall n\in\mathbb{N}^*) : 0\leqslant I_n\leqslant\frac{M}{n!2^n}$.

❺ استنتج النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!2^k}$.

تمرين 14

نعتبر F المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

❶ أدرس منحى تغيرات الدالة F .

❷ بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right) : \ e\ln(x)\leqslant F(x)\leqslant e^x\ln(x)$.

❸ استنتج النهايتين : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\displaystyle\lim_{x\to0^+}F(x)$

تمرين 15

f معرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} \ ; \ x\neq0 \\ f(0)=1\end{cases}$.

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ و بين أن f دالة زوجية.

❷ بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right) : \ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqslant\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\leqslant x$

❸ بين أن f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

❹ تحقق أن: $(\forall t\geqslant1) : \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. استنتج $\displaystyle\lim_{x+\infty}f(x)$

❺ أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

تمرين 16

لكل x من $]0;+\infty[$ نضع : $F(x)=\displaystyle\int_0^x\ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t$.

❶ أدرس تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}_+^*$.

❷ ليكن a عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$.

أ) بين أن: $(\forall t\in[1;1+a]) : \ \dfrac{1}{1+a}\leqslant\dfrac{1}{t}\leqslant1$.

ب) استنتج أن: $\dfrac{a}{1+a}\leqslant\ln(1+a)\leqslant a$.

❸ ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$ باستعمال السؤال ❷ بين أن:

$$\int_0^x\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t\leqslant F(x)\leqslant\int_0^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t \ .$$

و أن: $\dfrac{\ln(2)-\ln\left(1+e^{-2t}\right)}{2}\leqslant F(x)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)$

❹ نقبل أن: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=\ell$ حيث $\ell\in\mathbb{R}$

بين أن: $\dfrac{1}{2}\ln2\leqslant\ell\leqslant\dfrac{1}{2}$.

❺ لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t$.

أ) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : \ 0\leqslant u_n\leqslant\ln\left(1+e^{-2n}\right)$

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

❻ لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.

أ) عبر عن S_n بدلالة F و n .

ب) بين أن المتتالية (S_n) متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين 17

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-\ln(x)} \ ; \ x>0 \\ f(0)=0\end{cases}$$

❶ بين أن f متصلة على يمين 0. ثم أحسب $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$

❷ أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0.

❸ أدرس تغيرات f على المجال $[0;+\infty[$.

❹ أنشئ منحنى الدالة f في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

❺ بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}^+$.

II) F دالة معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}f(t)\,\mathrm{d}t$

❶ أحسب النهاية $\displaystyle\lim_{x\to0^+}F(x)$.

❷ نضع: $(\forall x\geqslant1) : \ I(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

أ) بين أن: $(\forall x\geqslant1) : \dfrac{\ln(2)}{2x-\ln(2x)}\leqslant I(x)\leqslant\dfrac{\ln(2)}{x-\ln(x)}$.

ثم استنتج النهاية $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}I(x)$.

ب) بين أن: $(\forall x\geqslant1) : F(x)-I(x)=\ln\left(1+\dfrac{x-\ln(2)}{x-\ln(x)}\right)$

ثم استنتج النهاية $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$.

❸ لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز الهندسي المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمات المعرفة على التوالي بالمعادلات : $x=\alpha$ و $x=2\alpha$ و $y=0$.
حدد قيمة العدد α بحيث تكون المساحة $\mathcal{A}(\alpha)$ قصوية.

تمرين 18

I) ❶ أحسب $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x}$ و استنتج $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{\ln(x+1)}$

❷ لكل عدد حقيقي x نضع: $I(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}e^t\,\mathrm{d}t$.

(أ) بدون حساب $I(x)$ بين أن: $(\forall x\geqslant0) : \ 0\leqslant I(x)\leqslant\dfrac{x^3}{6}e^x$.

و أن: $(\forall x\leqslant0) : \ |I(x)|\leqslant\dfrac{|x|^3}{6}$.

(ب) بين أن: $I(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$.

(ج) باستعمال ما سبق بين أن: $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$

ثم استنتج أن $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(x+1)}=\frac{1}{2}$.

❸ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=e^x\ln(1+x)-x$. أدرس تغيرات الدالة f و استنتج أن $f(x)\geqslant0$: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$.

II) نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_{1+x}^{e^x}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}\right) \ ; \ x>0 \\ F(0)=0\end{cases}$$

❶ بين أن: $(\forall x>0) : \dfrac{e^x-1-x}{x} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$

❷ بين أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

❸ بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن: $(\forall x>0) :\ F'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x)}$.

❹ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. و أعط جدول تغيرات F.

❺ أدرس الفرع اللانهائي لـ $(\mathscr{C}_F)$. ثم أنشئ $(\mathscr{C}_F)$.

تمرين 19

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي: $f_n(x)=\dfrac{e^x}{(1+x)^n}$ و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ منحناها في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث $||\vec{i}||=2cm$.

I) ❶ أعط جدول تغيرات كل من الدالتين f_1 و f_2.

❷ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$. و حدد الفروع اللانهائية لكل من $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$. ثم أنشئهما .

