تمرين 1

❶ أدرس اتصال الدالة f عند x_o في الحالات التالية:

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-2x-1}{x+2} \\ x_o=-3 \end{cases}$ و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}; x\neq 0 \\ f(0)=1/2 \\ x_o=0 \end{cases}$

و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \\ f(1)=1 \\ x_o=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}; x\neq 3 \\ f(3)=3 \\ x_o=3 \end{cases}$

و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x-2|+1}{x^2+1} \\ x_o=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(\cos x)^3-1}{\sin^2 x}; x\neq 0 \\ f(0)=-3/2 \\ x_o=0 \end{cases}$

❷ أدرس اتصال f على يسار و يمين x_o في الحالات التالية:

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|+2x}{x^2-|x|}; x\neq 0 \\ f(0)=-3 \\ x_o=0 \end{cases}$ و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}; x<1 \\ f(1)=1/2 \text{ و } x_o=1 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}; x>1 \end{cases}$

❸ حدد العددين a و b لكي تكون الدالة f متصلة في 1:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x-1}; & x>1 \\ f(x)=\dfrac{x+b}{2}; & x\leqslant 1 \end{cases}$$

❹ نعتبر الدالة $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{1-x}; & x\neq 1 \\ f(1)=a \end{cases}$.

حدد a علما أن f متصلة في 1. ثم بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

❺ نعتبر الدالة $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}; & x\neq 0 \\ f(0)=a \end{cases}$.

حدد a لكي تكون f متصلة في 0. ثم بين أن f متصلة على $]0;2\pi[$.

هل f قابلة للتمديد بالاتصال على يسار 2π.

❻ نعتبر الدالة $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}; & x\neq 0 \\ f(0)=m \end{cases}$.

أدرس اتصال f على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

ثم حدد m لكي تكون f متصلة على $\mathbb{R}$.

تمرين 2

❶ نعتبر الدالة $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$.

ا) أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_o=2$.

ب) أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_o=\sqrt{2}$.

ج) أدرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

❷ نعتبر الدالة $\begin{cases} f(x)=xE\left(\dfrac{1}{x}\right); & x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

ا) بين أن: $1-x<f(x)\leqslant 1 \quad (\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$.

ب) استنتج أن f متصلة في 0 على اليمين.

ج) أدرس اتصال f على اليسار في 0.

د) أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ه) أدرس اتصال f في 1.

و) بين أن: $f(f(x))=f(x) \quad (\forall x\in[0;1])$

تمرين 3

هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال عند x_o في الحالات التالية:

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2} \\ x_o=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} \\ x_o=0 \end{cases}$

و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+8}{x+2} \\ x_o=-2 \end{cases}$ و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-2x}{|x+1|-|x-1|} \\ x_o=0 \end{cases}$

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{1+\cos(\pi x)} \\ x_o=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4} \\ x_o=4 \end{cases}$

تمرين 4

❶ أدرس اتصال f على مجموعة تعريفها في الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x-1}$؛ 2) $f(x)=x\sqrt{x-1}$

3) $f(x)=\cos\sqrt{x}$؛ 4) $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2x-1}\right)$؛

5) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x}}$؛ 6) $f(x)=\dfrac{x^2-\sqrt{2-x}}{|x+1|-2}$؛

❷ بين أن f متصلة على I ثم حدد $f(I)$ في الحالات التالية

$f(x)=x\sqrt{x+1}; I=[0,1]$ و $f(x)=\dfrac{x-4}{x-2}; I=[3,6]$

و $\begin{cases} f(x)=x+2; & x\leqslant 1 \\ f(x)=3x^2; & x>1; \quad I=[-3,2] \end{cases}$.

تمرين 5

❶ في الحالات التالية، بين أن المعادلة تقبل على الأقل حلا في المجال I:

$$\begin{cases} x^4-4x=1 \\ I=[-1,0] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 2\sin x = x \\ I=\left[\frac{\pi}{3},\pi\right] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\cos \pi x=0 \\ I=[0,1] \end{cases}$$

❷ في الحالات التالية، بين أن المعادلة تقبل حلا وحيدا في I:

$$\begin{cases} x^5+x^2+2=0 \\ I=[-2,-1] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x+\sin x=1 \\ I=\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \cos \pi x=\frac{2}{3}x \\ I=\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right] \end{cases}$$

❸ $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة متصلة على $[a,b]$. بين أن f تقبل نقطة صامدة (أي أن $(\exists\alpha\in[a,b])\ f(\alpha)=\alpha$).

❹ f دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث $f(a)=f(b)$. بين أن المعادلة $f(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)$ تقبل على الأقل حلا ينتمي إلى $[a,b]$.

❺ a و b عددان حقيقيان بحيث $a<b$ و f دالة متصلة على $[a,b]$. بين أن: $(\exists c\in]a,b[)\ f(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$.

❻ f و g دالتين معرفتين من $[a,b]$ نحو $\mathbb{R}$ و متصلتين على $[a,b]$ بحيث $(\forall x\in[a,b])\ f(x)\leqslant g(x)$. ليكن λ عددا حقيقيا من $]0;1[$.
بين أنه إذا كان لكل من f و g نقطة صامدة، فإن الدالة h المعرفة على $[a,b]$ بما يلي: $h(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x)$ تقبل أيضا نقطة صامدة.

❼ أدرس تغيرات الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x)=x+\cos x$، ثم إستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و اعط قيمة مقربة له بالدقة $r=10^{-1}$.

❽ نعتبر المعادلة $(E):\ \sin x-\frac{x}{2}=0$.

ا) بين أن حلول المعادلة (E) تنتمي إلى المجال $[-2,2]$، ثم اعط عدد حلول المعادلة (E) معللا جوابك.

ب) اعط قيمة مقربة بالدقة $r=10^{-1}$ لأكبر حل من بين حلول المعادلة (E).

تمرين 6

نعتبر f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=x-4\sqrt{x}+3$.

❶ بين أن f متصلة على $\mathbb{R}^+$.

❷ ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[4;+\infty[$.

ا) بين أن g تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب) حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 7

نعتبر f المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

❶ بين أنه يوجد عدد حقيقي α من $\left[\frac{5}{4};2\right]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$.

❷ ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]1;+\infty[$.

ا) بين أن g تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب) حدد $\lim\limits_{x\to0^+} g^{-1}(x)$، ثم أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 8

نعتبر f المعرفة على $[0;\pi]$ بـ: $f(x)=2\cos(x)-\cos(2x)$.

❶ أدرس تغيرات الدالة f، ثم أنشئ منحناها في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❷ ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

ا) حدد J صورة المجال I بالدالة g.

ب) ليكن λ من J. بين أن $g(x)=\lambda$ تقبل حلا وحيدا في المجال I.

تمرين 9

نعتبر f المعرفة بـ: $f(x)=\tan^2(x)-2\sqrt{3}\tan(x)$.

❶ ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

ا) بين أن g تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب) حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

❷ ليكن h قصور الدالة f على المجال $I'=\left[2\pi;\frac{7\pi}{3}\right]$.

ا) بين أن h تقابل من I' نحو مجال J' ينبغي تحديده.

ب) حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J'.

تمرين 10

❶ أثبت المتساويات التالية: $2\text{Arctg}\frac{1}{2}=\text{Arctg}\frac{4}{3}$

$5\text{Arctg}\frac{1}{7}+2\text{Arctg}\frac{3}{79}=\frac{\pi}{4}$

و $2\text{Arctg}\frac{1}{5}+\text{Arctg}\frac{1}{7}+2\text{Arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

❷ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات: $\text{Arctg}(x)+\text{Arctg}\sqrt{3}x=\frac{7\pi}{12}$ و $\text{Arctg}(x)=2\text{Arctg}\frac{1}{2}$ و $\text{Arctg}(2x)+\text{Arctg}(3x)=\frac{\pi}{4}$

و $\text{Arctg}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\text{Arctg}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$

و $\text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)+\text{Arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}$ و

$\text{Arctg}(x-3)+\text{Arctg}(x)+\text{Arctg}(x+3)=\frac{5\pi}{4}$.

❸ بسط ما يلي: $\text{Arctg}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ و $\cos\left(\text{Arctg}(x)\right)$
و $\sin\left(\text{Arctg}(x)\right)$ و $\text{Arctg}\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right)$ و
$\text{Arctg}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)+\text{Arctg}\sqrt{1+x^2}-x$.

