Etapes	Contenu	observations

Activité d'initiation

<u>I. Proposition – fonction propositionnelle</u>

1. <u>Proposition</u>

1) Cocher la case convenable :

Enoncé	*Vrai*	*Faux*
Tout nombre pair est divisible par 4		
La somme de deux nombres pairs est un nombre pair		
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire		
Le nombre 214 est un multiple de 3		

2) Y a-t-il des énoncés sont varis et faux au même temps.

Résumer du cours

➩ ***<u>Définition</u>***

On appelle ***proposition***, tout énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguïté qu'il est vrai ou faux, et se note souvent P,Q,R,.....

<u>Remarque</u>

- L'adjectif « vrai » ou « faux » qui accompagne la proposition s'appelle « ***valeur de vérité*** »
- Si P est une proposition vraie, on dit alors que la valeur de vérité de P est « Vrai » et se note « V » et Si P est une proposition fausse, on dit alors que la valeur de vérité de P est « faux » et se note « F ».

P	
V	F

Table de vérité
Ou

P	
1	0

<u>Exemples</u>

$P:"3\times 2=6"$ V • $Q:"$ -1 est une solution de l'équation $x^2-2x+3=0"$ F

➩ ***<u>Opérations sur les propositions</u>***

➩ ***<u>Négation d'une proposition</u>***

Etant donné une proposition P .
La négation de la proposition P , est la proposition qui a une valeur de vérité « faux » si la proposition P est vraie, et une valeur de vérité « vrai » si la proposition P est fausse est se note $\overline{P}$ ou $\neg P$.

<u>Table de vérité</u>

p	$\overline{P}$
V	***F***
F	***V***

<u>Remarque</u>

Symbole	*Négation*
$=$	$\neq$
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$\leq$	$>$
$\geq$	$<$
$\in$	$\notin$

60 minutes

Evaluation

Application ①

Donner la négation des propositions suivantes, en précisant la valeur de vérité

- $P:"\sqrt{17} \leq \sqrt{8}+\sqrt{9}"$; • $Q:"\pi \in \mathbb{Q}"$; • $R:"\frac{4}{5} \neq \frac{16}{25}"$

Résumer du cours

➩ Conjonction de deux propositions

La conjonction de deux proposition P et Q est la proposition qui est vrai uniquement si les deux propositions Pet Q sont vraies en même temps et se note (P et Q) ou ($P \wedge Q$).

Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Evaluation

Application ②

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"3 \in \mathbb{Z}$ ***et*** $3 \times 5 = 14"$.
- $Q:"$ 5 divise 35 ***et*** 5 est un nombre premier $"$
- $R:"$ Le nombre $x = 7$ ***et*** $4x - 28 = 0"$.
- $S:"$ 12 est un nombre impair ***et*** $12 \succ 0"$

Résumer du cours

➩ Disjonction de deux propositions

La disjonction de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si au moins l'un des deux propositions est vraie on la note (P ou Q) ou $P \vee Q$.

Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Evaluation

Application ③

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ ***ou*** $0 \neq 5"$.
- $Q:"12 \leq 7$ ***ou*** 5 est un nombre pair$"$.
- $R:"3+3=5$ ***ou*** $7^2 > 36"$.

➩ Implication de deux propositions

L'implication de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « faux » si la proposition P est vraie et la proposition Q est fausse et on la note $P \Rightarrow Q$.

$P \Rightarrow Q$: se lit P implique Q ou bien « si P alors Q ».

120 minutes

Résumer du cours

Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Evaluation

Application ④

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"2<5 \Rightarrow -1^2=1"$; • $S:"0>3 \Rightarrow$ 3 est un nombre paire" .
- $Q:"2^2=-4 \Rightarrow \sqrt{25}=5"$; • $T:"6=2\times 3 \Rightarrow$ 37 est un nombre premier"

Résumer du cours

Remarque

- L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.
- $"P \Rightarrow Q"$ et $"Q \Rightarrow P"$ n'ont pas nécessairement même valeur de vérité.

Exemple

- $P:"$ 4 est un nombre pair" ; $Q:"-3>0"$.

La proposition $"P \Rightarrow Q"$ est fausse mais la proposition $"Q \Rightarrow P"$ est vraie.

- $P:"3=1.5"$; $Q:"$ 36 divise 8" .

La proposition $"P \Rightarrow Q"$ est vraie et aussi la proposition $"Q \Rightarrow P"$ est vraie.

Résumer du cours

➯ *Equivalence de deux propositions*

L'équivalence de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si P et Q ont même valeur de vérité on la note $P \Leftrightarrow Q$.

$P \Leftrightarrow Q$: se lit P équivalente la proposition Q .

