تمرين 1

أثبت المتساويات التالية محددا حيز التعريف :

$x e^{\ln(x-1)} = (x-1)e^{\ln x}$ ؛ $\ln(1+e^x)-\ln(1+e^{-x}) = x$

$\left(\dfrac{e^{x+1}}{e^{1-x}}\right)^2 = e^{4x} = \dfrac{e^{(x+1)^2}}{e^{(x-1)^2}}$ ؛ $\dfrac{e^x}{e^x-x} = \dfrac{1}{1-xe^{-x}}$ ؛

$\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1-\dfrac{2}{1+e^x}$ ؛

$\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1-\dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-x}}$ ؛

تمرين 2

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $e^{2x}-5e^x+6=0$ ؛ $e^{2x+1}-5e^{x+2}+4e=0$ ؛ $e^{x^2-3}=e^{-2x}$ ؛ $e^{4\ln x}-5e^{2\ln x}+6=0$ ؛ $e^x+e^{-x}=2$ ؛ $e^{\frac{2}{x}}+e^{\frac{1}{x}}=6$ ؛ $e^{7x}-13e^{4x}+36e^x=0$ ؛ $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$

❷ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $e^{2x}-5e^x+6\geqslant 0$ ؛ $e^{1-x}\leqslant e^{3x}$ ؛ $e^{x^2-3}\leqslant e^{-2x}$ ؛ $\ln(2-e^x)\geqslant 3$ ؛ $e^x+e^{-x}>2$ ؛ $e^x+\dfrac{1}{e^x}\leqslant e+\dfrac{1}{e}$ ؛ $e^x-4e^{-x}<0$.

❸ حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية : $\begin{cases} 7e^x-\ln y=20 \\ 3e^x-2\ln y=7 \end{cases}$

$\begin{cases} e^x-e^{y-1}=1 \\ e^{x+1}-e^y=4+e \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} e^{x+y}+2=2e^x \\ 2-e^{y-x}=3e^{-x} \end{cases}$.

تمرين 3

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{+\infty} 2x-e^x$ ؛ $\lim\limits_{+\infty}(x^3-2x)e^{2x}$

$\lim\limits_{-\infty} x^2e^x$ ؛ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} e^x+e^{-x}$ ؛ $\lim\limits_{+\infty} 3e^{2x}-e^x-1$ ؛

$\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ ؛ $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}$ ؛ $\lim\limits_{+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ ؛ $\lim\limits_{0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{2x}}}{x}$

$\lim\limits_{0}\dfrac{(x-1)e^x+1}{x}$ ؛ $\lim\limits_{1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$ ؛ $\lim\limits_{2}(x-2)e^{\frac{x-1}{x-2}}$

$\lim\limits_{+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x-2}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$ ؛ $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^x-2}{e^x+1}$ ؛ $\lim\limits_{0}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x}$

$\lim\limits_{0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ ؛ $\lim\limits_{0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ ؛ $\lim\limits_{-\infty}\sin(x)e^x$ ؛

$\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}$ ؛ $\lim\limits_{+\infty} x\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^x\right)$ ؛ $\lim\limits_{+\infty} x-\ln(e^x+1)$

$\lim\limits_{-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x}}-x$ ؛ $\lim\limits_{+\infty} x\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ ؛

$\lim\limits_{0^+}\dfrac{1}{x}\ln\left(e^x-e^{\frac{1}{x}}\right)$ ؛ $\lim\limits_{0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{3x}$.

تمرين 4

❶ في الحالات التالية حدد $\mathscr{D}_f$ ثم أدرس قابلية اشتقاق الدالة f و أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathscr{D}_{f'}$:

$f(x)=e^{x\ln x}$ ؛ $f(x)=e^{-x}\ln x$ ؛ $f(x)=x^2e^{\frac{-1}{x}}$ ؛ $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ ؛ $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$ ؛ $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$ ؛ $f(x)=xe^{\mathrm{Arctg}x}$ ؛ $f(x)=\cos(x)e^{\sin x}$.

❷ حدد الدوال الأصلية للدالة f على $\mathcal{I}$ في الحالات التالية :

$\begin{cases} f(x)=e^{2x-1} \\ \mathcal{I}=\mathbb{R} \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} f(x)=\sin(x)e^{\cos(x)} \\ \mathcal{I}=[0;\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3 \\ \mathcal{I}=\mathbb{R} \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{e^x} \\ \mathcal{I}=\mathbb{R} \end{cases}$

$\begin{cases} f(x)=\sqrt{e^{3x}} \\ \mathcal{I}=\mathbb{R} \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} f(x)=2^x \\ \mathcal{I}=\mathbb{R} \end{cases}$

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=e^{3x}-3e^x$.