تمرين 11

أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arctg}(2x^2-x)}{x}$ و
$\lim\limits_{x\to 0}x\text{Arctg}\dfrac{1}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{Arctg}\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{Arctg}(x)}{\text{Arctg}\sqrt{x}}$ و
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arctg}(x^2+2x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{\pi}{2}}{x^2}$ و
$\lim\limits_{x\to+\infty}x\text{Arctg}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Arctg}\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ و
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\text{Arctg}(x)-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

تمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\text{Arctg}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}; & 0\leqslant x<1 \\ f(1)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

أدرس اتصال f على $[0;1]$. ثم بين أن f تقابل من $[0;1]$ نحو مجال J يتم تحديده و حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 13

f دالة معرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\text{Arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right); & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

❶ أدرس اتصال f في 0. ثم بين أن f دالة فردية.

❷ أدرس رتابة الدالة f ، ثم ضع جدول التغيرات.

❸ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده.

❹ حدد f^{-1} ، ثم استنتج تعبيرا مبسطا لـ $f(x)$.

تمرين 14

❶ بسط ما يلي : $A=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\sqrt{\sqrt[4]{32}}}{\sqrt[5]{2}\ \sqrt[12]{64}}$ و
$B=\dfrac{\sqrt[15]{3}\sqrt[3]{9}(\sqrt{3})^2}{\sqrt[4]{27}(\sqrt{\sqrt{3}})^2}$ و $C=\dfrac{27^{\frac{2}{3}}.49^{\frac{-1}{2}}.16^{\frac{3}{4}}}{\left(9\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{5}}}$ و
$D=\dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt{8}(\sqrt[5]{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$.

❷ رتب الأعداد التالية ترتيبا تناقصيا: $\sqrt{2};\ \sqrt[3]{7};\ \sqrt[4]{10}$.

❸ رتب الأعداد التالية ترتيبا تزايديا: $\sqrt{2};\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt[4]{4};\ \sqrt[6]{6}$.

تمرين 15

أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ و
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+25}-3}{x^2-3x+2}$ و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-4\sqrt[3]{x}}{x-8}$ و
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{\sin x}$
و $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{x-2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}-1}$ و
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+1}-x$ و
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{5-8x^3}-3x$ و
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{2-x^3}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+x-3}}{3x}$.

تمرين 16

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}^*$ بما يلي:

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\qquad f(x+y)+2f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

أحسب $f(0)$، ثم بين أن f دالة ثابتة.

تمرين 17

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=\sqrt[6]{x}$ و
$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$ و $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$.
يمكنك وضع $\left(t=\sqrt[6]{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

❷ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: $x+2>\sqrt[3]{x^2+8}$
و

$$\sqrt[3]{1+(3+x)\sqrt{x}+3x}-\sqrt[3]{1-(3+x)\sqrt{x}+3x}\geqslant x+m$$

حيث m بارامتر حقيقي.

تمرين 18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=-2+\sqrt[3]{8-x^3}$$

❶ حدد D_f، ثم أدرس اتصال f على D_f،

❷ بين أن f تناقصية قطعا، ثم استنتج أنها تقابل من D_f نحو مجال J يتم تحديده.

❸ حدد صيغة $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.

❹ حل المعادلة $f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{56}$ حيث $x\in J$.

❺ بين أن المعادلة $(x-1)f(x)=x-3$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]1;2[$.

تمرين 19

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}}; & x \geqslant 1 \\ f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right) & x < 1 \end{cases}$$

❶ بين أن: $D_f = \mathbb{R}^*$،

❷ أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❸ بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

❹ بين أن الدالة f متصلة على المجال $]0;1[$ معللا جوابك

❺ ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$. نضع $h(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

أ) تحقق من أن $(\forall x \in [1;+\infty[)$: $g(x) = h(\sqrt[3]{x-1}) + \dfrac{\pi}{2}$ ثم استنتج أن g تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$.

ب) بين أن g تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

ج) حدد تعبيرا لـ $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.

تمرين 20

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$f(x) = \dfrac{1}{2}(4+\sin x) - x$.

❶ أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده.

❸ استنتج أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

❹ بين أن $\dfrac{5\pi}{6} < \alpha < \dfrac{2\pi}{3}$ ثم حدد إشارة $f(x)$ تبعا لقيم x من $\mathbb{R}$.

تمرين 21

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$f(x) = \text{Arctg}(3x) + 2x - 1$.

❶ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

❷ بين أن المعادلة $f^{-1}(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن $0 < \alpha < \dfrac{1}{3}$.

