التمريـن الأول

الفضاء $(\mathscr{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.
نعتبر النقط $A\,(1;3;-4)$ و $B\,(1;7;-2)$ و $C\,(2;5;-2)$.

1. تحقق أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ ثم أحسب مساحة المثلث ABC.
2. بين أن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) هي: $2x+y-2z-13=0$.
3. لتكن (S) فلكة مركزها B و مماسة للمستقيم (AC).
   - أ) أحسب مسافة النقطة B عن المستقيم (AC).
   - ب) استنتج أن معادلة ديكارتية للفلكة (S) تكتب على الشكل $x^2+y^2+z^2-2x-14y+4z+50=0$.
   - ج) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AC) ثم استنتج مثلوث إحداثيات H نقطة تماس (AC) و (S).

التمريـن الثاني

I) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$
II) المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.
نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=-2$ و $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=1-i\sqrt{3}$.
و ليكن $\mathscr{R}$ الدوران الذي مركزه O و يحول النقطة C إلى النقطة B.

1. أكتب كلا من b و c على الشكل المثلثي ثم استنتج أن $b^{2010}=c^{2010}$
2. تحقق أن $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، ثم استنتج زاوية الدوران $\mathscr{R}$
3.
   - أ) حدد التمثيل العقدي للدوران $\mathscr{R}$
   - ب) تحقق أن $\mathscr{R}(B)=A$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

التمريـن الثالث

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام $1;1;2;3$ و خمس كرات حمراء تحمل الأرقام $1;1;2;2;3$.
I) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الكيس.

1. نعتبر الحدثين:
   A : " توجد كرة حمراء واحدة فقط من بين الكرات المسحوبة"
   B : " لا توجد أية كرة تحمل الرقم 3"
   بين أن احتمال الحدث A هو $\dfrac{5}{14}$ و أن $p(B)=\dfrac{5}{12}$.
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات المتبقية في الكيس التي تحمل الرقم 3.
   تحقق أن قيم المتغير X هي 0 و 1 و 2 ، ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

II) نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الكيس.
ما هو احتمال الحدث C : " مجموع الأرقام الثلاثة المحصل عليها فردي"

مسـألـــة

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln(x)$.

① بين أن $(\forall x>0):\ g'(x)=\dfrac{x-1}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

② ضع جدول تغيرات الدالة g. (حساب النهايات غير مطلوب)

③ استنتج أن $(\forall x>0):\ g(x)\geqslant 0$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x}\ln(x)\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

① بين أن f متصلة على اليمين في الصفر. (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$)

② بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$، أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

③ ا) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ اتجاه مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

ج) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

④ ا) بين أن: $(\forall x>0):\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f

ج) أحسب $f'(1)$ ثم أول هندسيا هذه النتيجة.

⑤ بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

⑥ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المنحنى $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$ للدالة العكسية f^{-1} في نفس المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

⑦ ا) تحقق أن الدالة $H:x\mapsto\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\sqrt{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن: $\displaystyle\int_1^e\sqrt{x}\ln(x)\,dx=\dfrac{2e\sqrt{e}+4}{9}$.

ج) استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$. (نأخذ $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$)

الجزء الثالث: لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بما يلي: $u_o=\dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n-\sqrt{u_n}\ln(u_n)\ :\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

① بين بالترجع أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n>1$.

② بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة.

③ حدد نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

التمرين الأول

الفضاء $(\mathscr{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}};\vec{\mathrm{j}};\vec{\mathrm{k}})$.
نعتبر النقط $A\,(1;1;2)$ و $B\,(0;1;0)$ و $C\,(2;0;2)$.

1) ا) أحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

ب) استنتج أن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب: $2x+2y-z-2=0$.

2) ليكن (D) المستقيم المعرف بالتمثيل البارامتري التالي: $\begin{cases} x=-1-4t \\ y=1-4t \\ z=-2+2t \end{cases} \quad ; \quad (t\in\mathbb{R})$

ا) بين أن المستقيم (D) عمودي على المستوى (ABC).

ب) حدد مثلوث إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (D) و المستوى (ABC).

3) لتكن (S) الفلكة المعرفة بالمعادلة التالية: $x^2+y^2+z^2-2x-6y+6z+1=0$.

ا) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega\,(1;3;-3)$ و أن شعاعها هو $R=3\sqrt{2}$.

ب) بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة مركزها النقطة H و شعاعها $r=3$.

التمرين الثاني

يحتوي صندوق على أربع كرات خضراء تحمل الأرقام $1;1;2;2$ و ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام $1;2;2$.
نعتبر الحدثين:
A : " الحصول على كرتين من نفس اللون"
B : " الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 2"

1) نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق.

