مبـــادئ في الحســـــابيــــــات

I) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

$IN = \{0,1,2,3,4,5.......\}$

$IN^* = \{1,2,3,4,5.......\}$

II) الأعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية – الفردية

1) نسمي عدد صحيح طبيعي زوجي كل عدد a يكتب على شكل $a = 2k$ حيث $k \in IN$.

2) نسمي عدد صحيح طبيعي فردي كل عدد a يكتب على شكل $a = 2k+1$ أو $a = 2k-1$ حيث $k \in IN$.

3) ملاحظات

a) يكون عدد زوجيا إذا كان رقم وحداته زوجيا .

b) يكون عدد فرديا إذا كان رقم وحداته فرديا .

c) (* إذا كان a و b زوجيين فإن $a+b$ زوجي .

(* إذا كان a و b فرديين فإن $a+b$ زوجي .

(* إذا كان a زوجيين و b فردي فإن $a+b$ فردي .

d) (* إذا كان a و b زوجيين فإن ab زوجي .

(* إذا كان a و b فرديين فإن ab فردي .

(* إذا كان a زوجيين و b فردي فإن ab زوجي .

e) إذا كان a و b عددين متتابعين فإن أحدهما زوجي والآخر فردي .

III) مضاعفات عدد

1) تعريف ليكن a و b عددين طبيعيين .

نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا كان a يكتب على شكل $a = bk$ حيث $k \in IN$.

2) ملاحظات

(* 0 مضاعف كل عدد طبيعي .

(* 0 له مضاعف واحد هو 0 .

(* إذا كان a مضاعف b و b مضاعف c فإن a مضاعف للعدد b .

3) المضاعف المشترك الأصغر لعددين

تعريف ليكن a و b عددين طبيعيين غير منعدمين .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر مضاعف غير منعدم مشترك بينهما . ونرمز له ب $PPCM(a,b)$ أو $a \vee b$.

4) ملاحظات

(* إذا كان العدد a مضاعف للعدد b فإن $PPCM(a,b) = a$

(* $PPCM(a,a) = a$

IV) قواسم عدد

1) تعريف ليكن a و b عددين طبيعيين .

نقول إن العدد a قابل للقسمة على b ، أو إن العدد b يقسم a إذا كان a مضاعف b يعني a يكتب على شكل $a = bk$ حيث $k \in IN$. ونكتب b/a .

2) ملاحظات

(* كل الأعداد الطبيعية تقسم 0 .

(* 0 يقسم عدد واحد هو 0 .

(* إذا كان b يقسم a و c يقسم b فإن c يقسم a .

(* العدد 1 يقسم جميع الأعداد الطبيعية .

(* كل عدد يقسم نفسه .

(* للعدد 1 قاسم واحد هو 1 .

3) مصادق القسمة على 2–3–4–5–9–11–25

a) ترميز

ليكن α_0 ، α_1 ، α_2 ، α_3 ، ...... ، α_r أرقاما من $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

نرمز بالكتابة $\overline{\alpha_r\alpha_{r-1}...\alpha_0}$ إلى العدد الذي رقم وحداته α_0 ، رقم عشراته α_1 ، ....

b) خاصية

نعتبر العدد $a = \overline{\alpha_r\alpha_{r-1}...\alpha_0}$ لدينا:

(* a يقبل القسمة على 2 إذا كان $\alpha_0 \in \{0,2,4,6,8\}$

(* a يقبل القسمة على 3 إذا كان $3/\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$

(* a يقبل القسمة على 4 إذا كان $4/\overline{\alpha_0\alpha_1}$

(* a يقبل القسمة على 5 إذا كان $\alpha_0 \in \{0,5\}$

(* a يقبل القسمة على 9 إذا كان $9/\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$

(* a يقبل القسمة على 3 إذا كان $11 \ / \ (\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+......)-(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+.....)$

(* a يقبل القسمة على 25 إذا كان $\overline{\alpha_1\alpha_0} \in \{\overline{00},\overline{25},\overline{50},\overline{75}\}$

4) القاسم المشترك الأكبر لعددين

تعريف ليكن a و b عددين طبيعيين غير منعدمين .

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم غير منعدم مشترك بينهما . ونرمز له ب $PGCD(a,b)$ أو $a \wedge b$.

5) خوارزمية أوقليدس .

ليكن a و b من IN^* بحيث $a \geq b$.

من أجل تحديد $PGCD(a,b)$ ننجز قسمات أقليدية متتالية :

نبدأ بقسمة a على b ثم نقسم في كل مرة المقسوم عليه على الباقي وهكذا حتى نحصل على باقي منعدم وسيكون $PGCD(a,b)$ هو آخر باقي غير منعدم .

ويمكن تلخيص هذه النتائج في جدول كما يلي :

a	b	r_1	r_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	q_1	q_2	q_3			
r_1	r_1	r_2	$\cdots$	$\cdots$	r_n	0

V) الأعداد الأولية

1) تعريف نسمي عددا أوليا كل عدد a صحيح طبيعي له قاسمان فقط 1 و a .

2) ملاحظة

a) لكي نتحقق هل العدد a أولي نتبع ما يلي .
نحدد جميع الأعداد الأولية p التي تحقق $p^2 \leq a$
إذا كان أحد هذه الأعداد يقسم a فإن a غير أولي .
إذا كانت جميع هذه الأعداد لا تقسم a فإن a أولي .
b) الأعداد الأولية الأصغر من 100 هي
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47، 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
c) كل عدد أولي $p \neq 2$ هو فردي
d) العدد 1 ليس أولي .

3) تفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية

خاصية : كل عدد طبيعي $a \geq 2$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}......p_r^{\alpha_r}$ حيث
p_1 ، p_2 ، p_3 ، ...... p_r أعداد أولية .
α_1 ، α_2 ، α_3 ، ...... α_r أعددا طبيعية غير منعدمة .
هذه الكتابة تسمى تفكيك العدد a إلى جداء عوامل أولية .

مثال

لنفكك العدد 54: لدينا

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

إذن إذن $54 = 2 \times 3^3$

4) تطبيق .

a) المضاعف المشترك الأصغر لعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة بين تفكيكي a و b مرفوعة إلى أكبر أس .
b) القاسم المشترك الأكبر لعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي a و b مرفوعة إلى أصغر أس .

مثال لنحدد: $76 \wedge 632$ و $76 \vee 632$

لدين

$$\begin{array}{r|l} 632 & 2 \\ 316 & 2 \\ 158 & 2 \\ 79 & 79 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

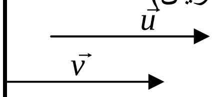
إذن $632 = 2^3.79$ و $76 = 2^2.19$
ومنه $76 \wedge 632 = 2^2 = 4$ و $76 \vee 632 = 2^3.19.79 = 12008$

c) ليكن $a \geq 2$
و $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}......p_r^{\alpha_r}$ تفكيك العدد a إلى جداء عوامل أولية .
عدد قواسم العدد a هو $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots\cdots(1+\alpha_r)$

الحساب المتجهي

A) الحساب المتجهي

1) تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الاتجاه (يعني حاملاهما متوازيان) ونفس المنحنى ونفس المنظم.

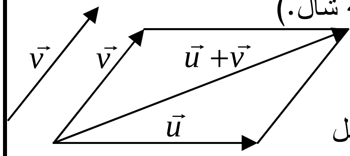


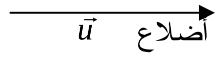
2) $\boxed{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$

3) $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$ (علاقة شال.)

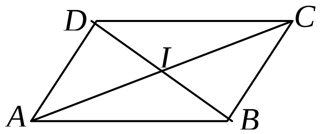
4) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ تكافئ $A = B$.

5) من أجل تحديد $\vec{u} + \vec{v}$ نزيح $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل ونكون متوازي أضلاع.





6) يكون الرباعي $(ABCD)$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحققت إحدى الشروط التالية:



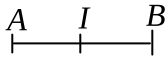
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

d) القطران $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف.

7) I منتصف القطعة $[AB]$ يعني



*) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ *) $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ *) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

*) $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ *) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

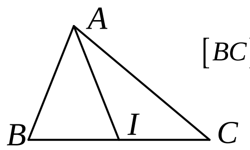
ملاحظة:

a) إذا كان I منتصف $[AB]$ يستحسن استعمال $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$

b) لكي نبين أن I منتصف $[AB]$ يستحسن أن نبين أن $\boxed{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}}$

8) ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف $[BC]$

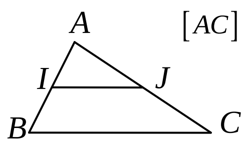
لدينا $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}$.



9) ليكن (ABC) مثلثا.

I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$

لدينا $\boxed{\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$



10) a) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

b) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ أو $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

c) تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيمين يعني $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$ أو $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$

d) يكون (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين.

ملاحظة:

a) لكي نبين أن متجهتين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ تحققان علاقة ما (مثلا $\overrightarrow{IJ} = \alpha\overrightarrow{IK}$ أو $\alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK} = \vec{0}$ أو ...).

نقوم بحساب $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ بدلالة متجهتين غير مستقيميتين مكونتين من النقط الأصلية $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مثلا.

ونجد مثلا $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{IK} = 6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ ومنه ننسخ أن $3\overrightarrow{IJ} = 6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IK}$ إذن $\overrightarrow{IK} = 3\overrightarrow{IJ}$.

b) ليكن (ABC) مثلثا و M نقطة بحيث $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$ يستحسن تغيير تعريف النقط M وجعلها من جهة واحدة كما يلي:

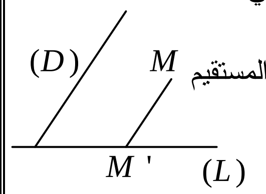
$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$ يعني $\overrightarrow{MA} = 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)$ يعني $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB}$

يعني $-2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB}$ يعني $2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

الإسقاط

I) تعريف .