❸ تحقق أن $\alpha = 1 - \text{Arctg}(3\alpha)$ ثم بين أن: $1 - \dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{1}{3}$.

❹ بين أن $f^{-1}(x) < x$: $(\forall x \in]\alpha;+\infty[)$.

تمرين 22

لتكن f دالة معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. نفترض أن $f(1) = 1$ و أن

$$\begin{cases} f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1; & x \neq 0 \quad (1) \\ f(x+y) = f(x) + f(y) & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2) \end{cases}$$

❶ أحسب $f(0)$ ثم بين أن f دالة فردية.

❷ أثبت أن: $f(r) = r \quad (\forall r \in \mathbb{Q})$.

❸ تحقق أن: $f\left(x^2\right) = (f(x))^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$. يمكنك حساب $f\left(\dfrac{1}{x(1-x)}\right)$. ثم استنتج أن f تزايدية.

تمرين 23

لتكن f الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2}\right)$$

❶ حدد D_f. ثم بين أن f متصلة على D_f.

❷ بين أنه يوجد (α,β) من $\mathbb{R}^2$ بحيث:

$$\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\right) \quad 2\alpha \leqslant \sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2} \leqslant 2\beta$$

❸ بين أن f تقابل من المجال $I = [0;1]$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

❹ ليكن $[a,b]$ مجالا ضمن I بين أنه: $(\exists c \in [a,b]) \ / \ f(c) = \dfrac{a-c}{a-2b+c}$.

تمرين 24

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $ab < 1$.

نضع $\alpha = \text{Arctg}(a)$ و $\beta = \text{Arctg}(b)$.

❶ بين أن: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)(1-ab)$.

❷ استنتج أن: $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \dfrac{\pi}{2}$.

❸ بين أن: $\text{Arctg}(a) + \text{Arctg}(b) = \text{Arctg}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$.

❹ استنتج قيمة العدد $\text{Arctg}(2+\sqrt{3}) - \text{Arctg}(2-\sqrt{3})$

❺ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geqslant1}$ المعرفة بما يلي: $u_n = \text{Arctg}\left(\dfrac{2}{1^2}\right) + \text{Arctg}\left(\dfrac{2}{2^2}\right) + \ldots + \text{Arctg}\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$.

أ) تحقق أنه لكل k من $\mathbb{N}^*$ لدينا:

$\text{Arctg}\left(\dfrac{2}{k^2}\right) = \text{Arctg}(k+1) - \text{Arctg}(k-1)$.

ب) استنتج أن: $u_n = \text{Arctg}(n+1) + \text{Arctg}(n) - \dfrac{\pi}{4}$. ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 25

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \text{Arctg}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$$

❶ بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$.

❷ بين أنه لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$1 - \tan^2(f(x)) = 2x\tan(f(x))$.

❸ استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2f(x)\right)$.

❹ استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arctg}(x)$.

تمرين 26

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \text{Arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{x}-1}\right)$

1 ا) حدد $\mathscr{D}_f$ ثم أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أن f متصلة على كل مجال ضمن $\mathscr{D}_f$.

ج) هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في $x_o = 1$ ؟ علل جوابك

2 لكل x من $\mathscr{D}_f$ نضع: $u(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$. أدرس تغيرات الدالة u على $\mathscr{D}_f$ ، ثم استنتج تغيرات f على $\mathscr{D}_f$.

3 ليكن g قصور f على المجال $I = [0;1[$

ا) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده.

ب) أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 27

لتكن f و g دالتين متصلتين على قطعة $[a;b]$ بحيث:

$(\Re) : \ (\forall x \in [a;b])\,(\exists y \in [a;b]) \ / \ f(x) = g(y)$.

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث: $f(c) = g(c)$.

تمرين 28

لتكن f دالة متصلة على المجال $]a;b[$ بحيث:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$

س1 بين أنه يوجد α و β من $]a;b[$ بحيث: $f(\alpha).f(\beta) < 0$.

س2 استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a;b[$.

س3 لتكن g دالة متصلة على المجال $[a;b]$. بين أنه يوجد c من $]a;b[$ بحيث: $f(c) = g(c)$.

س4 بين أنه يوجد d من $]a;b[$ بحيث:

$$\sqrt{\frac{b-d}{d-a}} - \sqrt{\frac{d-a}{b-d}} = \sqrt{(b-d)(d-a)}$$