السلسلة 3: المتتاليات العددية

تمرين 1
حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة:

(1) $u_n = \dfrac{3}{n^3\sqrt{n}}$ (2) $u_n = n^2\sqrt{n}$

(3) $u_n = \dfrac{2}{2n^3-5n+9}$ (4) $u_n = \dfrac{2n-6}{3n+4}$

(5) $u_n = \dfrac{n^4+3n}{n^2-6n+2}$ (6) $u_n = 5n + \dfrac{n^3}{n^3+8n}$

تمرين 2
حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة:

(1) $u_n = \sqrt{n} - n$ (2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(3) $u_n = \dfrac{2}{n^2+7} - \sqrt{n^2+5}$ (4) $u_n = \sqrt{5n-6} + \sqrt{n+2}$

(5) $u_n = \dfrac{n^4}{n^4+\sqrt{n}}$ (6) $u_n = \sqrt[3]{n} - 2\sqrt{n}$

(7) $u_n = \dfrac{\sqrt[4]{n}-\sqrt{n}}{2n}$ (8) $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+1}$

تمرين 3
لتكن $(v_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية معرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : v_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ |v_n - 3| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

(2) إستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

تمرين 4
لتكن $(u_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : u_n = 4 + \dfrac{(-1)^n \cos(n)}{n}$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ |u_n - 4| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

(2) إستنتج نهاية $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

تمرين 5
لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : v_n = \dfrac{\sin(n)}{n+2}$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \dfrac{-1}{n+2} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.

(2) إستنتج $\lim v_n$.

تمرين 6
لتكن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : w_n = 5n + 6\sin(n)$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 5n - 6 \leqslant w_n$.

(2) إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

تمرين 7
لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : v_n = 2n + (-1)^n n$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \leqslant v_n$.

(2) إستنتج أن (v_n) متباعدة و حدد نهايتها.

تمرين 8
لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : u_n = -7n + \cos(n) - 1$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n \leqslant -7n$.

(2) إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 9
لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات معرفة لكل n من $\mathbb{N}^*$ ب:
$u_n = \dfrac{n+\sin(\sqrt{n})}{n}$ و $v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ و $w_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.

(2) أحسب نهاية كل من $(v_n)_{n\geqslant 1}$ و $(w_n)_{n\geqslant 1}$.

(3) إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

تمرين 10
لتكن (u_n) متتالية معرفة ب: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(u_n^2+1) \end{cases}$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية و إستنتج أنها متقاربة.

تمرين 11
لتكن (u_n) متتالية معرفة ب: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$.

(1) بين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n < 2$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية و إستنتج أنها متقاربة.

تمرين 12
لتكن (v_n) متتالية معرفة ب: $\begin{cases} v_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{4}{v_n}\right) \end{cases}$.

(1) بين أن المتتالية: (v_n) مصغورة بالعدد 2.

(2) بين أن المتتالية (v_n) تناقصية.

(3) إستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة و أنها مكبورة بالعدد 3.

تمرين 13
لتكن (v_n) متتالية معرفة ب: $\begin{cases} v_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 12} \end{cases}$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 \leqslant v_n \leqslant 4$.

(2) أدرس رتابة المتتالية (v_n) و إستنتج أنها متقاربة.

تمرين 14
لتكن (w_n) متتالية معرفة ب: $\begin{cases} w_0 = \dfrac{2}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \ w_{n+1} = \dfrac{3w_n+2}{2w_n+3} \end{cases}$.

(1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 \leqslant w_n \leqslant 1$.

(2) أدرس رتابة المتتالية (w_n) و إستنتج أنها متقاربة.

تمرين 15
حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة:

(1) $u_n = \dfrac{3^n}{7^n}$ (2) $u_n = -4\left(\dfrac{7}{4}\right)^n$

(3) $u_n = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ (4) $u_n = -2 + \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{n+1}$

(5) $u_n = 3^n - 4^n$ (6) $u_n = \dfrac{3^n-4^n}{3^n+4^n}$

(7) $u_n = \dfrac{2^n+(-1)^n}{3^n}$ (8) $u_n = \dfrac{2^n-5^n}{5^n}$

(9) $u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{-\frac{1}{3}}$ (10) $u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{3}{4}}$

تمرين 16
لتكن (w_n) متتالية معرفة ب: $\begin{cases} w_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); \ w_{n+1} = w_n(w_n+1) \end{cases}$.

(1) أحسب w_1 و w_2.

(2) بين أن المتتالية (w_n) تزايدية.

(3) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2w_n < w_{n+1}$.

(4) إستنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ 3\times 2^n < w_n$.

(5) أحسب $\lim w_n$.

تمرين 《17》 يونيو 2003

(1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة ب: $f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:
$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 & ; (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = \dfrac{4}{9} \end{cases}.$$

ا. بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad \dfrac{4}{9} \leqslant u_n \leqslant 1$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ج. إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

تمرين 《18》 يوليوز 2003

(1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة ب:
$$\begin{cases} v_{n+1} = f(v_n) & ; (n \in \mathbb{N}) \\ v_0 = 2 \end{cases}.$$

ا. بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 1 \leqslant v_n \leqslant 2$.

ب. بين أن المتتالية (v_n) تناقصية.

ج. إستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

تمرين 《19》 يونيو 2004

(1) ضع على $\mathbb{R}_+$ جدول تغيرات الدالة g المعرفة ب: $g(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{e^x + 1}$.

(2) نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة ب:
$$\begin{cases} w_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{e^{w_n} + 1} & ; (n \in \mathbb{N}) \\ w_0 = 1 \end{cases}.$$

ا. بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad w_n > 0$.

ب. تحقق من أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad w_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}w_n$.

