



تذكير لعموميات حول المتتاليات العددية و المتتاليات الحسابية و الهندسية

i. متتالية مكبورة – مصغورة – محدودة : (تذكير)

01. تعريف :

 $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية. M و m عددين من \mathbb{R} .

- $(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة ب M يكافئ $\forall n \geq n_0; u_n \leq M$. (أو $\forall n \geq n_0; u_n < M$)
- $(u_n)_{n \geq n_0}$ مصغورة ب m يكافئ $\forall n \geq n_0; m \leq u_n$. (أو $\forall n \geq n_0; m < u_n$)
- $(u_n)_{n \geq n_0}$ محدودة يكافئ إن u_n مكبورة ومحدودة .

02. مثال : نعتبر المتتالية العددية : $(w_n = \frac{n+3}{n+4})_{n \in \mathbb{N}}$. بين أن : w_n مكبورة ثم مصغورة على \mathbb{N} .

ii. رتبة متتالية :

01. تعريف :

 $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية.

- 1 u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n, m \in I; n < m \Rightarrow u_n \leq u_m$.
- 2 u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n, m \in I; n < m \Rightarrow u_n < u_m$.
- 3 u_n متتالية ثابتة على I يكافئ $\forall n, m \in I; u_n = u_m$.

02. خاصية :

 $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية.

- u_n متتالية تزايدية على I يكافئ : $\forall n \in I; u_n \leq u_{n+1}$.
- u_n متتالية تناقصية قطعا على I يكافئ : $\forall n \in I; u_n \geq u_{n+1}$.
- u_n متتالية ثابتة على I يكافئ : $\forall n \in I; u_{n+1} = u_n$.

03. مثال :

نأخذ $w_1 = 1$ و $w_{n+1} = 1 + w_n$. أدرس رتبة w_n .

iii. المتتالية الحسابية :

01. تعريف :

 $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية .نقول إن u_n متتالية حسابية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم r وحدها الأول u_{n_0} يعني إن $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$.02. مثال : نعتبر المتتالية العددية الآتية : $u_n = 2n + 3; n \geq 0$. بين أن u_n متتالية حسابية وحدد عناصرها المميزة .

iv. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

 $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . لدينا : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

02. خاصية :

 $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r إذا وفقط إذا كان $\forall n, p \geq n_0 : u_n = u_p + (n - p)r$. (مع n و p من \mathbb{N})



03. أمثلة :

- مثال 1 : u_n متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها u_7 . أحسب u_{2007} .
- مثال 2 : متتالية حسابية أساسها r وحدها $u_0 = 5$. أحسب $u_{100} = -45$. حدد r و u_n بدلالة n .

v. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . $n_0 \leq p < n$. لدينا :

$$S_n = \sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$$

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

02. ملاحظة :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n+1 \text{ من الحدود}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n \text{ من الحدود}$$

$$S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n-1 \text{ من الحدود}$$

vi. متتالية هندسية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

نقول إن u_n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q وحدها الأول u_{n_0} يعني ان $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$

vii. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

$$\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)} \quad \text{لدينا } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ متتالية عددية هندسية أساسها } q \text{ وحدها الأول } u_{n_0}.$$

02. خاصية :

$$(u_n)_{n \geq n_0} \text{ متتالية عددية هندسية أساسها } q \text{ إذا وفقط إذا كان } \forall n, p \geq n_0 : u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ (مع } n \text{ و } p \text{ من } \mathbb{N} \text{)}$$

03. تمرين :

viii. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} . $n_0 \leq p < n$.

$$(1) \text{ لدينا : مع } q \neq 1 : S = \sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p$$

$$(2) \text{ لدينا : مع } q = 1 : S = \sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p (n - p + 1)$$



ix. المعدل الحسابي – المعدل الهندسي : ثلاثة حدود متتابعة .

01. المعدل الحسابي.

لدينا : $u_i = a$ و $u_{i+1} = b$ و $u_{i+2} = c$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r .
خلاصة : $a + b = 2c$ وهي تسمى المعدل الحسابي .
لدينا : $u_i = u_{i+1} - r$ و $u_{i+2} = u_{i+1} + r$ ومنه : $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$.