Table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Evaluation

Application ⑤

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"$ ABC un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2"$.
- $Q:"x^2+1>0 \Leftrightarrow -4 \in \mathbb{N}"$.
- $R:"4\times 3=20 \Leftrightarrow 5$ est un nombre paire" .
- $S:"1.25 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 25$ est un multiple de 5"

Résumer du cours

➯ *Lois de Morgan*

Soient P, Q et R trois propositions on a

$(1).P \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ $(2).(PetQ) \Leftrightarrow (QetP)$

$(3).(PouQ) \Leftrightarrow (QouP)$ $(4).\overline{(PetQ)} \Leftrightarrow (\overline{p})ou(\overline{Q})$

$(5).\overline{(PouQ)} \Leftrightarrow (\overline{p})et(\overline{Q})$ $(6).(Pet(QouR)) \Leftrightarrow (PetQ)ou(PetR)$

$(7).(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

Activité d'initiation

2. Fonction propositionnelle

Activité

On considère l'expression suivante : "$x \in \mathbb{R} / x^2 - x \geq 0$"

1) L'expression précédente s'agit-il d'une proposition ?
2) Donner la valeur de vérité de l'expression précédente si $x = 2$ et si $x = \frac{1}{2}$

Résumer du cours

Définition

On appelle ***fonction propositionnelle***, tout énoncé mathématique contient une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble bien définie, et qui est susceptible d'être une proposition si on attribue à ses variables certaines valeurs particulier dans l'ensemble et se note $P(x), P(x,y)$.....

Exemple

- $P(x)$: "$x \in \mathbb{Z}; x + 2 > 0$" est une fonction propositionnelle

$P(-1)$ est vraie et $P(-5)$ est fausse.

$Q(x,y)$: "$(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4$" est une fonction propositionnelle

$Q(0;2)$ est vraie et $Q(-1;1)$ est fausse.

Activité d'initiation

II. Quantificateurs

Activité

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes

P : " Il existe au moins un nombre réel x tel que $|3x-2| = 4$"

Q : " Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 1 \geq 0$"

S : " Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 > 0$"

➪ ***Définition***

Soit "$(x \in E); P(x)$" une fonction propositionnelle telle que E est un ensemble bien défini.

○ La proposition "$(\exists x \in E); P(x)$" est une proposition vraie lorsque on trouve au moins un x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie.

On dit dans ce cas « il existe un x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie »

Le symbole $\exists$ s'appelle ***le quantificateur existentiel.***

○ La proposition "$(\forall x \in E); P(x)$" est une proposition vraie lorsque les propositions $P(x)$ soient vraies pour tout x dans E.

On dit dans ce cas « pour tout x appartenant à E, $P(x)$ soit vraie »

Le symbole $\forall$ s'appelle ***le quantificateur universel.***

En particulier : S'il existe un seul élément x dans E vérifier $P(x)$, alors dans ce cas on écrit "$(\exists! x \in E), P(x)$".

Le symbole $\exists!$ s'appelle ***quantificateur d'existence et d'unicité***

60 minutes

Résumer du cours	***Exemple*** ⊗ On considère la fonction propositionnelle suivante : $"(x\in\mathbb{Z});x^2-1=0"$ $"(\forall x\in\mathbb{Z});x^2-1=0"$ F ; $"(\exists x\in\mathbb{Z});x^2-1=0"$ V ; $"(\exists! x\in\mathbb{Z});x^2-1=0"$ F	
	Question : 1) Donner la valeur de vérité des propositions suivantes : $P:"(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R});y=2x-1"$; $Q:"(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});y=2x-1"$ $S:"(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});y=2x-1"$ 2) Que remarquez-vous ?	
Résumer du cours	***Remarque*** : •L'ordre des quantificateurs de même nature n'a aucune importance pour déterminer le sens du terme quantifié. •L'ordre des quantificateurs de nature différents est important pour déterminer le sens du terme quantifié.	
Evaluation	***Exercice 1 de la série***	
Résumer du cours	***➯ Négation d'une proposition quantifiée*** ***Propriété*** Soit $"(x\in E);P(x)"$ une fonction propositionnelle ⊗ La négation de la proposition $"(\exists x\in E);P(x)"$ est la proposition $"(\forall x\in E);\overline{P(x)}"$. ⊗ La négation de la proposition $"(\forall x\in E);P(x)"$ est la proposition $"(\exists x\in E);\overline{P(x)}"$. ***Exemple*** • La négation de la proposition $P:"(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 0"$ est la proposition $\overline{P}:"(\exists x\in\mathbb{R});x^2<0"$. • La négation de la proposition $P:"(\exists x\in\mathbb{R});x^2-2=0"$ est la proposition $\overline{P}:"(\forall x\in\mathbb{R});x^2-2\neq 0"$.	
	Application ⑥ Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes, puis donner leur négation. •$"(\forall x\in\mathbb{R});x^2+3x+4>0"$; •$"(\exists x\in\mathbb{Q});2x^2+3x=0"$; •$"(\forall x\in\mathbb{Z})(\forall y\in\mathbb{N})x^2+y^2\geq 1"$. •$"(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});x+y>0"$; •$"(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});x+y>0"$; •$"(\exists y\in\mathbb{Z})(\forall x\in\mathbb{N}^*);x+y=0"$.	

Exercice 02 de la série

Résumer de cours

III. Raisonnements mathématiques

1. Raisonnement par la contraposition

Définition

Etant donné deux propositions P et Q

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie.