ليكن (D) و (L) مستقيمين متقاطعين في نقطة O
ولتكن M نقطة من المستوى (P)
ولتكن M' نقطة تقاطع المستقيم (L) والمستقيم المار من M والموازي لـ (D) .
النقطة M' تسمى مسقط النقطة M على (L) بتوازي مع (D) .



ملاحظات

a) مسقط كل نقطة M من (L) هي نفسها ، نقول إنها صامدة .
b) مسقط كل نقطة M من (D) هي النقطة O .
c) الإسقاط على (L) بتوازي مع (D) هو عبارة عن تطبيق p من المستوى (P) نحو (P) .
وإذا كانت M' هي مسقط M نكتب $p(M)=M'$.
d) إذا كان $(L)\perp(D)$ فإن p يسمى الإسقاط العمودي على (L) .

II) خاصيات .

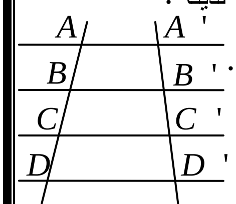
1) الإسقاط يحافظ على المرجح يعني :
إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$
و $p(A)=A'$ و $p(B)=B'$ و $p(G)=G'$
فإن G' مرجح $\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$

2) الإسقاط يحافظ على المنتصف يعني :
إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن I' مرجح $[A'B']$
حيث $p(A)=A'$ و $p(B)=B'$

3) الإسقاط يحافظ على معامل استقامية متجهتين يعني :
إذا كان $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}$
النقط A' و B' و C' و D' هي صور A و B و C و D على التوالي .

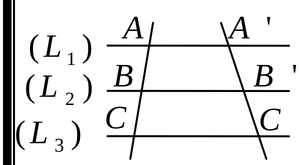
III) طاليس

1) ليكن (L_1) و (L_2) و (L_3) و (L_4) أربع مستقيمات متوازية و (D) و (D') قاطعان لهما في النقط A و B و C و D و A' و B' و C' و D' على التوالي . لدينا :



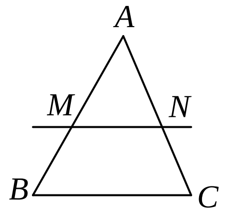
$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD} \quad \text{و} \quad \frac{C'A'}{B'D'}=\frac{CA}{BD} \quad \text{و} \quad \ldots\ldots$$

2) ليكن (L_1) و (L_2) و (L_3) 3 مستقيمات متوازية و (D) و (D') قاطعان لهما في النقط A و B و C و A' و B' و C' على التوالي .
لدينا :



$$\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AB}{AC} \quad \text{و} \quad \frac{C'B'}{A'B'}=\frac{CB}{AB} \quad \text{و} \quad \ldots\ldots$$

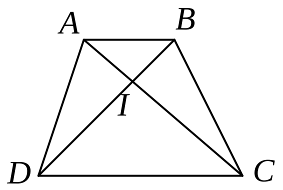
3) ليكن (ABC) مثلثا . (D) مستقيم يوازي (BC) ويقطع (AB) في M و (AC) في N



لدينا : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$
و $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$

ملاحظة $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NC}\neq\frac{MN}{BC}$

4) ليكن $(ABCD)$ شبه منحرف و I تقاطع قطريه .

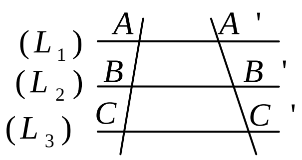


لدينا : $\frac{IA}{IC}=\frac{IB}{ID}=\frac{AB}{CD}$
و $\frac{IC}{IA}=\frac{ID}{IB}=\frac{AB}{CD}$

ملاحظة $\frac{BI}{BD}=\frac{AI}{AC}\neq\frac{AB}{CD}$

5) خاصية طاليس العكسية :

a) ليكن (L_1) و (L_2) و (L_3) و 3 مستقيمات و (D) و (D') قاطعان لهما في النقط A و B و C و A' و B' و C' على التوالي .



إذا كان $\begin{cases}(L_1)//(L_2)\\ \frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}\end{cases}$ فإن $(L_1)//(L_2)//(L_3)$

b) ليكن (ABC) مثلثا . M من (AB) و N من (AC)
إذا كان $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ فإن $(MN)//(BC)$

ملاحظة :

1) في الخاصيات 1−2−3−4 المتعلقة بخاصيات طاليس المباشرة يمكن استعمال المسافة عوض القياس الجبري . اما في الخاصية العكسية (5) فهذا غير ممكن .
2) إذا كانت النقط A و B و C و D مستقيمية فإن $\overline{AB}=k\overline{CD}$ تكافئ $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$

الحساب ـالترتيب في IR

الحساب في IR .

1) قواعد الحساب في IR .

ليكن a و b و c و d من IR .

a) $a=b$ يكـــافئ $a+c=b+c$

b) $a=b$ يكـــافئ $a.c=b.c$ $\quad (c\neq 0)$

c) إذا كان $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ و فـــإن $\begin{cases} a+c=b+d \\ a.c=b.d \end{cases}$

d) $ab=0$ يكـــافئ $a=0$ أو $b=0$.

e) $ab\neq 0$ يكـــافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

g) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ يكـــافئ $a.d=b.c$ $\quad (a\neq 0$ و$b\neq 0)$

h) $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ و $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$

i) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$ و $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}=\dfrac{a}{bc}$ و $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}=\dfrac{b}{a}$

2) القوى في IR

a) تعريف

* $a^0=1 \quad (a\neq 0)$ * $a^1=1$

* $a^n=\underbrace{a.a.a.....a}_{n\ fois} \quad (n\in IN^*-\{1\})$

* $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

b) خاصيـــات

a) ليكن a و b من IR^* و m و n من $\mathbb{Z}$.

* $a^m.a^n=a^{m+n}$ * $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

* $(a^m)^n=a^{mn}$ * $(ab)^n=a^nb^n$

* $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ * $(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

b) إذا كان $a=b$ فإن $a^2=b^2$

c) $\boxed{\text{إذا كان } a^2=b^2 \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس الإشارة فإن } a=b \text{ .}}$

d) $a^2=b^2$ يكـــافئ $a=b$ أو $a=-b$.

ملاحظـــة لكي نبين أن: $a=b$ يكفي مثلا أن نبين أن $a^2=b^2$ و a و b لهما نفس الإشارة

3) متطابقـــات هامة

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

b) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

c) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

d) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

e) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

f) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

g) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

4) الجذور المربعة .

تعريف ليكن $a\in IR^+$. الجذر المربع للعدد a هو العدد الموجب b الذي يحقق : $b^2=a$. ونكتب $\sqrt{a}=b$.

خاصيـــات .

a) ليكن a و b من IR^+ .

* $\sqrt{a}\geq 0$ * $\boxed{\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a}$

* $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ * $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$

* $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) ليكن $x\in IR$. $\boxed{\sqrt{x^2}=|x| \ .}$

c) إذا كان $ab>0$ فإن : $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ و $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

d) ليكن $a\in IR^+$ $\boxed{x^2=a \text{ يكـــافئ } x=\sqrt{a} \text{ أو } x=-\sqrt{a} \ .}$

5) التنـــــاسبية .

a) نقول إن العددين a و b متناسبان مع c و d إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

b) إذا كان : $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ فإن :

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}$$

6) الجزء الصحيح .

a) تعريف : كل عدد حقيقي x محصور بين عددين نسبيين متتابعين k و $k+1$ يعني : $k\leq x<k+1$ العدد النسبي k يسمى الجزء الصحيح للعدد x ونكتب $E(x)=k$ أو $[x]=k$

ملاحظة :

* الجزء الصحيح للعدد x هو العدد النسبي الذي يوجد مباشرة قبل x .

* $E(x)\leq x<E(x)+1$ لكل x من IR .

II) الترتـــــيـــــب في IR .

1) خاصيـــات

a) * $a\geq b$ يكـــافئ $a-b\geq 0$

* $a\leq b$ يكـــافئ $a-b\leq 0$

b) * $a>b$ يكـــافئ $a-b>0$

* $a<b$ يكـــافئ $a-b<0$

c) * $a\leq b$ يعني $a<b$ أو $a=b$.

* إذا كان $a<b$ فإن $a\leq b$ والعكس غير صحيح .

d) * $a\geq b$ يكـــافئ $a+c\geq b+c$

* $a>b$ يكـــافئ $a+c>b+c$

e) * إذا كان $\begin{cases} a\leq b \\ b\leq c \end{cases}$ و فإن $a\leq c$.

*) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ b < c \end{cases}$ و فإن $a < c$.

f) *) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ و فإن $a + c \le b + d$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c < d \end{cases}$ و فإن $a + c < b + d$

g) *) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \ge 0 \end{cases}$ و فإن $ac \le bc$

*) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le 0 \end{cases}$ و فإن $ac \ge bc$.

f) *) إذا كان $\begin{cases} 0 \le a \le b \\ 0 \le c \le d \end{cases}$ و فإن $ac \le bd$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان $\begin{cases} 0 \le a \le b \\ 0 < c < d \end{cases}$ و فإن $ac < bd$

i) ليكن $a > 0$ و $b > 0$. *) $a \le b$ يكــــافئ $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

j) ليكن $a < 0$ و $b < 0$. *) $a \le b$ يكــــافئ $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

k) ليكن $a \ge 0$ و $b \ge 0$

*) $a \le b$ يكــــافئ $a^2 \le b^2$

*) $a \le b$ يكــــافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

l) ليكن $a \le 0$ و $b \le 0$ *) $a \le b$ يكــــافئ $a^2 \ge b^2$

m) ليكن a و b من IR $|a| \le |b|$ يكــــافئ $a^2 \le b^2$

n) إذا كان لـ a و b نفس الإشارة و $a + b = 0$ فإن $a = 0$ و $b = 0$

ملاحظة

إذا كان العددين a و b يحتويان على الجذور المربعة ، لكي نقارن a و b يكفي مثلا أن نقارن a^2 و b^2 ونتحقق من إشارة a و b ثم نستعمل الخاصيتين k) و l) .

