# Le produit scalaire dans le plan

## I. Expression analytique du produit scalaire

### 1. Rappel

### a. Formule trigonométrique du produit scalaire

**Activité ①**

Soit $ABC$ un triangle rectangle en $B$ tel que $AB=2$ ; $BC=2$ ; $AC=\sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

**Définition et propriété**

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\overline{\vec{u};\vec{v}})$ tel que $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ est l'angle orienté formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$ .

### b. Repère orthonormé direct

**Définition**

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan, et O un point du plan.

On dit que $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé direct si et seulement si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1u$ , $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\overline{\left(\vec{i},\vec{j}\right)}=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

*Dans ce que suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$*

### 2. Expression analytique du produit scalaire

**Introduction**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}\left(x,y\right)$ et $\vec{v}\left(x',y'\right)$

On a $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

Donc $\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}.\vec{i}+xy'\vec{i}.\vec{j}+x'y\vec{j}.\vec{i}+yy'\vec{j}.\vec{j}=xx'+yy'$ car $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{i}=0$ et $\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=1$.

L'expression $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ est l'expression analytique du produit scalaire.

**Propriété ①** :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}\left(x,y\right)$ et $\vec{v}\left(x',y'\right)$

On a $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

***Exemple***

On a $\vec{u}(-1;3)$ et $\vec{v}(-2;1)$ donc $\vec{u}.\vec{v}=-1\times(-2)+3\times1=5$.

***Propriété ②***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$.

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+y'=0$$

***Application ①***

1) Soient $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que $\vec{u}(-5,3)$ , $\vec{v}\left(\frac{1}{2},-1\right)$ et $\vec{w}\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ , $\vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{u}.\vec{w}$

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}(2+m;-2)$ , $\vec{v}\left(-3;\frac{1}{4}m\right)$. Déterminer la valeur de $m$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

## 3. Expression analytique de la distance entre deux points et la norme d'un vecteur.

***Propriété***

⊕ Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan tel que $\vec{u}(x,y)$.

On a $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

⊕ Etant donné deux points $A$ et $B$ du plan tels que $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

On a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ .

***Application ②***

On considère les points suivants $A(3;2)$, $B\left(\frac{-1}{2};0\right)$ et $C(1;-1)$.

1) Calculer les distances suivantes $AB, AC$ et $BC$ .
2) Montrer que le triangle $ABC$ est rectangle en $C$ .

## 4. Expression analytique de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

***Propriété***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $\theta$ la mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$

On a $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\dfrac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

## Application ③

On considère les points suivants $A(3;3)$, $B(1;1)$ et $C(1;3)$.

1) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) Déduire la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

### Résultats

- *Aire d'un triangle*

L'aire d'un triangle $ABC$ est $S=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\right|(u)$

- *Aire d'un parallélogramme à partir de deux vecteurs*

L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est $S=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$

## Application ④

On considère les points suivants : $A(1;1), B(2;2)$ et $C(0;3)$

1) Calculer $AC$ , $BC$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
2) Déduire la nature du triangle $ABC$
3) Déterminer la surface du triangle $ABC$

# II. La droite dans le plan

## 1. Vecteur normal à une droite

### Définition

Soit $(D)$ une droite du plan et $\vec{u}$ son vecteur directeur.

Tout vecteur non nul et perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$ s'appelle vecteur normal à la droite $(D)$.

### Propriété :

Soit $(D)$ une droite d'équation $ax+by+c=0$, le vecteur $\vec{u}(-b,a)$ est le vecteur directeur de $(D)$ et le vecteur $\vec{n}(a,b)$ le vecteur normal à $(D)$.

### Exemple

Donner un vecteur normal à $(D)$ dans les cas suivants

- $(D): 2x+3y-5=0$ : Le vecteur normal à $(D)$ est $\vec{n}(2;3)$ .

- $(D): -3x+5=0$ : Le vecteur normal à $(D)$ est $\vec{n}(-3;0)$ .

- $(D): -2y+4=0$ : Le vecteur normal à $(D)$ est $\vec{n}(0;-2)$.

## 2. Equation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal

### Propriété

Soit $(D)$ une droite du plan, passant par le point $A(x_0, y_0)$ et dont le vecteur normal est $\vec{n}(a,b)$.

L'équation cartésienne de la droite $(D)$ est $ax+by+c=0$ où $c=-ax_0-by_0$

### Application ⑤

1) Déterminer l'équation cartésienne de la droite $(D)$ passant par le point $A(-1;2)$ et dont le vecteur normal est $\vec{n}(2;-3)$.
2) Déterminer l'équation cartésienne de la droite $(\Delta)$ la médiatrice du segment $[AB]$ où $A(-1;2)$ et $B(2;-3)$.