ا) تحقق من أن : $p(A)=\dfrac{3}{7}$ و أن $p(B)=\dfrac{1}{7}$.

ب) أحسب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون علما أن مجموع رقميهما يساوي 2.

2) نسحب الآن ثلاث كرات في آن واحد من الصندوق.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق.

ا) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

التمرين الثالث

I) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

II) المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$.
نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي $a=4i$ و $b=2\sqrt{3}+2i$ و $c=2\sqrt{3}-2i$ و $d=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

1) حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي b ، ثم استنتج أن b^{12} عدد حقيقي موجب قطعا.

2) تحقق أن $c-d=2(b-a)$ و أن $AD=BC$، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

3) ا) حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$.

ب) حدد التمثيل العقدي للدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه A و يحول O إلى B.

مسـالــــة

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ التمثيل المبياني لمنحناها في معلم متعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ بحيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

① أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا لكل من النتيجتين .

② ا) بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) :\ f'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f.

③ ا) بين أن النقطة $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

ب) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

ج) بين أن النقطة $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ في نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

④ بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

⑤ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المماس (T) في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

⑥ أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين محور الأفاصيل و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=1$.

⑦ ا) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال $]0;1[$.

ب) بين أن $\left(f^{-1}\right)'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-\alpha^2}$.

ج) أنشئ (Γ) منحنى الدالة f^{-1} في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

د) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال $]0;1[$.

⑧ نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o=0 \\ u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

ا) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) :\ 0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية (يمكنك استعمال رتابة الدالة f).

ج) بين أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمريـن الأول

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{-3u_n+4}{2u_n-5} \ ; \ n \geqslant 0 \end{cases}$.

1. ا) بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ -1 < u_n \leqslant 0$.

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.

2. ا) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 1 + u_{n+1} \leqslant \dfrac{1+u_n}{5}$.

ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 0 < 1 + u_n \leqslant \dfrac{1}{5^n}$.

ج) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

التمريـن الثاني

الفضاء $(\mathscr{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}};\vec{\mathrm{j}};\vec{\mathrm{k}}\right)$.

نعتبر النقط $A\,(1;1;-1)$ و $B\,(2;3;-3)$ و $C\,(1;0;1)$.

1. ا) بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

ب) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2. ا) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) العمودي على (ABC) و المار من النقطة O أصل المعلم.

ب) حدد إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوى (ABC).

ج) استنتج إحداثيات النقطة O' مماثلة النقطة O بالنسبة للمستوى (ABC).

د) حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AH]$.

التمريـن الثالث

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

2. المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$.
نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $Z_A=\sqrt{3}+i$ و $Z_B=\sqrt{3}-i$ و $Z_C=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ا) أكتب Z_A و Z_B على الشكل المثلثي ثم أنشئ النقطتين A و B .

ب) أحسب $Z_A^6 + Z_B^6$.

3. ا) حدد لحق النقطة E صورة النقطة C بالدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

ب) تحقق أن النقطة E هي منتصف القطعة $[OA]$.

4. النقطة F هي صورة النقطة C بالإزاحة $\mathcal{T}$ ذات المتجهة $2\vec{v}$. بين أن: $Z_F = \dfrac{1}{2} + i\left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. ا) بين أن: $\dfrac{Z_F - Z_E}{Z_A - Z_E} = \left(\sqrt{3}-1\right)i$.

ب) استنتج أن المستقيم (FB) هو واسط القطعة $[OA]$.

التمريــن الرابع

① ا) أحسب التكاملين $\int_{-1}^{1} x^3 - 2x \, dx$ و $\int_{0}^{1} \frac{3}{(2x+1)^2} \, dx$.

ب) باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء أحسب التكامل $\int_{0}^{\ln 2} x e^{2x} \, dx$.

② ا) حل المعادلة التفاضلية : $y'' - 2y' - 15y = 0$.

ب) حدد الحل y الذي يحقق الشرطين $y(0) = 3$ و $y'(0) = -1$.

التمريــن الخامس

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = 1 + xe^x$.

① أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

② تحقق أن g تزايدية قطعا على المجال $[-1; +\infty[$ و تناقصية قطعا على المجال $]-\infty; -1]$.

③ استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = \ln(1 + xe^x) - x$
و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

① بين أن $D_f = \mathbb{R}$.

② ا) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

③ ا) تحقق من أن: $f(x) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ج) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا .

④ ا) بين أن : $f'(x) = \frac{e^x - 1}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f

⑤ بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 0]$.