ج. بين أن المتتالية (w_n) تناقصية.

د. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad w_n \leqslant (\dfrac{1}{2})^n$ ثم أحسب نهاية (w_n).

تمرين 《20》 يوليوز 2004

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب:
$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} & ; (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 1 \end{cases}.$$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad u_n > 0$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

(3) إستنتج أن (u_n) متقاربة.

(4) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}u_n$.

(5) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad w_n \leqslant (\dfrac{1}{3})^n$ ثم أحسب نهاية (w_n).

تمرين 《21》 يونيو 2005

(1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة ب: $f(x) = 1 + x\ln(x) - \ln^2(x)$.

(2) تحقق من أن $f(x) - x = (\ln x - 1)(x - 1 - \ln x)$.

(3) أدرس إشارة $f(x) - x$ على المجال $]0; +\infty[$.

(4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة ب:
$$\begin{cases} v_{n+1} = f(v_n) & ; (n \in \mathbb{N}) \\ v_0 = \sqrt{e} \end{cases}.$$

ا. بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 1 \leqslant v_n \leqslant e$.

ب. بين أن المتتالية (v_n) تناقصية.

ج. إستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

تمرين 《22》 يوليوز 2005

نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad w_n = n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

أحسب بدلالة n المجموع $S_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.

تمرين 《23》 يونيو 2006

(1) ضع جدول تغيرات الدالة g المعرفة ب: $g(x) = \ln(1 + x) - x$ على المجال $]0; +\infty[$.

(2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{R}_+^*) : \quad 0 < \ln(1 + x) < x$.

(3) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geqslant 2}$ المعرفة ب:
$$(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) : \quad u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

ا. تحقق من أن $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) : \quad u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n-1}\right)$.

ب. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 2}$ تناقصية.

ج. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) : \quad 0 < u_n < \dfrac{2}{n-1}$.

د. أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

تمرين 《24》 يوليوز 2006

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:
$$\begin{cases} u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n & ; (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 0 \text{ و } u_1 = 1 \end{cases}.$$

نضع $w_n = 5^n u_n$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n$.

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n.

(2) بين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5.

(3) أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n.

(4) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad 0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{5}u_n$.

(5) إستنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad 0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

(6) أحسب نهاية (u_n).

تمرين 《25》 يونيو 2007

(1) أدرس إشارة $f(x) - x$ على $\mathbb{R}$ حيث f دالة معرفة ب: $f(x) = \dfrac{x}{x + e^{-x}}$.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 1 \end{cases}.$$

ا. بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

ج. إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم حدد نهايتها.

تمرين ﴾26﴿ يوليوز 2007

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) & ; \ (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 2 \end{cases}.$$

نضع $(\forall n \in \mathbb{N}): \quad v_n = u_n + n - 1$.

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

(2) أكتب v_n بدلالة n.

(3) إستنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية (u_n).

(4) نضع $S_n = u_1+u_1+...+u_n$ و $T_n = v_1+v_1+...+v_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

بين أن $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ و $T_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

تمرين ﴾27﴿

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{1+u_n} & ; \ (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

(1) بين أن $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) رتيبة و إستنتج أنها متقاربة.

(3) بين أن $1 - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(1 - u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(4) بين أن $1 - u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(5) إستنتج نهاية (u_n).

تمرين ﴾28﴿ يوليوز 2008

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+3} & ; \ (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 2 \end{cases}.$$

نضع $(\forall n \in \mathbb{N}): \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

(1) بين أن $u_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n.

(3) بين أن $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. ثم أحسب نهاية (u_n).

تمرين ﴾29﴿

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{2 + u_n} & ; \ (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 3 \end{cases}.$$

(1) بين أن $2 < u_n < 4$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) رتيبة و إستنتج أنها متقاربة.

(3) بين أن $4 - u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5}(4 - u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(4) بين أن $4 - u_n \leqslant \left(\frac{4}{5}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(5) حدد نهاية (u_n).

(6) نضع $(\forall n \in \mathbb{N}): \quad v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

ا. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

ب. حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

ج. إستنتج $\lim u_n$.

(7) نضع $(\forall n \in \mathbb{N}^*): \quad S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

أحسب S_n بدلالة n و إستنتج $\lim S_n$.

تمرين ﴾30﴿

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8)}{2u_n + 1} & ; \ (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = -5 \end{cases}.$$

(1) بين أن $u_n \neq -2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) نضع $(\forall n \in \mathbb{N}): \quad v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

ا. أثبت أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول.

ب. حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

(3) ا. بين أن $|u_n + 2| \leqslant \frac{3}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

ب. إستنتج $\lim u_n$.

تمرين ﴾31﴿

لتكن f دالة عددية معرفة ب: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

(1) بين أن $f(x) \geqslant 3$ $(\forall x \in]1; +\infty[)$.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \ (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 2 \end{cases}.$$

ا. بين أن $u_n \geqslant 3$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) رتيبة و إستنتج أنها متقاربة.

ج. حدد نهاية (u_n).

تمرين ﴾32﴿

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2 + \sqrt{5 + (u_n + 2)^2} & ; \ (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 1 \end{cases}.$$

(1) بين أن $u_n \geqslant 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) بين أن (u_n) تزايدية.

(3) نضع $(\forall n \in \mathbb{N}): \quad v_n = (2 + u_n)^2$.

ا. أثبت أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول.

ب. حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

ج. إستنتج $\lim u_n$.

تمرين ﴾33﴿

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 3}{2}} & ; \ (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 1 \end{cases}.$$

(1) بين أن $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) بين أن (u_n) تزايدية و إستنتج أنها متقاربة.

(3) حدد $\lim u_n$.