2) القيـــــــمة المطلقة .

تعريف: ليكن x من IR . القيمة المطلقة للعدد x هي العدد الذي نرمز له ب $|x|$ والمعرف بما يلي : $|x| = \begin{cases} x & ; \ x \ge 0 \\ -x & ; \ x \le 0 \end{cases}$

يعني : *) إذا كان $x \ge 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي نفسه .
*) إذا كان $x \le 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي مقابله .

خاصيـــــات

a) *) $|-x| = |x|$ *) $|x| \ge 0$

*) $|xy| = |x||y|$ *) $|x^n| = |x|^n$ *) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

b) *) $|x| = r$ يكــــافئ $x = r$ أو $x = -r$.
*) $|x| = |y|$ يكــــافئ $x = y$ أو $x = -y$.

c) *) $|x| \le r$ يكــــافئ $-r \le x \le r$
*) $|x| \ge r$ يكــــافئ $x \ge r$ أو $x \le -r$

3) المجـــــالات

a) $[a,b] = \{x \in IR \ / \ a \le x \le b\}$

a) $[a,b[= \{x \in IR \ / \ a \le x < b\}$

a) $]a,b] = \{x \in IR \ / \ a < x \le b\}$

a) $]a,b[= \{x \in IR \ / \ a < x < b\}$

a) $[a,+\infty[= \{x \in IR \ / \ x \ge a\}$

a) $]a,+\infty[= \{x \in IR \ / \ x > a\}$

a) $]-\infty,a] = \{x \in IR \ / \ x \le a\}$

a) $]-\infty,a[= \{x \in IR \ / \ x < a\}$

4) التأطيـــــــر

تعريف : كل متفاوتة من المتفاوتات : $a < x < b$ و $a \le x < b$ و $a < x \le b$ و $a \le x \le b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b - a$.

5) القيمة المقربـــــة .

a) i) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{0 \le x - x_0 \le r}$

ii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{-r \le x - x_0 \le 0}$.

iii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{-r \le x - x_0 \le r}$ يعني $\boxed{|x - x_0| \le r}$.

b) إذا أردنا أن نحدد قيمة مقربة للعدد x نقوم بتأطير العدد x و سنجد $\boxed{a \le x \le b}$ ومن هنا نستنتج أن ما يلي :

i) a هي القيمة المقربة بتفريط للعدد x بالدقة $r = b - a$

ii) b هي القيمة المقربة بإفراط للعدد x بالدقة $r = b - a$

iii) $\frac{a+b}{2}$ هي القيمة المقربة للعدد x بالدقة $r = \frac{b-a}{2}$

c) **ملاحظـــة**

يمكن تحديد قيمة مقربة للعدد x مباشرة إذا كانت لدينا إحدى التأطيرات التالية :

i) $\boxed{0 \le x - x_0 \le r}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r

ii) $\boxed{-r \le x - x_0 \le 0}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r

iii) $\boxed{-r \le x - x_0 \le r}$ أو $\boxed{|x - x_0| \le r}$ وستكون x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r

d) التقريب العشري .

ليكن x من IR .

i) العدد العشري $\frac{E(10^n x)}{10^n}$ يسمى القيمة العشرية المقربة بتفريط للعدد x بالدقة 10^{-n} .

i) العدد العشري $\frac{E(10^n x)}{10^n} + 1$ يسمى القيمة العشرية المقربة بإفراط للعدد x بالدقة 10^{-n} .

المستقيم في المستوى

I- الأســـــاس

1) نسمي أساسا كل زوج $(\vec{i},\vec{j})$ مكون من متجهتين غير مستقيميتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

2) ليكن $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساس . كل متجهة $\vec{u}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ الزوج (x,y) يسمى زوج إحداثيتي المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس B ونكتب $\vec{u}(x,y)$ أو $\vec{u}\binom{x}{y}$.

ملاحظة: إذا أردنا تحديد إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس. $B=(\vec{i},\vec{j})$ نقوم بحساب المتجهة $\vec{u}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$. وإذا وجدنا $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ فإن زوج إحداثيتي $\vec{u}$ هو (x,y) ونكتب $\vec{u}(x,y)$.

3) ليكن $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساسا.

a) لدينا $\vec{i}(1,0)$ و $\vec{j}(0,1)$

b) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$

لدينا $\vec{u}+\vec{v}(x+x',y+y')$ و $\vec{u}-\vec{v}(x-x',y-y')$ و $\alpha\vec{u}(\alpha x,\alpha y)$

c) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$

*) نسمي محددة المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس B. العدد الذي نرمز له ب $\det(\vec{u},\vec{v})$ والمعرف بما يلي:

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'$$

*) تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})\neq 0$

ملاحظة: 1) لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيمتين.

*) إذا كان $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=0$

*) إذا كان $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\alpha'\vec{i}+\beta'\vec{j}$ فإن $\alpha=\alpha'$ و $\beta=\beta'$.

2) إذا كانت A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة فإن المتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مستقيميتين. وبالتالي تكون أساسا .

II- المعلــــــم

1) نسمي معلما كل مثلوث $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث o نقطة و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيميتين.

2) نعتبر المعلم $R=(o,\vec{i},\vec{j})$

لكل نقطة M من المستوى المتجهة $\vec{OM}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ الزوج (x,y) يسمى زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم R ونكتب $M(x,y)$ أو $M\binom{x}{y}$

ملاحظة: إذا أردنا تحديد إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ نقوم بحساب $\vec{OM}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$. إذا وجدنا $\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ فإن $M(x,y)$.

3) نعتبر المعلم $R=(o,\vec{i},\vec{j})$.

ونعتبر النقطتين $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

*) لدينا $\vec{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$.

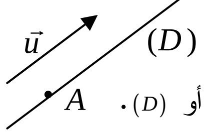
*) إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن إحداثيات النقطة I هي:

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2} \quad , \quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$

ملاحظة: إذا كانت النقط A و B و C غير مستقيمة فإن المثلوث $(A,\vec{AB},\vec{AC})$ معلم.

III- المستقيم في المستوى

1) تعريف: لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة المستقيم المار من A والموجه بالمتجهة $\vec{u}$ هو مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمين ونرمزله ب $D(A,\vec{u})$ أو (D).

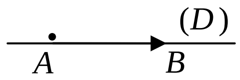


ملاحظة:

a) $M\in D(A,\vec{u})$ يعني $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمين.

b) ليكن (D) مستقيم. كل متجهة موازية ل (Δ) تكون موجهة ل (D).

c) المستقيم (AB) مار من A وموجه بالمتجهة $\vec{AB}$.



2) **تمثيل بارامتري لمستقيم.**

تعريف:

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$

تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو $(D)\ :\ \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}\ (t\in IR)$

هذا التمثيل البارامتري يعني أن (D) هو مجموعة النقط التي تكون احداثيتها على شكل $(1+3t,2-4t)$ حيث $t\in IR$.

يعني كلما عوضنا t بقيمة من IR نحصل على احداثيات نقطة من (D).

مثلا من أجل $t=1$ نجد $x=4$ $y=-2$ إذن $M(4,-2)\in(D)$.

3) **معادلة ديكارتية لمستقيم.**

a) ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$ للحصول على معادلة ديكارتية ل (D) نتبع ما يلي:

$M(x,y)\in(D)$ يعني $\det(\vec{AM},\vec{u})=0$

يعني $\begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix}=0$

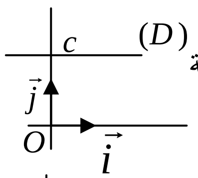
يعني $b(x-x_0)-a(y-y_0)$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $Ax+By+C=0$ مع $(A,B)\neq(0,0)$ وهي معادلة ديكارتية ل (D) ونكتب $(D):Ax+By+C=0$.

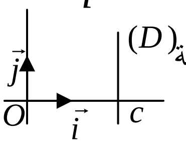
b) نعتبر المجموعة $(D):ax+by+c=0$

(D) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}(-b,a)$.

c) *) إذا كان (D) مستقيما موازيا لمحور الأفاصيل فإن المتجهة $\vec{i}(1,0)$ موجهة له وتكون معادلته على شكل $y=c$.



*) إذا كان (D) مستقيما موازيا لمحور الأراتيب فإن المتجهة $\vec{j}(0,1)$ موجهة له وتكون معادلته على شكل $x=c$.



*) محور الأفاصيل هو المستقيم المار من $o(0,0)$ والموجه ب $\vec{i}(1,0)$ معادلته $y=0$.

*) محور الأراتيب هو المستقيم المار من $o(0,0)$ والموجه ب $\vec{j}(0,1)$ معادلته $x=0$.

4) المرور من معادلة ديكارتية إلى تمثيل بارامتري والعكس.

أمثلة:

a) نعتبر المستقيم $(\Delta):x+2y-1=0$ للحصول على تمثيل بارامتري ل (Δ) نستخرج نقطة ومتجهة ل (Δ) أو: $y=t$ أو $x=t$ ونحسب الآخر.

مثلا: نضع $y=t$ إذن $x+2t-1=0$ يعني $x=1-2t$ إذن $(\Delta)\begin{cases}x=1-2t\\ y=t\end{cases}$.

b) نعتبر المستقيم $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\ (1)\\ y=3+t\ (2)\end{cases}$ للحصول على معادلة ديكارتية ل (Δ) نستخرج نقطة ومتجهة موجهة أو نحسب t في (1) أو (2) ونعوض في الأخرى.

مثلا: من (2) لدينا $t=-y-3$ وبالتعويض في (1) نجد $x=1-2y-6$ إذن $(\Delta):x+2y+5=0$.