⑥ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) في المعلم $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$. (نقبل أن للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نقطتي انعطاف تحديدهما غير مطلوب)

التمرين الأول

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+z+1=0$

2. المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$.

نضع : $w=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ و نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $Z_A=-1$ و $Z_B=w$ و $Z_C=\overline{w}$. حيث $\overline{w}$ هو مرافق العدد العقدي w.

ا) أكتب w على الشكل الأسي، ثم تحقق أن: $w^2=\overline{w}$ و $w^3=1$.

ب) بين أن: $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}=w$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3. ا) بين أن الرباعي $OBAC$ معين.

ب) حدد التمثيل العقدي للدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه B و يحول النقطة A إلى النقطة O.

التمرين الثاني

الفضاء $(\mathscr{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}};\vec{\mathrm{j}};\vec{\mathrm{k}}\right)$.
نعتبر النقط $A(1;0;1)$ و $B(0;1;0)$ و $C(0;1;1)$ و $E(1;1;0)$.
و ليكن (D) المستقيم المار من E و $\vec{u}(1;1;-1)$ متجهة موجهة له.

1. ا) بين أن $x+y-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب) أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).

ج) حدد تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (D).

2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P) الذي يتضمن (D) و العمودي على (ABC).

3. نعتبر الفلكة (S) المعرفة بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$.

ا) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ و أن شعاعها هو $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ب) بين أن تقاطع المستوى (ABC) و الفلكة (S) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين الثالث

يحتوي كيس على ثمانية بيدقات مرقمة كالتالي: 2 0 1 1 2 0 1 0
نسحب بالتتابع و بدون إحلال بيدقتين من الكيس.
نعتبر الحدثين:
A : "الحصول على بيدقتين مجموع رقميهما يساوي 2"
B : "الحصول على بيدقتين تحملان نفس الرقم"

1. احسب $p(B)$ ثم بين أن $p(A)=\dfrac{9}{28}$ و أن $p(A\cap B)=\dfrac{3}{28}$.

2. هل الحدثان A و B مستقلان.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع رقمي البيدقتين المسحوبتين.
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

مسـالــــة

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = x - 1 + e^{-x}$.

1. أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
2. أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$. ثم أعط جدول تغيرات الدالة g.
3. استنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : \; x + e^{-x} \geqslant 1$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = x + \ln\left(x + e^{-x}\right)$
و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.
2. ا) تحقق أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \ln(1 + xe^{x})$
   ب) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.
3. ا) تحقق من أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) : f(x) = x + \ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{xe^{x}}\right)$.
   ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   ج) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$ ثم استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.
4. ا) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+1)$.
   ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f
   ج) حدد معادلة المستقيم (T) المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الأفصول 0.
5. ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $y = x$.
   ا) بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) - x \geqslant 0$.(يمكنك استعمال نتيجة السؤال (3) من الجزء الأول)
   ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ).
6. أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.(نأخذ $\ln\left(1 - e^{-1}\right) \simeq -0,46$)
7. أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و منحنى الدالة $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{xe^{x}}\right)$ و المستقيمين المعرفين على التوالي بالمعادلتين: $x = 1$ و $x = e$.

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي:
$$\begin{cases} u_o = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \; -1 \leqslant u_n \leqslant 0$.
2. بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية.
3. استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الأول

الفضاء $(\mathscr{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}};\vec{\mathrm{j}};\vec{\mathrm{k}})$.

نعتبر النقط $A(1;0;1)$ و $B(0;-4;4)$ و $C(3;-4;5)$.

و الفلكة (S) التي معادلتها الديكارتية $x^2+y^2+z^2-4x+4y-6z+8=0$.

1) أ) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,-2,3)$ و أن شعاعها هو $R=3$.

ب) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى الفلكة (S) ثم أكتب معادلة المستوى (P) المماس للفلكة (S) في النقطة A .

2) أ) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}+10\vec{j}+12\vec{k}$

ب) استنتج أن $2x-5y-6z+4=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ج) بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة $(\mathscr{C})$ يتم تحديد مركزها و شعاعها.

3) أ) أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) بين أن $(\mathscr{C})$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين الثاني

المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+13=0$

2) نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي $a=2+3i$ و $b=2-3i$ و $m=1$.

أ) بين أن: $MA=MB$.

ب) ليكن c لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي لحق متجهتها $-4-2i$. بين أن: $c=-2+i$.

ج) بين أن: $\dfrac{c-m}{a-m}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث AMC.

3) ليكن $\mathscr{R}$ الدوران الذي مركزه M و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

أ) بين أن $\mathscr{R}(C)=A$.