## 3. Parallélisme et orthogonalité de deux droites.

### Propriété

Soient $(D)$ et $(D')$ deux droites du plan dont $\vec{n}(a,b)$ et $\vec{n'}(a',b')$ sont respectivement les vecteurs normaux à $(D)$ et $(D')$.

- On dit que $(D)$ et $(D')$ sont ***parallèles*** si et seulement si $\det\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=0$.
- On dit que $(D)$ et $(D')$ sont ***orthogonales*** si et seulement si $\vec{n}.\vec{n'}=0$ .

### Application ⑥

Etudier la position relative de $(D)$ et $(D')$ dans les cas suivants :

- $(D): 2x+3y-1=0$ ; $(D'): \frac{3}{2}x-y+4=0$
- $(D): x+4y+3=0$ ; $(D'): -\frac{1}{2}x-2y+4=0$
- $(D): 2x+y-1=0$ ; $(D'): -x+2y+3=0$

## 4. Distance d'un un point par rapport à une droite

### Définition

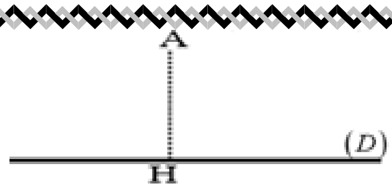
Soit $(D)$ une droite et soient $A$ un point du plan et H le projeté orthogonale de $A$ sur $(D)$.

Le nombre réel AH est appelé **la distance du point** $A$ à la droite $(D)$ et on écrit : $d\left(A,(D)\right)=AH$ .

### Propriété

Soit $(D)$ une droite d'équation $ax+by+c=0$ et $A(x_0, y_0)$ un point du plan.

La distance du point $A$ par rapport à la droite (D) est : $d\left(A,(D)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$




### ***Application ⑦***

Soit $(D)$ une droite d'équation et soit $A\left(\frac{1}{2};-3\right)$ un point du plan. Déterminer $d\left(A,(D)\right)$

---

## III. Etude analytique d'un cercle

### 1. Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon

#### ***Activité ②***

On considère le cercle $(C)$ de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2.

1) Parmi les points suivants, déterminer ceux qui appartiennent au cercle $(C)$ : $A(3;1)$; $B(2;2)$ , $C\left(\sqrt{3}+1;2\right)$

2) Soit $M(x;y)$ un point du plan

a) Calculer $\Omega M$ la distance en fonction de $x$ et $y$

b) Montrer que le point appartient au cercle $(C)$ si seulement si : $(E): x^2+y^2-2x-2y-2=0$

3) En suivant la même démarche de la question 2)b), déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R$.

---

#### ***Propriété***

Soit un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R$.

Une équation cartésienne du cercle $(C)$ de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $R(R\succ 0)$ est :

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ et on peut écrire : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ avec $c=a^2+b^2-R^2$

#### ***Exemple***

On considère un cercle $(C)$ de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.

$M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$

Donc $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}^2$ Alors $x^2-4x+4+y^2+2y+1=2$

D'où $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ est une équation cartésienne du cercle $(C)$.

### ***Application ⑧***

1) Déterminer une équation catésienne d'un cercle de centre de centre $\Omega(-2;1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

2) Déterminer une équation cartésienne d'un cercle passant par le point $A$ et de centre $\Omega$ dans les cas suivants

$\otimes$ $A(1;3)$ ; $\Omega(2;-1)$ ; $\otimes$ $A(2;4)$ ; $\Omega(2;0)$ ; $\otimes$ $A(2;-2)$ ; $\Omega(-2;3)$

3) Déterminer le centre et le rayon d'un cercle $(C)$ dans les cas suivants

$$\oplus\ x^2+y^2-2x+2y-2=0 \quad ; \quad \oplus\ x^2+4x-2y=0 \quad ; \quad \oplus\ x^2+y^2+x-y-\frac{3}{2}=0$$

## 2. Equation d'un cercle définie par son diamètre

**Propriété** :

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts du plan.

L'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est un cercle de diamètre $[AB]$ et d'équation $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

**Application ⑨**

Déterminer une équation cartésienne d'un cercle $(C)$ et de diamètre $[AB]$ où $A(1;-3)$ et $B(2;1)$

## 3. Représentation paramétrique d'un cercle

**Définition**

⊗ L'ensemble des points $M(x,y)$ du plan qui vérifient le système $(S)\begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta \end{cases} / \theta\in\mathbb{R}$ est un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R$.

⊗ Le système $(S)$ est appelé une représentation paramétrique d'un cercle.

