

Généralités sur les fonctions numérique

I. Généralités

1. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée

Activité

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
- 2) Montrer que $(\forall x \in D_f); f(x) \leq 1$
- 3) Montrer que $(\forall x \in D_f); f(x) \geq 0$
- 4) Dédire que $(\forall x \in D_f); 0 \leq f(x) \leq 1$

Définition

Soit f une fonction définie un intervalle I ($I \subset \mathbb{R}$).

On dit que :

* f est **majorée** sur I s'il existe un nombre réel M tel que $(\forall x \in I); f(x) \leq M$

* f est **minorée** sur I s'il existe un nombre réel m tel que $(\forall x \in I); f(x) \geq m$

* f est **bornée** sur I s'elle est majorée et minorée sur I $((\forall x \in I); m \leq f(x) \leq M)$.

Remarque :

* Si f est majorée par M sur I alors (C_f) est au-dessous de la droite d'équation $y = M$ sur I .

* Si f est minorée par m sur I alors (C_f) est au-dessus de la droite d'équation $y = m$ sur I .

Exemple

Soit f une fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$

Montrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$ sur \mathbb{R}

On a $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \leq \frac{1}{2}$, par conséquent f est majorée par $\frac{1}{2}$ sur \mathbb{R} .

Application ①

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

Montrer que f est majorée par 1 sur \mathbb{R}_+

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -2 + \frac{1}{x^2 + 1}$

Montrer que g est minorée par -2 sur \mathbb{R} .

3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1}$

a) Déterminer D_h .

b) Montrer que la fonction h est majorée par 1 et minorée par -3. Interpréter les résultats géométriquement.

Propriété :

Soit f une fonction définie un intervalle I ($I \subset \mathbb{R}$).

f est dite **bornée** sur I ; si $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f(x)| \leq k$

Application ②

Soit f une fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2 \sin(x) + \cos(x)$.

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); |f(x)| \leq 3$

2. Extremums d'une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction définie sur I et soit a un élément de I .

- On dit $f(a)$ est une **valeur minimale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \geq f(a)$.
- On dit $f(a)$ est une **valeur maximale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \leq f(a)$
- Si $f(a)$ est une valeur maximale ou une valeur minimale de f sur I alors le point $A(a; f(a))$ est un **extremum** de f sur I .

Application ③

Soit f une fonction définie par $f(x) = x + \frac{4}{x}$

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
- 2) Montrer que $f(2)$ est une valeur minimale de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- 3) Montrer que $f(-2)$ est une valeur maximale de la fonction f sur $]-\infty; 0[$.

3. Fonction périodique

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition et soit T un nombre réel.

On dit que f est une fonction périodique et T sa période si et seulement si :

$$\forall x \in D_f \text{ on a } \begin{cases} (x+T) \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

Exemples

$f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \sin(x)$ sont des fonction périodique et 2π leur période.

$h : x \mapsto \tan(x)$ est une fonction périodique et π sa période.

Application ④

Soient f, g et h trois fonctions numériques telles que

$$f(x) = \cos^2(x) ; g(x) = \sin(2\pi x) \text{ et } h(x) = \tan(2x)$$

Montrer que les fonctions f, g et h sont des fonctions périodiques et $\pi, 1$ et $\frac{\pi}{2}$ sont respectivement leurs périodes.

Remarque

Si f est une fonction périodique et T alors $(\forall x \in D_f), (\forall k \in \mathbb{Z})$ on a $f(x+kT) = f(x)$

4. Comparaison de deux fonctions

Egalité de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques et D_f et D_g ses ensembles de définitions respectives.

On dit que f et g sont *égales* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $D_f = D_g = D$
- $(\forall x \in D); f(x) = g(x)$

Application ⑤

Etudier l'égalité de f et g dans les cas suivants :

$$\bullet f(x) = \frac{x}{x^2} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x} \quad \bullet f(x) = \sqrt{(x+1)^2} \text{ et } g(x) = x+1 \quad \bullet f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} \text{ et } g(x) = x-1$$

Définition

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur I .

On dit que f est inférieur ou égal à g si et seulement si $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$ et on écrit $f \leq g$

Interprétation graphique

Si $f \leq g$ alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur I .

Si $f \geq g$ alors (C_f) est au-dessus de (C_g) sur I .

Si $f \leq 0$ alors (C_f) est au-dessous d'axe des abscisses sur I .

Si $f \geq 0$ alors (C_f) est au-dessus d'axe des abscisses sur I .

Application @

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} telles que : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

- 1) Comparer f et g pour tout x dans ces intervalles suivants $]-\infty; 0]$; $]2; +\infty[$ et $[0; 2]$.
- 2) Dédire la position relative (C_f) et (C_g) dans les intervalles $]-\infty; 0]$; $]2; +\infty[$ et $[0; 2]$.

