

## Notions de logique

### I. Proposition – fonction propositionnelle

#### 1. Proposition

##### **Activité**

1) Cocher la case convenable :

<i>Enoncé</i>	<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>
Tout nombre pair est divisible par 4		
La somme de deux nombres pairs est un nombre pair		
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire		
Le nombre 214 est un multiple de 3		

2) Y a-t-il des énoncés sont vrais et faux au même temps.

⇒ **Définition**

On appelle **proposition**, tout énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguïté qu'il est vrai ou faux, et se note souvent P, Q, R, .....

##### **Remarque**

- L'adjectif « vrai » ou « faux » qui accompagne la proposition s'appelle « **valeur de vérité** »
- Si P est une proposition vraie, on dit alors que la valeur de vérité de P est « Vrai » et se note « V » et Si P est une proposition fausse, on dit alors que la valeur de vérité de P est « faux » et se note « F ».

Table de vérité

P
V
F

Ou

P
1
0

##### **Exemples**

- $P : "3 \times 2 = 6" : V$  ;
- $Q : "-1 \text{ est une solution de l'équation } x^2 - 2x + 3 = 0" : F$

#### ⇒ Opérations sur les propositions

⇒ **Négation d'une proposition**

Etant donné une proposition  $P$ .

**La négation** de la proposition  $P$ , est la proposition qui a une valeur de vérité « faux » si la proposition  $P$  est vraie, et une valeur de vérité « vrai » si la proposition  $P$  est fausse et se note  $\overline{P}$  ou  $\neg P$ .

##### **Table de vérité**

$P$	$\overline{P}$
V	F
F	V

### Remarque

<i>Symbole</i>	<i>Négation</i>
$=$	$\neq$
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$\leq$	$>$
$\geq$	$<$
$\in$	$\notin$

### Application ①

Donner la négation des propositions suivantes, en précisant la valeur de vérité :

- $P: "\sqrt{17} \leq \sqrt{8} + \sqrt{9}"$  ;
- $Q: "\pi \in \mathbb{Q}"$  ;
- $R: "\frac{4}{5} \neq \frac{16}{25}"$

### ⇒ Conjonction de deux propositions

**La conjonction** de deux proposition P et Q est la proposition qui est vrai uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps et se note (P et Q) ou  $(P \wedge Q)$ .

### Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

### Application ②

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P: "3 \in \mathbb{Z} \text{ et } 3 \times 5 = 14"$  .
- $Q: "5 \text{ divise } 35 \text{ et } 5 \text{ est un nombre premier}"$
- $R: " \text{Le nombre } x = 7 \text{ et } 4x - 28 = 0"$  .
- $S: "12 \text{ est un nombre impair et } 12 > 0"$  .

### ⇒ Disjonction de deux propositions

**La disjonction** de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si au moins l'un des deux propositions est vraie on la note (P ou Q) ou  $P \vee Q$  .

### Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

### Application ③

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P: "\sqrt{2} \in \mathbb{N} \text{ ou } 0 \neq 5"$  .
- $Q: "12 \leq 7 \text{ ou } 5 \text{ est un nombre pair}"$  .
- $R: "3+3=5 \text{ ou } 7^2 > 36"$  .

### ⇒ Implication de deux propositions

**L'implication** de deux proposition  $P$  et  $Q$  est la proposition qui une valeur de vérité « faux » si la proposition  $P$  est vraie et la proposition  $Q$  est fausse et on la note  $P \Rightarrow Q$ .

$P \Rightarrow Q$  : se lit  $P$  implique  $Q$  ou bien « si  $P$  alors  $Q$  ».

### Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

### Application ④

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P: "2 < 5 \Rightarrow -1^2 = 1"$  ;
- $S: "0 > 3 \Rightarrow 3 \text{ est un nombre paire}"$  .
- $Q: "2^2 = -4 \Rightarrow \sqrt{25} = 5"$  ;
- $T: "6 = 2 \times 3 \Rightarrow 37 \text{ est un nombre premier}"$  .