5) الأوضاع النسبية لمستقيمين:

a) من أجل دراسة تقاطع المستقيمين (Δ) و (Δ') يمكن اتباع ما يلي:

i) إذا كان $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$ ، $(\Delta'):\begin{cases}x=x_1+a't'\\ y=y_1+b't'\end{cases}$

نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}x_0+at=x_1+a't'\\ y_0+bt=y_1+b't'\end{cases}$

*) إذا كان ل (S) حلا وحيدا $t=.$ و $t'=.$ فإن (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة ونحصل على إحداثياتها بتعويض t في تمثيل (Δ).

*) إذا كان للنظمة (S) مالا نهاية له من الحلول فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

ii) إذا كان $(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+2t\end{cases}$ و $(\Delta'):2x-3y+1=0$

نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}x=1+t & (1)\\ y=-1+2t & (2)\\ 2x-3y+1=0 & (3)\end{cases}$

بتعويض x و y في (3) نحصل على معادلة من الدرجة

*) إذا كان لهذه المعادلة حل في (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة.

نعوض t في (1) و (2) ونحصل عليها.

*) إذا كانت المعادلة لا تقبل حل فإن (Δ) و (Δ') متوزيان قطعا.

*) إذا كانت المعادلة تقبل ما لا نهاية له من الحلول فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

iii) إذا كان $(\Delta):x+2y-1=0$ و $(\Delta'):2x-y+1=0$ نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}2x-y+1=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$ نفس حالات i).

b) نعتبر المستقيمين $\begin{cases}(\Delta):ax+by+c=0\\ (\Delta'):a'x+b'y+c'=0\end{cases}$

i) إذا كان $\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\neq0$ فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان ونحل النظمة للحصول على نقطة التقاطع.

ii) إذا كان $\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=0$ فإن $(\Delta')//(\Delta)$

*) إذا كان $\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}\neq0$ أو $\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}\neq0$ فإن $(\Delta')//(\Delta)$ قطعا.

*) إذا كان $\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}=0$ أو $\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}=0$ فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

c) إذا أردنا أن نبين أن (Δ) و (Δ') متوزيان أو غير متوازيين نختار متجهة $\vec{u}$ موجهة ل (Δ) و $\vec{v}$ موجهة ل (Δ') ونحسب $\det(\vec{u},\vec{v})$

i) إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})=0$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

ii) إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})\neq0$ فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان.

d) إذا كان $(\Delta)//(\Delta')$ فإن أي متجهة موجهة لأحدهما موجهة للآخر.

6) المعادلة المختصرة لمستقيم

a) إذا كان (Δ) مستقيما غير موازي لمحور الأراتيب فإن معادلته تكتب على شكل $y=mx+p$ هذه المعادلة تسمى المعادلة المختصرة.

العدد m يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم (Δ).

b) ليكن (Δ) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$ مع $a\neq0$ (يعني $(\Delta)\not\parallel(y'oy)$) المعامل الموجه ل (Δ) هو $m\frac{b}{a}$.

c) نعتبر المستقيمين $(\Delta):y=mx+p$ و $(\Delta'):y=m'x+p'$ يكون $(\Delta)//(\Delta')$

إذا وفقط كان $m=m'$

الحدوديات ـ النظمات
المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

I) الحدوديات

1 تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}$ نعتبر التعبير

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$$

حيث $a_n,....,a_1,a_0$ أعداد حقيقية و $a_n\neq 0$

*) $P(x)$ أو P تسمى حدودية من الدرجة n ونكتب $\deg P=n$.

*) الأعداد $a_n,....,a_1,a_0$ تسمى معاملات الحدودية P.

b) تكون حدودية منعدمة إذا وفقط إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة.

c) الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

d) تكون حدوديتان متساويتان إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

e) كل حدودية من الدرجة 1: $P(x)=ax+b$ تسمى حدانية.

f) كل حدودية من الدرجة 2: $P(x)=ax^2+bx+c$ تسمى ثلاثية الحدود.

2

a) $\deg(P+Q)\leq\sup(\deg P,\deg Q)$

b) $\deg(P-Q)\leq\sup(\deg P,\deg Q)$

c) $\deg(P\cdot Q)=\deg P+\deg Q$

3 القسمة على $\boxed{x-\alpha}$

a) لتكن $P(x)$ حدودية. نقول إن العدد α جذر للحدودية P أو صفر للحدودية P إذا وفقط إذا كان $P(\alpha)=0$

b) لتكن $P(x)$ حدودية.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وفقط إذا كان $P(\alpha)=0$.

ملاحظة:

a) إذا أردنا أن نتحقق هل $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ نقوم بحساب $P(\alpha)$.

*) إذا كان $P(\alpha)=0$ فإن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$.

*) إذا كان $P(\alpha)\neq 0$ فإن $P(x)$ لا تقبل القسمة على $x-\alpha$.

b) إذا أردنا أن نتحقق هل $P(x)$ تقبل القسمة على $x+\alpha$ نقوم بحساب $P(-\alpha)$.

II) المعادلات والمتراجحات من الدرجة II.

1 حل المعادلة $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

نعتبر المعادلة $(E):ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة (E) نقوم بحساب العدد $\Delta=b^2-4ac$

*) العدد Δ يسمى مميزا للمعادلة (E).

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $x=\frac{-b}{2a}$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) لا تقبل أي حل.

ملاحظة:

a) نعتبر المعادلة $(E):ax^2+2b'x+c=0$ (يعني $b=2b'$)

نستعمل المميز المختصر Δ' عوض المميز Δ. ولدينا $\Delta'=b'^2-ac$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما.

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\qquad x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $x=\frac{-b'}{a}$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'\langle 0}$ فإن المعادلة (E) لا تقبل أي حل.

b) إذا كان $\Delta=\alpha^2$ فإن المعادلة تقبل حلين

$$x_1=\frac{-b-\alpha}{2a}\qquad x_2=\frac{-b+\alpha}{2a}$$

2 تعميل ثلاثية الحدود

نعتبر ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ مع $a\neq 0$

من أجل تعميل $P(x)$ نقوم بحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ (E)

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة E تقبل حلين x_1 و x_2 ويكون تعميل $P(x)$ هو $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا x_0 ويكون تعميل $P(x)$ هو $P(x)=a(x-x_0)^2$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) ليس لها حل والحدودية $P(x)$ ليس لها تعميل.

ملاحظة:

إذا كان $\Delta=0$ فإن الحدودية $P(x)$ عبارة عن متطابقة هامة.

3 إشارة ثلاثية الحدود.

نعتبر الحدودية $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

من أجل دراسة إشارة $P(x)$ نقوم بحل المعادلة $(E):ax^2+bx+c=0$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 وتكون إشارة $P(x)$ هي

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا x_0 وتكون إشارة $P(x)$ هي:

x		x_0	
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة a

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) ليس لها حل وتكون إشارة $P(x)$ هي:

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	

4) مجموع وجداء جدري معادلة من الدرجة II.

a) نعتبر المعادلة $(E): ax^2+bx+c=0$

*) إذا أردنا أن نبين أن المعادلة (E) تقبل حلين نقوم بحساب Δ ونجد $\Delta \geq 0$.

*) يمكن حساب مجموع وجداء هاذين الحلين بدون حل المعادلة باستعمال الصيغ التالية
$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

b) إذا أردنا تحديد معادلة من الدرجة II يكون α و β حلين لها. نقوم بحساب $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ نجد $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\cdot\beta=P$
وتكون هذه المعادلة هي $x^2-Sx+P=0$

c) إذا أردنا حل النظمة $\begin{cases} x+y=S \\ x\cdot y=P \end{cases}$ نقوم بحل المعادلة $t^2-St+P=0$

إذا كان x_1 و x_2 هما الحلين فإن $\begin{cases} x\equiv x_1 \\ y=x_2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=x_2 \\ y=x_1 \end{cases}$
$$S=\{(x_1,x_2),(x_2,x_1)\}$$

ملاحظة:

1) ليكن α و β حلي المعادلة $ax^2+bx+c=0$.
نعلم أن $\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$
إذا أردنا حساب حد يحتوي على α و β نحاول إظهار $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$.

أمثلة: *) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

*) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$
$=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha\beta\right]$
$=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right]$

*) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$.

2) ليكن x_1 و x_2 حلي معادلة من الدرجة الثانية. من أجل دراسة إشارة x_1 و x_2 نقوم بحساب x_1+x_2 و $x_1\cdot x_2$.

*) إذا كان $\boxed{x_1x_2\langle 0}$ فإن أحد العدد x_1 و x_2 موجب والآخر سالب.

*) إذا كان $\boxed{x_1x_2\rangle 0}$ فإن x_1 و x_2 لهما نفس الإشارة وهي إشارة x_1+x_2.

III) النظمات الخطية

1) المعادلات من الدرجة I بمجهولين:

نعتبر المعادلة $(1)\ ax+by+c=0$ حيث أحد العددين a أو b غير منعدم. من أجل حل المعادلة (1) نحسب x بدلالة y إذا كان $a\neq 0$ أو نحسب y بدلالة x إذا كان $b\neq 0$. مثلا إذا كان $a\neq 0$ نجد $x=\dfrac{-by-c}{a}$ إذن $S=\left\{\left(\dfrac{-by-c}{a},y\right)/\,y\in\mathbb{R}\right\}$

2) نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

نعتبر النظمة $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث الأعداد a و b و a' و b' ليست كلها منعدمة.
من أجل حل النظمة (S) نقوم بحساب المحددات التالية.
$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$$

a) إذا كان $\boxed{\Delta\neq 0}$: فإن النظمة تقبل حلا وحيدا.
$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad S=\{(x,y)\}$$

b) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$:

*) إذا كان $\boxed{\Delta_x\neq 0}$ أو $\boxed{\Delta_y\neq 0}$ فإن النظمة (S) ليس لها حل $s=\varnothing$

*) إذا كان $\boxed{\Delta_x=0 \text{ و } \Delta_y=0}$ فإن النظمة (S) تكافئ إحدى المعادلتين.

