تمرين رقم 01:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right), f(x)=\frac{1}{x}+\ln x .$$

1)- بين أن : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

2)- بين أن : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه ينبغي تحديده .

3)- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ و أن : $\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right), f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$

ثم ضع جدول تغيرات f .

4)- بين أن : $\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right), f''(x)=\frac{2-x}{x^3}$ ، ثم ادرس تقعر المنحنى (C_f) و حدد إحداثيتي نقطة انعطافه .

5)- أ- بين أن الدالة : $g : x \mapsto f(x)-x$ تزايدية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$.

ب- استنتج الموضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$ على كل مجال من المجالين $\left]1,+\infty\right[$ و $\left]0,1\right[$.

6)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7)- لتكن h قصور الدالة f على المجال $I=\left]0,1\right]$.

أ- بين أن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على المجال $J=\left[1,+\infty\right[$.

ب- بين أن الدالة h^{-1} قابلة للاشتقاق في العدد $e-1$ ، ثم احسب $\left(h^{-1}\right)'(e-1)$.

ج- ارسم المنحنى $(C_{h^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (استعمل لونا مغاير للون المنحنى (C_f)) .

8)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0=e \text{ و } \left(\forall n\in\mathbb{N}\right), u_{n+1}=f(u_n).$$

أ- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right), u_n>1$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (استعمل نتيجة السؤال 5) ب-) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

Fin du sujet