5. Image d'un intervalle par une fonction

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I ($I \subset D_f$).

L'ensemble des éléments $f(x)$, tel que $x \in I$, s'appelle l'image de l'intervalle I par la fonction f et se note $f(I)$ telle que $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$.

Technique

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit $[a; b]$ un intervalle de I

- Si f est croissante sur $[a; b]$ alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- Si f est décroissante sur $[a; b]$ alors $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.
- Si f change la monotonie sur $[a; b]$ alors $f([a; b]) = [V_{\min}; V_{\max}]$ où V_{\min} et V_{\max} sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de f sur I .

Application @

Soit f une fonction numérique dont le tableau de variations est le suivant :

x	-7	-2	4	8
$f(x)$	4		3	-3
		\searrow	\nearrow	\searrow
		-1		

- 1) Déterminer $f([-2; 4])$ et $f([4; 8])$
- 2) Déterminer $f([-7; 8])$

6. Monotonie d'une fonction numérique

a. Définition

Soit f une fonction définie sur I et soient a et b deux nombres réels dans I

- Si $a < b$ et $f(a) < f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur I
- Si $a < b$ et $f(a) > f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur I.
- Si $a < b$ et $f(a) = f(b)$ alors on dit que la fonction f est **constante** sur I.

b. Monotonie et parité

Propriété

Soit une fonction numérique et D_f son ensemble de définition symétrique par rapport à 0 et soit I un intervalle de \mathbb{R}^+ et J son symétrique par rapport à 0

- **Si f est paire :**
- * Si f est croissante sur I alors f est décroissante sur J
- * Si f est décroissante sur I alors f est croissante sur J.
- **Si f est impaire.**
- * La fonction f garde le même sens de variations sur I et sur J.

Application ③

Le tableau présente les variations d'une fonction f

x	-4	-3	1	3	4
$f(x)$	5		-1		

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Compléter le tableau si f est **paire**.
- 3) Compléter le tableau si f est **impaire**.

c. Monotonie de $f+k$ et $k.f$

Propriété

Soit f une fonction numérique et $k \in \mathbb{R}^*$

- La fonction $f+k$ et la fonction f ont même sens de variations.
- Si $k > 0$ alors la fonction $k.f$ et la fonction f ont même sens de variations
- Si $k < 0$ alors la fonction $k.f$ et la fonction f ont des sens de variations contraires

Application

Soit f une fonction numérique dont le tableau de variations est comme suit

x	-3	0	1	$\frac{5}{2}$	4
$f(x)$	5		3		7

- 1) Dresser le tableau de variations de $f - 3$
- 2) Dresser le tableau de variations de $2f$ et $-2f$

II. Composée de deux fonctions

Activité

On considère les fonctions f et g telles que : $f(x) = \sqrt{x-2}$ et $g(x) = x-1$

- 1)
 - a) Calculer $g(5)$ puis déduire $f(g(5))$
 - b) Calculer $g(4)$ puis déduire $f(g(4))$
 - c) Peut-on calculer $f(g(1))$?
- 2) Déterminer un intervalle I tel que $(\forall x \in I); f(g(x)) \in \mathbb{R}$, puis déduire l'expression de $f(g(x))$ pour tout $x \in I$

1. Définition

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit g une fonction numérique définie sur J telle que $(\forall x \in I); f(x) \in J$.

La composée de la fonction f et g , dans cet ordre, est la fonction qu'on note $g \circ f$ telle que $(\forall x \in I); g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque

- Ensemble de définition de $g \circ f$ est : $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$
- $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$.

Application @

On considère les fonctions f et g telles que : $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = 2x^2 + 1$

- 1) Déterminer $D_f, D_g, D_{g \circ f}$ et $D_{f \circ g}$
- 2) Déterminer l'expression de $g \circ f(x)$ pour tout $x \in D_{g \circ f}$ et l'expression de $f \circ g(x)$ pour tout $x \in D_{f \circ g}$
- 3) Ecrire la fonction h se forme d'une composée de deux fonctions telle que $(\forall x \in \mathbb{R}); h(x) = \frac{x^2}{|x|+1}$

2. La monotonie de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit g une fonction numérique définie sur J telle que $(\forall x \in I); f(x) \in J$.

- Si f et g ont même sens de variations sur I et $f(I)$ respectivement, alors la fonction $g \circ f$ est croissante sur I .
- Si f et g ont des sens de variations contraires sur I et $f(I)$ respectivement alors la fonction $g \circ f$ est décroissante sur I .

Remarque

Pour étudier la monotonie de $g \circ f$ sur un intervalle I , on étudie la monotonie de f sur I puis on étudie la monotonie de g sur $J = f(I)$.

Application @

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = x+1$ et $g(x) = \sqrt{x}$

- 1) Déterminer D_f et D_g
- 2) Déterminer D_h telle que $h = g \circ f$ et calculer $f([-1; +\infty[)$
- 3) Etudier la monotonie de la fonction h sur D_h

III. Représentation graphique des fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$

1. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^3$ ($a \neq 0$)

On considère f une fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3$ ($a \neq 0$) et (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

***Parité de la fonction f**

On a $(\forall x \in \mathbb{R}) ; -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

***Variations de f**

Or f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur \mathbb{R}^+

*** Si $a > 0$**

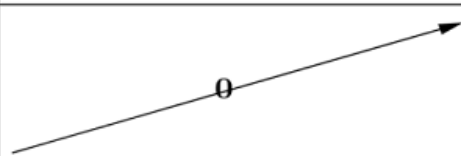
Soient x et y dans \mathbb{R}^+ tels que $x < y$

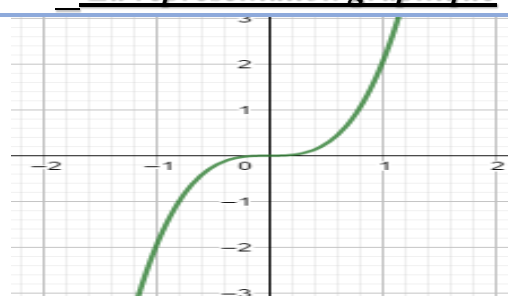
$$x < y \Rightarrow x^3 < y^3 \Rightarrow ax^3 < ay^3 \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Donc f est croissante sur \mathbb{R}^+

Or f est une fonction impaire, alors f est croissante aussi sur \mathbb{R}^-

Par conséquent f est croissante sur \mathbb{R}

<u>* <i>Tableau de variations</i></u>			
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

<u>* <i>La représentation graphique</i></u>	
	

* Si $a < 0$

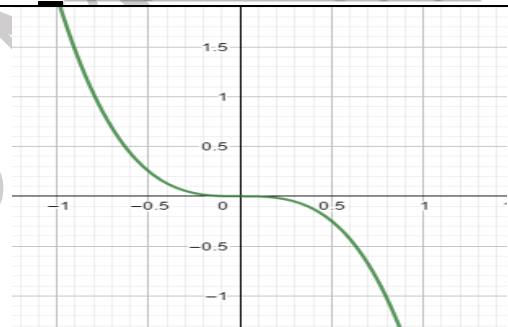
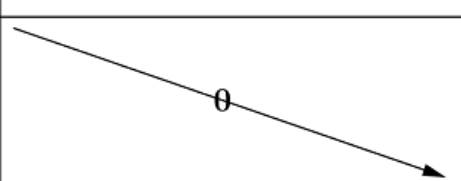
Soient x et y dans \mathbb{R}^+ tels que $x < y$

$$x < y \Rightarrow x^3 < y^3 \Rightarrow ax^3 > ay^3 \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Donc f est décroissante sur \mathbb{R}^+

Or f est une fonction impaire, alors f est décroissante aussi sur \mathbb{R}^-

Par conséquent f est décroissante sur \mathbb{R}

<u>* <i>Tableau de variations</i></u>				<u>* <i>La représentation graphique</i></u>	
x	$-\infty$	0	$+\infty$		
$f(x)$					

2. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$



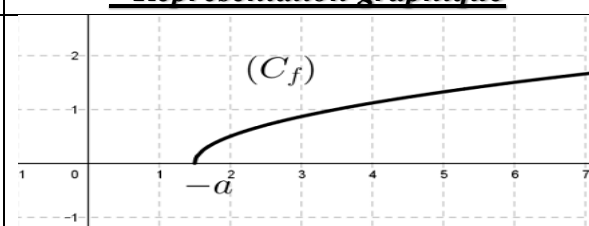
On considère f une fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x+a}$ et (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

*Domaine de définition $D_f = [-a; +\infty[$

*Variations de f

Soient x et y dans D_f tels que $x < y$

$$x < y \Rightarrow x+a < y+a \Rightarrow \sqrt{x+a} < \sqrt{y+a} \Rightarrow f(x) < f(y) \text{ Donc } f \text{ est croissante sur } [-a; +\infty[$$

<u>* Tableau de variations</u>		<u>* Représentation graphique</u>						
<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-a$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td colspan="2">  </td></tr> </table>	x	$-a$	$+\infty$	$f(x)$				
x	$-a$	$+\infty$						
$f(x)$	