ب) بين أن لحق النقطة D صورة النقطة B بالدوران $\mathscr{R}$ هو $d=\overline{c}$ ($\overline{c}$ هو مرافق العدد c).

ج) استنتج مما سبق أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى دائرة مركزها النقطة M.

د) بين أن المستقيم (AD) هو ارتفاع في المثلث ABC.

التمرين الثالث

1) أ) تحقق أنه لكل x من $\mathbb{R}^+$ لدينا: $\dfrac{x^3}{x+1}=x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}$.

ب) استنتج أن : $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{6}-\ln(2)$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل: $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

التمريـــن الرابع

يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات سوداء . (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)

I) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق و نعتبر الحدثين التاليين:

A : " الحصول على ثلاث كرات لها نفس اللون"

B : " الحصول على الأقل على كرة واحدة بيضاء"

1. أحسب احتمالي الحدثين A و B .
2. بين أن $p_B(A) = \dfrac{2}{17}$. هل الحدثين A و B مستقلان . علل جوابك

II) نسحب الآن كرة واحدة من الصندوق ، إذا كانت بيضاء نضعها جانبا ثم نسحب كرة ثانية و إذا كانت سوداء نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب كرة ثانية.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لكرتين بعدد الكرات السوداء المتبقية في الصندوق.

1. حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X. (يمكن استعمال شجرة الاختيارات)
2. بين أن : $p(X = 2) = \dfrac{26}{49}$. ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

التمرين الخامس

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بما يلي: $g(x) = \ln(x) - x - 1$.

1. تحقق أن $g'(x) = \dfrac{1-x}{x}$ لكل x من I . ثم استنتج رتابة g على كل من المجالين $[1; +\infty[$ و $]0; 1]$.
2. استنتج أن $g(x) < 0$ لكل x من I .

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \dfrac{(x-1)\ln(x)}{x+1} + 1$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. ا) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

   ب) بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   ج) بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.
2. ا) بين أن: $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}\left(2\ln(x) + \dfrac{x^2-1}{x}\right)$

   ب) بين أن f تزايدية على المجال $[1; +\infty[$ و تناقصية على المجال $]0; 1]$.

   ج) ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال I.
3. ا) بين أنه لكل x من I : $f(x) - x = g(x) \times \dfrac{x-1}{x+1}$.

   ب) استنتج أنه لكل x من $[1; +\infty[$: $f(x) \leqslant x$

   ج) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o = e \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ u_n > 1$.
2. بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة .
3. أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

التمرين الأول

الفضاء $(\mathscr{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}};\vec{\mathrm{j}};\vec{\mathrm{k}}\right)$.

نعتبر النقط $A\,(0;-1;1)$ و $B\,(1;-2;0)$ و $C\,(-2;0;1)$ و $D\,(2;3;-1)$.

1. بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+2\vec{j}-1\vec{k}$ ثم أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
2. ا) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم المار من النقطة D و العمودي على المستوى (ABC).
   ب) حدد إحداثيات المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC).
3. لتكن (S) الفلكة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-22=0$.
   ا) حدد مركز و شعاع الفلكة (S).
   ب) بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة $(\mathscr{C})$ يتم تحديد مركزها و شعاعها.

التمرين الثاني

المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$.

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+12=0$
2. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=2\sqrt{3}$ و $b=3+i\sqrt{3}$ و $c=3-i\sqrt{3}$.
   ا) أكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية: b و c و $\dfrac{b}{c}$.
   ب) استنتج أن المثلث OBC متساوي الأضلاع
3. نعتبر الدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$.
   ا) بين أن $z'=ze^{i\frac{\pi}{4}}$ هي الكتابة العقدية للدوران $\mathscr{R}$
   ب) ليكن a' لحق النقطة A' صورة النقطة A بالدوران $\mathscr{R}$
   أكتب $\dfrac{a'}{b}$ على الشكل المثلثي و على الشكل الجبري ثم استنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{7u_n+4}{2u_n+5}\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

1. بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n>2$.
2. بين أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-2\,(u_n+1)\,(u_n-2)}{2u_n+5}$ و استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.
3. نعتبر المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة بما يلي: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$
   ا) بين أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$ ثم أكتب v_n بدلالة n.
   ب) استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n=\dfrac{4+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمريـن الرابع

يحتوي صندوق على أربع بيدقات زرقاء تحمل الأرقام $1;1;2;2$ و بيدقتين حمراوين تحملان الرق 2 و بيدقتين خضراوين تحملان الرقم 1.

① ① ② ② ② ② ① ①

I) نسحب تتابعا و بدون إحلال بيدقتين من الصندوق و نعتبر الحدثين التاليين:

A : "الحصول على بيدقتين من لونيين مختلفين"

B : "الحصول على بيدقتين تحملان نفس الرقم"

❶ أحسب احتمال الحدث A و احتمال الحدث B .

