Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{2+U_n}$ et $\quad U_0 = \dfrac{1}{3}$

1. a) Calculer U_1 et U_2

   b) Montrer par la récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n > 0$

2. a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = 3 - \dfrac{6}{2+U_n}$

   b) Montrer par la récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n < 1$

3. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

   b) Déduire les variations de la suite (U_n)

4. On considère la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad V_n = 1 - \dfrac{1}{U_n}$

   a) Montrer (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$

   b) Calculer V_0 puis écrire V_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

   c) Déduire U_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

5. Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$