❸ أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

❹ أثبت أن الدالة f_n تقبل قيمة دنوية α_n عند $n-1$.

❺ بين أن: $(\forall x\geqslant 0) :\ f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$. و استنتج أن المتتالية (α_n) تناقصية ، ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

II) نعتبر الدالة F المعرفة على $\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ بما يلي:

$$F(x)=\int_0^{\ln x} f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

❶ ليكن x من المجال $\left]\dfrac{1}{e};1\right[$.

(أ) باستعمال مكاملة بالاجزاء ، بين أن

$$F(x)=\left(1-\frac{x}{1+\ln(x)}\right)+\int_0^{\ln x}\frac{e^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(ب) بين أن: $\displaystyle\int_0^{\ln x}\frac{e^t}{1+t}\,\mathrm{d}t\leqslant x-1$ و استنتج أن $F(x)\leqslant\dfrac{x\ln(x)}{1+\ln(x)}$ ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}F(x)$.

❷ (أ) بين أنه لكل x من $\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ لدينا:

$$F(x)=\frac{x}{(1+\ln(x))^2}-1+2\int_0^{\ln x} f_3(t)\,\mathrm{d}t$$

(ب) استنتج أن: $(\forall x\geqslant 1) : F(x)\geqslant\dfrac{x}{(1+\ln(x))^2}-1$. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

❸ بين أن F تقابل من $\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ نحو $\mathbb{R}$.

III) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

❶ أثبت أن المتتالية (I_n) تناقصية و استنتج أنها متقاربة.

❷ بين لكل n من $\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ لدينا:

$$\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\leqslant I_n\leqslant\frac{e}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

❸ تحقق أن: $(\forall t>-1) : f_n'(t)=f_n(t)-nf_{n+1}(t)$ ، حدد علاقة بين I_{n+1} و I_n ثم بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_{n+1}=1$.

تمرين 20

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $\begin{cases} f_n(x)=x\,(\ln x)^n \ ;\ x>0\\ f_n(0)=0\end{cases}$ و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ منحناها في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث $||\vec{i}||=2cm$.

I) ❶ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f_n على يمين 0.

❷ بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_{+^*}$. ثم أحسب $f_n'(x)$.

❸ أعط جدول تغيرات الدالة f_n حسب زوجية n.

❹ بين أن جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_n)$ تمر من ثلاث نقط ثابتة O و A و B حيث $0<x_A<x_B$.

❺ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$. ثم أنشئهما في نفس المعلم.

❻ أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

II) لكل $n\in\mathbb{N}^*$ و $a\in]0;1[$ نضع: $F_n(a)=\displaystyle\int_a^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

❶ (أ) بدون حساب $F_n(a)$ ؛ بين أن $F_n(a)$ تقبل نهاية منتهية u_n عندما يؤول a إلى 0^+.

(ب) أحسب $F_1(a)$ ، ثم استنتج أن $u_1=-\dfrac{1}{4}$.

❷ (أ) بين أن لكل a من $]0;1[$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $F_{n+1}(a)=-\dfrac{a^2}{2}(\ln a)^{n+1}-\dfrac{n+1}{2}F_n(a)$.

(ب) استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : u_{n+1}=-\dfrac{n+1}{2}u_n$.

❸ لتكن $\mathcal{A}_n$ مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_n)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=1$

(أ) بين أن: $\mathcal{A}_n=4\,|u_n|$. و أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \mathcal{A}_n=\dfrac{n!}{2^{n-1}}$.

(ب) بين أن: $(\forall n\geqslant 3) : \mathcal{A}_{n+1}\geqslant 2\mathcal{A}_n$. ثم استنتج $\lim\limits_{n+\infty}\mathcal{A}_n$

III) لكل x من $\mathbb{R}$ نضع: $G(x)=\displaystyle\int_1^{e^x} t\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

❶ بدون حساب $G(x)$ بين أن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

❷ أحسب $G'(x)$ ثم أدرس تغيرات الدالة G.

❸ أحسب $G(x)$ بدلالة x. ثم أعط جدول تغيرات G.

تمرين 21 . أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ نعتبر الدالة: $f(x)=\sqrt{1-e^{-2x}}$. حدد $\mathscr{D}_f$ ثم بين أن

$$(\forall x\in\mathscr{D}_f\setminus\{0\}) : f(x)+f'(x)=\frac{f'(x)}{2(1+f(x))}+\frac{f'(x)}{2(1-f(x))}$$

أحسب التكامل $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$.

❷ نعتبر الدالة: $f(x)=e^{-2x}\sin(3x)$.

تحقق أن: $(\forall x\in\mathbb{R}) : f''(x)+4f'(x)+13f(x)=0$

ثم أحسب التكامل $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x)\,dx$.

❸ a و b من $\mathbb{R}$ حيث $(\forall x\in[0;1]) : \sin ax+\cos bx\neq 0$

$J=\int_0^1 \frac{\cos ax}{\sin ax+\cos bx}\,dx$ و $I=\int_0^1\frac{\sin bx}{\sin ax+\cos bx}\,dx$.

أحسب $I+J$ و $aJ-bI$ بدلالة a و b ثم استنتج قيمتي I و J.

