تمرين 1

❶ بسط كلا من العددين:

$$A=\ln 2+\ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$B=\ln(ab^2)-\ln\left(\sqrt[3]{a^2b^5}\right)+\ln\frac{a}{\sqrt{b}}-\ln\left(\sqrt[4]{a^2b^6}\right)$$

❷ أحسب $\frac{a}{b}$ إذا علمت أن $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.

❸ a و b من $\mathbb{R}^{+*}$ بين أن: $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$

تمرين 2

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

$f(x)=\ln(x^2-3x+2)$ ؛ $f(x)=\ln(1-|x|)$

$f(x)=\sqrt{\ln^2 x-\ln x}$ ؛ $f(x)=\sqrt{1-\ln^2 x}$ ؛

$f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)}$ ؛ $f(x)=\ln|3x-6|$ ؛

$f(x)=\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ ؛ $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$ ؛

$f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(x)}$ ؛ $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{3-x}\right)$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$ ؛ $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}}$

تمرين 3

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $\ln(-3x+3)+\ln 2=0$ ؛ $2\ln\sqrt{1-x}=\ln 3$ ؛ $\ln^2|x|-\ln(x^2)-3=0$ ؛ $\ln\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}-2=0$ ؛ $(\ln x)^3-4(\ln x)^2-\ln x+4=0$.

❷ حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية:

$$\begin{cases}\ln x+\ln y=\ln\sqrt{3}-2\ln 2\\ 2(x+y)=\sqrt{3}+1\end{cases}$$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: $\ln|1-x|\leqslant 2$ ؛ $\ln^2|x|-\ln(x^2)>3$ ؛ $\ln(2x^2-3x)<2\ln(6-x)$.

تمرين 4

❶ بين أن لكل x من $]2;+\infty[$ لدينا:

$$\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)=2\ln\left(\sqrt{x-1}-1\right)$$

❷ بين أن لكل x من $]0;+\infty[$ لدينا:

$$\ln^2(1+x)-\ln^2(x)=\ln\left(x^2+x\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

تمرين 5

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{+\infty}(3x-5\ln x)$ ؛ $\lim\limits_{-\infty}(x+\ln x^2)$ ؛ $\lim\limits_{0^+}(\sin x\ln x)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln^2 x-\ln x\right)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+\ln(-x)\right)$

$\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x\ln(x+1))$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln^2 x-x)$ ؛

$\lim\limits_{0^+}(\sqrt[3]{x}\ln^4 x)$ ؛ $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ ؛ $\lim\limits_{+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{3+2x^2}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\dfrac{\ln(x)}{x}$ ؛

$\lim\limits_{0^+}\dfrac{x-\ln(x)}{x}$ ؛ $\lim\limits_{0^+}\dfrac{\ln(1+x-x^2)}{x}$ ؛ $\lim\limits_{0^+}\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x-3\ln(x)}{2x-\ln(x)}$ ؛ $\lim\limits_{0^+}\dfrac{\ln\left|\sqrt{x}-1\right|}{x}$ ؛ $\lim\limits_{0^+}\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

$\lim\limits_{2}\dfrac{\ln(2x-3)}{x^2-x-2}$ ؛ $\lim\limits_{3}\dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$ ؛ $\lim\limits_{e}\dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{x-1}$ ؛ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\ln(x))}{x^2-1}$ ؛

$\lim\limits_{x\to2}\ln\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^2+5x-14}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1-x^2}{x\ln(x)}$.

تمرين 6

في الحالات التالية حدد $\mathscr{D}$ مجموعة قابلية اشتقاق الدالة f ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathscr{D}$:

$f(x)=\ln(x-1)-\ln(x)$ ؛ $f(x)=\ln(\ln(x))$

$f(x)=\ln(1+x^2)$ ؛ $f(x)=\ln\left(\sqrt{1-2x}\right)$

$f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ؛ $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ ؛

$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}$ ؛ $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2+3x+1}\right)$

تمرين 7

حدد الدوال الأصلية للدالة f على $\mathcal{I}$ في الحالات :

$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}\\ \mathcal{I}=\mathbb{R}\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}\\ \mathcal{I}=]1;+\infty[\end{cases}$

$\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\\ \mathcal{I}=\mathbb{R}\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\\ \mathcal{I}=[1;+\infty[\end{cases}$

$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{\sin(2x)}\\ \mathcal{I}=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\\ \mathcal{I}=]2;+\infty[\end{cases}$

$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{\tan(x)}\\ \mathcal{I}=]0;\pi[\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x+1}\\ \mathcal{I}=]3;+\infty[\end{cases}$

تمرين 8

g معرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x\ln(x)$
ليكن n من $\mathbb{N}$. بين أن الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة g معرفة بما يلي:

$$(n \geqslant 2) \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

تمرين 9

لتكن f دالة معرفة بما يلي :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

❶ حدد $\mathscr{D}_f$. بين أن f دالة فردية ثم أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❸ أدرس تغيرات f ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

تمرين 10

f معرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln|x|$

❶ حدد $\mathscr{D}_f$. ثم أحسب نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$.