**Exemple**

Soit $(C)$ un cercle de centre $\Omega(-2;5)$ et de rayon $R=2$.

Le système $(S)\begin{cases} x=-2+2\cos\theta \\ y=5+2\sin\theta \end{cases} / \theta\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du cercle $(C)$.

**Application ⑩**

Soit $(C)$ un cercle de centre $\Omega(-2;5)$ et de rayon $R=2$.

1)
a) Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(C)$.
b) Préciser deux points appartenant au cercle $(C)$.

2) Déterminer une représentation paramétrique d'un cercle définie par l'équation suivante $x^2+y^2-6x+4y-1=0$

## 4. Ensemble de points $M(x,y)$ du plan vérifie $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Soient $a,b$ et $c$ des nombres réels et $(E)$ un ensemble de points $M(x,y)$ du plan tel que

$(E)=\{M(x,y)/\ x^2+y^2+ax+by+c=0\}$.

***Propriété***

Si $a^2+b^2-4c<0$ alors l'ensemble $(E)$ est un ensemble vide et on écrit $S=\varnothing$.

Si $a^2+b^2-4c<0$ alors l'ensemble $(E)$ est un point qui est $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ et on écrit $S=\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)\right\}$

Si $a^2+b^2-4c<0$ alors l'ensemble $(E)$ est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ et on écrit $S=\left\{(C)\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right);R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right\}\right\}$ .

***Application ①①***

Déterminer l'ensemble de points $M(x,y)$ du plan qui vérifie :

- $x^2+y^2-x+3y-4=0$
- $x^2+y^2-6x+2y+10=0$
- $x^2+y^2-4x+5=0$

## 5. Positions relatives d'une droite et un cercle

Pour étudier la position relative d'un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $R$ et une droite, il suffit de comparer la distance $d(A,(D))$ et le rayon $R$.

***Propriété***

Soit $(C)$ un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R$ et soit $(D)$ une droite du plan.

- ▹ Si $d(A,(D))>R$ alors la droite $(D)$ et le cercle $(C)$ ne se coupent pas.
- ▹ Si $d(A,(D))=R$ alors la droite $(D)$ est tangente au cercle $(C)$ (se coupent en un point).
- ▹ Si $d(A,(D))<R$ alors la droite $(D)$ et le cercle $(C)$ se coupent en deux points.

***Application ①②***

Etudier la position relative du cercle $(C)$ et la droite $(D)$ dans les cas suivants

a. ⊗ $(D):2x+3y-1=0$ ; $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=9$

b. ⊗ $(D):x-y+3=0$ ; $(C):x^2+y^2-2x-2y-7=0$

## 6. Equation cartésienne de la tangente d'un cercle en un point

***Propriété***

Soient $(C)$ un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R$ et soit $(D)$ une droite du plan.et soient $A\in(C)$ et $M\in(D)$.

La droite $(D)$ est tangente au cercle $(C)$ en $A$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$ .

## Application ①③

Soit $(E)$ l'ensemble de points $M(x,y)$ du plan qui vérifie $x^2+y^2-6x+4y-3=0$

1) Montrer que $(E)$ est un cercle $(C)$, en déterminant le centre et le rayon.
2) Vérifier que le point $A(3;2)\in(C)$.
3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente du cercle $(C)$ en un point $A$ .

## Exercice de synthèse

I) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points $A(-2;1)$ , $B(0;-2)$ et $(1;3)$

1) Calculer $AB$ , $AC$ ,$BC$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) Déduire la nature du triangle ABC
3) Calculer la surface d triangle ABC
4) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ ; $cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right)$ ; $sin\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right)$ et déduire la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right)$
5) Donner une équation cartésienne de la droite (D), la hauteur du triangle $ABC$ passant par $A$ .
6) Calculer la distance $d\big(B,(D)\big)$

II) On considère le cercle $(C)$ d'équation $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ .

**1)**

a) Montrer que $\Omega(1;2)$ est le centre du cercle $(C)$ et de rayon $R=2\sqrt{2}$

b) Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(C)$

**2)**

a) Vérifier que le point $A(-1;0)$ appartient au cercle $(C)$ .

b) Donner l'équation de la tangente du cercle $(C)$ au point $A$ .

**3)** on considère la droite $(D)$ d'équation $x+y-3=0$ .

a) Montrer que la droite $(D)$ coupe le cercle $(C)$ en deux points $E$ et $F$ .

b) Déterminer les coordonnés de deux points $E$ et $F$ .

c) Déterminer les équations cartésiennes de $(D_1)$ et $(D_2)$ les tangentes au cercle $(C)$ en $E$ et $F$ .