❹ باعتبار دالة أصلية للدالة: $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k x^{k-1}$

على $\mathbb{R}$. بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

❺ بين أن: $(\forall a\in\mathbb{R}^*)(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \int_0^a\frac{(a-t)^{n-1}}{(a+t)^{n+1}}\,dt=\frac{1}{2na}$.

❻ لكل n من $\mathbb{N}$ نضع: $a_n=\int_n^{n+1}\frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx$.

أحسب a_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

❼ أحسب التكاملات التالية : $\int_4^7 \frac{3t-5}{t^2-4t+3}\,dt$

• $\int_0^1\frac{dt}{(t+2)(t^2+2t+5)}$ • $\int_{-1}^0 \frac{t+1}{t^2+t+1}\,dt$ •

$\int_2^3\frac{2t^3+t^2+2t-1}{t^4-1}\,dt$ • $\int_1^2\frac{t-1}{t^2(t-3)^2}\,dt$.

❽ f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث:

$(\forall x\in\mathbb{R}) : \int_x^{x+2} f(t)\,dt = f(0)=5$. أحسب $f(2012)$.

❾ f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث:

$$(\forall x\in\mathbb{R}) : \int_0^x f(t)\,dt=\frac{x}{2}(1+f(x))$$

أحسب $f(0)$ ثم حدد تعبير $f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

❿ حدد مجموعة تعريف الدوال: $f(x)=\int_0^{\ln x}\frac{1}{t-\ln 5}\,dt$

• $g(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}\frac{1}{t-1}\,dt$ • $h(x)=\int_x^{3x}\frac{1}{\ln t}\,dt$.

تمرين 22 . أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ f دالة متصلة على $[-2;2]$ بحيث:

$$(\forall x\in[-2;2]) : f(x)+f(-x)=x^2$$

أحسب التكامل $I=\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{x^6+64}\,dx$.

❷ ليكن n و m من $\mathbb{N}^*$.

• بين أن: $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$.

• استنتج أن: $\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^kC_m^k}{n+k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k}{m+k+1}$.

❸ • أحسب : $I=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}\,dx$ و $J=\int_0^1\frac{dx}{x^3+1}$.

• أحسب التكامل: $K=\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{Arctg}(x\sqrt{x})\,dx$. (استعمل مكاملة بالاجزاء)

❹ ليكن a من $]-1;0[$ و b من $]0;+\infty[$. أحسب : $A=\int_0^1\ln\left(1+ax^2\right)dx$ و $B=\int_0^1\ln\left(1+bx^2\right)dx$.

❺ باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos 2x\,dx$ • $\int_0^1 x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ • $\int_1^e x(\ln x)^2\,dx$ • $\int_0^1 x\left(\mathrm{Arctg}(x)\right)^2dx$ • $\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)\,dx$ • $\int_1^{e^\pi}\sin^2(\ln x)\,dx$.

❻ لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر : $(\forall x>0) : f_n(x)=\int_1^x\frac{\ln(t)}{t^{n+1}}\,dt$

• أحسب : $f_o(x)$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f_o(x)$.

• أحسب : $f_n(x)$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

❼

• بين أن : $\int_0^{\frac12}\frac{e^{-x}}{1-x}\,dx=\int_0^{\frac12}(1+x)e^{-x}\,dx+\int_0^{\frac12}\frac{x^2e^{-x}}{1-x}\,dx$

• بين أن : $\frac{1}{24}\leqslant\int_0^{\frac12}\frac{x^2e^{-x}}{1-x}\,dx\leqslant\frac{1}{12\sqrt{e}}$

• أعط تأطيرا للتكامل $\int_0^{\frac12}\frac{e^{-x}}{1-x}\,dx$

❽ • ليكن a من $\mathbb{R}^+$ بين بالترجع أن: لكل n من $\mathbb{N}$

$$e^{-a}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^ka^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^a\frac{(a-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt$$

• استنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+) : \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leqslant e^{-x}-1+x\leqslant\frac{x^2}{2}$.

❾ f دالة متصلة على $[a;b]$ بحيث $0<a<b$ و $(\forall x\in[a;b]) : f(x)\geqslant 0$

بين أن: $(\exists c\in[a;b]) : b\int_a^c f(x)\,dx = a\int_c^b f(x)\,dx$.

❿ f دالة متصلة على $[0;1]$ نعتبر : $u_n=\int_0^1\frac{f(x)}{1+nx}\,dx$

بين أن: $(\exists M\in\mathbb{R}^+)(\forall n\in\mathbb{N}^*) : |u_n|\leqslant M\frac{\ln(1+n)}{n}$.

استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geqslant1}$.

تمرين 23 . أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ f دالة متصلة على $[0;\pi]$ بحيث : $\int_0^\pi f(x)\,dx=0$

بين أن: $(\exists c\in[0;\pi]) : f(c)=\cos(c)$.

❷ f دالة متصلة على $[0;1]$ بحيث : $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$

بين أن: $(\exists\alpha\in[0;1]) : f(\alpha)=\alpha$.