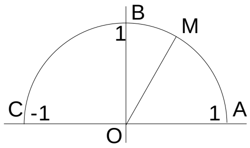
3) إشارة $\boxed{ax+by+c}$

من أجل دراسة إشارة $ax+by+c$ نقوم بإنشاء المستقيم $(D): ax+by+c=0$
المستقيم (D) يقسم المستوى (P) إلى نصفي مستوى (P_1) و (P_2).
إذا عوضنا x و y بإحداثيات أي نقطة من (P_1) فإننا نحصل على إشارة ثابتة.
وإذا عوضنا x و y بإحداثيات أي نقطة من (P_2) فإننا نحصل على إشارة عكس الإشارة السابقة. ولمعرفة هذه الإشارة نعوض x و y بإحداثيات نقطة من (P_1) أو (P_2) نأخذ عادة إحداثيات θ هي $x=0$ و $y=0$.

الحساب المثلثي

I- وحدات قياس الزوايا

1) الراديان



ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما

ونعتبر النصف دائرة U التي مركزها o وشعاعها 1.

ونعتبر النقط $A(1,0),B(0,1),C(-1,0)$

a) لتكن M نقطة من U. وليكن α طول القوس $[\widehat{AM}]$

*) نقول إن قياس الزاوية $[A\hat{O}M]$ هو α rad (α رديان)

*) ونقول أيضا إن α هو قياس أي قوس يحصر هذه الزاوية.

b) مثال:

لنحدد قياس الزوايا $A\hat{O}B$ و $A\hat{O}C$

نعلم أن محيط الدائرة هو $2\pi R = 2\pi.1 = 2\pi$

إذن محيط النصف دائرة هو $\frac{2\pi}{2}=\pi$

إذن طول القوس $[\widehat{AC}]$ هو π ومنه قياس الزاوية $[A\hat{O}C]$ هو π

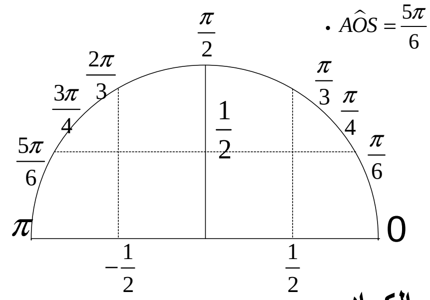
وطول القوس $[\widehat{AB}]$ هو $\frac{\pi}{2}$ إذن قياس الزاوية $[A\hat{O}C]$ هو πrad وطول القوس $[\widehat{AB}]$ هو $\frac{\pi}{2}$ إذن قياس الزاوية $[A\hat{O}B]$ هو $\frac{\pi}{2}$.

c) تمرين

أنشئ على النصف دائرة u النقط M,N,P,Q,R,S بحيث:

$A\hat{O}M=\frac{\pi}{6}$ ، $A\hat{O}N=\frac{\pi}{4}$ ، $A\hat{O}P=\frac{\pi}{3}$ ، $A\hat{O}Q=\frac{2\pi}{3}$

$A\hat{O}R=\frac{3\pi}{4}$ ، $A\hat{O}S=\frac{5\pi}{6}$.



2) الدرجة والكراد.

هناك وحدتان أخريين لقياس الزوايا هما الدرجة والكراد والعلاقة التي تربط بينهما هي: $\frac{x}{180}=\frac{y}{200}=\frac{z}{\pi}$

حيث x هو القياس بالدرجة.

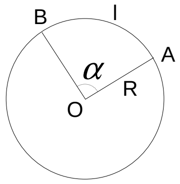
y هو القياس بالكراد.

z هو القياس بالرديان.

ملاحظة:

قياس الزاوية المستقيمية هي $\pi rad, 180^{o}, 200gra$.

3) مساحة قطاع دائري.



لتكن (C) دائرة مركزها o وشعاعها R و B,A نقطتين من هذه الدائرة.

*) الجزء المخدش يسمى قطاعا دائريا.

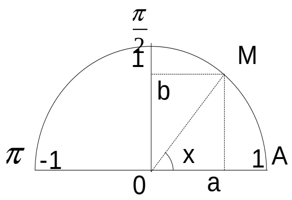
*) ليكن α قياس الزاوية $[A\hat{O}B]$ بالرديان

و l طول القوس $[\widehat{AB}]$ و S مساحة القطاع الدائري

لدينا $\boxed{l=\alpha R}$ و $\boxed{S=\frac{1}{2}\alpha R^2}$

II- النسب المثلثية لعدد حقيقي محصور بين 0 و π

1) تعريف:



ليكن x عدد حقيقي بحيث $0\le x\le\pi$ ولتكن M النقطة من U بحيث يكون طول القوس $[\widehat{AM}]$ هو x

يعني $A\hat{O}M = xrad$.

ليكن a أفصول M و b أرتوبها.

لدينا $\cos x = a$ $\quad \sin x = b$ $\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\left(x\ne\frac{\pi}{2}\right)$

2) خاصيات:

a)

*) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

*) $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ لكل $x\ne\frac{\pi}{2}$

*) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ لكل $x\ne\frac{\pi}{2}$

b) $-1\le\cos x\le1$ و $0\le\sin x\le 1$

c) *) $\sin x\ge0$ لكل $0\le x\le\pi$

*) إذا كان $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos x\ge0$

*) إذا كان $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ فإن $\cos x\ge 0$

*) إشارة $\tan x$ هي بالضبط إشارة $\cos x$

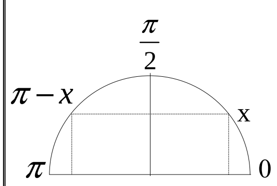
d)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cosx		+	0	−	

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
tanx		+	‖	−	

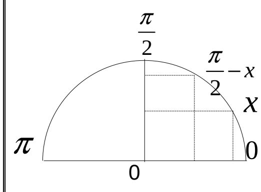
x	0		π
sinx	0	+	0

3) العلاقة بين النسب المثلثية للعددين x و $\pi - x$



$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad (a$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad (b$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan x \quad (c$$

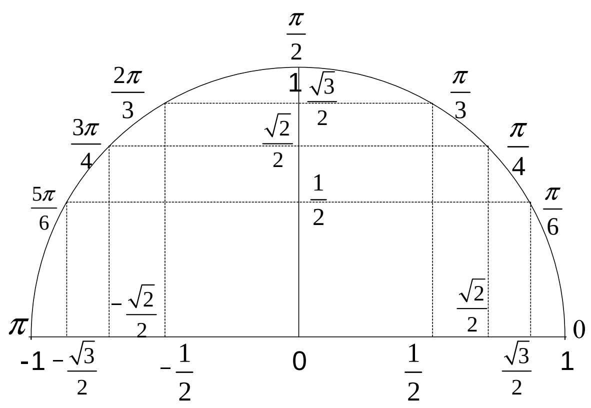
4) العلاقة بين النسب المثلثية للعددين x و $\frac{\pi}{2} - x$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad (a$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (b$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \quad (c$$

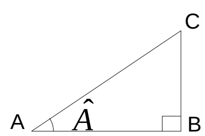
5) جدول النسب الإعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



6) العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية

a) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في B

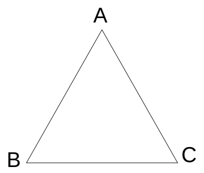


$$Cos\hat{A} = \frac{AB}{AC}$$
$$Sin\hat{A} = \frac{BC}{AC}$$
$$Tan\hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

b) علاقة $Sinus$ في المثلث

ليكن (ABC) مثلثا و

R شعاع الدائرة المحيطة به



لدينا

$$\frac{AB}{Sin\hat{C}} = \frac{AC}{Sin\hat{B}} = \frac{BC}{Sin\hat{A}} = 2R$$

الدوال العددية

I) مجموعة التعريف

1) تعريف مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة الأعداد التي لها صورة ونرمز لها بـ D_f

2) مجموعة تعريف الدالة : $f(x)=\dfrac{p(x)}{Q(x)}$

تكون $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $Q(x)\neq 0$. نقوم بحل المعادلة $Q(x)=0$ ولدينا $D_f=\mathbb{R}-\{$ حلول المعادلة $\}$

3) مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\sqrt{P(x)}$

تكون $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $P(x)\geq 0$ نقوم بدراسة إشارة $P(x)$ ولدينا D_f = (اتحاد الحالات التي يكون فيها $P(x)\geq 0$)

II) دالة زوجية دالة فردية .

1) من أجل دراسة زوجية دالة f نقوم بتحديد D_f ونتحقق أن لكل x من D_f لدينا $-x\in D_f$ ثم نقوم بحساب $f(-x)$.

*) إذا وجدنا $f(-x)=f(x)$ فإن f زوجية .

*) إذا وجدنا $f(-x)=-f(x)$ فإن f فردية .

ملاحظة a) يمكن لدالة أن لاتكون لا زوجية ولا فردية .

b) $(-x)^n=\begin{cases} x^n & n \text{ زوجي} \\ -x^n & n \text{ فردي} \end{cases}$ $\qquad |-x|=|x|$

2) تكون f **زوجية** إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

3) تكون f **فردية** إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثل بالنسبة لأصل المعلم .

III) تغيرات دالة أو رتابة دالة .

1) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I نعتبر x و y من I بحيث $x<y$ ونقارن $f(x)$ و $f(y)$.

*) إذا وجدنا $f(x)\leq f(y)$ فإن f تزايدية على I .

*) إذا وجدنا $f(x)<f(y)$ فإن f تزايدية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $f(x)\geq f(y)$ فإن f تناقصية على I .

*) إذا وجدنا $f(x)>f(y)$ فإن f تناقصية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $f(x)=f(y)$ فإن f ثابتة على I .

2) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I نعتبر x و y من I بحيث $x\neq y$ ونقوم بحساب معدل التغير $T(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ وندرس إشارته .

*) إذا وجدنا $T(x,y)\geq 0$ فإن f تزايدية على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)>0$ فإن f تزايدية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)\leq 0$ فإن f تناقصية على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)<0$ فإن f تناقصية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)=0$ فإن f ثابتة على I .