02. المعدل الهندسي : إذا كانت u_n هندسية بالنفس الطريقة نحصل على : $a \times c = b^2$ تسمى المعدل الهندسي.

نهاية متتالية

A. نهاية منتهية لمتتالية

01. نشاط:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_n = \frac{1}{n} + 2$; $n \geq 1$

على المستقيم العددي نأخذ المجال المفتوح $\left] 2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right]$ الذي مركزه 2 . وحدة القياس 2cm .

- مثل المجال على المستقيم العددي.
- أحسب بعض الحدود و مثلها على المستقيم العددي.
- ماذا تلاحظ ؟
- إذا كانت n تؤول إلى $+\infty$. ماذا يمكن أن نقول عن قيم u_n ؟

02. مفردات و رموز :

■ نقول : توجد رتبة p ابتداء من الرتبة $p = 5$ لدينا لكل n من \mathbb{N} حيث $n \geq p$ فإن $u_n \in \left] 2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right]$

نعبّر عن ذلك : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n \in \left] 2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right]$

■ نقول إن نهاية المتتالية u_n هي 2 عندما تؤول n إلى $+\infty$

■ نكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

03. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي العدد الحقيقي l إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

أو أيضا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - l| < \varepsilon$

04. ملاحظة:

- إذا كان للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ نهاية فهذه النهاية وحيدة .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و $(i \in \mathbb{N}^*)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^i} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
- $(u_n = (-1)^n)$ (العكس غير صحيح مثال $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$)

05. مثال:

لنعتبر المتتالية $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$

نبين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 - 3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

B نهاية اللا منتهية لمتتالية:

01. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

- نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي $+\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]A, +\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- أو أيضا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n > A$
- نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي $-\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty, A[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- أو أيضا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n < -A$

02. ملاحظة:

- إذا كان $k > 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} ku_n = +\infty$
- إذا كان $k < 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} ku_n = -\infty$

03. مثال:

$u_n = n^3$. نبين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

لكل $A > 0$ نبحث هل يوجد p من \mathbb{N} لكل n يحقق $n \geq p$ يعطينا $u_n > A$.

ليكن $A > 0$ حيث $u_n > A$ أي $n^3 > A$ ومنه $n > \sqrt[3]{A}$.



وفي هذه الحالة :

نقول لكل $A > 0$ يوجد p حيث $p = E(\sqrt[n]{A}) + 1$ لكل n يحقق $n \geq p$ يعطينا $u_n > A$ أو باختصار: نقول لكل $A > 0$ يكفي أن نأخذ

$$p = E(\sqrt[n]{A}) + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$
 خلاصة :

تقارب متتالية عددية

01. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية .

- إذا كانت نهاية المتتالية u_n منتهية نقول إن المتتالية متقاربة.
- إذا كانت نهاية المتتالية u_n غير منتهية أو u_n ليس لها نهاية نقول إن المتتالية u_n متباعدة.

02. مثال:

- $u_n = \frac{1}{n}$ لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ إذن u_n متقاربة.
- $u_n = n^4$ لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ إذن u_n متباعدة.
- $u_n = (-1)^n$ ليس لها نهاية: u_n هي متباعدة.

العمليات على نهايات المتتاليات- المتتاليات والترتيب

01. العمليات:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتاليتين عدديتين .

- العمليات على المتتاليات هي نفس العمليات على الدوال العددية.

$$(u_n)_{n \geq n_0} + (v_n)_{n \geq n_0} = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}$$
 مثال:

- العمليات على نهايات الدوال العددية هي نفس النهايات على الدوال.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$$
 مثال : أ-

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$$
 مثال : ب-

02. الترتيب:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$ متتاليات عدديتين حيث $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, v_n \leq u_n \leq w_n$

- إذا كان $u_n > 0$ فإن $\ell > 0$.
- إذا كان (u_n) و (v_n) متقاربين (أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$) و $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, v_n \leq u_n$ فإن $\ell' \leq \ell$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \ell = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

03. تطبيق:



(1) أحسب نهاية المتتالية التالية: $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

(2) أحسب نهاية المتتالية التالية: $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n}; n \geq 1$