❷ أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها.

❸ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α. و أن $-2 < \alpha < -1$.

❹ بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف.

❺ أدرس الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr{C}_f)$. ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

❻ حدد مجموعة تعريف الدالة $g(x) = \ln(f(x))$.

تمرين 11

نعتبر المتتالية $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

❶ بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

❷ استنتج أن:

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{1+k} \leqslant \ln(1+k) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

❸ بين : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(1+n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
ثم حدد $\lim u_n$.

❹ نعتبر المتتاليتين $(v_n)_{n\geqslant 2}$ و $(w_n)_{n\geqslant 2}$ بحيث $v_n = u_n - \ln(n)$ و $w_n = u_{n-1} - \ln(n)$. بين أن (v_n) و (w_n) متحاديتان و استنتج أن لهما نفس النهاية.

تمرين 12

f معرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(0) = 0$
و
$$\begin{cases} f(x) = x^2\sqrt{-\ln(x)}\ ; & 0 < x \leqslant 1 \\ f(x) = (x-1)\ln(x-1)\ ; & x > 1 \end{cases}$$

❶ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f على يمين 0 و يسار 1

❷ أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها.

❸ أدرس الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$. ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$

تمرين 13

ليكن n من $\mathbb{N}^*$.
I) نعتبر الدالة g_n المعرفة بما يلي:

$$g_n(x) = x^2 - n\left(1 - \ln(x)\right)$$

❶ أحسب $\lim\limits_{0^+} g_n(x)$ و $\lim\limits_{+\infty} g_n(x)$ ؛ أدرس تغيرات g_n.
❷ بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n بحيث $1 \leqslant \alpha_n < 3$.
❸ استنتج إشارة $g_n(x)$ على $]\alpha_n;+\infty[$ و $]0;\alpha_n[$.
II) نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي:

$$f_n(x) = x - n\left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

❶ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$ ؛
و بين أن $f'_n(x) = \dfrac{g_n(x)}{x^2}$.
❷ بين أن $f_n(\alpha_n) = -n\left(1 + \dfrac{1}{\alpha_n}\right) + 2\alpha_n$.
❸ أعط جدول تغيرات f_n. ثم بين أن $(D_n);\ y = x - n$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_{f_n})$ بجوار $+\infty$.
❹ أدرس الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_{f_n})$ و المستقيم (D_n).
❺ أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
❻ نعتبر الدالة $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.
أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)$.
❼ استنتج أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث $0 < \beta < 1$.
❽ بين أن $f_n(\beta) = \beta$. و أن المنحنيات $(\mathscr{C}_{f_n})$ تمر من نقطة A.
❾ أدرس الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_{f_n})$ و $(\mathscr{C}_{f_{n+1}})$.
❿ بين أن $\alpha_1 = 1$ و $1,3 < \alpha_2 < 1,2$ ثم مثل مبيانيا في نفس المعلم $(\mathscr{C}_{f_1})$ و $(\mathscr{C}_{f_2})$.

تمرين 14

I) لتكن f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{4\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2}$$

و $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$. حيث $||\vec{i}|| = 2cm$

❶ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ؛ ثم أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❷ بين أن $(\forall x>0):\ f'(x)=4\left(\dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}\right)$.
ثم أعط جدول تغيرات f.

❸ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$.

❹ حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة التي أفصولها 1. ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

II)

❶ بين أن $(\forall t\in[0;+\infty[):\ 1-t\leqslant \dfrac{1}{1+t}\leqslant 1$.

❷ استنتج أن $(\forall x>0): x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$.

III) لكل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n\geqslant 4$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f_n(x)=n\dfrac{\ln(x)}{x^2}-\dfrac{1}{2}$.
و $(\mathscr{C}_n)$ منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ أدرس تغيرات الدالة f_n. أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$.

❷ قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x و استنتج الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$.

❸ بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$.

❹ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 4}$ تناقصية. (يمكن استعمال نتيجة السؤال III) ❷)

❺ أ) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ حيث $n\geqslant 4$ لدينا :
$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\leqslant \ln(u_n)\leqslant u_n-1$$
ب) استنتج أن:
$$(\forall n\geqslant 4):\ \frac{(u_n)^2}{2n}\leqslant u_n-1\leqslant \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$$
ج) بين أن $(\forall n\geqslant 4):\ \dfrac{1}{2n}\leqslant u_n-1\leqslant \dfrac{e}{n}$.
د) استنتج أن $(u_n)_{n\geqslant 4}$ متقاربة محددا نهايتها.

❻ بين أن $(\forall n\geqslant 4):\ e^{\frac{5}{6}}<v_n$ ($e^{\frac{5}{6}}<5,3$).
ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

تمرين 15

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\mathrm{Arctg}(\ln(x))\ ;\ x>0\\ f(0)=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

❶ بين أن f متصلة على $\mathbb{R}^+$. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم أول هندسيا النتيجة المحصلة .