3) نقول إن f **رتيبة** على المجال I إذا كانت تزايدية أو تناقصية على I .

ملاحظة

a) f تزايدية على I يعني C_f تصاعدي في I عندما نتحرك من اليسار نحو اليمين

b) f تناقصية على I يعني C_f تنازلي في المجال I عندما نتحرك من اليسار نحو اليمين

c) f ثابتة على I يعني C_f عبارة عن مستقيم موازي لمحور الأفاصيل في المجال I .

مثال لدينا f تزايدية على كل من $[1,3]$ و $[5,9]$ وتناقصية على $[3,5]$ ونلخص هذا في جدول يسمى جدول التغيرات .

4) رتابة الدالة $f(x)=ax+b$

a) إذا كان $a>0$ فإن f تزايدية على $\mathbb{R}$

b) إذا كان $a>0$ فإن f تزايدية على $\mathbb{R}$

c) إذا كان $a=0$ فإن f ثابتة على $\mathbb{R}$

d) منحنى الدالة f يكون مستقيما .

5)رتابة دالة زوجية ودالة فردية

a) لتكن f دالة زوجية .

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على $-I$.

b) لتكن f دالة فردية .

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على $-I$.

c) إذا كان $I=[a,b]$ فإن $-I=[-b,-a]$.

IV) مطارف دالة .

1) إذا أردنا أن نبين أن الدالة f تقبل قيمة قصوية في x_0 ، نبين أن $f(x)\leq f(x_0)$ في مجال I يحتوي على x_0 وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$.

2) إذا أردنا أن نبين أن الدالة f تقبل قيمة دنوية في x_0 ، نبين أن $f(x) \geq f(x_0)$ في مجال I يحتوي على x_0 وتكون هذه القيمة الدنوية هي $f(x_0)$.

3) a) لكي نبين أن α قيمة قصوية للدالة f ، نبين أن $f(x) \leq \alpha$ في مجال I ونبحث عن x_0 من I بحيث $f(x_0)=\alpha$.

b) لكي نبين أن α قيمة دنوية للدالة f ، نبين أن $f(x) \geq \alpha$ في مجال I ونبحث عن x_0 من I بحيث $f(x_0)=\alpha$.

4) إذا كان جدول تغيرات f على شكل
فإن α قيمة قصوية للدالة f في x_0
و β قيمة دنوية للدالة f في x_1 .

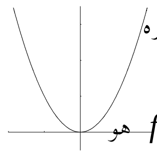
5) إذا كان منحنى الدالة f على شكل
فإن α قيمة قصوية للدالة f في x_0
و β قيمة دنوية للدالة f في x_1 .

V) الدوال المرجعية .

1) دراسة الدالة $f(x)=ax^2 \quad (a \neq 0)$

a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هو

x		0	
f	↘	0	↗



ويكون C_f شلجما رأسه أصل المعلم ومحوره محور الأراتيب تقعره موجه نحو الأعلى .

b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هو
ويكون C_f شلجما رأسه أصل المعلم ومحوره محور الأراتيب تقعره موجه نحو الأسفل .

2) دراسة الدالة $f(x)=\dfrac{a}{x} \quad (a \neq 0) \quad D_f=\mathbb{R}^*$

a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هو
ويكون C_f هذلولا مركزه أصل المعلم ومقارباه محوري المعلم .

b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هو
ويكون C_f هذلولا مركزه أصل المعلم ومقارباه محوري المعلم .

3) دراسة الدالة $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$

من أجل إنشاء C_f نحدد معادلة مختصرة لـ C_f. ولهذا نكتب $f(x)$ على شكل $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ ثم ننطلق من $y=f(x)$ يعني $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ يعني $y-\beta=a(x-\alpha)^2$ ثم نضع $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ إذن المعادلة تصبح $Y=aX^2$ في العلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ مع $\Omega(\alpha,\beta)$

4) دراسة الدالة $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

من أجل إنشاء C_f نحدد معادلة مختصرة لـ C_f. ولهذا نكتب $f(x)$ على شكل $f(x)=\beta+\dfrac{\gamma}{x-\alpha}$ ثم ننطلق من $y=f(x)$ يعني $y-\beta=\dfrac{\gamma}{x-\alpha}$ ثم نضع $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ إذن المعادلة تصبح $Y=\dfrac{\gamma}{X}$ في العلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ مع $\Omega(\alpha,\beta)$.

5) تقاطع منحنى مع محور ي المعلم .

a) تقاطع C_f مع محور الأراتيب هي النقطة $A(0,f(0))$.

b) *) لكي نحدد تقاطع المنحنى C_f مع محور الأفاصيل نقوم بحل المعادلة $f(x)=0$ وإذا كانت هذه الحلول هي x_1، x_2… فإن نقط التقاطع هي $A(x_1,0)$ ، $B(x_2,0)$ … .

*) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل .

6) تقاطع منحنيين .

*) لكي نحدد تقاطع المنحنى C_f و C_g نقوم بحل المعادلة $f(x)=g(x)$ وإذا كانت هذه الحلول هي x_1، x_2… فإن نقط التقاطع هي $A(x_1,f(x_1))$ ، $B(x_2,f(x_2))$ … .

*) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع C_g

7) دراسة الوضع النسبي لمنحنيين .

a) لكي ندرس الوضع النسبي للمنحنيين C_f و C_g نقوم بدراسة إشارة $f(x)-g(x)$

*) إذا كان $f(x)-g(x) \geq 0$ فإن C_f يوجد فوق C_g .

*) إذا كان $f(x)-g(x) \leq 0$ فإن C_f يوجد تحت C_g .

b) حلول المتراجحة $f(x) \leq g(x)$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g

8) حل المعادلة $(E): f(x)=m$

حلول المعادلة (E) هي أفاصيل نقط تقاطع C_f والمستقيم $(\Delta): y=m$

9) إنشاء منحنى الدالة $g(x)=|f(x)|$ **انطلاقا من** C_f .

إذا كان $f(x) \geq 0$ يعني C_f فوق محور الأفاصيل فإن $g(x)=f(x)$ إذن C_g منطبق مع C_f .

وإذا كان $f(x) \leq 0$ يعني C_f تحت محور الأفاصيل فإن $g(x)=-f(x)$ إذن C_g مماثل C_f بانسبة لمحور الأفاصيل.

وبالتالي C_g مكون من جزء C_f الموجود فوق محور الأفاصيل ومماثل جزء C_f الموجود تحت محور الأفاصيل بالنسبة لمحور الأفاصيل .

10) إنشاء منحنى الدالة $g(x)=f(|x|)$ **انطلاقا من** C_f .

لدينا $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ إذن g دالة زوجية وبالتالي منحناها متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب . ولدينا لكل $x \in [0,+\infty[$: $|x|=x$

إذن $g(x)=f(x)$ ومنه C_g منطبق مع C_f .

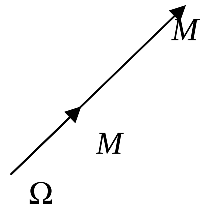
وبالتالي C_g مكون من جزء C_f الموجود في $[0,+\infty[$ ومماثله بالنسبة لمحور الأراتيب .

التحويــلات الإعتيـاديـــة

I) التحــــــــاكـــــي

A) تعريف

لتكن Ω نقطة و k عدد حقيقي غير منعدم . التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هو التطبيق الذي نرمز له بـ $h(\Omega,k)$ والذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث " $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ " .



B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي بتحاكي h إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k\neq 1$ بحيث $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيــات

ليكن h تحاكي مركزه Ω ونسبته k .

1) $h(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

2) إذا كان $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

3) a) $h(\Omega)=\Omega$ (نقول إن Ω صامدة بالتحاكي h)

b) $h(M)=M$ تكافئ $M=\Omega$

(هذا يعني أن Ω هي النقطة الوحيدة الصامدة بالتحاكي h)

4) إذا كان $h(M)=M'$ فإن Ω و M و M' مستقيمية .

5) a) التحاكي يحافظ على المرجح يعني :

إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G' مرجح $\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$

b) التحاكي يحافظ على المنتصف يعني :

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن I' مرجح $[A'B']$

c) التحاكي يحافظ على معامل استقامية متجهتين يعني :

إذا كان $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$

d) التحاكي يحافظ على استقامية 3 نقط يعني :

إذا كانت النقط A و B و C مستقيمية فإن صورها A' و B' و C' مستقيمية .

6) التحاكي لا يحافظ على المسافة لكن لدينا .

إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فإن $A'B'=|k|AB$

7) التحاكي يحافظ عل قياس الزوايا الهندسية يعني $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$

8) a) صورة القطعة $[AB]$ بالتحاكي h هي القطعة $[A'B']$

b) صورة المستقيم (AB) بالتحاكي h هي المستقيم $(A'B')$.

c) صورة مستقيم (D) هو مستقيم (D') يوازي (D) .

d) من أجل تحديد صورة مستقيم (D) بـ h يكفي تحديد صورة نقطتين A و B من (D) وسيكون $h(D)=(A'B')$ أو تحديد صورة نقطة واحدة A وسيكون $h(D)$ هو المستقيم المار من A' والموازي للمستقيم (D) . ($h(A)=A'$)

e) إذا كان (D) مستقيما مارا من Ω فإن $h(D)=(D)$.

(نقول إن (D) صامد إجماليا) .

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتحاكي h هي الدائرة $C'(O',|k|r)$.

مع $O'=h(O)$.

10) a) ليكن E و F جزئين من المستوى .

$h(E\cap F)=h(E)\cap h(F)$

b) إذا كانت $M\in E\cap F$ فإن $h(M)\in h(E)\cap h(F)$

11) التحاكي يحافظ على التعامد و التوازي يعني :

صورة مستقيمين متعامدين هما مستقيمان متعامدان

و صورة مستقيمين متوازيين هما مستقيمان متوازيان .

12) الصيغة التحليلية لتحاكي .