❸ f دالة متصلة على $[0;1]$ بحيث : $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}$

• أحسب التكامل: $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$

• بين أن: $(\exists\delta\in[0;1]) : \frac{1}{1+\delta}\leqslant f(\delta)\leqslant\frac{1}{1+\delta^3}$.

تمرين 24

نعتبر الدالة F المعرفة بما يلي : $F(x)=\int_x^{4x}\frac{\ln(t)}{2t-1}\,\mathrm{d}t$.

❶ بين أن: $\mathscr{D}_F=\left]0;\frac{1}{8}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

❷ بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathscr{D}_F$ ثم أحسب $F'(x)$.

❸ ليكن x عنصرا من $[1;+\infty[$

(أ) أثبت أن: $(\exists c\in[x;4x]) : F(x)=\frac{3x\ln(c)}{2c-1}$.

(ب) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

❹ ليكن x عنصرا من $\left]0;\frac{1}{16}\right[$

بين أن: $|F(x)|\leqslant\int_x^{4x}-2\ln(t)\,\mathrm{d}t$. ثم استنتج $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$.

تمرين 25

لتكن f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق ما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}) : f'(x)-f(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ و $f(0)=f'(0)=1$

❶ بين أن f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

❷ بين أن f حل للمعادلة التفاضلية : $(E) : y''-y'-2y=0$.

❸ حل المعادلة (E) و استنتج أن: $f(x)=\frac{1}{3}\left(2e^{2x}+e^{-x}\right)$.

تمرين 26

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $(a<b)$ و f دالة متصلة على $[a;b]$.

❶ بين أن:

$$\Big((\forall x\in[a;b]) : f(x)>0\Big)\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$$

❷ هل الاستلزام

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0\Longrightarrow\Big((\forall x\in[a;b]) : f(x)=0\Big)$$ صحيح

❸ نفترض أن: $(\forall x\in[a;b]) : f(x)\geqslant0$.

بين أن: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0\Longrightarrow\Big((\forall x\in[a;b]) : f(x)=0\Big)$

❹ نفترض أن: $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

بين أن f لها إشارة ثابتة على $[a;b]$.

تمرين 27

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$.

❶ بين أن لكل λ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\geqslant0$$

❷ استنتج أن: (متفاوتة $\mathrm{Cauchy-Schwartz}$)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

❸ بين أن $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\frac{\pi+2}{4\pi}}$ و $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$

تمرين 28

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(2n+1)x}{2\sin(x)}\ ;\ x\neq0 \\ f(0)=\dfrac{2n+1}{2}\end{cases}$$

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ و بين أن f تقبل دالة أصلية على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

❷ بين أن: $(\forall x\in\mathscr{D}_f) : f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)$.

❸ بين أن: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

تمرين 29

نضع: $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

❶ (أ) بين أن:

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) : \int_0^x\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t=\int_{\pi(1-x)}^{\pi}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

(ب) بين أن: $J=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

❷ نعتبر المتتالية (u_n) بحيث: $u_n=\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$.

(أ) بين أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) : J=u_o+\cdots+u_{n-1}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

(ب) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\left(\forall t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) : \frac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}\leqslant2t^n$.

(ج) استنتج تأطيرا للتكامل: $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

(د) بين أن: $J=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_o+u_1+\cdots+u_{n-1})$.

❸ أحسب u_o و u_1 ثم بين أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}) : u_n=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)u_{n-2}\right)$$

تمرين 30

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

❶ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$. أحسب I_o و I_1.

❷ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : (n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$.

❸ بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$I_{2n}=\frac{\pi(2n!)}{2^{2n+1}(n!)^2}\quad \text{و}\quad I_{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

❹ بين أن المتتالية $(I_n)_{n\geqslant o}$ تناقصية .

❺ استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : 1\leqslant\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leqslant\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$.

و أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1$. ثم أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{n\left((2n)!\right)^2}=\pi$.

❻ لكل n من $\mathbb{N}$ نضع: $K_n=(n+1)I_nI_{n+1}$. بين أن $(K_n)_{n\geqslant o}$ متتالية ثابتة و استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}}=1$.

❼ باستعمال السؤال ❸ بين أن: $I_{2n}=\frac{\pi}{2.4^n}\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

تمرين 31

f دالة معرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

❶ حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(0)=-\ln 2$. ثم أحسب $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

❷ لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
أحسب u_n بدلالة n ، ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❸ بين أن لكل k من $\mathbb{N}$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا:

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

❹ لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(أ) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : u_n\leqslant S_n\leqslant I$.

(ب) استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\geqslant1}$ متقاربة و حدد نهايتها .

تمرين 32

$f:[0;1]\to\mathbb{R}^+$ دالة غير ثابتة ، قابلة للاشتقاق بحيث: $f(0)=0$ نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بما يلي:

$$g(x)=(1-x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

❶ بين أنه يوجد α من $]0;1[$ بحيث : $g'(\alpha)=0$.

❷ لتكن h دالة معرفة على $[0;\alpha]$ بما يلي: $h(x)=(1-x)f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. بتطبيق مبرهنة رول بين أن: $(\exists x_o\in]0;1[) : f'(x_o)>2f(x_o)$.