❷ احتمال الحدث سحب بيدقتين من نفس اللون علما أنهما تحملان رقميين مختلفين. (استعمل $\overline{A}$ و $\overline{B}$)

II) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد البيدقات الخضراء المتبقية في الصندوق.

❶ حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

❷ نكرر التجربة السابقة 4 مرات ، بحيث في كل مرة نعيد البيدقات المسحوبة إلى الصندوق.
ما هو احتمال الحصول مرتين بالضبط على ثلاث بيدقات مختلفة اللون مثنى مثنى ؟

التمرين الخامس

ملاحظة : الجزء الأول و الجزء الثاني مستقلان فيما بينهما.

الجزء الأول:

❶ أحسب التكاملين $\displaystyle\int_0^{e-1}\left(x-\frac{1}{x+1}\right)dx$ و $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$.

❷ باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء أحسب التكامل $\displaystyle\int_2^4 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx$.

❸ حل المعادلة التفاضلية : $y''-3y'+4y=0$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=\ln\left(e^{2x}+2e^{-x}\right)$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

❶ بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ ا) بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right):\ f(x)=2x+\ln\left(1+2e^{-3x}\right)$.

ب) استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (D) .

ا) بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^-\right):\ f(x)=-x+\ln\left(e^{3x}+2\right)$.

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+\ln(2)$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

❸ ا) بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}):\ f'(x)=\dfrac{2\left(e^{3x}-1\right)}{e^{3x}+2}$

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

❹ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

❺ ليكن h قصور الدالة f على المجال $I=[0;+\infty[$

ا) بين أن h تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب) أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة العكسية h^{-1} .

التمرين الأول

الفضاء $(\mathscr{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A\,(0;-2;0)$ و $B\,(1;1;-4)$ و $C\,(0;1;-4)$.

و الفلكة (S) التي معادلتها الديكارتية $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

1. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
2. ا) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega\,(1,2,3)$ و أن شعاعها هو $R=5$.
   ب) بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).
3. ا) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC).
   ب) حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) .

التمرين الثاني

المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$
2. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=2+3i$ و $b=4+i$ و $c=3+\sqrt{3}+\left(4-\sqrt{3}\right)i$.
   ا) بين أن : $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.
   ب) استنتج أن ABC متساوي الساقين ثم حدد قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.
   ج) تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{6}$.
3. أكتب العدد $(b-a)$ على الشكل المثلثي ثم استنتج عمدة للعدد العقدي $(c-a)$.
4. أكتب التمثيل العقدي للتحاكي الذي مركزه I منتصف القطعة $[AB]$ و نسبته 2.

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o=-3 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n-2}{4-u_n}\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

1. بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n<-2$.
2. بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية قطعا و استنتج أنها متقاربة.
3. نعتبر المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة بما يلي: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-1}$
   ا) بين أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ ثم أكتب v_n بدلالة n.
   ب) استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}-1}$. ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمريــن الرابع

يحتوي صندوق على سبع كرات سوداء و ثلاث كرات بيضاء. (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)

I) نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق .

أحسب احتمال الحدث: A : "الحصول على كرتين مختلفتي اللون"

II) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من الصندوق .

أحسب احتمال الحدث: B : "الحصول على أربع كرات لها نفس اللون"

III) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة من الصندوق.

1. حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X
2. بين أن: $p(X=1)=\dfrac{21}{40}$ و أن $p(X=2)=\dfrac{7}{40}$.
3. حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الخامس

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=e^{x+1}-x-2$.

1. أحسب $g(-1)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
2. أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$. ثم أعط جدول تغيرات الدالة g.
3. استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}$ يخالف (-1) لدينا: $g(x)>0$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=e^{-(x+1)}+\ln(x+2)$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.
2. حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

   ا) بين أن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+2)e^{x+1}}$ لكل x من $]-2;+\infty[$.

   ب) تحقق أن $f'(-1)=0$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

   ج) أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f .
3. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. نأخذ $f(0)\approx 1,2$

الجزء الثالث:

1. تحقق أن : $\dfrac{x}{x+2}=1-\dfrac{2}{x+2}$ ثم أحسب التكامل $I=\displaystyle\int_{-1}^{0}\dfrac{x}{x+2}\,dx$.
2. باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء بين أن $\displaystyle\int_{-1}^{0}\ln(x+2)\,dx=2\ln(2)-1$.
3. أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين على التوالي بالمعادلتين: $x=-1$ و $x=0$.