نفترض أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) مثال 1 : ليكن h تحاكي مركزه $\Omega(1,2)$ ونسبته $k=2$.

من أجل تحديد الصيغة التحليلية للتحاكي h نتبع مايلي :

ليكن $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ بحيث $h(M)=M'$ ونقوم بحساب x' و y' بدلالة x و y .

لدينا $h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=2\overrightarrow{\Omega M}$

ولدينا $\overrightarrow{\Omega M'}(x'-1,y'-2)$ و $2\overrightarrow{\Omega M}(2x-2,2y-4)$

إذن $\begin{cases} x'-1=2x-2 \\ y'-2=2y-4 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y-2 \end{cases}$

إذن الصيغة التحليلية لـ h هي : $h:\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y-2 \end{cases}$

ملاحظة : إذا أردنا تحديد صورة نقطة A بـ h نعوض x و y بإحداثيات A ونحصل على إحداثيات $h(A)$.

b) مثال 2 .

نعتبر التطبيق f الذي صيغته التحليلية هي : $f:\begin{cases} x'=3x+2 \\ y'=3y-4 \end{cases}$

من أجل تحديد طبعة f نبحث عن النقط الصامدة بحل النظمة $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$

يعني $\begin{cases} 3x+2=x \\ 3y-4=y \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ إذن f تقبل نقطة صامدة وحيدة هي $\Omega(-1,2)$.

ثم نأخذ $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ بحيث $h(M)=M'$

لدينا إذن $\begin{cases} x'=3x+2 \\ y'=3y-4 \end{cases}$. ولدينا $\overrightarrow{\Omega M'}(x+1,y'-2)$ يعني

$\overrightarrow{\Omega M'}(3x+2+1,3y-4-2)$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}(3x+3,3y-6)$

ولدينا $3\overrightarrow{\Omega M}(3x+3,3y-6)$ إذن $\overrightarrow{\Omega M'}=3\overrightarrow{\Omega M}$

وبالتالي f تحاكي مركزه $\Omega(-1,2)$ ونسبته $k=3$.

13) بعض التقنيات .

a) لكي نحدد مركز تحاكي h . نسميه Ω نبحث عن نقطتين A و B وصورتاهما A' و B'. لدينا $h(A)=A'$ إذن Ω و A و A' مستقيمية ومنه $\Omega\in(AA')$. ولدينا $h(B)=B'$ إذن Ω و B و B' مستقيمية ومنه $\Omega\in(BB')$ وبالتالي Ω هي نقطة تقاطع (AA') و (BB')

b) من أجل تحديد نسبة تحاكي h نسميه k و هناك إمكانيتان :

*) نبحث عن المركز Ω ونقطة A وصورتها A' .

لدينا $h(A)=A'$ إذن $\overrightarrow{\Omega A'}=k\overrightarrow{\Omega A}$ ، ونقوم بحساب $\overrightarrow{\Omega A'}$ بدلالة $\overrightarrow{\Omega A}$ نجد مثلا $\overrightarrow{\Omega A'}=\alpha\overrightarrow{\Omega A}$ ونستنتج أن $k=\alpha$ أو نمر إلى القياس الجبري $\overline{\Omega A'}=k\overline{\Omega M}$ يعني $k=\dfrac{\overline{\Omega A'}}{\overline{\Omega M}}$.

*) نبحث عن نقطتين A و B وصورتاهما A' و B' لدينا $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$ ونتبع نفس الطريقة السابقة .

c) إذا أردنا أن نبين أن I' منتصف $[A'B']$ نبحث عن I و A و B بحيث $h(A)=A'$ و$h(B)=B'$ و $h(I)=I'$ ونستعمل الخاصية (5b . لدينا I منتصف $[AB]$ إذن I' منتصف $[A'B']$.

d) لكي نبين أن Ω وI و J مستقيمية يكفي أن نبين أن $h_{(\Omega,k)}(I)=J$.

e) لكي نحدد صورة نقطة M هناك عدة طرق من بينها :

*) نستعمل التعريف $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

*) إذا كان M منتصف قطعة $[AB]$ نستعمل (5b) .

*) إذا كانت $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$ نستعمل (5c) .

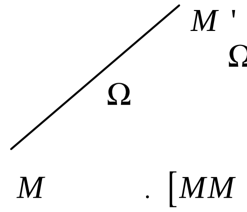
*) إذا كانت M تقاطع جزئين نستعمل (10) .

(لدينا $M\in E\cap F$ إذن $h(M)\in h(E)\cap h(F)$)

*) إذا كانت لدينا الصيغة التحليلية نستعملها .

II) التمـــاثل المركــزي

A) تعريف .



لتكن Ω نقطة التماثل المركزي الذي مركزه Ω هو التطبيق الذي نرمز له بـ S_Ω و الذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث " $\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$ " يعني Ω منتصف $[MM']$.

B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي بتماثل مركزي S_Ω إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للتماثل المركزي مع تعويض k بـ -1 ، ماعدا (6) و (9) حيث تصبح .

6) التماثل المركزي يحافظ على المسافة يعني . إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فإن $A'B'=AB$

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتماثل المركزي S_Ω هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=S_\Omega(O)$.

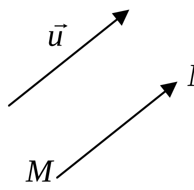
ملاحظة

a) $S_\Omega(M)=M'$ تكافئ Ω منتصف $[MM']$.

b) إذا كان $S_\Omega(M)=M'$ و $S_\Omega(N)=N'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$.

III) الإزاحـــــة

A) تعريف .



لتكن $\vec u$ متجهة . الإزاحة التي متجهتها $\vec u$ هي التطبيق الذي نرمز له بـ $t_{\vec u}$ و الذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث " $\overrightarrow{MM'}=\vec u$ "

B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي بالإزاحة $t_{\vec u}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للإزاحة ، ماعدا (1) و (2) و (3) و(4) و (6) و (8cde) و (9) و (12) و (13abd) ولدينا :

6) الإزاحة تحافظ على المسافة .

8e) إذا كان (D) يوازي حامل $\vec u$ (يعني $\vec u$ موجهة لـ (D)) فإن $t_{\vec u}(D)=(D)$.

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالإزاحة $t_{\vec u}$ هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=t_{\vec u}(O)$.

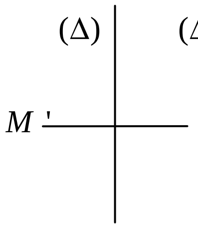
ملاحظة

a) $t_{\vec u}(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec u$.

b) إذا كان $t_{\vec u}(M)=M'$ و $t_{\vec u}(N)=N'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

III) التمــاثل المحــوري

A) تعريف .



لتكن (Δ) مستقيما التماثل المحوري الذي محوره (Δ) هو التطبيق الذي نرمز له بـ $S_{(\Delta)}$ و الذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث يكون (Δ) واسط القطعة $[MM']$.

B) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للتماثل المحوري ، ماعدا (1) و (2) و (3) و(4) و (5 و (6) و (8e) و (9) و (13abd) ولدينا :

6) التماثل المحوري يحافظ على المسافة .

8e) *) إذا كان $(D)\perp(\Delta)$ فإن $t_{(\Delta)}(D)=(D)$.

*) إذا كان $(D)//(\Delta)$ فإن $t_{(\Delta)}(D)//(D)$.

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتماثل المحوري $S_{(\Delta)}$ هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=S_{(\Delta)}(O)$.

ملاحظة

a) $S_{(\Delta)}(M)=M'$ تكافئ (Δ) واسط القطعة $[MM']$.

b) إذا كان $S_{(\Delta)}(M)=M$ تكافئ $M\in(\Delta)$ المستقيم (Δ) صامد نقطة بنقطة .

الجداء السلمي

I) تعريف

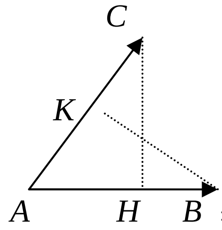
1) لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين .

ليكن H المسقط العمودي لـ C على (AB)

و K المسقط العمودي لـ B على (AC)

نسمي الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ والمعرف بما يلي :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH}$$
$$= \overline{AC}.\overline{AK}$$
$$= AB.AC.\cos(B\hat{A}C)$$

2) إذا كانت إحدى المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AC}$ فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

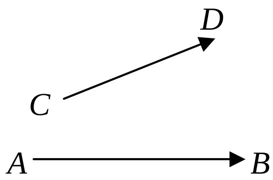
II) خاصيات

1) لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين غير منعدمتين .

ليكن C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

ليكن D' المسقط العمودي لـ D على (AB)

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{C'D'}$



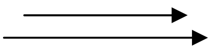
ملاحظة :

من اجل حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ نسقط إحدى المتجهتين على الأخرى ونمر من المتجهات إلى القياس الجبري ،مع الإحتفاظ بالنقط التي أسقطنا عليها ، ونعوض النقط التي أسقطناها بمساقطها .

2) a) نرمز لـ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\overrightarrow{AB}^2$ ويسمى المربع السلمي .

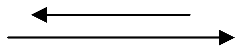
b) لدينا $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

3) a) إذا كانت التجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى فإن :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD$$

b) إذا كانت التجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين ولهما منحيان متعاكسان فإن :

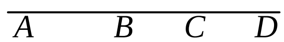


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB.CD$$

4) a) نقول إن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان كل من المستقيمان (AB) و (CD) متعامدين . ونكتب $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

b) لدينا $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ تكافئ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

5) إذا كانت النقط A و B و C و D مستقيمية فإن

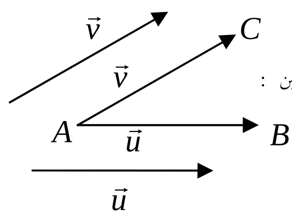


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{CD}$$

6) a) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين ولتكن A و B و C 3 نقط بحيث

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



b) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين :

لدينا $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

c) $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

e) إذا كانت التجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ولهما منحيان متعاكسان فإن :

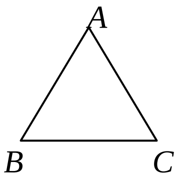
$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

f) $\vec{u} \perp \vec{v}$ تكافئ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

g)
*) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
*) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
*) $\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{w}$
*) $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
*) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}$
*) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}.\vec{v}$
*) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$

III) تطبيقات الجداء السلمي

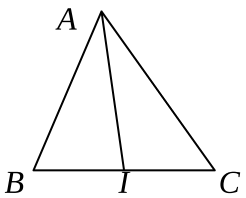
1) علاقة الكاشي .