Ce raisonnement est basé sur la loi logique suivant $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

Exemple

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ ; \ x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x}+1 \neq 3\sqrt{y}+1$

Pour montrer $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ ; \ x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x}+1 \neq 3\sqrt{y}+1$ il suffit de montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ ; 3\sqrt{x}+1 = 3\sqrt{y}+1 \Rightarrow x = y$

On a $3\sqrt{x}+1 = 3\sqrt{y}+1 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 3\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$

Donc d'après le raisonnement par le contraposé on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; $x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x}+1 \neq 3\sqrt{y}+1$.

120 minutes

Evaluation

Application ⑦ : Exercice 04 de la série

Résumer du cours

2. Raisonnement par équivalences successives

Propriété

Soient P, Q et R trois propositions

Raisonnement par l'équivalence est basé sur la loi logique suivant :

« Si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$ alors $P \Leftrightarrow R$ ».

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

On a $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2+1-2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

Application ⑧

- Soit $x \in \mathbb{R}$ montrer que
- $\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$; $|x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$
- Soient x et y deux nombres réels tels $x \geq 1$ et $y \geq 4$ montrer que
- $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = 2$ et $y = 8$

Evaluation	**Exercice 05 de la série**	
Résumer de cours	**3. Raisonnement par disjonction des cas** **Propriété** Etant donné deux propositions P et Q Il faut que les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \Rightarrow Q$ soient vraies. **Exemple** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E): 2\lvert x-1\rvert + x = 0$ **Premier cas** : si $x-1 \geq 0$ alors $\lvert x-1\rvert = x-1$ Donc l'équation (E) devient $2(x-1)+x=0$ c.-à-d. $2x-2+x=0$ par conséquent $x=\frac{2}{3}$ **Deuxième cas** : si $x-1 \leq 0$ alors $\lvert x-1\rvert = -x+1$ Donc l'équation (E) devient $2(-x+1)+x=0$ c.-à-d. $-2x+2+x=0$ par conséquent $x=2$ D'où $S=\varnothing$	
Evaluation	**Application ⑨** : Exercice 03 de la série	
Résumer du cours	**4. Résonnement par contre-exemple** **Exemple** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$ est fausse Si $x=0$ alors $0^2 > 0$ ce qui est impossible par conséquent $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$ est fausse.	
Evaluation	**Application ⑩** Montrer que les propositions suivantes sont fausses • $(\forall x \in \mathbb{N})$ le nombre x^2 est un nombre impair • $(\forall n \in \mathbb{N})$ le nombre n^2+n+1 est un nombre premier. **Exercice 06 de la série**	
Activité	**1. Raisonnement par l'absurde** **Activité** Soient P et Q deux propositions telles que "$\overline{Q} \Rightarrow P$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$" est une proposition vraie Si Q est fausse, que peut-on dire pour la valeur de vérité de P.	**120 minutes**
	Règle Soit P une proposition. Pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose que P est fausse puis trouver la contradiction avec les données d'exercices et le prérequis.	
	Exemple Montrer $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$ On suppose que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$ alors $(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = x-1$	

Résumer du cours

On a $x^2 = x-1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

On a $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$

Donc l'équation n'a pas de solutions ; donc il y a une contradiction

Par conséquent $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$

Evaluation

Application ①①

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n-1 \neq n-2$
2) ABC un triangle de côtés $AB = 4, AC = 3$ et $BC = 6$. Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A .
3) Soient $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$ tels que $xyz > 1$ et $x+y+z < \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ Montrer que $x \neq 1$, $y \neq 1$ et $z \neq 1$

Résumer du cours

5. *Résonnement par récurrence*

Propriété

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$

Pour montrer que "$(\forall n \geq n_0); P(n)$" est vraie, on suit les étapes suivantes :

- Vérifier que $P(n_0)$ est vraie
- Supposer que "$P(n)$" est vraie.
- Montrer que "$(\forall n \geq n_0); P(n+1)$" est vraie
- Conclure que "$(\forall n \geq n_0); P(n)$" est vraie
- D'après le principe de récurrence on a "$(\forall n \geq n_0); P(n)$".

Remarque

En utilisant le principe de récurrence si n est un nombre entier naturel.

Exemple

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n+1$

Pour $n = 0$ on a $3^0 = 1 \geq 2\times0+1$ est une proposition vraie

Supposons que $3^n \geq 2n+1$ est vraie et Montrer $3^{n+1} \geq 2(n+1)+1$ c.-à-d Mq $3^{n+1} \geq 2n+3$

On a $3^n \geq 2n+1 \Rightarrow 3\times3^n \geq 3(2n+1) \Rightarrow 3^{n+1} \geq 6n+3$

Or $6n+3 \geq 2n+3$

Alors $3^{n+1} \geq 2n+3$

d'après le principe de récurrence on a $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n+1$.

Evaluation

Application ①②

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

- $2^n \geq n+1$
- $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$
- Le nombre $4^n - 1$ est un multiple de 3.

2) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$