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم حدد نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$.

❷ أدرس تغيرات الدالة f و أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❸ ناقش مبيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

تمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ ؛ ثم بين أن f دالة فردية.

❷ أحسب نهايات الدالة f عند محدات $\mathscr{D}_f$.

❸ أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم أعط جدول التغيرات.

❹ حل المعادلة $f(x)=2$ ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❺ ناقش مبيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة

$$(m-1)e^x=m+1$$

تمرين 7

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=xe^{-\sqrt{x}}$.

❶ أحسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ ؛ ثم أعط التأويل الهندسي.

❷ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0 . التأويل الهندسي

❸ أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^+$ ثم أعط جدول التغيرات.

❹ أدرس تقعر $(\mathscr{C}_f)$ ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$ نأخذ $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$.

تمرين 8

نعتبر الدالة f المعرفة بـ:
$$\begin{cases} f(x) = x^{\sqrt{x}} \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

❶ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f على يمين 0. التأويل الهندسي.

❷ أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ثم أعط جدول التغيرات.

❸ أدرس الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr{C}_f)$ ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

تمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$.

❶ أحسب $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ ؛ ثم أعط التأويل الهندسي.

❷ أدرس تغيرات الدالة f. و أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❸ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J يتم تحديده.

❹ أحسب $f^{-1}(x)$ و أنشئ في نفس المعلم المنحنى $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

❺ بين أنه لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$ لدينا:
$$f(x) = f'(x)\left[-1 + \frac{1}{2(1+f(x))} + \frac{1}{2(1-f(x))}\right]$$

❻ استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

تمرين 10

I) نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$g(t) = 1 + t - e^t \quad \text{و} \quad h(t) = (1-t)e^t$$

❶ حدد إشارة g ؛ و بين أن $\left(\forall t \in \mathbb{R}\right) : \ h(t) \leqslant 1$.

❷ بين أن: $\left(\forall t \in]-\infty; 1[\right) : \ 1 + t \leqslant e^t \leqslant \dfrac{1}{1-t}$.

❸ بين أن: $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}\right) : \dfrac{x}{x-1} \leqslant x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \leqslant 1$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \ ; \ x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) \ ; \ x \geqslant 0 \end{cases}$$

❶ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f في 0.

❷ أدرس تغيرات الدالة f .

❸ بين أن: $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}\right) : \dfrac{1}{x-1} \leqslant xe^{\frac{1}{x}} - x - 1 \leqslant 0$.

❹ استنتج أن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديده.

❺ أدرس الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) على $]-\infty; 0[$.

❻ أدرس تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم $(D) : y = x$ ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

❼ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J يتم تحديده. ثم أنشئ $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

تمرين 11

❶ بين أن: $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) : \ 1 + x \leqslant e^x$.

استنتج أن $\left(\forall x \in]-\infty; 1[\right) : \ e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

❷ نعتبر المتتالية $n \in \mathbb{N}^* : \ u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

بين أن $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

❸ بين أن $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \ 0 \leqslant e - u_n \leqslant \dfrac{3}{n}$.

❹ استنتج نهاية المتتالية (u_n).

تمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي:
$$f(x) = -e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

❶ بين أن: $\left(\forall x \in [0; 1]\right) : 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$.
و أن $f(1) \geqslant f(0)$.

❷ نعتبر الدالة g بحيث: $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{n!}$.
أدرس تغيرات g على $[0; 1]$ ثم بين أن
$$f(1) \leqslant f(0) + \frac{x}{n!}$$

❸ نضع $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \ v_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

بين أن $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \ e\left(1 - \dfrac{1}{n!}\right) \leqslant v_n \leqslant e$.

و أن $0 \leqslant e - v_n \leqslant \dfrac{3}{n!}$. ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

تمرين 13

I) الدالة $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \mapsto x$ تسمى دالة جيب التمام الهذلولي و يرمز لها بالرمز ch.
و الدالة $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \mapsto x$ تسمى دالة الجيب الهذلولي و يرمز لها بالرمز sh.

❶ بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$ch'(x) = sh(x) \quad \text{و} \quad sh'(x) = ch(x)$$

❷ أعط جدول تغيرات الدالتين ch و sh على $\mathbb{R}$.