تمرين 33

لكل x من $\mathbb{R}$ نعتبر الدالة : $f(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

❶ أدرس زوجية f ، ثم بين أنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

❷ بين أن f هي حل للمعادلة التفاضلية $y'+2xy=1$.

❸ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x)=1$.

❹ نعتبر الدالة $g(x)=\frac{e^{x^2}}{2x}f'(x)$.
بين أن g تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ و استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_o\in\mathbb{R}^{+*}$ و أن : $0<x_o<1$. ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

تمرين 34

نعتبر الدالة ψ المعرفة بما يلي:

$$\psi(x)=\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$$

و ليكن $(\mathscr{C}_\psi)$ منحناها في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) ❶ حدد $\mathscr{D}_\psi$ و تحقق أن $\mathcal{I}(1;0)$ مركز تماثل المنحنى $(\mathscr{C}_\psi)$.

❷ أدرس تغيرات ψ ثم حدد الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr{C}_\psi)$.

❸ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_\psi)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❹ أحسب $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_\psi)$ و المستقيمات $y=0$ و $x=0$ و $x=1$.

II) نعتبر الدالة F المعرفة بـما يلي:
$F(x)=\int_x^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t$ حيث $f(t)=\sqrt{t^2-2t+2}$.

❶ بين أن: $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$ و أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و احسب $F'(x)$ ؛ ثم تحقق أن F' فردية و أن F زوجية.

❷ بين أن: $(\forall t>1) : t-1<f(t)<t-1+\frac{1}{t}$.

❸ استنتج أن:

$$(\forall x>1) : 2x<F(x)<2x+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

❹ أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

❺ نعتبر التكامل : $\mathcal{I}=\int_0^2\frac{(t-1)^2}{f(t)}\,\mathrm{d}t$

(أ) أحسب $F(0)-\mathcal{I}$.

(ب) أحسب $F(0)+\mathcal{I}$. (مكاملة بالأجزاء على $\mathcal{I}$).

(ب) استنتج قيمة $F(0)$.

❻ أدرس الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr{C}_F)$. ثم أنشئ $(\mathscr{C}_F)$.

تمرين 35

I) لتكن F دالة معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $F(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

❶ أدرس تغيرات الدالة F .

❷ بين أن: $(\forall x\in]0;1[) : \int_1^x\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant0$.

❸ استنتج النهاية: $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$

❹ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة F.

II) لتكن g دالة معرفة بما يلي: $g(x)=\int_0^x\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\,\mathrm{d}t$

❶ بين أن g معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم احسب $g'(x)$.

❷ بين أن g دالة فردية ثم أدرس تغيرات الدالة g .

❸ بين أن: $\left(\forall t\in\mathbb{R}^+\right) : \frac{1}{1+2t}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$.

❹ استنتج النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

❺ بين أن g تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

❻ لتكن f الدالة العكسية للدالة g.

(أ) بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}) : f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+4f^2(x)}$.

(ب) استنتج أن f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$
و أن: $(\forall x\in\mathbb{R}) : f''(x)-f(x)=0$.

❼ أحسب $f(0)$ و $f'(0)$ ؛ ثم استنتج $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x .

تمرين 36

I) نعتبر الدالة f بحيث:
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x^2-\ln(x)} \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

❶ بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) : x^2-\ln(x)>0$.

❷ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f على يمين 0.

❸ أحسب $\lim\limits_{x+\infty} f(x)$ و حدد الفرع اللانهائي لـ $(\mathscr{C}_f)$.

❹ أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

II) لكل $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ نعتبر الدالة f_n بحيث:
$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x}{x^n-\ln(x)} \ ; \ x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

❶ بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) : x^n-\ln(x)>0$.

❷ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f_n على يمين 0.

❸ لتكن $g_n(x) = 1+(1-n)x^n-\ln(x)$.

(أ) بين أن g_n تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

(ب) استنتج أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n و أن $0<\alpha_n<1$.

(ج) بين أن: $(\forall n \geqslant 2) : \dfrac{1}{n-1} \leqslant \alpha_n^n \leqslant 1$. حدد $\lim \alpha_n$.

(د) حدد إشارة $g_n(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

❹ (أ) بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) : f_n'(x) = \dfrac{g_n(x)}{(x^n-\ln x)^2}$.

(ب) ضع جدول تغيرات الدالة f_n.

III) لتكن F دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:
$F(x) = e^{-x}\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

❶ بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) : F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

❷ استنتج أن F تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

❸ بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) : F(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}$.

❹ استنتج النهاية: $\lim\limits_{x\to 0+} F(x)$.

❺ بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) : \dfrac{e-1}{x+1} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{e-1}{x}$.

❻ استنتج النهاية: $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$.

❼ بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

تمرين 37

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

I) ❶ أدرس تغيرات F، ثم بين أن F دالة فردية.

❷ (أ) تحقق أن: $(\forall t \geqslant 2) : e^{-t^2} \leqslant e^{-2t}$. و استنتج أن: $(\forall x \geqslant 2) : F(x) \leqslant \dfrac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \displaystyle\int_0^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(ب) بين أن: $(\forall x \geqslant 2) : F(x) \leqslant \dfrac{1}{2e^4} + \displaystyle\int_0^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

❸ بين أن F مكبورة على $\mathbb{R}$ و أن F تقبل نهاية منتهية ℓ عند $+\infty$. (غير مطلوب تحديد ℓ)

II) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-x}{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t$.

