

السلسلة 2: الإشتقاق و دراسة الدوال

تمرين 1

أدرس قابلية إشتقاق الدالة f في x_0 في كل حالة:

$$x_0 = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 3} \quad (1)$$

$$x_0 = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (2)$$

$$x_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad f(x) = x \cdot |\cos(x)| \quad (3)$$

$$x_0 = -1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 + |x + 1| \quad (4)$$

$$x_0 = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = |x - 1| \quad (5)$$

$$x_0 = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (6)$$

$$x_0 = 2 \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 7} \quad (7)$$

$$x_0 = 0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 1; & x \geq 0 \\ f(x) = 4x + 1; & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$x_0 = 0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1}; & x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + \sqrt{-x}; & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$x_0 = 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{2 - \sqrt{3+x}}{x-1}; & x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad (10)$$

$$x_0 = 0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}}{x}; & x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (11)$$

تمرين 2

حدد المعادلات المختزلة للمماس (T) لمنحنى الدالة f في النقط ذات الأقسام x_0 في كل حالة:

$$x_0 = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^3 - x \quad (1)$$

$$x_0 = 2 \quad \text{و} \quad f(x) = 1 - 2\sqrt{x} \quad (2)$$

$$x_0 = \pi \quad \text{و} \quad f(x) = |x| \cos(3x) \quad (3)$$

$$x_0 = 2 \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (4)$$

$$x_0 = 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3}; & x < 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{5}{6}x; & x \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

تمرين 3

لكن g دالة عديبة معرفة على المجال $]-\pi; \pi[$ ب:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2}{\tan(\frac{x}{2})}; & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

(1) بين أن g تقبل الإشتقاق في النقطة 0.

(2) حدد التقريب التآلفي للدالة g بجوار 0.

(3) إعط فبمق مفرق للعدد $g(10^{-5})$.

تمرين 4

لكن f دالة عديبة معرفة ب: $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

(1) بين أن f تقبل الإشتقاق في النقطة 0.

(2) حدد التقريب التآلفي للدالة f بجوار 0.

(3) إعط فبمق مفرق للعددين $\sqrt[3]{0.997}$ و $\sqrt[3]{1.0035}$.

تمرين 5

حدد فبمق مفرق لكل من الأعداد: $\cos(91^\circ)$ و $\sqrt{5.007}$ و $(1.997)^3$ و $\sqrt[3]{7.98}$.

تمرين 6

احسب النهايات التالية باستعمال العدد المشفق:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{2 \sin x - \sqrt{2}} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \sin(x)}{x - \pi} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\pi x)}{x - 1} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^4 - 625}{x - 5} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3} \quad (4) \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{\sin^2(x) - \sin(x) \sin(b)}{x - b} \quad (8)$$

تمرين 7

احسب المشتق f' بعد تحديد مجموعته تعريف f و f' :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1} \quad (8) \quad f(x) = (-7x + x^2 + 3)^5 \quad (1)$$

$$f(x) = (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad (9) \quad f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x} + 3x \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 7}} \quad (10) \quad f(x) = \sin\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) \quad (3)$$

$$f(x) = (x^2 + x)^{\frac{1}{3}} \quad (11) \quad f(x) = \sin(\sin(x)) \quad (4)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} + (x-1)^{\frac{1}{3}} \quad (12) \quad f(x) = \cos(x^2 + 7x - 1) \quad (5)$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[4]{x^3 + 1} \quad (13) \quad f(x) = \cos(\sqrt{x^2 + 5}) \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt{\tan \frac{x}{2}} \quad (7)$$

تمرين 8

حدد رتبة الدالة f و مطارفها إن وجدت:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad (5) \quad f(x) = x^3 + 2x - 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} \quad (7) \quad f(x) = (2x - 3)\sqrt{x} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{3} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad (4)$$

تمرين 9

لكن f دالة قابلية للإشتقاق مرتين على مجال I بحيث $f'' + f = 0$.

بين أن الدالة $f^2 + (f')^2$ ثابتة على المجال I .

تمرين 10

المسئوك منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

ادرس تغير منحنى f و حدد نطق إنعطافه (إن و جدت) في كل حالة:

$$f(x) = -\cos^2 x - 2 \sin x + 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{2x-2} + x \quad (8) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \quad (9) \quad f(x) = \frac{x}{3x^2 + 3} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{2x-2} + x \quad (10) \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x + 2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad (11) \quad f(x) = x + \frac{1}{x^2 + 1} \quad (5)$$

$$f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}} \quad (12) \quad f(x) = \sin x - 3x^2 + 7 \quad (6)$$