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} = +\infty$

مصاديق التقارب

01. نشاط:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$ متتاليات عددية حيث ابتداء من الرتبة p (مع $p \geq n_0$). لدينا ما يلي:

- ماذا يمكننا أن نستنتج؟ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ و $v_n \leq u_n \leq w_n$
- ماذا يمكننا أن نستنتج؟ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ و $v_n \geq \alpha \cdot u_n$ (مع $\alpha > 0$)
- ماذا يمكننا أن نستنتج؟ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ و $v_n \leq \alpha \cdot u_n$ (مع $\alpha > 0$)
- ماذا يمكننا أن نستنتج؟ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ و $|v_n - \ell| \leq \alpha \cdot u_n$ (مع $\alpha > 0$)

02. مصاديق:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$ متتاليات عددية.

إذا كان ابتداء من الرتبة p ، لكل n من \mathbb{N} حيث $n \geq p$ يتحقق ما يلي:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ و $v_n \leq u_n \leq w_n$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ و $v_n \geq \alpha \cdot u_n$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ و $v_n \leq \alpha \cdot u_n$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ و $|v_n - \ell| \leq \alpha \cdot u_n$

مع $\alpha > 0$ و p عدد صحيح طبيعي معلوم ($p \geq n_0$) و $\ell \in \mathbb{R}$.

03. أمثلة:

1. مثال للمصادق 1:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5; n > 0$

نبين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

لدينا: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ إذن: $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

ومنه: $-\frac{1}{n} - 5 \leq \frac{(-1)^n}{n} - 5 \leq \frac{1}{n} - 5$



و بالتالي : $-\frac{1}{n} - 5 \leq v_n \leq \frac{1}{n} - 5$

و لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$

ومنه : حسب أحد مصاديق التقارب نحصل : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

2. مثال للمصادق 2:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $u_n = 2n + \cos(n); n \geq 0$ أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا : $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos(n) \leq 2n + 1$

ومنه : $2n - 1 \leq u_n \leq 2n + 1$ أي $2n - 1 \leq u_n \leq 2n + 1$

ونعلم بأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$ إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$

3. مثال للمصادق 4:

. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ نبين أن : $v_n = \frac{\cos n}{n}; n \geq 1$

لدينا : (لأن $|\cos n| \leq 1$) $|v_n - 0| = \left| \frac{\cos n}{n} \right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}$

ومنه : $|v_n - 0| \leq \frac{1}{n}$ و بما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

تمرين : أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

04. خاصية :

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

05. مثال :

لنعتبر المتتالية : $u_n = \frac{1}{n^3} + 7; n \geq 1$

(1) نبين أن : u_n مصغورة :

لدينا : $n \geq 1$ إذن $\frac{1}{n}$ موجب قطعاً أي $u_n > 0$ ومنه $0 < u_n$ وبالتالي u_n مصغورة ب 0. خلاصة : u_n مصغورة ب 0

(2) نبين أن : u_n تناقصية :

لكل $n \geq 1$ لدينا : $(n+1)^3 \geq n^3 \Leftrightarrow n+1 \geq n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

ومنه : u_n تناقصية. خلاصة : حسب ما سبق u_n مصغورة ب 0 و تناقصية إذن هي متتالية متقاربة.



06. ملحوظة:

- كل متتالية تزايدية و سالبة (أي مكبورة ب 0) هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و موجبة (أي مصغورة ب 0) هي متقاربة.

متتاليات خاصة

A. متتالية على شكل: $u_n = a^n$ مع $a \in \mathbb{R}$.

01. خاصية:

- إذا كان $a > 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$.
- إذا كان $a = 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$.
- إذا كان $-1 < a < 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.
- إذا كان $a \leq -1$ فإن: a^n ليس لها نهاية.

02. أمثلة:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$ لأن $a = 3 > 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$.
- $(-1)^n$ ليس لها نهاية.
- تمرين: أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n}$.

B. متتالية على شكل: $u_n = n^r$ مع $r \in \mathbb{Q}^*$.

01. خاصية:

- إذا كان $r < 0$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = 0$.
- إذا كان $r > 0$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = +\infty$.