❶ بين أن $(\forall x \geqslant 0) : 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$. أحسب $\lim\limits_{x+\infty} f(x)$.

❷ لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل t من $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ نضع: $g(t) = F\left(x\tan(t)\right)$.

(أ) بين أن g قابلة للاشتقاق على $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ و أن: $g'(x) = \dfrac{x}{\cos^2(t)} e^{-x^2\tan^2(t)}$.

(ب) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F(x) = x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\tan^2(t)}}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$

❸ نقبل أن f قابلة للاشتقاق على $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ و أن: $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{-x}{\cos^2(t)}}}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$. بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) : \left(f\left(x^2\right)\right)' = -2e^{-x^2}F(x)$.

❹ لكل x من $\mathbb{R}$ نضع: $h(x) = f\left(x^2\right) + (F(x))^2$.

(أ) بين أن h دالة ثابتة ، ثم حدد قيمتها.

(ب) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(ج) أعط جدول تغيرات F ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_F)$.

III) لكل n من $\mathbb{N}$ و لكل x من $\mathbb{R}^+$ نضع: $U_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ و $V_n = \lim\limits_{x\to+\infty} U_n(x)$.

❶ تحقق أن: $V_o = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

❷ بين أن: $(\forall n \geqslant 2) : V_n = \dfrac{n-1}{2}V_{n-2}$.

❸ استنتج أن: $V_n.V_{n+1} = \dfrac{n!\sqrt{\pi}}{2^{n+2}}$.

❹ أحسب الحدود V_3 و V_4 للمتتالية (V_n) .

تمرين 38

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln(x)}\ ;\ 0<x<1\\ f(0)=0\ ;\ f(1)=1\end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$. الهدف من هذه المسألة هو دراسة الدالة f و حساب التكامل $I=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

الجزء الأول : دراسة الدالة f

I) ❶ بين أن f متصلة على يمين 0 و يسار 1 .

❷ (أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ و أحسب $f'(x)$.

(ب) استنتج أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة الدالة $\varphi(x)=\ln(x)-1+\dfrac{1}{x}$ على $]0;1[$. أدرس تغيرات φ و استنتج إشارتها ، ثم استنتج تغيرات f على $[0;1]$.

❸ أدرس قابلة اشتقاق f على يمين 0 . التأويل الهندسي.

II) ❶ بين أن: $\left(\forall u\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) : 0\leqslant \dfrac{1}{1-u}-(1+u)\leqslant 2u^2$

❷ استنتج أن لكل u من $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ لدينا:

$$0\leqslant -\ln(1-u)-\left(u+\frac{u^2}{2}\right)\leqslant\frac{2u^3}{3}$$

❸ لتكن g دالة معرفة على $[0;1]$ بما يلي: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. بين أن لكل t من $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ لدينا: $0\leqslant g(1+t)-g(1)+\dfrac{t}{2}\leqslant\dfrac{2t^2}{3}$ و استنتج أن g قابلة للاشتقاق على يسار 1 و حدد $g'_g(1)$.

❹ استنتج أن f قابلة للاشتقاق على يسار 1 و أن $f'_g(1)=\dfrac{1}{2}$.

❺ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. نأخذ $\|\vec{i}\|=10cm$

الجزء الثاني : حساب التكامل I.

لكل x من $[0;1]$ نضع: $I(x)=\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ و $J(x)=\int_x^1\dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

I) لتكن ψ الدالة المعرفة على $[0;1]$ بما يلي:

$$\psi(x)=J(x^2)-J(x)$$

❶ بين أن ψ قابلة للاشتقاق على $]0;1]$ و أن $\psi'(x)=\dfrac{1}{x}\left[f(x)-2f(x^2)\right]$.

❷ بين أن: $(\forall x\in]0;1]) : f(x)-2f(x^2)=-xf(x)$.

❸ استنتج أن: $① \ (\forall x\in]0;1]) : I(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{t-1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

❹ بين أن: $② \ (\forall x\in]0;1]) : \displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{-1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t=\ln(2)$

❺ بين أن: $(\forall x\in]0;1[)\ (\forall t\in]0;x[) : 0\leqslant\dfrac{-1}{\ln(t)}\leqslant\dfrac{-1}{\ln(x)}$

❻ استنتج أن: $③ \ (\forall x\in]0;1[) : 0\leqslant\left|\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}\right|\leqslant\frac{-x}{\ln x}$

❼ باستعمال ① و ② و ③ أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} I(x)$.

❽ بين أن: $(\forall x\in]0;1]) : I-I(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

❾ استنتج أن: $(\forall x\in]0;1]) : 0\leqslant I-I(x)\leqslant x$. و أن $I=\ln(2)$

تمرين 39

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f_n(x)=\dfrac{x^ne^{-x}}{n!}$ و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ منحناها في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=10cm$.

الجزء الأول :

I) ❶ بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0$.