### Remarque

- L'implication  $Q \Rightarrow P$  s'appelle l'implication réciproque de  $P \Rightarrow Q$ .
- " $P \Rightarrow Q$ " et " $Q \Rightarrow P$ " n'ont pas nécessairement même valeur de vérité.

### Exemple

- $P: "4 \text{ est un nombre pair}"$  ;  $Q: "-3 > 0"$  .

La proposition " $P \Rightarrow Q$ " est fausse mais la proposition " $Q \Rightarrow P$ " est vraie.

- $P: "3=1.5"$  ;  $Q: "36 \text{ divise } 8"$ .

La proposition " $P \Rightarrow Q$ " est vraie et aussi la proposition " $Q \Rightarrow P$ " est vraie.

### ⇒ Equivalence de deux propositions

**L'équivalence** de deux proposition  $P$  et  $Q$  est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si  $P$  et  $Q$  ont même valeur de vérité on la note  $P \Leftrightarrow Q$ .

$P \Leftrightarrow Q$  : se lit  $P$  équivalente la proposition  $Q$  .

### Table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

### Application ⑤

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P$  : " ABC un triangle rectangle en A  $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$  " .
- $Q$  : " $x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow -4 \in \mathbb{N}$ " .
- $R$  : " $4 \times 3 = 20 \Leftrightarrow 5$  est un nombre paire " .
- $S$  : " $1.25 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 25$  est un multiple de 5 " .

### $\Leftrightarrow$ Lois de Morgan

Soit  $P, Q$  et  $R$  trois propositions on a

- (1).  $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$
- (2).  $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
- (3).  $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
- (4).  $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}) \text{ ou } (\overline{Q})$
- (5).  $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}) \text{ et } (\overline{Q})$
- (6).  $\overline{(P \text{ et } (Q \text{ ou } R))} \Leftrightarrow (\overline{P \text{ et } Q}) \text{ ou } (\overline{P \text{ et } R})$
- (7).  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

## 2. Fonction propositionnelle

### Activité

On considère l'expression suivante : " $x \in \mathbb{R} / x^2 - x \geq 0$ "

- 1) L'expression précédente s'agit-il d'une proposition ?
- 2) Donner la valeur de vérité de l'expression précédente si  $x = 2$  et si  $x = \frac{1}{2}$

### Définition

On appelle **fonction propositionnelle**, tout énoncé mathématique contient une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble bien définie, et qui est susceptible d'être une proposition si on attribue à ses variables certaines valeurs particulier dans l'ensemble et se note  $P(x), P(x, y), \dots$

### Exemple

- $P(x)$  : " $x \in \mathbb{Z}; x + 2 > 0$ " est une fonction propositionnelle

$P(-1)$  est vraie et  $P(-5)$  est fausse.

- $Q(x, y): "(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4"$  est une fonction propositionnelle

$Q(0; 2)$  est vraie et  $Q(-1; 1)$  est fausse.

## II. Quantificateurs

### Activité

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes

$P: "$  Il existe au moins un nombre réel  $x$  tel que  $|3x - 2| = 4"$

$Q: "$  Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $x^2 + 1 \geq 0"$

$S: "$  Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $x^2 > 0"$

### ⇒ Définition

Soit " $(x \in E); P(x)$ " une fonction propositionnelle telle que  $E$  est un ensemble bien défini.

- La proposition " $(\exists x \in E); P(x)$ " est une proposition vraie lorsque on trouve au moins un  $x$  dans  $E$  pour lequel  $P(x)$  est vraie.

On dit dans ce cas « il existe un  $x$  appartenant à  $E$  tel que  $P(x)$  soit vraie »

Le symbole  $\exists$  s'appelle *le quantificateur existentiel*.

- La proposition " $(\forall x \in E); P(x)$ " est une proposition vraie lorsque les propositions  $P(x)$  soient vraies pour tout  $x$  dans  $E$ .

On dit dans ce cas « pour tout  $x$  appartenant à  $E$ ,  $P(x)$  soit vraie »

Le symbole  $\forall$  s'appelle *le quantificateur universel*.

**En particulier :** S'il existe un seul élément  $x$  dans  $E$  vérifier  $P(x)$ , alors dans ce cas on écrit " $(\exists! x \in E), P(x)$ ".