❸ بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

II) ليكن a و b عددين حقيقيين. بين أن:

$$ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$$

$$sh(a+b) = sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b)$$

III)

❶ بين أن sh تقبل دالة عكسية sh^{-1} قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : \left(sh^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

❷ بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $sh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

IV)

❶ بين أن f قصور ch على $[0;+\infty[$ تقبل دالة عكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$.

و أن $(\forall x \in]1;+\infty[) : \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

❷ بين أن : $(\forall x \geqslant 1) : f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

تمرين 14

I) نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي:

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) \text{ و } \mathrm{g}(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

❶ بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \mathrm{g}(x) \leqslant 0$.

❷ أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❸ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده .

❹ حدد تغيرات f^{-1} و أنشئ في نفس المعلم المنحنى $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

II) نعتبر المتتالية $u_o = \dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

❶ بين أن $f\left(\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{5}\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{5}\right]$.

❷ بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α و أن $\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{3}{5}$.

❸ أدرس إشارة $f(x) - x$.

❹ لكل n من $\mathbb{N}$ نضع: $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$.
بين أن (v_n) و (w_n) متحاديتان و استنتج أن (u_n) متقاربة و أن $\lim u_n = \alpha$

III)

❶ بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

❷ استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم في 0.

❸ ليكن n من $\mathbb{N}^*$ بين أن :

$$\left(\exists! x_n \in \mathbb{R}_+^*\right) : f(x_n) = \frac{1}{n}$$

❹ بين أن المتتالية $\left(x_n\right)_{n\geqslant 2}$ تزايدية.

❺ بين أن $\left(x_n\right)$ غير مكبورة و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

تمرين 15

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = 2xe^x$.

❶ بين أن f تقابل من $[0;1]$ نحو مجال J يتم تحديده.

❷ بين أن يوجد α وحيد من $]0;1]$ بحيث $\alpha e^\alpha = 1$

❸ نعتبر المتتالية $\begin{cases} u_o = \alpha \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

ا) بين أن: $(\forall x \in [0;1]) : f(x) \geqslant x$.

ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \in]0;1]$.

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة نهايتها الصفر.

❹ لكل عدد صحيح طبيعي n نضع: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

ا) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$ و $u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

ب) استنتج أن (S_n) متقاربة نهايتها ℓ تحقق $\alpha \leqslant \ell \leqslant 2$.

تمرين 16

n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geqslant 1$

I) نعتبر الدالة $f_n(x) = 1 + x - e^{-nx}$.

❶ أدرس تغيرات f_n و استنتج أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f_n(x) = 0$.

❷ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(\exists! x_n \in \mathbb{R}_+^*\right) : f_n(x_n) = 1$.

❸ أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ و استنتج أن $(x_n)_{n\geqslant 1}$ تناقصية.

❹ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_n = e^{-nx_n}$. استنتج أن $\lim x_n = 0$.

II) نعتبر المتتالية $\begin{cases} y_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \quad y_{n+1} = e^{-y_n} \end{cases}$

❶ بين أن x_1 هو الحل الوحيد للمعادلة $x = e^{-x}$. و أن $\frac{1}{e} \leqslant x_1 \leqslant 1$

❷ بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \frac{1}{e} \leqslant y_n \leqslant 1$.

❸ بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : |y_{n+1} - x_1| \leqslant e^{-\frac{1}{e}} |y_n - x_1|$

❹ استنتج أن $(y_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين 17

نعتبر الدالة $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ منحناها في م م م $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

❶ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$.

❷ أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$.

❸ أحسب $f'_n(x)$. ثم أعط جدول تغيرات الدالة f_n.

❹ بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n.

❺ بين أن $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ و أن $e^x \geqslant x+1$: $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$.

❻ استنتج أن $f_n(1) > 0$ ثم بين أن $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$.

❼ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_2)$ (نأخذ $\alpha_2 \approx 0,6$)

❽ ا) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي $n \geqslant 2$ لدينا: $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$.

ب) استنتج أن $\quad f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 0$: $\left(\forall n \geqslant 2\right)$.

ج) بين أن $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة

❾ ا) باستعمال السؤال ❻ بين أن:

$$\left(\forall n \geqslant 2\right) : \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$$

ب) استنتج أن $\left(\forall n \geqslant 2\right) : \frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < 2\frac{\ln(n)}{n}$.

ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

تمرين 18

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{Log}_2(x) - \mathrm{Log}_x(2) \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}} \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؛ ثم بين أن f متصلة على يمين 0.

❷ تحقق أن: $\left(\forall x < 0\right) : \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right) e^{\frac{x^2}{2}}$

ثم أدرس قابلية اشتقاق f على يسار 0. أول هندسيا النتيجة المحصلة .

❸ بين أن: $\left(\forall x < 0\right) : \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}}}{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}}\right)$

استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. التأويل الهندسي.

❹ بين أن:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{(\ln x)^2}\right) \ ; \ x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} \\ f'(x) = \left(\frac{x^3 - 1}{x^2}\right) e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}} \ ; \ x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

❺ حدد نقط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع محور الأفاصيل ؛ ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

تمرين 19

I) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}^{-*}$ بما يلي:

$$\mathrm{g}(x) = \frac{1-x}{x} - \ln(-x)$$

أحسب $\mathrm{g}'(x)$ و ضع جدول تغيرات g ثم استنتج إشارة g على $\mathbb{R}^{-*}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^{x^2-x+\ln(x)} \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = (-x)^{1-x} \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في م م م $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

❶ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؛ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❷ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f في 0. التأويل الهندسي.

❸ بين أن: $\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x} f(x) \ ; \ x > 0 \\ f'(x) = g(x)f(x) \ ; \ x < 0 \end{cases}$.

ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

❹ بين أن: $\left(\forall x < 0\right) : f(x)+x = -x\left(e^{-x\ln(-x)} - 1\right)$.

❺ استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم $(D) : y = -x$ على $\mathbb{R}^{-*}$

❻ أدرس الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم $(\Delta) : y = x$ على $\mathbb{R}^{+*}$.

❼ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.
نأخذ $||\vec{i}||=||\vec{j}||=1cm$

III) نعتبر المتتالية : $\begin{cases} u_o \in]0;1] \\ u_{n+1}=e^{u_n^2-u_n+\ln(u_n)}\end{cases}$.

❶ بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $0<u_n\leqslant 1$.

❷ بين أن (u_n) تناقصية و استنتج أنها متقاربة.

تمرين 20

❶ بين أن: $(\forall t\in]0;+\infty[):\ \ln(t)\leqslant t-1$.

❷ استنتج أن: $(\forall x\in[1;+\infty[):\ x\ln(x)\geqslant x-1$.

❸ بين أن: $(\forall x \in[1;+\infty[):\ x\ln(x)\leqslant \frac{1}{2}(x^2-1)$.

❹ بين أن $x\ln(x)=\frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^{+*}$

❺ تحقق أن $1<\alpha_n<e$؛ ثم بين أن
$$\sqrt{1+\frac{2}{n}}\leqslant\alpha_n\leqslant 1+\frac{1}{n}$$

❻ استنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geqslant1}$ متقاربة محددا نهايتها ؛ و بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=e$.

تمرين 21

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدما.
نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$f_n(x)=\frac{x^ne^{-x}}{n!}$$
و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ منحناها في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.
$||\vec{i}||=||\vec{j}||=3cm$

(I

❶ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{-\infty} f_n(x)$ حسب زوجية n.

❷ بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}):\ f_n'(x)=\frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x)$.

❸ أعط جدول تغيرات الدالة f_n حسب زوجية n.

❹ استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}):\ e^nf_n(x)\leqslant\frac{n^n}{n!}$.

❺ استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ e^{n-1}\leqslant n^n$.

❻ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$

❼ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.

❽ أنشئ في نفس المعلم المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.
(نأخذ $\frac{1}{e}\simeq0,37$ و $\frac{2}{e^2}\simeq0,27$)

II) نعتبر المتتالية : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.
و لتكن F_n الدالة الأصلية للدالة f_n على $\mathbb{R}$ التي تنعدم في 0

❶ بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}):\ F_1(x)=1-(x+1)e^{-x}$.

❷ بين أن:
$$(\forall n\geqslant2)(\forall x\in\mathbb{R}):\ F_n(x)-F_{n-1}(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

❸ استنتج أن:
$$(\forall n\geqslant1)(\forall x\in\mathbb{R}):\ F_n(x)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)e^{-x}$$

❹ بين أن: $(\forall x\in[0;1]):\ \left|F_n'(x)\right|\leqslant\frac{1}{n!}$.