تمرين 11

أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f في كل حالة:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - \sqrt{x^2 + 1} \quad (8) & f(x) &= \frac{2x^2 + x + 3}{x + 1} \quad (1) \\ f(x) &= x - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \quad (9) & f(x) &= \frac{2x+3}{x^3-1} \quad (2) \\ f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad (10) & f(x) &= x + \frac{1}{x^2+1} \quad (3) \\ f(x) &= \sqrt[3]{x^2-1} \quad (11) & f(x) &= \frac{x^2+x+3}{x+2} \quad (4) \\ f(x) &= x\sqrt[3]{4-x} \quad (12) & f(x) &= \frac{1-2x^2}{x^2+1} \quad (5) \\ f(x) &= 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}} \quad (13) & f(x) &= 2x - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (6) \\ \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = x^2 + x; & x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}; & x > 0 \end{array} \right. & (14) & f(x) &= x\sqrt{x} + 2 \quad (7) \end{aligned}$$

تمرين 12

بين أن (Δ) محور تماثل لمنحنى الدالة f في كل حالة:

$$\begin{aligned} (\Delta) : x = 2 & \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad (1) \\ (\Delta) : x = -4 & \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 8x - 7} \quad (2) \\ (\Delta) : x = -\frac{3}{2} & \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x - 4} \quad (3) \\ (\Delta) : x = \pi & \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{2 - \sin^4(x)}{\cos(x) + 3} \quad (4) \end{aligned}$$

تمرين 13

بين أن I مركز تماثل لمنحنى الدالة f في كل حالة:

$$\begin{aligned} I\left(-\frac{1}{2}; 0\right) & \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1+2x}{x^2+x-2} \quad (1) \\ I\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) & \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{5x+1}{1-2x} \quad (2) \\ I(0; 2) & \quad \text{و} \quad f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad (3) \\ I(-1; -2) & \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (4) \\ I\left(\frac{\pi}{3}; 0\right) & \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) \quad (5) \\ I(0; 0) & \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(2x) + 4} \quad (6) \end{aligned}$$

تمرين 14

لنكن h دالة عددية معرفة بـ: $h(x) = \cos^2(x) + 2\cos(x)$.

- (1) بين أن h دالة زوجية و دورية.
- (2) أدرس تغيرات الدالة h على المجال $[0; \pi]$.
- (3) أدرس تغير منحنى الدالة h على المجال $[0; \pi]$ محددا نطاقتي انعطافه.
- (4) حدد نطاقتي تقاطع منحنى h ومحور الأفاصل على المجال $[0; \pi]$.
- (5) أنشئ منحنى h على المجال $[-2\pi; 2\pi]$.

تمرين 15

لنكن g دالة عددية معرفة بـ: $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

- (1) أدرس تغيرات الدالة g .
- (2) لنكن الدالة h فصور الدالة g على المجال $[1; +\infty[$.
- أ. بين أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} و حدد مجموعة تعريفها.
- ب. بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $2 < \alpha < 3$.
- ج. بين أن $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$.

تمرين 16

لنكن f دالة عددية معرفة بـ: $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$ و (C_f) منحنائها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) حدد D_f مجموعة تعريف f و بين أنها فردية.
- (2) أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.
- (3) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f في 1 على البمين و أول النتيجة هندسيا.
- (4) ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $[1; +\infty[$.
- (5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نطاقتي انعطاف A أفصولها موجب.
- (6) حدد نطاقتي تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = x$: (D) .
- (7) أنشئ المنحنى (C_f) .
- (8) لنكن الدالة g فصور الدالة f على المجال $[1; +\infty[$.
- أ. بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده.
- ب. أحسب $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.
- ج. إعط تعبير $g^{-1}(x)$ لكل x من J .
- د. أنشئ منحنى g^{-1} في نفس المعلم السابق.

تمرين 17

لنكن g دالة عددية معرفة بـ: $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

- (1) أدرس تغيرات الدالة g .
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلا وحيدا α .
- (3) إستنتج قيمة مقربة للعدد α بالدقة 10^{-2} .
- (4) حدد إشارة $g(x)$.
- (5) لنكن f دالة عددية معرفة على $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.
- أ. بين أن لكل x من $[1; +\infty[$ لدينا: $f(x) = 2x + \frac{2x+3}{x^2-1}$.
- ب. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f .
- ج. بين أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على المجال $[1; +\infty[$.
- د. إستنتج تغيرات f .
- هـ. بين أن $f(\alpha) = 3\alpha$.
- و. أدرس تغير منحنى f و نطاقتي انعطافه.
- ز. أرسم منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

تمرين 18

لنكن f دالة عددية معرفة على $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - x}$ و (C_f) منحنائها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) بين أن المستقيم الذي معادلته $y = -x + \frac{1}{2}$ مغارب مائل لمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
- (2) بين أن: $(\forall x > 1) : \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.
- (3) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f في 1 على البمين و أول النتيجة هندسيا.
- (4) بين أن: $(\forall x > 1) : f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$.
- (5) إستنتج جدول تغيرات الدالة f .
- (6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصل في نطاقتي أفصولها α بحيث: $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.
- (7) بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال ينبغي تحديده.
- (8) أنشئ المنحنى (C_f) و منحنى f^{-1} في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.