Le symbole  $\exists!$  s'appelle *quantificateur d'existence et d'unicité*.

### Exemple

⊗ On considère la fonction propositionnelle suivante : " $(x \in \mathbb{Z}); x^2 - 1 = 0"$

- " $(\forall x \in \mathbb{Z}); x^2 - 1 = 0"$   $F$
- " $(\exists x \in \mathbb{Z}); x^2 - 1 = 0"$   $V$
- " $(\exists! x \in \mathbb{Z}); x^2 - 1 = 0"$   $F$

**Question :** donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P: "( \forall y \in \mathbb{R} )( \exists x \in \mathbb{R} ); y = 2x - 1" \quad ; \quad Q: "( \exists x \in \mathbb{R} )( \forall y \in \mathbb{R} ); y = 2x - 1"$$

$$S: "( \forall x \in \mathbb{R} )( \forall y \in \mathbb{R} ); y = 2x - 1"$$

### Remarque :

- L'ordre des quantificateurs de même nature n'a aucune importance pour déterminer le sens du terme quantifié.
- L'ordre des quantificateurs de nature différents est important pour déterminer le sens du terme quantifié.

### ⇒ Négation d'une proposition quantifiée

### Propriété

Soit " $(x \in E); P(x)$ " une fonction propositionnelle

- ⊗ La négation de la proposition " $(\exists x \in E); P(x)$ " est la proposition " $(\forall x \in E); \overline{P(x)}$ ".
- ⊗ La négation de la proposition " $(\forall x \in E); P(x)$ " est la proposition " $(\exists x \in E); \overline{P(x)}$ ".

### Exemple

- La négation de la proposition  $P: "(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0"$  est la proposition  $\bar{P}: "(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 < 0"$ .
- La négation de la proposition  $P: "(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 = 0"$  est la proposition  $\bar{P}: "(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 \neq 0"$ .

### Application @

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes, puis donner leur négation.

- " $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 3x + 4 > 0$ " ; • " $(\exists x \in \mathbb{Q}); 2x^2 + 3x = 0$ " ; • " $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{N}) x^2 + y^2 \geq 1$ ".
- " $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y > 0$ " ; • " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y > 0$ " ; • " $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{N}^*); x + y = 0$ ".

## III. Raisonnements mathématiques

### 1. Raisonnement par la contraposition

### Définition

Etant donné deux propositions  $P$  et  $Q$

Pour montrer que la proposition  $P \Rightarrow Q$  est vraie, il suffit de montrer que  $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$  est vraie.

Ce raisonnement est basé sur la loi logique suivant  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

### Exemple

Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$

Pour montrer  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$  il suffit de montrer que



$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; 3\sqrt{x} + 1 = 3\sqrt{y} + 1 \Rightarrow x = y$$

$$\text{On a } 3\sqrt{x} + 1 = 3\sqrt{y} + 1 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 3\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$$

Donc d'après le raisonnement par le contraposé on a  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$ .

### Application ②

En utilisant le raisonnement par le contraposé montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)$

- $(x \neq -y) ; y \neq \frac{-3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$
- $x \neq 1 \text{ ou } y \neq 1 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \neq x+y-1$

## 2. Raisonnement par équivalences successives

### Propriété

Soient  $P, Q$  et  $R$  trois propositions

Raisonnement par l'équivalence est basé sur la loi logique suivant :

« Si  $P \Leftrightarrow Q$  et  $Q \Leftrightarrow R$  alors  $P \Leftrightarrow R$  » .

### Exemple

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  ; montrer que  $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2$

$$\text{On a } x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2+1-2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2$$

### Application ③

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$  montrer que

- $\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$
- $|x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$

2) Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels tels  $x \geq 1$  et  $y \geq 4$  montrer que

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x=2 \text{ et } y=8$$

## 3. Raisonnement par disjonction des cas

### Propriété

Etant donné deux propositions  $P$  et  $Q$

Il faut que les deux propositions  $P \Rightarrow Q$  et  $\bar{P} \Rightarrow Q$  soient vraies.