❷ (أ) تحقق أن: $f_n'(x)=\dfrac{x^{n-1}}{n!}(n-x)e^{-x}$.

(ب) أعط جدول تغيرات الدالة f_n حسب زوجية n.

❸ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$.

❹ تحقق أن النقطة $A\left(n;f_n(n)\right)$ تنتمي إلى $(\mathscr{C}_{n-1})$.

❺ أنشئ في نفس المعلم المنحنيات $(\mathscr{C}_0)$ و $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.

II) نعتبر المتتالية $(\mathscr{U}_n)_{n\geqslant1}$ المعرفة بـ: $\mathscr{U}_n=f_n(n)$.

❶ استنتج مما سبق أن المتتالية $(\mathscr{U}_n)_{n\geqslant1}$ تناقصية قطعا.

❷ بين أن المتتالية $(\mathscr{U}_n)_{n\geqslant1}$ متقاربة.

❸ بين أن: $(\forall t\in[0;1]) : \ln(1+t)\leqslant t-\dfrac{t^2}{4}$.

❹ استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant e^{1-\frac{1}{4n}}$.

❺ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \dfrac{\mathscr{U}_{n+1}}{\mathscr{U}_n}\leqslant e^{-\frac{1}{4n}}$.

❻ استنتج أن: $(\forall n\geqslant2) : \mathscr{U}_n\leqslant e^{1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}$.

❼ باستعمال TAF بين أن: $(\forall k\in\mathbb{N}^*) : \dfrac{1}{1+k}\leqslant\ln\left(\dfrac{1+k}{k}\right)\leqslant\dfrac{1}{k}$

❽ استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \ln(n)\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

❾ استنتج أن: $(\forall n\geqslant2) : \mathscr{U}_n\leqslant\dfrac{1}{e\sqrt[4]{n}}$. ثم حدد $\lim\limits_{+\infty}\mathscr{U}_n$.

الجزء الثاني :

I) لكل $n\in\mathbb{N}^*$ و $a\in\mathbb{R}^{+*}$ نضع: $I_n(a)=\displaystyle\int_0^a\frac{t^ne^{-t}}{n!}\,\mathrm{d}t$.

❶ أحسب $I_1(a)$ ، بين أن: $(\forall t>0)\ (\forall n\in\mathbb{N}^*) : 0\leqslant f_n(t)\leqslant\dfrac{t^n}{n!}$.

❷ استنتج أن: $0\leqslant I_n(a)\leqslant\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.

❸ باستعمال رتابة $(\mathscr{U}_n)$ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \dfrac{1}{n!}\leqslant\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$.

❹ استنتج أن: $0 \leqslant I_n(a) \leqslant \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1}$ حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a)$.

❺ بين أن: $(\forall n \geqslant 2): I_n(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a} + I_{n-1}(a)$.

❻ استنتج أن:

$$(\forall n\geqslant 2): I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\right)$$

❼ استنتج النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\right)$.

تمرين 40

I) ❶ بين أن: $(t>0): 1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6} \leqslant e^{-t} \leqslant 1-t+\frac{t^2}{2}$

❷ استنتج النهاية: $\lim\limits_{t\to0}\frac{e^{-t}+t-1}{t^2}$.

❸ نعتبر الدالة h المعرفة بـ: $h(x)=(1+x)e^{-x}$.
أحسب نهايات h عند محدات $\mathscr{D}_h$ ، ثم أدرس تغيرات الدالة h.

II) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x} \; ; \; x\neq0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

❶ حدد نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$.

❷ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f عند 0 .

❸ تحقق أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^*): f'(x)=\frac{h(3x)-h(2x)}{x^2}$.
ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

❹ أدرس الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr{C}_f)$ ، ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

III) لتكن F دالة معرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بـ: $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

❶ بين أن:
$$(\forall x>0)\,(\forall m>0): \int_1^x \frac{e^{-mt}}{t}\,dt = \int_m^{mx}\frac{e^{-s}}{s}\,ds$$

❷ استنتج أن:
$$(\forall x>0): F(x)=\int_2^3\frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{2x}^{3x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

❸ باستعمال مبرهنة المتوسط بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{2x}^{3x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=0$.

❹ استنتج النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

❺ بين أن:
$$(\forall x>0): e^{-3x}\ln\left(\frac32\right)\leqslant\int_{2x}^{3x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\leqslant e^{-2x}\ln\left(\frac32\right)$$

❻ استنتج أن : $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\int_2^3\frac{e^{-t}}{t}\,dt-\ln\left(\frac32\right)$.

❼ ليكن $\lambda>0$ و $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=\lambda$. أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

تمرين 41

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي: $f_n(x)=\frac{1}{n!}\cdot\frac{(\ln x)^n}{x^2}$
و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ منحناها في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

I) ❶ بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0$ و أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}f_n(x)$ (ناقش حسب قيم n) . ثم أول مبيانيا النتائج المحصلة.

❷ (أ) أدرس تغيرات الدالة f_n . (ناقش حسب قيم n) .
(ب) بين أن f_n تقبل قيمة قصوى نسبية عند $e^{\frac n2}$.
(ج) تحقق أن: $f_n\left(e^{\frac n2}\right)=\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

❸ أدرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_{n+1})$ و $(\mathscr{C}_n)$ تبعا لقيم n .

