الاشتقاق

قابلية اشتقاق دالة في نقطة – تأويلات هندسية

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f_d'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f_d'(a)$ و معادلته : $y = f_d'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليسار	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f_g'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f_g'(a)$ و معادلته : $y = f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a) = f_g'(a) = f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a).(x-a)+f(a)$

- **إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a) \neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة**
- **إذا كانت $f'(a) = 0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$**

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار
(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$	(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

الدالة المشتقة لدالة عددية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I .
نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال I ، إذا كانت f قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I .

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a,b]$.
نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال $[a,b]$ ، إذا كانت f قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ و قابلة للإشتقاق على اليمين في a و قابلة للإشتقاق على اليسار في b.

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .
الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز بالرمز f' و المعرفة كما يلي : $\begin{array}{rccc} f': & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$

الدالة	الدالة المشتقة
$\alpha.f$	$\alpha.f'$
$f+g$	$f'+g'$
$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$g\circ f$	$f'\times g'\circ f$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
f^n	$nf'f^{n-1}$

الدالة f	الدالة المشتقة f'	المجال I
$x\mapsto k$	$x\mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n \quad n\in\mathbb{N}^*$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n \quad n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{-1\}$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$I=]0,+\infty[$ أو $I=]-\infty,0[$
$x\mapsto x^r \quad r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\}$	$x\mapsto rx^{r-1}$	$I=]0,+\infty[$
$x\mapsto\sqrt{x}$	$x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I=]0,+\infty[$
$x\mapsto\dfrac{1}{x}$	$x\mapsto\dfrac{-1}{x^2}$	$I=]0,+\infty[$ أو $I=]-\infty,0[$
$x\mapsto\sin x$	$x\mapsto\cos x$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\cos x$	$x\mapsto-\sin x$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\tan x$	$x\mapsto 1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

- **كل دالة حدودية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$**
- **كل دالة جذرية قابلة للإشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها .**

✓ **إذا كانت** $\forall x\in I \quad f'(x)\geq 0$ **فإن** f **تزايدية على** I

✓ **إذا كانت** $\forall x\in I \quad f'(x)\leq 0$ **فإن** f **تناقصية على** I

✓ **إذا كانت** $\forall x\in I \quad f'(x)>0$ **فإن** f **تزايدية قطعا على** I

✓ **إذا كانت** $\forall x\in I \quad f'(x)<0$ **فإن** f **تناقصية قطعا على** I

✓ **إذا كانت** $\forall x\in I \quad f'(x)\geq 0$ **و كانت** f' **تنعدم في عدد منته من النقط على** I **فإن** f **تزايدية قطعا على** I

✓ **إذا كانت** $\forall x\in I \quad f'(x)\leq 0$ **و كانت** f' **تنعدم في عدد منته من النقط على** I **فإن** f **تناقصية قطعا على** I

الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .
إذا كانت الدالة المشتقة f' قابلة للإشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ، ونرمز لها بالرمز f'' .
إذا كانت f'' قابلة للإشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثالثة (أو الدالة المشتقة من الرتبة 3) ، و يرمز لها ب f''' أو $f^{(3)}$.

المعادلة التفاضلية : $y''+\omega^2 y=0$

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم.
- المعادلة $y''+\omega^2 y=0$ ذات المجهول y حيث y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.
- كل دالة f قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق المتساوية $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2 y=0$.

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم.
الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2 y=0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\mapsto \alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

حالة خاصة :

إذا كان $\omega=0$: حل المعادلة التفاضلية $y''=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $y:x\mapsto ax+b$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}$