❺ باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن: $(\forall x\in[0;1]):\ \left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\frac{1}{n!}|xe^x|$.
استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

III) لكل $n\geqslant1$ نضع : $V_n=e^nf_n(n)$ و $W_n=\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$

❶ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ V_{n+1}=V_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

❷ بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^+):\ 0\leqslant x-\ln(1+x)\leqslant\frac{x^2}{2}$.

❸ استنتج : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ 0\leqslant 1+\ln\left(\frac{V_n}{V_{n+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2n}$.

❹ استنتج نهاية المتتالية $(w_n)_{n\geqslant1}$.

❺ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant2$.

❻ استنتج أن: $(\forall n\geqslant6):\ V_n\geqslant2^n$. حدد $\lim V_n$.

تمرين 22

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي:
$$g(x)=\frac{1}{x}-\ln(x)$$

❶ أدرس تغيرات الدالة g.

❷ استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $\frac{3}{2}<\alpha<2$. ثم أدرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^{+*}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي:

$$f(x)=e^{-x}\ln(x)$$

❶ تحقق أن $f(\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}}{\alpha}$

و استنتج أن $\dfrac{1}{2e^2}<f(\alpha)<\dfrac{2}{3e^{\frac{3}{2}}}$.

❷ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❸ بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right):\ f'(x)=e^{-x}g(x)$.

❹ أدرس تغيرات f ثم أعط جدول تغيراتها.

❺ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

III) نعتبر h المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$

❶ بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right):\ g(x)=0\Longleftrightarrow h(x)=x$.

❷ تحقق أن:

$$\left(\forall x\in\left[\frac{3}{2};2\right]\right):-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\leqslant h'(x)\leqslant-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$$

❸ استنتج أن :

$$\left(\exists k\in]0;1[\right)\left(\forall x\in\left[\frac{3}{2};2\right]\right):\ |h'(x)|\leqslant k$$

IV) نعتبر المتتالية : $\begin{cases}u_o=2\\ u_{n+1}=h(u_n)\end{cases}$.

❶ بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right):\ \dfrac{3}{2}\leqslant u_n\leqslant2$.

❷ بين أن: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right):\ |u_{n+1}-\alpha|\leqslant k\,|u_n-\alpha|$.

❸ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

❹ لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$.

ا) بين أن: $w_o<\alpha$ و أن:

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right):w_n<\alpha<v_n$$

ب) بين أن: (v_n) تناقصية و أن (w_n) تزايدية .

ج) بين أن :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right):\ |w_{n+1}-v_{n+1}|\leqslant k^2\,|w_n-v_n|$$

د) استنتج أن :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right):|w_n-v_n|\leqslant k^{2n}(2-\sqrt{e})$$

ه) بين أن (v_n) و (w_n) متقاربتان لهما نفس النهاية.

و) استنتج أن (u_n) متقاربة و أن $\lim u_n=\alpha$.

تمرين 23

ليكن m من $\mathbb{R}_+^*$. نعتبر الدالة f_m المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}f_m(x)=e^{mx}\left(1-mx\ln|x|\right)\\ f_m(0)=1\end{cases}$$

❶ حدد $\mathscr{D}_{f_m}$ ؛ ثم أحسب النهايات عند محدات $\mathscr{D}_{f_m}$.

❷ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f_m في 0.

❸ أحسب $f'_m(x)$ ؛ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_1 .

❹ حدد الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr{C}_1)$ منحنى الدالة f_1.

❺ بين أنه يوجد α وحيد من $]1;2[$ بحيث $f_1(\alpha)=0$.

❻ حدد معادلات المماسات للمنحنى $(\mathscr{C}_1)$ عند النقط التي أفاصيلها -1 و 1.

❼ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_1)$. نأخذ $||\vec{i}\,||=||\vec{j}\,||=2cm$ و $\alpha\simeq1,7$

❽ باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_1)$ ، ناقش حسب قيم البارامتر الحقيقي k عدد حلول المعادلة

$$x\in\mathbb{R};\ |x|=e^{\frac{1-ke^{-x}}{x}}$$

تمرين 24

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=e^{\frac{1}{\ln(x)}}\ ;\ x\neq0\ ;\ x\neq1\\ f(0)=1\ ;\ f(1)=0\end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

❶ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0.

❷ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 1.

❸ هل الدالة f متصلة في 1.

❹ حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ثم أدرس تغيرات الدالة f.

❺ بين أن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل المستقيم $(D):\ y=x$ كمحور تماثل.

❻ حدد نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (D). ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.