❹ حدد معادلة المماس لـ $(\mathscr{C}_n)$ في النقطة ذات الأفصول 1

❺ أنشئ في نفس المعلم المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.
(نأخذ $||\vec{i}||=2cm$ و نعطي $\sqrt{e}\approx1,65$ و $\frac1e\approx0,4$)

II) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $a_n=f_n\left(e^{\frac n2}\right)$.

❶ بين أن: $(\forall\alpha\in]1;+\infty[): f_n(\alpha)>0$ و أحسب $\frac{f_{n+1}(\alpha)}{f_n(\alpha)}$

❷ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*): a_{n+1}=\frac12 f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$.

❸ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*): a_{n+1}<\frac12 a_n$.
استنتج أن $(a_n)_{n\geqslant1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

II) لكل n من $\mathbb{N}^*$ و لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ نضع: $I_n(x)=\int_1^x f_n(t)\,dt$

❶ ليكن x من $\mathbb{R}^{+*}$.
(أ) بين أن:
$$(\forall k\geqslant2): I_{k+1}(x)-I_k(x)=\frac{-1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$
(ب) استنتج أن:
$$(\forall n\in\mathbb{N}^*): I_n(x)=1-\frac1x-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln x)^k}{x(k!)}$$

❷ (أ) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*): 0<I_n(\alpha)<(\alpha-1)a_n$.
(ب) استنتج نهاية المتتالية $(I_n(\alpha))_{n\geqslant1}$.
(ج) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $w_n(\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln\alpha)^k}{k!}$ أكتب $w_n(\alpha)$ بدلالة $I_n(\alpha)$ و استنتج نهاية $(w_n(\alpha))_{n\geqslant1}$.
(د) حدد نهاية المتتالية $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac1{k!}$.

تمرين 42

I) ❶ أدرس الدالتين U و V المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:
$U(x)=x-\text{Arctg}(x)$ و $V(x)=x-\frac{x^3}{3}-\text{Arctg}(x)$
ثم استنتج أن: $(\forall x>0): 0\leqslant x-\text{Arctg}(x)\leqslant\frac{x^3}{3}$.

❷ بين أن الدالة g المعرفة بما يلي :

$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\text{Arctg}(x)}{x} \; ; \; x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt \; ; \; x > 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

❶ بين أن: $(\forall x > 0) : 1 - f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1 - g(t))\,dt$.

❷ بين أن: $(\forall x > 0) : 0 \leqslant 1 - f(x) \leqslant \dfrac{x^2}{9}$.

❸ استنتج أن f متصلة على اليمين في 0 و أن $f'_d(0) = 0$.

❹ بين أن: $(\forall x \geqslant 1) : 0 \leqslant \displaystyle\int_1^x g(t)\,dt \leqslant \frac{\pi}{2}\ln(x)$.

❺ باستعمال الكتابة $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt$

بين أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

III) ❶ تحقق أن:

$(\forall x > 0) : x^2 f'(x) = -\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt + \text{Arctg}(x)$.

❷ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$ نضع: $h(x) = x^2 f'(x)$.

تحقق أن: $xh'(x) = -\text{Arctg}(x) + \dfrac{x}{x^2+1}$

❸ أدرس تغيرات الدالة ϕ المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي:

$$\phi(x) = xh'(x)$$

❹ استنتج إشارة $h'(x)$ ثم إشارة $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$.

VI) أنشئ $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

تمرين 43

F دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{xt}\sqrt{1+t^2}\,dt$ و

ليكن $(\mathscr{C}_F)$ منحناها في م م م $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

❶ بين أن F دالة زوجية.

❷ أ) بين أن: $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right) : F(0)e^{-x} \leqslant F(x) \leqslant F(0)e^{x}$.

ب) استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 0.

❸ أ) بين أن: $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) : F(x) \geqslant \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.

ب) استنتج طبيعة الفرع اللانهائي لـ $(\mathscr{C}_F)$ بجوار $+\infty$.

❹ باستعمال المتغير $u = t + \sqrt{1+t^2}$ أحسب التكامل: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. ثم استنتج قيمة $F(0)$

❺ ليكن x_o عنصرا من $\mathbb{R}$ و t عنصرا من $[-1;1]$.

نضع $g(x) = \dfrac{e^{xt} - e^{-x_o t}}{x - x_o} \; ; \; x \neq x_o$.

أ) بين أن : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0) : (\forall x \in \mathbb{R})$,

$0 < |x - x_o| < \eta \Rightarrow \left|g(x) - te^{x_o t}\right| < \dfrac{\varepsilon}{F(0)}$

ب) استنتج أن F قابلة للاشتقاق في x_o و أن: $F'(x_o) = \displaystyle\int_{-1}^{1} te^{x_o t}\sqrt{1+t^2}\,dt$. ثم حدد $F'(0)$

❻ بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) : F'(x) = \displaystyle\int_0^1 t\left(e^{xt} - e^{-xt}\right)\sqrt{1+t^2}\,dt$.

❼ استنتج أن F تزايدية على $\mathbb{R}^+$ ، ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_F)$