02. تمرين تطبيقي :

- لنعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[3]{n^3}; n \geq 1$ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (لاحظ $u_n = \sqrt[3]{n^3} = n^{\frac{3}{3}}$)
- لنعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[3]{n^{-3}}; n \geq 1$ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (لاحظ $u_n = \sqrt[3]{n^{-3}} = n^{-\frac{3}{3}}$)

C. متتالية $(v_n)_{n \geq n_0}$ على شكل: $v_n = f(u_n)$ 01. نشاط: نعتبر الدالة: $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$ و المتتالية $\left(u_n = \frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$.1. لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة ب: $v_n = f(u_n)$ أكتب v_n بدلالة n .



(2) أ - أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ب - أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

(3) إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ استنتج علاقة بين $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و f و l . ثم أعط الخاصية :

02. خاصية :

إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية و f دالة متصلة في l و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$) فإن المتتالية $(v_n)_{n \geq n_0}$ المعرفة بـ $v_n = f(u_n)$ هي متقاربة و نهايتها تحقق ما يلي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l)$.

03. تمرين :

نضع $u_n = \frac{\cos n}{n}; n \geq 1$ و $f(x) = \frac{5x-6}{x+3}$

(1) أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(2) نعتبر $v_n = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n}; n \geq 1$. أكتب v_n بدلالة f و u_n .

(3) حدد النهاية التالية $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

D. متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ على شكل: $u_{n+1} = f(u_n)$

01. خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و $f(I) \subset I$ و $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

▪ $u_{n_0} \in I$ (حدها الأول من I).

▪ u_n متتالية متقاربة و نهايتها l .

فإن l هو حل للمعادلة $f(x) = x$. (أي l تحقق $l = f(l)$)

02. تمرين :

لنعتبر المتتالية: $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$ و $u_0 = 2$. نعتبر أن u_n متقاربة (u_n تزايدية و مكبورة ب).

(1) حدد مجموعة اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{6+x}$.

(2) أعط جدول تغيرات f على D_f .

(3) لنعتبر المجال $I = [0, 3]$ تحقق بأن $f(I) \subset I$ و $u_0 \in I$.

(4) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

C. المتتاليات المتحادية :

01. تعريف :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتاليتين عدديتين.

نقول إن: (u_n) و (v_n) متحاديتان لنعني أن:

1. إحداهما تزايدية و الأخرى تناقصية.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$



02. تمرين تطبيقي : لتكن $u_n = \frac{1}{n}$ و $v_n = -\frac{1}{n^2}$ متتاليتين عدديتين .

1. بين أن : (u_n) تناقصية ثم (v_n) تزايدية .
2. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$. استنتج بأن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متحاديتان .

03. خاصية :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين .

إذا كانت (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية فإن لكل $n \geq n_0$ لدينا $u_n \leq v_n$.

04. برهان :

بمأن المتتالية (u_n) تزايدية إذن المتتالية $(-u_n)$ تناقصية .

نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بما يلي : $w_n = v_n - u_n$. المتتالية (w_n) لأنها مجموع متتاليتين تناقصيتين .
من جهة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$ إذن $w_n \geq 0$ أي $w_n = v_n - u_n \geq 0$ وبالتالي $v_n \geq u_n$.
خلاصة : $u_n \leq v_n$.

05. خاصية :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين . لدينا :

- (u_n) و (v_n) متقاربتان .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$

06. برهان :

ملحوظة : إذا كانت : (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$ فإن $u_n \leq \ell \leq v_n$ الرتبة قطعاً $u_n < \ell < v_n$

حالة 1 : (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية (نفس البرهان ل (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية) .

(u_n) تزايدية إذن : $u_{n_0} \leq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. (v_n) تناقصية إذن : $v_n \leq v_{n_0}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

ومنه : $u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$ و ذلك لكل $n \geq n_0$.

إذن : المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة ب v_{n_0} إذن (u_n) متقاربة . نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

إذن : المتتالية (v_n) تناقصية و مصغورة ب u_{n_0} إذن (v_n) متقاربة . نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$.

بمأن : $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0 \Leftrightarrow \ell' - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell' = \ell$.

خلاصة : $\ell' = \ell$