### Exemple

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $(E): 2|x-1| + x = 0$

Premier cas : si  $x-1 \geq 0$  alors  $|x-1| = x-1$

Donc l'équation  $(E)$  devient  $2(x-1) + x = 0$

c.-à-d.  $2x-2+x=0$  par conséquent  $x = \frac{2}{3} < 1$  alors  $S_1 = \emptyset$

Deuxième cas : si  $x-1 \leq 0$  alors  $|x-1| = -x+1$

Donc l'équation  $(E)$  devient  $2(-x+1) + x = 0$

c.-à-d.  $-2x+2+x=0$  par conséquent  $x = 2 > 1$  alors  $S_2 = \emptyset$

D'où  $S = S_1 \cup S_2 = \emptyset$

### Application @

- 1) Montrer  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n(n+1)$  est un nombre pair.
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $x^2 - |x-2| + 5 = 0$
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante  $|2x-1| + |2x+1| \geq 4$

## 4. Raisonnement par contre-exemple

### Exemple

Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$  est fausse

Si  $x=0$  alors  $0^2 > 0$  ce qui est impossible par conséquent  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$  est fausse.

### Application @

Montrer que les propositions suivantes sont fausses

- $(\forall x \in \mathbb{N})$  le nombre  $x^2$  est un nombre impair
- $(\forall n \in \mathbb{N})$  le nombre  $n^2 + n + 1$  est un nombre premier.

## 5. Raisonnement par l'absurde

### Activité

Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions telles que " $\overline{Q} \Rightarrow P$  et  $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ " est une proposition vraie

Si  $Q$  est fausse, que peut-on dire pour la valeur de vérité de  $P$ .

### Règle

Soit  $P$  une proposition. Pour montrer que la proposition  $P$  est vraie, on suppose que  $P$  est fausse puis trouver la contradiction avec les données d'exercices et le prérequis.



### Exemple

Montrer  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$

On suppose que  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$  alors  $(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = x-1$

On a  $x^2 = x-1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

On a  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

Donc l'équation n'a pas de solutions ; donc il y a une contradiction

Par conséquent  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$ .

### Application ①①

1) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n-1 \neq n-2$

2)  $ABC$  un triangle de côtés  $AB = 4, AC = 3$  et  $BC = 6$ . Montrer que le triangle  $ABC$  n'est pas rectangle en  $A$ .

3) Soient  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$  tels que  $xyz > 1$  et  $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ . Montrer que  $x \neq 1$ ,  $y \neq 1$  et  $z \neq 1$

## 6. Résonnement par récurrence

### Propriété

Soit  $P(n)$  une fonction propositionnelle et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq n_0$

Pour montrer que " $(\forall n \geq n_0); P(n)$ " est vraie, on suit les étapes suivantes :

- Vérifier que  $P(n_0)$  est vraie

" $(\forall n \geq n_0);$

- Supposer que " $P(n)$ " est vraie.

- Montrer que  $P(n+1)$  est vraie

- Conclure que " $(\forall n \geq n_0); P(n)$ " est vraie

- D'après le principe de récurrence on a " $(\forall n \geq n_0); P(n)$ ".

### Remarque

En utilisant le principe de récurrence si  $n$  est un nombre entier naturel.

### Exemple

Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n+1$

Pour  $n=0$  on a  $3^0 = 1 \geq 2 \times 0 + 1$  est une proposition vraie

Pour  $(n \in \mathbb{N})$  :

Supposons que  $3^n \geq 2n+1$  est vraie et Montrons que  $3^{n+1} \geq 2(n+1)+1$

c.-à-d M.q  $3^{n+1} \geq 2n+3$  est aussi vraie

On a  $3^n \geq 2n+1 \Rightarrow 3 \times 3^n \geq 3(2n+1) \Rightarrow 3^{n+1} \geq 6n+3$

Or  $6n+3 \geq 2n+3$  alors  $3^{n+1} \geq 2n+3$

Donc d'après le principe de récurrence on a  $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n+1$ .

### Application ①②

$(\forall n \in \mathbb{N})$ . Montrer que

- $2^n \geq n+1$
- $1+2+2^2+2^3+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$
- Le nombre  $4^n - 1$  est un multiple de 3.