ليكن (ABC) مثلثا لدينا :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\hat{A}$$
$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\hat{B}$$
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos\hat{C}$$

2) مبرهنة المتوسط



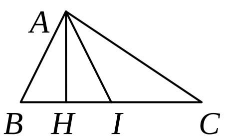
ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف القطعة $[AB]$

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

أو $AI^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2})$

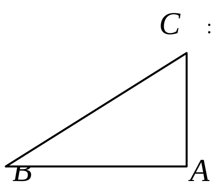
3) العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية .

a) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في A و A' منتصف $[BC]$ و H المسقط العمودي لـ A على (BC) . لدينا :



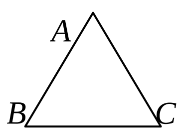
*) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (علاقة فتاغورس)
*) $BA^2 = \overline{BH}.\overline{BC} = BH.BC$
*) $CA^2 = \overline{CH}.\overline{CB} = CH.CB$
*) $AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC} = HB.HC$
*) $AA' = \frac{1}{2}BC$

b) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في A . لدينا :



$$\cos\hat{B} = \frac{BA}{BC} \qquad \cos\hat{B} = \frac{AC}{BC}$$
$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

c) ليكن (ABC) مثلثا . لدينا :



$$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{AB}$$

المستقيمات والمستويات في الفضاء

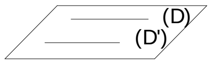
I) التـــــــوازي

I) الأوضاع النسبية لمستقيمين.

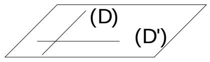
ليكن (D) و (D') مستقيمين في الفضاء. لدينا أربع حالات.

*) (D) و (D') منطبقان

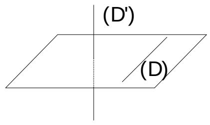
*) (D) و (D') متوازيان قطعا.



*) (D) و (D') متقاطعان في نقطة.



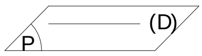
*) (D) و (D') غير متوازيين وغير منطبقين وغير متقاطعين ونقول في هذه الحالة إنهما غير مستوائيين.



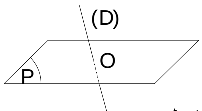
II) الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى

ليكن (D) مستقيما و (P) مستوى. لدينا ثلاث حالات

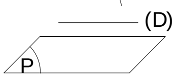
*) المستقيم (D) ضمن المستوى (P)



*) المستقيم (D) يقطع (P) في نقطة θ



*) المستقيم (D) والمستوى (P) منفصلين ونقول في هذه الحالة إن (D) و (P) متوزيان قطعا.

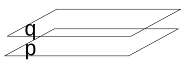


III) الأوضاع النسبية لمستويين.

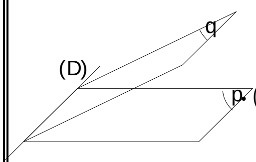
ليكن (P) و (Q) مستويين. لدينا ثلاث حالات

*) (P) و (Q) منطبقان.

*) (P) و (Q) منفصلان ونقول إنهما متوازيان قطعا.



*) (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (D)



IV) خاصيات

1) لكي نبين أن المستقيم (D) يوازي المستوى (P) يكفي أن نبين أن (D) يوازي مستقيما (D') ضمن (P).

2) لكي نبين أن مستوى (P) يوازي مستوى (Q) يكفي أن نبين أن

*) مستقيمان متقاطعان ضمن (P) يوازيان Q

أو *) مستقيمان متقاطعان ضمن (P) يوازيان مستقيمين متقاطعين ضمن (Q).

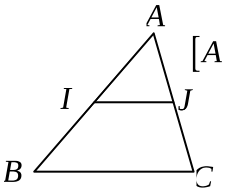
3) لكي نبين أن مستقيمين متوازيين هناك عدة طرق من بينها:

a) الأشكال الهندسية (متوازي الأضلاع – مربع – شبه منحرف...)

b) خاصية المنتصف.

ليكن (ABC) و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$

لدينا $(IJ)\parallel(BC)$.



c) مبرهنة السقف وهي كالتالي:

*) إذا كان: $\begin{cases}(P)\cap(Q)=(\Delta)\\(\Delta')\subset(P)\\(\Delta'')\subset(Q)\\(\Delta')\parallel(\Delta'')\end{cases}$ فإن $(\Delta')\parallel(\Delta'')\parallel(\Delta)$

*) إذا كان: $\begin{cases}(P)\cap(Q)=(\Delta)\\(\Delta')\subset(P)\\(\Delta')//(Q)\end{cases}$ فإن $(\Delta')\parallel(\Delta)$

*) إذا كان: $\begin{cases}(P)\cap(Q)=(\Delta)\\(\Delta')//(P)\\(\Delta')//(Q)\end{cases}$ فإن $(\Delta')\parallel(\Delta)$

d) التعدي

إذا كان $\begin{cases}(\Delta)//(\Delta')\\(\Delta')//(\Delta'')\end{cases}$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

e) إذا كان $\begin{cases}(P)//(Q)\\(H)\cap(P)=(\Delta)\\(H)\cap(Q)=(\Delta')\end{cases}$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

4) لكي نبين أن مستقيما (D) يوجد ضمن مستوى (P) يكفي أن نبين أن:

*) نقطتين A و B من (D) تنتميان إلى (P).

أو *) $(D)//(P)$ ولهما نقطة مشتركة.

5) لكي نبين أن مستقيما (D) يقطع مستوى (P) يكفي أن نبين أن (D) و (P) لهما نقطة مشتركة A و $D\not\subset(P)$.

وللبحث عن نقطة مشتركة بين (D) و (P) نبحث عن مستقيم (D') ضمن (P) يقطع (D).

6) لكي نبين أن مستويين (P) و (Q) متقاطعين يكفي أن نبين أن (P) و (Q) لهما نقطة مشتركة و $(P)\neq(Q)$. وللحصول على مستقيم التقاطع:

*) نبحث عن نقطتين مشتركتين A و B بين (P) و (Q) وسيكون تقاطع (P) و (Q) هو المستقيم (AB).

أو *) نبحث عن نقطة مشتركة A ومستقيمين (Δ') و (Δ'') بحيث $(\Delta')\subset(P)$ و $(\Delta'')\subset Q$ و $(\Delta')//(\Delta'')$.

وسيكون تقاطع (P) و (Q) هو المستقيم (Δ) المار من A والموازي ل (Δ') و (Δ'').

7) لكي نبين أن ثلاث نقط I و J و K مستقيمة يكفي أن نبين أنها مشتركة بين مستويين مختلفين (P) و (Q) وبالتالي ستنتمي إلى مستقيم تقاطعهما ومنه فهي مستقيمة.

II) التعـــــامد

1) a) إذا أردنا أن نبين أن مستقيما (Δ) عمودي على مستوى (P) يكفي أن نبين أن (Δ) عمودي على مستقيمين متقاطعين ضمن (P).

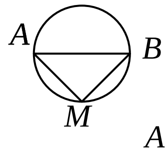
b) إذا كان المستقيم (Δ) عموديا على المستوى (P) فإن (Δ) يكون عموديا على أي مستقيم ضمن (P).

2) لكي نبين أن مستوى (P) عمودي على مستوى (Q) يكفي أن نبين أن مستقيما (Δ) يوجد ضمن (P) وعمودي على (Q).

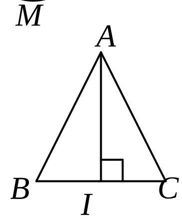
3) لكي نبين أن مستقيمين متعامدان هناك عدة طرق من بينها:

a) الأشكال الهندسية

(مربع – مستطيل – قطرا مربع – قطرا معين – مثلث قائم الزاوية...)



b) لتكن (ℓ) دائرة أحد أقطارها $[AB]$
و $M \in (\ell)$
لدينا $(AM) \perp (BM)$



c) ليكن (ABC) مثلث متساوي الساقين في A و I منتصف $[BC]$
لدينا $(AI) \perp (BC)$.

d) إذا كان $\begin{cases}(\Delta) \perp (\Delta') \\ (\Delta') \perp (\Delta'')\end{cases}$ فإن $(\Delta) \perp (\Delta')$

e) إذا كان $\begin{cases}(\Delta) \perp (P) \\ (\Delta') \subset (P)\end{cases}$ فإن $(\Delta) \perp (\Delta')$

ملاحظة:

إذا أردنا أن نبين أن المستقيم (Δ) عمودي على المستقيم (Δ') نبحث عن مستوى (P) يتضمن (Δ') ويكون (Δ) عمودي عليه.

4) لتكن A و B نقطتين.
مجموعة النقط المتساوية المسافة عن A و B تكون مستوى يسمى المستوى الواسط للقطعة $[AB]$ ويكون هو المستوى المار من منتصف $[AB]$ والعمودي على $[AB]$.

5) ليكن (Δ) مستقيم و (P) و (Q) مستويين
إذا كان $\begin{cases}(\Delta) \perp (P) \\ (P) /\!/ (Q)\end{cases}$ فإن $(\Delta) \perp (Q)$

6) ليكن (Δ) و (Δ') مستقيمين و (P) مستوى
إذا كان $\begin{cases}(\Delta) /\!/ (\Delta') \\ (\Delta) \perp (P)\end{cases}$ فإن $(\Delta') \perp (P)$