❷ بين أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{Arctg}(x)}{x}=1$ و أن
$$(\forall x\in\mathbb{R}^{-*}):\ \mathrm{Arctg}(x)+\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

❸ أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0. التأويل الهندسي.

❹ أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$. ثم أعط جدول التغيرات.

❺ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J يتم تحديده .

❻ بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على J. أحسب $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

❼ حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

❽ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الأفصول 1.

❾ أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ؛ ثم أنشئ في نفس المعلم المستقيم (T) و المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

تمرين 16

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي:
$$g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$
بين أن g تناقصية على $[0;+\infty[$
استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^+):\ g(x)\leqslant 0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x}\quad x>0\\ f(0)=2\end{cases}$$
و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن f متصلة على يمين 0

❷ بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*):\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$.
ثم أعط جدول تغيرات f.

❸ بين أن $(\forall t\geqslant 0):\ 1-2t\leqslant \dfrac{1}{1+2t}\leqslant 1-2t+4t^2$.
استنتج أنه لكل x من $\mathbb{R}^+$ لدينا:
$$2x-2x^2\leqslant \ln(1+2x)\leqslant 2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3$$

❹ بين أن $(\forall x \geqslant 0) : -2 \leqslant \frac{f(x)-2}{x} \leqslant -2+\frac{8}{3}x$.
استنتج أن f قابلة للاشتقاق على يمين 0.

❺ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❻ تحقق أن f تقبل دالة أصلية G على المجال $[0;+\infty[$

III) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي: $F(x)=G(2x)-G(x)$.

❶ بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

❷ بين أنه لكل x من $]0;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{\ln(1+4x)-\ln(1+2x)}{x}$$

استنتج تغيرات الدالة F.

❸ بين أن $(\forall x>0) : \ xf(2x)\leqslant F(x)\leqslant xf(x)$.
استنتج أن F قابلة للاشتقاق على يمين 0.

❹ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و أعط جدول تغيرات F.

تمرين 17

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي:

$$f_n(x)=\frac{x}{n}-1+\ln(x)$$

❶ أحسب نهايات f_n عند محدات $\mathscr{D}_f$. ثم أدرس تغيرات f_n .

❷ بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n ينتمي إلى $]0;+\infty[$ و أن $1\leqslant\alpha_n\leqslant e$.

❸ ليكن (Γ) منحنى دالة اللوغاريتم النبيري في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ا) حدد معادلة المستقيم (Δ_n) المار من $A(0;1)$ و $B(n;0)$.

ب) أنشئ المنحنى (Γ) و المستقيمات (Δ_1) و (Δ_2) و (Δ_3). و بين أن α_n هو أفصول نقطة تقاطع المنحنى (Γ) و المستقيم (Δ_n).

ج) حدد قيمة α_1 ثم تظنن رتابة المتتالية (α_n).

د) بين أن $f_{n+1}(\alpha_n)<0$ ثم استنتج أن المتتالية (α_n) تزايدية. و أن (α_n) متقاربة نهايتها e.

❹ ليكن Θ_n حيز المستوى المحصور بين المنحنى (Γ) و المستقيمين $x=e$ و $x=\alpha_n$.

ا) بين أن مساحة الحيز Θ_n هي: $\frac{\alpha_n^2}{n}(u.m)$.

ب) بين أن $e-\alpha_n\leqslant\frac{\alpha_n^2}{n}\leqslant(e-\alpha_n)\ln(\alpha_n)$.
ثم استنتج تأطيرا لـ $n(e-\alpha_n)$.

ج) استنتج من جديد نهاية المتتالية (α_n).

تمرين 18

ليكن n من $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$. نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي:

$$f_n(x)=\frac{1+n\ln(x)}{x^2}$$

و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ منحناها في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(I

❶ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$. التأويل الهندسي .

❷ بين أن:

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}) : f_n'(x)=\frac{n-2-2n\ln(x)}{x^3}$$

❸ أحسب $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)$ بدلالة n ثم استنتج جدول تغيرات f_n.

❹ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$.

❺ أنشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_2)$ و $(\mathscr{C}_3)$. (نأخذ $e^{\frac{1}{6}}\simeq 1,18$ و $f_n\left(e^{\frac{1}{6}}\right)\simeq 1,08$)

II) نفترض أن $n\geqslant 3$.

❶ تحقق أن: $(\forall n\geqslant 3) : \ f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)>1$.

❷ تحقق أن المعادلة $f_n(x)=1$ لا تقبل حلا في $\left]1;e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$

❸ بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $\left[e^{\frac{n-2}{2n}};+\infty\right[$.

❹ بين أن: $(\forall n>e^2) : \ f_n\left(\sqrt{n}\right)\geqslant 1$.
استنتج أن: $(\forall n\geqslant 8) : \alpha_n\geqslant\sqrt{n}$ حدد $\lim\alpha_n$.