| Lycée Qualifiant : Charif EL Idrissi | Devoir libre 2 1bac.sc.exp 01 | Prof : Mouad ZILLOU Année Scolaire: 2020/2021 |
|---|---|---|

# Devoir libre N°2

## Exercice 01

Soit $(U_n)$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 5} \end{cases}$$

1) a) Calculer $U_1$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > -1$.

2) a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}), U_{n+1} - U_n = -\dfrac{(U_n+1)(U_n+3)}{U_n+5}$

b) montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.

3) $(\forall n \in \mathbb{N})$; On pose $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n + 3}$

a) Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ ,puis calculer $V_0$ .

b) Exprimer $V_n$ en fonction de $n$ .

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1}$

4) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} + 1 \leq \dfrac{1}{2}(U_n + 1)$

b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n + 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

## Exercice 02

Soit $(U_n)$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \dfrac{5U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases}$$

$(\forall n \in \mathbb{N})$; On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$

1) Calculer $v_1$ et $U_1$

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 1$ .

3) a- Montrer que $(V_n)$ est une suite arithmétique en précisera sa raison $r$

b- en déduire $V_n$ et $U_n$ en fonction de $n$ .

c- calculer la somme suivant :

$$S = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_{20}$$

**Rendre le 22/12/2020**

# Devoir surveillé 2018

## Exercice 01

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite arithmétique telle que : $u_3 = 11$ et $u_7 = 3$

1) Montrer que la raison de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est $r = -2$ .

2) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ .

3) Calculer la somme suivante $S = u_3 + u_6 + \cdots\cdots + u_{20}$

## Exercice 02

Soit $(u_n)$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$

1) a) Calculer $u_1$ et $u_2$ .

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n < 1$.

2) a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n+4}$

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

3) $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

a- Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$.

b- Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ .

c- Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

4) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_{n-1}$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \dfrac{5}{12}\left(\left(\dfrac{1}{5}\right)^n - 1\right)$

## Exercice 03

Soit $(u_n)$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt{u_n^{\ 2} + 3} \end{cases}$$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$ .

2) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = u_n^{\ 2}$

a- Montrer que $(w_n)$ est une suite arithmétique en précisant sa raison

b- Exprimer $w_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$ .

# Devoir surveillé 2019

## EXERCICE 01

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et $u_{108} = 49$

1) Montrer que : $u_0 = -5$ et $u_9 = \frac{-1}{2}$

2) Calculer la somme $S = u_9 + u_{10} + \cdots\cdots\cdots + u_{108}$

## EXERCICE 02

Soit $(\boldsymbol{u_n})$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} \boldsymbol{u_0} = 2 \\ (\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}); \boldsymbol{u_{n+1}} = \dfrac{5\boldsymbol{u_n}}{2\boldsymbol{u_n} + 3} \end{cases}$

1) Calculer $\boldsymbol{u_1}$ .

2)

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$.

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}); \boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n} = \dfrac{2\boldsymbol{u_n}(1 - \boldsymbol{u_n})}{2\boldsymbol{u_n} + 3}$

c) Etudier la monotonie de la suite $(\boldsymbol{u_n})$



3) On considère la suite $(v_n)$ définie par $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}); \boldsymbol{v_n} = \dfrac{\boldsymbol{u_n} - 1}{\boldsymbol{u_n}}$

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ puis calculer son premier terme.

b) Exprimer $v_n$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ .

c) Déduire que : $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}); \boldsymbol{u_n} = \dfrac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{\boldsymbol{n}}}$

4) a) Montrer que : $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N});\ \boldsymbol{u_{n+1}} \leq \frac{5}{3}\boldsymbol{u_n}$

b) En déduire que $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}); \boldsymbol{u_n} \leq 2\left(\frac{5}{3}\right)^{\boldsymbol{n}}$

5) On pose $\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{v_1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \boldsymbol{v_{n-1}}$ . Montrer que $\boldsymbol{S_n} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{\boldsymbol{n}}\right)$

## EXERCICE 03

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} \boldsymbol{u_1} = -1 \\ (\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}); \boldsymbol{u_{n+1}} = \dfrac{2\boldsymbol{u_n}}{3\boldsymbol{u_n} + 2} \end{cases}$

$(\forall n \in \mathbb{N})$ On pose $\boldsymbol{v_n} = \dfrac{2}{\boldsymbol{u_n}}$

1) Calculer $\boldsymbol{v_1}$

2) a) Montrer que $(\boldsymbol{v_n})$ est une suite arithmétique de raison $r = 3$ .

b) En déduire $\boldsymbol{v_n}$ et $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ .