تمارين التحليل من امتحانات الباك

الثانية باك علوم رياضية
ذ: توفيق بنعمرو

باك 2018 د ع

الجزء I: 1) أ) بين أنّ $\forall x\in]0,+\infty[:\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x-\ln(1+x)$

ب) باستعمال تغيير المتغير $u=t^2$ بين أنّ $\forall x>0:\int_0^x\frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du$

ج) استنتج بالتوفيق أنّ: $\forall x\in]0,+\infty[:\frac{1}{2(1+x)}\le\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le\frac{1}{2}$

2) حدّد $\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ بالتوفيق

الجزء II: f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب $\begin{cases} f(x)=(\frac{x+1}{x})\ln(1+x)\ ;\ x\ne0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) أ) بين أنّ f متصلة على بالتوفيق اليمين في 0

ب) بين أنّ f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (يمكن استعمال نتيجة I) 2))

ج) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أوّل مبيانياً النتيجة المحصل عليها

2) أ) بين أنّ f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم تحقق أنّ: $\forall x\in]0,+\infty[\ f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ و استنتج أنّ f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

ب) تحقق أنّ $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$

3) مثّل مبيانياً المنحنى C_f (يتمّ إنشاء نصف المماس على اليمين في $A(0,1)$)

الجزء III: 1) نعتبر الدالة $g(x)=f(x)-x$ المعرّفة على $]0,+\infty[$

أ) بين بالتوفيق أنّ $\forall x\in]0,+\infty[:0\le f'(x)\le\frac{1}{2}$

ب) استنتج أنّ g تناقصية قطعاً على $]0,+\infty[$ ثم بين أنّ $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$

ج) بين أنّ المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاً وحيداً α على $]0,+\infty[$

2) ليكن a عدداً حقيقياً من المجال $]0,+\infty[$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرّفة بما يلي: $u_0=a$ و $(\forall n\in\mathbb{N}):u_{n+1}=f(u_n)$

أ) بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n>0$ و أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

ب) بين بالترجع أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}:|u_n-\alpha|\le(\frac{1}{2})^n|a-\alpha|$

ج) استنتج أنّ بالتوفيق المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ تؤول إلى α

باك 2018 د ع

نعتبر الدالة F المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

1) بين أنّ F متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

2) أ) بين أنّ $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ F(x)\ge x$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

ب) بين أنّ F فردية ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty}F(x)$

ج) بين أنّ F تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

د) بين أنّ دالة التقابل العكسي G للدالة F قابلة للاشتقاق في 0 ثم أحسب $G'(0)$

باك 2018 د س

لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ ب $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$ $x>0$ و $f(0)=0$

1) أ) بين أنّ f متصلة على اليمين في 0 (لاحظ أن $f(x)=(4x^{\frac{1}{4}}\ln(x^{\frac{1}{4}}))^2$)

ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانياً النتيجة المحصل عليها

2) أ) أدرس اشتقاق f على اليمين في 0 ثم أول مبيانياً النتيجة المحصل عليها

ب) بين أنّ f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل $x>0$

ج) أدرس تغيرات f على $[0,+\infty[$ استنتج أنّ $\forall x\in]0,1]:0\le\sqrt{x}(\ln x)^2\le(\frac{4}{e})^2$

د) أنشئ بالتوفيق C_f نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

3) لكل $x\ge0$ نضع $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

أ) بين أنّ f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$

ب) أحسب $F'(x)$ لكل $x\ge0$ استنتج رتابة F على $[0,+\infty[$

4) أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بالتوفيق أحسب $\int_x^1\sqrt{t}\ln t\,dt$ لكل $x>0$

ب) بين أنّ $F(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2+\frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x-\frac{16}{27}x\sqrt{x}+\frac{16}{27}$ $x>0$

ج) استنتج مساحة الحيز المستوي المحصور بين C_f و المستقيمات المعرّفة بالمعادلات $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

5) لكل عدد صحيح طبيعي غير بالتوفيق منعدم n نضع $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$

بين أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ محدودة و رتيبة قطعاً و أنّ متقاربة ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

باك 2017 د ع

الجزء الأول: لتكن f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب $f(x)=(1+\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ و $f(0)=0$

1) أ) بين أنّ f متصلة على اليمين في 0 وأنّ f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

ب) بين أنّ f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل $x>0$

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و أوّل مبيانياً النتيجة المصل عليها ثم أعط جدول التغيرات

3) أ) بين أنّ C_f يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها

ب) أنشئ C_f في معلم م م الوحدة $2\,cm$ نأخذ $f(1)\approx0,7$ و $4e^{-3}\approx0,2$

الجزء الثاني: نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,+\infty[$ ب $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

1) بين أنّ F متصلة بالتوفيق على $[0,+\infty[$

2) أ) بمكاملة بالأجزاء بين أنّ $\forall x>0:\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt=e^{-1}-xe^{-\frac{1}{x}}-\int_x^1\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$

ب) حدّد $\int_x^1(1+\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}}dt$ لكل x من $]0,+\infty[$ وبين أنّ $\int_0^1 f(x)dx=e^{-1}$

3) حدد ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين C_f و $x=0$ و $x=2$ و $y=0$

4) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بما يلي: $u_n=F(n)-F(n+2)$

أ) باستعمال التزايدات المنتهية، بين أن $\exists v_n\in]n,n+2[:u_n=2(1+\frac{1}{v_n})e^{-\frac{1}{v_n}}$

ب) بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*:2(1+\frac{1}{n})e^{-\frac{1}{n}}\le u_n\le2(1+\frac{1}{n+2})e^{-\frac{1}{n+2}}$ واستنتج $\lim_{+\infty}u_n$

الجزء الثالث: 1) أ) بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!a_n>0):f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$

ب) بين أنّ (a_n) تزايدية قطعاً و تحقق أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*:-\frac{1}{a_n}+\ln(1+\frac{1}{a_n})=-\frac{1}{n}$

2) أ) بين بالتوفيق أنّ $\forall t\in[0,+\infty[:1-t\le\frac{1}{1+t}\le1-t+t^2$

ب) بين أنّ $\forall x\in[0,+\infty[:-\frac{x^2}{2}\le-x+\ln(1+x)\le-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3) ليكن $n\ge4$ أ) تحقّق أنّ $a_4\ge1$ و استنتج أن $a_n\ge1$ (نقبل أنّ $e^{\frac{3}{4}}\ge2$)

ب) بين أنّ $1-\frac{2}{3a_n}\le\frac{2a_n^2}{n}\le1$ (استعمل 1) ب) و 2) ب) من الجزء الثالث)

ج) بين أنّ $\sqrt{\frac{n}{6}}\le a_n$ (استعمل 3) أ) وب)) وحدّد $\lim_{+\infty}a_n$ ثم $\lim_{+\infty}a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

باك 2017 د س

الجزء الأول: f الدالة العددية المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي: $f(0)=1$ و $\forall x\in]0,+\infty[: f(x)=\frac{\arctan(x)}{x}$ **بالتوفيق**

1) بين أنّ f متصلة على المجال I

2) أ) ليكن x من I بين أنّ $\forall t\in[0,x]: \frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+t^2}\le 1$

ب) بين أنّ $\forall x\in[0,+\infty[: \frac{x}{1+x^2}\le\arctan(x)\le x$

ج) بين أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

3) أ) علماً أنّ f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ،أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I

الجزء الثاني: لتكن g الدالة المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي:

$g(0)=1$ و $\forall x\in]0,+\infty[: g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ **بالتوفيق**

1) أ) بين أنّ $\forall x\in]0,+\infty[: f(x)\le g(x)\le 1$

ب) بين أنّ g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

2) بين أنّ g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأنّ $\forall x>0: g'(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x}$

3) بين أنّ g تناقصية على I

4) أ) بين أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$ (لاحظ $\forall x\in]0,+\infty[: 0<\arctan x<\frac{\pi}{2}$)

ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

الجزء الثالث:

1) بين أنّ المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$

2) أ) تحقق أنّ $\forall x\in[0,+\infty[: 0\le 1-f(x)\le\frac{x^2}{1+x^2}$ (استعمل 2) ب) الجزء 1)

ب) بين أنّ $\forall x\in[0,+\infty[: |g'(x)|\le\frac{1}{2}$

3) لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ المتتالية المعرفة ب: $u_0\in\mathbb{R}^+$ و $u_{n+1}=g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ ثم بين أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة

باك 2016 د ع

الجزء الأول: بالتوفيق

1) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t\mapsto e^{-t}$ بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي θ محصور بين 0 و x بحيث $e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}$

2) استنتج أنّ: أ) $\forall x>0 ;\ 1-x<e^{-x}$ و أن: بالتوفيق $\forall x>0 ;\ x+1<e^x$

ب) $\forall x>0 ;\ 0<\ln(\frac{xe^x}{e^x-1})<x$

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة بالتوفيق على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f(0)=1$ و $f(x)=\frac{xe^x}{e^x-1}$ إذا كان $x>0$

1) أ) بين أنّ الدالة f متصلة على اليمين في 0

ب) بين أنّ $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ ثم أوّل مبيانياً بالتوفيق النتيجة المحصل عليها

2) أ) بين أنّ $\forall x\ge0\ \ x-\frac{x^2}{2}\le -e^{-x}+1$ (يمكنك استعمال 2)أ) من الجزء الأول)

ب) استنتج بالتوفيق أنّ $\forall x\ge0\ \ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}$

3) أ) تحقّق أنّ $\forall x>0\ \ \frac{f(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}+x-1}{x}f(x)$

ب) استنتج أنّ $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$ ثم أوّل النتيجة بالتوفيق المحصل عليها

4) أ) بين أنّ f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأنّ $\forall x>0\ \ f'(x)=\frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}$

ب) استنتج أنّ الدالة f تزايدية قطعاً على $[0,+\infty[$ (استعمل 2) ب) من الجزء 1)

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ بالتوفيق المعرّفة بما يلي:

$u_0>0$ و $u_{n+1}=\ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n

1) بين أنّه لكل عدد بالتوفيق صحيح طبيعي n لدينا $u_n>0$

2) بين أنّ المتتالية تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة (استعمل 2) ج) من الجزء 1)

3) بين أنّ 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln(f(x))=x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

باك 2016 د ع

نعتبر الدالة F المعرفة على $I=]0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_{\ln 2}^x\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$

1) أ) أدرس إشارة بالتوفيق $F(x)$ لكل x من I

ب) بين أنّ F قابلة للاشتقاق على I و أحسب $F'(x)$ لكل x من I

ج) بين أنّ F تزايدية قطعاً على I

2) أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير وذلك بوضع $u=\sqrt{e^t-1}$

بين أنه لكل x من I: $\int_{\ln 2}^x\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\,dt=2\arctan(\sqrt{e^x-1})-\frac{\pi}{2}$

ب) أحسب بالتوفيق $\lim_{x\to0+}F(x)$ و بالتوفيق $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

3) بين أنّ الدالة F تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده و حدّد $F^{-1}(x)$

باك 2016 د س

n عدد صحيح طبيعي بالتوفيق غير منعدم

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $f_n(x)=\ln(x)-\frac{n}{x}$

(C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n)

ب) أدرس تغيرات الدالة f_n على $]0,+\infty[$ ثم أعط جدول تغيراتها

ج) أنشئ بالتوفيق (C_2)

2) بين أنّ الدالة f_n تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$

3) أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,+\infty[$ بالتوفيق بحيث $f_n(\alpha_n)=0$

ب) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ج) بين أنّ المتتالية $(\alpha_n)_{n\ge1}$ تزايدية قطعاً

4) أ) بين أنّ $\forall x>0; \ln(x)<x$

ب) بين بالتوفيق أنّ $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$

5) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع $I_n=\frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}f_n(x)\,dx$

أ) بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists c_n\in[\alpha_n,\alpha_{n+1}]): \ I_n=f_n(c_n)$

ب) بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}^*) ;\ 0\le I_n\le\frac{1}{\alpha_{n+1}}$ ثم بالتوفيق حدّد $\lim_{n\to+\infty}I_n$

باك 2016 د س

n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2

نعتبر الدالة g_n ذات المجهول x المعرفة على $[n,+\infty[$ بما يلي: $g_n(x)=\int_n^x\frac{1}{\ln t}\,dt$

1) أ) بين أنّ الدالة g_n قابلة للاشتقاق على $]n,+\infty[$ ثم حدّد دالتها المشتقة الأولى g_n'

ب) بين أنّ الدالة g_n تزايدية قطعاً بالتوفيق على المجال $[n,+\infty[$

2) أ) بين أنّ $\forall x\ge n\ \ g_n(x)\ge \ln(\frac{x-1}{n-1})$ (يمكنك استعمال $\forall t\ge 0:\ln(1+t)\le t$)

ب) استنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)=+\infty$

3) أ) بين أنّ الدالة بالتوفيق g_n تقابل من $[n,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$

ب) استنتج أنّ $(\forall n\ge 2)(\exists! u_n\ge n):\int_n^{u_n}\frac{1}{\ln t}dt=1$ بالتوفيق

4) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge 2}$ المعرفة في السؤال 3) ب)

أ) بين أنّ $\forall n\ge 2:\int_{u_n}^{u_{n+1}}\frac{1}{\ln t}dt=\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln t}dt$

ب) استنتج أنّ $(u_n)_{n\ge 2}$ تزايدية قطعا ثم حدّد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

باك 2015 د ع

الجزء الأول: لتكن f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f(0)=0$ و $f(x)=x(1+\ln^2 x)$ بالتوفيق إذا كان $x>0$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانياً النتيجة المحصل عليها

2) أ) بين أنّ f متصلة على اليمين في 0

ب) أحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول بالتوفيق مبيانياً النتيجة المحصل عليها

ج) أحسب $f'(x)$ $x>0$ ثم استنتج أنّ f تزايدية قطعاً على $[0,+\infty[$

3) أ) بين أنّ C_f يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}

ب) أدرس الوضع النسبي ل C_f بالنسبة للمستقيم $y=x$ ثم أنشئ C_f $e^{-1}\approx 0.4$

الجزء الثاني: نعتبر $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة ب $u_0=e^{-1}$ و $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=f(u_n)$

1) بين بالترجع أنّ $\forall n\in\mathbb{N}\ \ e^{-1}\le u_n<1$

2) بين أنّ المتتالية تزايدية قطعاً بالتوفيق ثم استنتج أنها متقاربة

3) نضع $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ بين أنّ $e^{-1}\le\ell\le 1$ ثم حدّد قيمة ℓ

الجزء الثالث: لتكن F المعرفة على بالتوفيق $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

1) أ) بين أنّ $H:x\mapsto -\frac14x^2+\frac12x^2\ln x$ دالة أصلية بالتوفيق ل $h:x\mapsto x\ln x$ على $]0,+\infty[$

ب) بين أنّ $\int_1^x t\ln^2(t)\,dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln t\,dt$ $\forall x>0$ بالتوفيق

ج) استنتج أن $\forall x>0\ F(x)=-\frac34+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

2) أ) بين أنّ بالتوفيق الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$

ب) أحسب $\lim_{x\to0^+}F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$

باك 2015 د ع

نعتبر الدالة g المعرّفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(0)=\ln 2$ و $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$

1) أ) بين أنّ $(\forall x>0)(\forall t\in[x,2x])\ e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$

ب) بين أنّ $\forall x>0:e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$ واستنتج أنّ g متصلة في 0^+

2) بين أنّ g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب $g'(x)$ $x>0$

3) أ) بين أنّ $\forall t>0\ \ -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ (يمكنك استعمال التزايدات المنتهية)

ب) بين بالتوفيق أنّ $\forall x>0\ \ -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

ج) استنتج أنّ الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في صفر

باك 2015 د س

نعتبر الدالة $n\in\mathbb{N}^*$ $f_n(x)=\frac{1}{1+e^{-\frac32(x-n)}}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنتائج

2) بين أنّ f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وحدّد $f_n'(x)$ و أنها تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

3) أ) بين أنّ $I_n(n,\frac12)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n) ثم أنشئ (C_1)

ب) أحسب مساحة الحيز المحصور بين C_1 و المستقيمات $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

4) $n\in\mathbb{N}^*$ بين أن المعادلة $f_n(x)=x$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,n[$

5) بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}):f_{n+1}(x)<f_n(x)$

6) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا ومتقاربة ثم حدّد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

باك 2015 د س

نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$

1) بين أنّ الدالة g زوجية

2) بين أنّ g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم بالتوفيق أحسب $g'(x)$ $x>0$

3) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أنّ

$$\forall x>0:\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

ب) بين أنّ $\forall x>0:|g(x)|\le\frac{2}{x}$ و بالتوفيق استنتج $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

4) أ) بين أنّ $\forall x>0:0\le\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt\le 2x$ لاحظ أن $\forall t>0:1-\cos t\le t$

ب) تحقق أنّ $\forall x>0:g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt$ ثم استنتج $\lim_{x\to0^+} g(x)$

باك 2014 د ع

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2}\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) أ) بين أنّ بالتوفيق الدالة f متصلة على $[0,+\infty[$

ب) أدرس إشارة $f(x)$ على بالتوفيق $[0,+\infty[$

2) أ) بين أنّ $f(\frac1x)=-f(x)$ $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$

ب) بين أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

ج) بين أنّ بالتوفيق $f'(\alpha)=0$ $(\exists\alpha\in]0,1[)$

د) استنتج أنّ $f'(\frac{1}{\alpha})=0$

بالتوفيق

II) نعتبر بالتوفيق الدالة F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

1) أ) تحقق أنّ $\frac12\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1$ $(\forall t\in[1,+\infty[)$

ب) بين أنّ $(\forall x\in[1,+\infty[)\ F(1)-\frac12(\ln x)^2\le F(x)\le F(1)-\frac14(\ln x)^2$

(لاحظ بالتوفيق أنّ $F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt-\int_1^x\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\ln t}{t}dt$)

ج) أحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ ثم أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها

2) أ) بين أنّ الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ثم أحسب $F'(x)$

ب) أدرس تغيرات الدالة F بالتوفيق على المجال $[0,+\infty[$

III) 1) أ) بين أنّ $\forall t\in]0,+\infty[\ -t\ln t\le\frac1e$ ثم بين أنّ $\forall t\in[0,+\infty[\ \ f(t)\le\frac1e$

ب) استنتج بالتوفيق أنّ $F(x)<x$ $(\forall x\in]0,+\infty[)$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة بحيث $u_0\in]0,1[$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=F(u_n)$

أ) بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n\in]0,1[$

ب) بين أنّ المتتالية تناقصية قطعاً و استنتج أنها بالتوفيق متقاربة ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

باك 2014 د ع

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx \\ g(0)=0 \end{cases}$

1) بين أنّ الدالة g متصلة بالتوفيق على $[0,+\infty[$

2) لكل x من $[0,+\infty[$، نضع $L(x)=\int_0^x g(t)\,dt$

أ) بين أنّ الدالة L متصلة على $[0,+\infty[$ وأحسب $L(x)$ من أجل $x>0$

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to0+}L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$

3) لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع $s_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{p=n-1} g(\dfrac{p}{n})$

بين أنّ المتتالية $(s_n)_{n\geq1}$ بالتوفيق متقاربة ثم حدّد نهايتها

باك 2014 د س

I) لتكن f الدالة المعرفة بالتوفيق على $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=1cm$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم أعط تأويلاً هندسياً للنتيجتين المحصل عليهما

2) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$

3) لكل $n\in\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة g_n المعرفة على $]0,1[$ ب: $g_n(x)=f(x)-x^n$

أ) بين أنّ الدالة g_n تناقصية بالتوفيق قطعاً على المجال $]0,1[$

ب) استنتج أنّه $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\alpha_n\in]0,1[)\ f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$

ج) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $g_n(\alpha_{n+1})<0$

د) بين أنّ المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq1}$ تزايدية قطعاً بالتوفيق ثم استنتج أنها متقاربة

4) أ) نضع $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ تحقق أنّ $0<\alpha_1\leq\ell\leq1$

ب) تحقق أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ h(\alpha_n)=n$ حيث $h(x)=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

ج) بين أنّ $\ell=1$ ثم استنتج بالتوفيق أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$

II) 1) أ) أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x)\,dx$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ **بالتوفيق**

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين: $\forall x>0\ \int_x^1 f(x)\,dx=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$

ج) استنتج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C) والمستقيمات التي معادلاتها على التوالي $x=1$ و بالتوفيق $x=e^2$ و $y=0$

2) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}f(\dfrac{k}{n})$

أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n\geq2$ و $1\leq k\leq n-1$

لدينا: بالتوفيق $\dfrac{1}{n}f(\dfrac{k+1}{n})\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)\,dx\leq\dfrac{1}{n}f(\dfrac{k}{n})$

ب) بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt\leq u_n\leq\dfrac{1}{n}f(\dfrac{1}{n})+\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt$

ج) استنتج أنّ بالتوفيق $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$

باك 2014 د س

نعتبر الدالة g المعرّفة على $[0,+\infty[$ بالتوفيق بما يلي: $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2}\,dt$

1) لكل x من $\mathbb{R}$ نضع $k(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

أ) تحقق أنّه لكل x من $[0,+\infty[$ لدينا $g(x)=-k(\sqrt{x})$

ب) بين أنّ الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ج) أحسب $g'(x)$ $x>0$ ثم استنتج أنّ الدالة g تناقصية قطعاً على $[0,+\infty[$

2) أ) بين بالتوفيق أنّ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*:\ \dfrac{g(x)-g(0)}{x}<-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$

ب) استنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 وأعط تأويلا هندسيا

باك 2013 د ع

نعتبر الدالة h المعرفة على $[1,+\infty[$ ب: $h(1)=1$ و $\forall x>1:\ h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$

الجزء الأول: 1) أ) بين أن بالتوفيق الدالة h متصلة على اليمين في 1

ب) بين أنّ $\forall x>1\,;\ \ln x<x-1$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$

2) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات بالتوفيق الدالة h

ب) استنتج أنّ $(\forall x\geq1)\ ;\ 0<h(x)\leq1$

الجزء الثاني: نعتبر الدالة g المعرفة على $[1,+\infty[$ بما بالتوفيق يلي:

$$\forall x>1:\ g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt \text{ و } g(1)=\ln 2$$

1) أ) تحقق أنّ $\int_x^{x^2}\dfrac{1}{t\ln t}dt=\ln 2\ ;\ (\forall x>1)$

ب) تحقق بالتوفيق أنّ $g(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\dfrac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt\ ;\ (\forall x>1)$

ج) بين أنّ $g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\dfrac{t-1}{t\ln t}dt\ ;\ (\forall x>1)$

2) أ) بين أنّ $\forall x>1:(x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$

ب) استنتج أنّ الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

ج) بين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ وأنّ بالتوفيق $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$

3) أ) بين أن g قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ وأنّ $\forall x>1\ g'(x)=\dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$

ب) استنتج أنّ $\forall x\geq1\ ;\ 0<g'(x)\leq\dfrac{1}{2}$ ثم ضع بالتوفيق جدول تغيرات الدالة g

الجزء الثالث:

I) 1) بين أن الدالة $k:x\mapsto g(x)-x+1$ تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $]-\infty,\ln 2]$

2) استنتج أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $]1,+\infty[$ بحيث $1+g(\alpha)=\alpha$

II) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة ب $1\leq u_0<\alpha$ و $u_{n+1}=1+g(u_n)\ \ \forall n\geq0$

1) أ) بين أنّ $\forall n\geq0\ ;\ 1\leq u_n<\alpha$

ب) بين بالتوفيق أنّ المتتالية (u_n) تزايدية قطعا

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

2) أ) بين بالتوفيق أنّ $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|\ ;\ (\forall n\geq0)$

ب) بين أنّ $|u_{n+1}-\alpha|\leq(\dfrac{1}{2})^n|u_0-\alpha|\ ;\ (\forall n\geq0)$ **بالتوفيق**

ج) استنتج بالتوفيق مرة ثانية أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

باك 2013 د س

نضع $n\in\mathbb{N}^*$ بالتوفيق $U_n=\left(\dfrac{\text{Arctan}\,n}{\text{Arctan}(n+1)}\right)^{n^2}$ و $V_n=\ln U_n$

1) تحقّق أنّ $\forall n\geq1: V_n=n^2[\ln(\text{Arctan}\,n)-\ln(\text{Arctan}(n+1))]$

2) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين بالتوفيق أنّ

$$(\forall n\geq1)(\exists c\in]n,n+1[):V_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)\,\text{Arc}\tan c}$$

3) بين أنّ $(\forall n\geq1):\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\,\text{Arc}\tan n}<V_n<\dfrac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\,\text{Arctan}(n+1)}$

4) بالتوفيق أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

باك 2013 د س

1) لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2\ln^2 x}} \\ f(0)=1 \end{cases}$

أ) بين أنّ f متصلة على اليمين في 0 ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 (استعمل $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2 x=0$)

ج) بين أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و أنّ $\forall x>0\ ;\ f'(x)=\dfrac{-x\ln x(1+\ln x)}{(1+x^2\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$ ثم ضع جدول التغيرات

2) لتكن F الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

أ) حدد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e,+\infty[$

ب) بين أنّ $\forall t\geq e\ ;\ t\ln t\leq\sqrt{1+t^2\ln^2 t}\leq\sqrt{2}\,t\ln t$

ج) بين أنّ $\forall x\geq e\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)\leq\int_e^x\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2 t}}dt\leq\ln(\ln x)$

د) استنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ وأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

ه) بين أنّ C_F يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصولي كل واحدة منهما

ز) أنشئ C_F نأخذ $F(1)\simeq 0,5$ و $F(\frac{1}{e})\simeq 0,4$

3) لكل x من $[0,+\infty[$ نضع: $\varphi(x)=x-F(x)$

أ) بين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ ثم أدرس تغيرات الدالة φ

ب) بين أنه لكل $n\in\mathbb{N}$ المعادلة $\varphi(x)=n$ تقبل حلاً وحيداً α_n في $[0,+\infty[$

ج) بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \alpha_n\geq n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

4) أ) بين أنّ $\forall n\geq1\ ;\ 0\leq\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}\leq\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$ (التزايدات المنتهية)

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$

باك 2012 د ع

$n\in\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة $f_n(x)=x+\dfrac{e^{-x}}{n}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)$ ثمّ أدرس الفرع اللانهائي بجوار $-\infty$

2) بين أن $(D):y=x$ مقارب مائل جوار $+\infty$ وحدّد الوضع النسبي ل C_n و D

3) أدرس تغيرات f_n ثم أنشئ C_3 ($f_3(-0,6)\simeq0$ ، $f_3(-1,5)\simeq0$ و $\ln3\simeq1,1$)

4) أ) بين أنّه إذا كان $n\geq3$ فإنّ $\dfrac{e}{n}<\ln n$

ب) $n\geq3$ بين أن $f_n(x)=0$ تقبل حلين x_n و y_n : $x_n\leq-\ln n$ و $\dfrac{-e}{n}\leq y_n\leq0$

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

5) أ) بين أنّ الدالة $g(x)=-1-x\ln x$ و $g(0)=-1$ متصلة على اليمين في 0

ب) تحقّق أنّ $g(\dfrac{-1}{x_n})=\dfrac{\ln n}{x_n}$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{x_n}$

باك 2012 د ع

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,1]$ بما يلي: $F(0)=1$

و $F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ لكل x من $]0,1]$

1) ليكن x من $[0,1]$، بين أنّه لكل t من $[0,x]$ لدينا: $\dfrac{1}{1+2x}\leq\dfrac{1}{1+2t}\leq1$

2) ليكن x من $]0,1]$ أ) بين أنّ $F(x)=\dfrac{2}{x^2}\int_0^x\dfrac{t}{1+2t}dt$

ب) بين أنّ $\dfrac{1}{1+2x}\leq F(x)\leq1$ ثم استنتج أنّ F متصلة على اليمين في صفر

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أنّ لكل x من $[0,1]$

$$\int_0^x\frac{2t}{1+2t}dt=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2dt$$

4) ليكن x من $]0,1]$ أ) بين أنّ $F'(x)=-\dfrac{4}{x^3}\int_0^x\left(\dfrac{t}{1+2t}\right)^2dt$

ب) بين أنّ $-\dfrac{4}{3}\leq F'(x)\leq\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1))

ج) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في $[0,x]$،

بين أنّ $-\dfrac{4}{3}\leq\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leq\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

د) استنتج أنّ الدالة F للاشتقاق على اليمين في0 محدّدا عددها المشتق على اليمين في0

بكالوريا 2012 د س

I) لتكن $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$ المعرفة على $[0,+\infty[$

أدرس تغيرات g و استنتج إشارة $g(x)$ على $[0,+\infty[$

II) نعتبر الدالة $f(x)=e^x\cdot\ln(1+e^{-x})$ المعرفة على $\mathbb{R}$

1) بين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

2) بين أنّ $\forall x\in\mathbb{R}:f'(x)=e^xg(e^{-x})$ و ضع جدول التغيرات

3) أنشئ C_f : $-0,7$ أفصول نقطة الانعطاف، ثم أنشئ منحنى $(-f)$ في نفس المعلم

4) بين أن $\forall x\in[-1,0]:0<f'(x)\leq g(e)$

5) بين أن المعادلة $f(x)+x=0$ تقبل حلا وحيداً α في $\mathbb{R}$ وأنّ $-1<\alpha<0$

6) نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=0$

أ) بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}):-1\leq u_n\leq0$

ب) بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_{n+1}-\alpha|\leq g(e)|u_n-\alpha|$

ج) استنتج أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:|u_n-\alpha|\leq(g(e))^n$ ثم حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ نأخذ $g(e)<0,6$

بكالوريا 2012 د س

نعتبر الدالة F المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^x\dfrac{\ln t}{1+t^2}dt$

1) أحسب $F(1)$

2) بين أنّ F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أحسب $F'(x)$

ثم استنتج أنّ $\forall x\in]0,+\infty[:F(x)=0$

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أنّ

$$\forall x>0:F(x)=(\text{Arctan}x+\text{Arctan}\frac{1}{x})\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{\text{Arctan}t}{t}dt$$

4) بين أنّ $\forall x>0:\text{Arctan}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}-\text{Arctan}x$

واستنتج أنّ $\forall x>0:\ \ln x=\dfrac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^x\dfrac{\text{Arctan}\,t}{t}dt$

بكالوريا 2011 د ع

الجزء1: دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E):x^n=e^x$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة المعرفة على $[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ و $f(0)=0$

1) بين أنه لكل x من $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$ لدينا: $e^x=x^n\Leftrightarrow n=f(x)$

2) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

3) أحسب $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا

4) أدرس تغيرات f على $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم أعط جدول التغيرات

5) بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف حددها ثم أنشئ C_f

6) $n\geq 3$ بين أن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين a_n و b_n بحيث $1<a_n<e<b_n$

<u>الجزء2:</u> دراسة تقارب المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 3}$ و $(b_n)_{n\geq 3}$

1) بين أن $\forall n\geq 3: b_n\geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية (b_n)

2) أ) بين أن (a_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة

ب) بين أن $\forall n\geq 3: \frac{1}{n}<\ln(a_n)<\frac{e}{n}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ وبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n{}^n=e$

بكالوريا 2011 د ع

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ ب: $F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

1) أ) بين بالتوفيق أنّ $(\forall x\geq 0)\ ;0\leq F(x)\leq xe^{-x^2}$

ب) بين أنّ $(\forall x\geq 1)\ e^{-x^2}\leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالةبالتوفيق F عند $+\infty$

2) بين أنّ F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$وأنّ $\forall x\geq 0; F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$

3) نعتبر الدالة G المعرفة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ ب: $\begin{cases} G(x)=F(\tan x)\ ;\ 0\leq x<\frac{\pi}{2} \\ G(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

أ) بين أنّ الدالة G متصلة بالتوفيق على اليسار في $\frac{\pi}{2}$ **بالتوفيق**

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0,+\infty[$ بحيث $F'(c)=0$

وأنّ $F(c)=\frac{1}{2c}e^{-2c^2}$ (يمكنك تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على $[0,\frac{\pi}{2}]$)

4) نعتبر الدالة H المعرفة على بالتوفيق $]0,+\infty[$ بما يلي: $H(x)=F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

أ) بين أنّ الدالة H تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

ب) استنتج أنّ بالتوفيق العدد c وحيد ثم أعط جدول تغيرات الدالة F

بكالوريا 2011 د س

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x+\ln x$

1) أحسب بالتوفيق $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

2) أ) ضع جدول تغيرات الدالة f

ب) بين أنّ الدالة f تقابل من $]0,+\infty[$نحو مجال J يتم تحديده بالتوفيق ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1}

3) أحسب $f(1)$ و $f(e)$ ثم بالتوفيق أنشئ C_f و $C_{f^{-1}}$ في نفس المعلم

4) أ) أحسب التكامل $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$ (يمكنك وضع بالتوفيق $t=f^{-1}(x)$)

ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $C_{f^{-1}}$والمستقيمات $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$

5) أ) نعتبر المعادلة $(E_n): x+\ln x=n$ بين أنّ المعادلة (E_n) تقبل حلاًّ وحيداً x_n

ب) حدّد قيمة x_1 بالتوفيق ثم بين أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

6) أ) بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*\ f(x_n)<f(n)$ ثم استنتج أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*\ x_n\leq n$

ب) بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*\ n-\ln(n)\leq x_n$

ج) أحسب النهايتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-n}{n}$ و بالتوفيق $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n-\ln(n)}$

بكالوريا 2011 د س

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f_n(x)=-1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n}$

1) بين أنه من أجل $n\geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]0,1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$

2) بين أنّ $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة (نضع $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$)

3) أ) تحقق أنه من أجل $t\neq 1$ لدينا: $1+t+t^2+...+t^{n-1}=\frac{1}{1-t}-\frac{t^n}{1-t}$

ب) استنتج بالتوفيق أن $\alpha_n+\frac{\alpha_n{}^2}{2}+...+\frac{\alpha_n{}^n}{n}=-\ln(1-\alpha_n)-\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt$

4) أ) بين بالتوفيق أنّ $1+\ln(1-\alpha_n)=-\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt$

ب) بين أنّ $\forall n\geq 2\ \ 0\leq\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt\leq\frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

ج) استنتج أنّ بالتوفيق $\ell=1-e^{-1}$

باك 2010 د ع

I) نعتبر على $[0,+\infty[$ الدالة $f(x)=4x\cdot e^{-x^2}$

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و أدرس تغيرات f ثم ضع جدول التغيرات

2) حدّد معادلة نصف المماس في 0 ثم أنشئ C_f نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\ cm$

(و نقبل أن النقطة التي أفصولها بالتوفيق $\sqrt{1,5}$نقطة انعطاف)

3) أحسب التكامل $a=\int_0^1 f(x)dx$ ثم استنتج بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين C_f و محوري المعلم و المستقيم $x=1$

II) $n\geq 2$ نعتبر على $[0,+\infty[$ الدالة $f_n(x)=4x^n e^{-x^2}$

1) بين بالتوفيق أنّ: $\forall x>1: e^{-x^2}<e^{-x}$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) أدرس تغيرات f_n على $[0,+\infty[$ ثم ضع جدول التغيرات

3) بين أنه يوجد عدد وحيد u_n من $]0,1[$ بالتوفيق بحيث $f_n(u_n)=1$

4) تحقّق أنّ $\forall n\geq 2: f_{n+1}(u_n)=u_n$ وبين أن (u_n) تزايدية واستنتج أنها متقاربة

5) أ) نضع $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ، بالتوفيق بين أنّ $0<\ell\leq 1$

ب) بين أنّ $\forall n\geq 2: -\frac{\ln 4}{n}<\ln(u_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln(4)}{n}$ و استنتج أنّ $\ell=1$

باك 2006 د ع

<u>الجزء الأول:</u> في هذا الجزء n عدد صحيح بالتوفيق طبيعي أكبر أو يساوي 3 ،

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ب $g_n(x)=nx+2\ln x$

1) ضع جدول تغيرات الدالة g

2) بين أنّ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: \sqrt{x}>\ln x$

3) بين أنّ المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α_n في $\mathbb{R}_+^*$ و أنّ $\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$

ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

<u>الجزء الثاني:</u> I) لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ ب: $f(x)=\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ثم أول النتيجة هندسياً

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول بالتوفيق النتيجة هندسياً

3) بين أنّ $(*)\forall x>0:\ f'(x)=(\frac{1-3x}{3x})f(x)$ وضع جدول تغيرات f ثم أنشئ C_f نأخذ $f(\frac{1}{3})\approx 0,5$ **بالتوفيق** المعلم: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3\ cm$

II) نضع $I=[\frac{1}{3},1]$ 1) أ) بين أنّ $f(I)\subset I$

ب) باستعمال العلاقة (*) بين أنّ $\forall x\in I: |f'(x)|\leq\frac{2}{3}$

ج) بين أنّ α_3 حيث $[(f(x)=x$ و $x>0)\Leftrightarrow x=\alpha_3]$ هو حل المعادلة $g_3(x)=0$ المعرّفة في الجزء الأول

2) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب $u_0=\frac{1}{3}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=f(u_n)$

أ) بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\in I$ ثم بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:\ |u_{n+1}-\alpha_3|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

ب) استنتج أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:\ |u_n-\alpha_3|\le(\frac{2}{3})^{n+1}$

ج) بين أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة محدّداً نهايتها

III) لتكن F الدالة المعرفة بالتوفيق على $[0,+\infty[$ بما يلي $F(x)=\int_x^{8x} f(t)\,dt$

1) بين أنّ F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أحسب $F'(x)$ ثم استنتج تغيرات F

2) بين أنّ $\forall x\in\mathbb{R}^+\ 0\le F(x)\le 2f(x)(1-e^{-7x})$ و استنتج $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

ثم ضع جدول تغيرات الدالة F

باك 2006 د س

1) بين بالتوفيق أنّ $\forall t\in\mathbb{R}:\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}=\frac{t}{1+t^2}-\frac{t}{3+t^2}+\frac{1}{3+t^2}$

2) بين أن: $\forall\alpha\in\mathbb{R}:\int_0^\alpha\frac{1}{3+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt3}\text{Arctan}(\frac{\alpha}{\sqrt3})$

3) نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,\pi]$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du$

أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$

ب) باستعمال مكاملة بتغيير بالتوفيق المتغير $t=\tan(\frac{u}{2})$ بالتوفيق

بين أنّ: $\forall x\in[0,\pi[:F(x)=2\int_0^{\tan(\frac{x}{2})}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$

(نذكر أن $\cos u=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin u=\frac{2t}{1+t^2}$ حيث $t=\tan(\frac{u}{2})$ و $u\in[0,\pi[$)

ج) باستعمال السؤالين 1) و 2) ، بالتوفيق بين أنّ:

$$\forall x\in[0,\pi[:F(x)=\ln3+\frac{2}{\sqrt3}\text{Arctan}(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt3})+\ln(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}})$$

د) باستعمال اتصال الدالة F بين أنّ $\int_0^\pi\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du=\ln3+\frac{\pi}{\sqrt3}$

باك 2005 د س

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=(x+1)e^{-2x}$

I) 1) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ وأدرس الفروع اللانهائية

2) أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

3) أدرس تقعر C_f ثم أنشئ C_f في معلم متعامد ممنظم

4) أ) بين أنّ f حل للمعادلة التفاضلية $(E):y''+3y'+2y=-e^{-2x}$

ب) لتكن g دالة قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$، بين أنّ g حل ل (E) إذا وفقط إذا كانت $(g-f)$ حل ل $(E'):y''+3y'+2y=0$

ج) حدّد الحل العام ل (E') ثم استنتج الحل العام للمعادلة (E)

II) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و A_n مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم $x=n$ أحسب A_n بدلالة n ثم حدّد $\lim_{n\to+\infty}A_n$

III) لكل $n\in\mathbb{N}^*$ نضع $u_n=n\int_0^1(f(x))^n dx$

1) بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*:u_n=\int_0^n(1+\frac{t}{n})^n\cdot e^{-2t}dt$ (تغيير المتغير $t=nx$)

2) أ) بين بالتوفيق أنّ $\forall u\in[1,2]:2-u\le\frac{1}{u}\le1$

ب) استنتج أنّ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in[0,n]):x-\frac{x^2}{2n}\le n\ln(1+\frac{x}{n})\le x$

3) أ) بين أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*:u_n\le\int_0^n e^{-x}dx$

ب) بين أنّ $n\in\mathbb{N}^*:e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\cdot\int_0^{\sqrt[3]{n}}e^{-x}dx\le u_n$ واستنتج أن (u_n) متقاربة وحدّد نهايتها

4) ليكن $0<a<1$ أ) بين بالتوفيق أنّ $\int_a^1 n(f(x))^n dx\le n(1-a)(f(a))^n$

ب) استنتج أنّ $\lim_{n\to+\infty}\int_a^1 n(f(x))^n dx=0$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}\int_0^a n(f(x))^n dx$

من بكالوريا 2003

I) نعتبر على $]0,+\infty[$ الدالة $f(x)=4\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to0^+}f(x)$ ثم حدّد الفرعين اللانهائيين

2) بيّن أنّ $f'(x)=4\frac{1-2\ln x}{x^3}$ و أعط جدول تغيرات f

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$ (نعطي $1<\ln3<1{,}1$)

4) حدّد معادلة المماس (T) في النقطة التي أفصولها 1 و أنشئ C_f

II) لكل عدد صحيح n حيث $n\ge4$ نعتبر الدالة $f_n(x)=n\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$

1) أدرس تغيرات الدالة f_n

2) أدرس تقعر المنحنى (C_n) وبين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$

3) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x واستنتج الوضع النسبي ل (C_n) و (C_{n+1})

4) بين أن $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

5) بين أن (u_n) تناقصية قطعا واستنتج أنها متقاربة

6) بين أنّ $\forall n\ge4:e^{\frac{5}{6}}<v_n$ (نأخذ $e^{\frac{5}{3}}<5{,}3$) و استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

من بكالوريا 2001

I) نعتبرعلى $\mathbb{R}$ الدالة: $g(x)=x\ln|x|-(x-1)\ln|x-1|$ و $g(0)=g(1)=0$

1) بين أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل C_g، لدراسة g نقتصرعلى $D_E=[\frac{1}{2},+\infty[$

2) أدرس اتصال واشتقاق g في 1

بالتوفيق

3) بين أنّ $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\ln(1-\frac{1}{x})=-1$ وحدّد $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$

4) تحقّق أنّ $x\in D_E\setminus\{1\}:g'(x)=\ln(\frac{x}{|x-1|})$ وضع جدول التغيرات على $\mathbb{R}$

5) حدّد معادلة المماس (T) في 2 و أنشئ C_g و (T) نأخذ $\ln2\approx0{,}7$

6) ما هي إشارة الدالة $g(x)$ ؟

II) نعتبر الدالة: $f(x)=\frac{\ln|x-1|}{\ln|x|}$ و $f(0)=0$ معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

1) أدرس اتصال واشتقاق f في 0 وأحسب النهايات عند محدات مجموعة التعريف

2) بيّن أنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-1)(\ln|x|)^2}$ و ضع جدول التغيرات

3) حدّد تقاطع C_f مع محور الأفاصيل و أنشئ C_f نأخذ $\ln3\approx1{,}1$

من بكالوريا 1996

I) نعتبر الدالة $g(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x-2)}-\ln|x(x-2)|$ المعرفة على $[1,2[\cup]2,+\infty[$

1) أعط جدول تغيرات g وبين أنه يوجد α وحيد من $]2,+\infty[$ بحيث $g(\alpha)=0$

2) استنتج إشارة $g(x)$

II) 1) نعتبر الدالة $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln|x(x-2)|}{(x-1)^2} & x\neq1 \\ f(1)=-1 \end{cases}$ بين أنّ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$

2) بين أنّ المستقيم $(\Delta):x=1$ محور تماثل ل C_f

3) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$ ثم أدرس اتصال f في 1

4) أ) تحقق أنّ $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln[1-(x-1)^2]+(x-1)^2}{(x-1)^3}$ لكل x من $]1,\frac{3}{2}[$

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 يمكنك استعمال النتيجة التالية:

$$\forall t\in]0,\frac{1}{4}[:-\frac{t^2}{2}-t^3\le\ln(1-t)+t\le-\frac{t^2}{2}$$

5) أ) بين أن $\forall x\in]1,2[\cup]2,+\infty[: f'(x)=\frac{2g(x)}{(x-1)^3}$

ب) تحقّق أنّ $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ ثم أعط جدول التغيرات

6) حدّد نقطتي تقاطع C_f مع محور الأفاصيل

7) أنشئ C_f الوحدة $2\ cm$ نأخذ $\alpha\approx 3{,}14$ و $f(\alpha)\approx 0{,}28$

بالتوفيق