

## تحليلية الفضاء

### 1- إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم، إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس / الأساس - المعلم في الفضاء

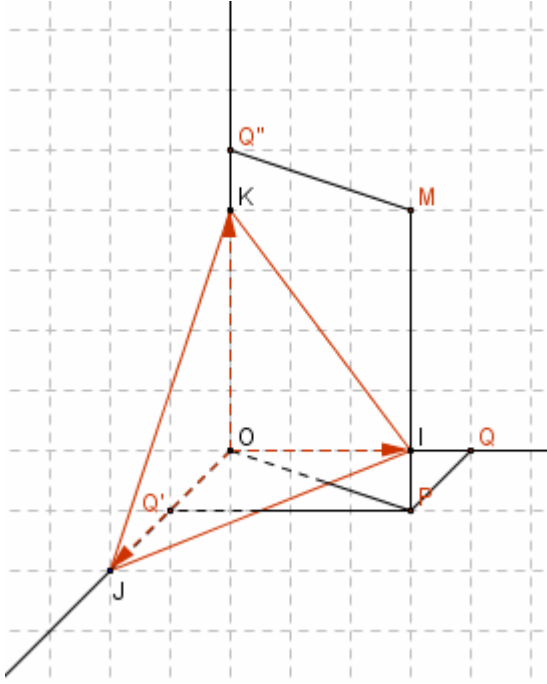
**نشاط** ليكن  $OIJK$  رباعي الأوجه و  $M$  نقطة من الفضاء و  $P$  مسقطها على المستوى  $(OIJ)$  بتواز مع  $(OK)$  و  $Q$  مسقط  $P$  على  $(OI)$  بتواز مع  $(OJ)$  و  $Q'$  مسقط  $P$  على  $(OJ)$  بتواز مع  $(OI)$  و  $Q''$  مسقط  $M$  على  $(OK)$  بتواز مع  $(OIJ)$

1- أنشئ الشكل

2- باعتبار  $x$  أفصول  $Q$  بالنسبة للمعلم  $(O;I)$  و  $y$  أفصول  $Q'$  بالنسبة للمعلم  $(O;J)$  و  $z$  أفصول  $Q''$  بالنسبة للمعلم  $(O;K)$

أكتب  $\overrightarrow{OM}$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $\overrightarrow{OI}$  و  $\overrightarrow{OJ}$  و  $\overrightarrow{OK}$

1- الشكل



2- نكتب  $\overrightarrow{OM}$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $\overrightarrow{OI}$  و  $\overrightarrow{OJ}$  و  $\overrightarrow{OK}$

لدينا  $Q$  مسقط  $P$  على  $(OI)$  بتواز مع  $(OJ)$

و  $Q'$  مسقط  $P$  على  $(OJ)$  بتواز مع  $(OI)$

ومنه  $(OQPQ')$  متوازي الأضلاع و بالتالي  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OQ'}$

و حيث  $x$  أفصول  $Q$  بالنسبة للمعلم  $(O;I)$

و  $y$  أفصول  $Q'$  بالنسبة للمعلم  $(O;J)$

فان  $\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OI}$  و  $\overrightarrow{OQ'} = y\overrightarrow{OJ}$

ومنه  $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

لدينا  $Q''$  مسقط  $M$  على  $(OK)$  بتواز مع  $(OIJ)$

و  $P$  مسقطها على المستوى  $(OIJ)$  بتواز مع  $(OK)$

ومنه  $(OPMQ'')$  متوازي الأضلاع ومنه  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ''}$

و حيث أن  $z$  أفصول  $Q''$  بالنسبة للمعلم  $(O;K)$  فان  $\overrightarrow{OQ''} = z\overrightarrow{OK}$

إذن  $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$

و بما أن  $OIJK$  رباعي الأوجه فان  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $O$  غير مستوائية

نقول إن المثلث  $(x; y; z)$  إحداثيات  $M$  بالنسبة للمعلم  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$  نكتب  $M(x; y; z)$

### تعريف

إذا كانت  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  ثلاث متجهات غير مستوائية و  $O$  نقطة من الفضاء .  
نقول إن المثلث  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  أساس للفضاء، و أن المربع  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم للفضاء

### ملاحظة:

أربع نقط غير مستوائية  $O$  و  $A$  و  $B$  و  $C$  تحدد أساسا مثلا  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$

و معلما للفضاء مثلا  $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$

### خاصية

ليكن  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلما في الفضاء

لكل نقطة  $M$  من الفضاء توجد ثلاثة أعداد حقيقية وحيدة  $x$  و  $y$  و  $z$  حيث  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

المثلث  $(x; y; z)$  يسمى إحداثيات  $M$  بالنسبة للمعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نكتب  $M(x; y; z)$

لكل متجهة  $\vec{u}$  من الفضاء توجد ثلاثة أعداد حقيقية وحيدة  $x$  و  $y$  و  $z$  حيث  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

المثلث  $(x; y; z)$  يسمى إحداثيات  $\vec{u}$  بالنسبة للأساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نكتب  $\vec{u}(x; y; z)$

## ب/ إحداثيات $\vec{u} + \vec{v}$ و $\lambda \vec{u}$ و $\overline{AB}$ و منتصف قطعة خاصة

لتكن  $\vec{u}(x; y; z)$  و  $\vec{v}(x'; y'; z')$  متجهتين من الفضاء المنسوب إلى الأساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  و  $\lambda$  عددا حقيقيا

\*  $\vec{u} = \vec{v}$  إذا وفقط إذا كان  $x = x'$  و  $y = y'$  و  $z = z'$

\*  $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$

\*  $\lambda \vec{u}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$

### خاصية

لتكن  $A(x_A; y_A; z_A)$  و  $B(x_B; y_B; z_B)$  نقطتين من الفضاء المنسوب إلى المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  و  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$

\* مثلوث إحداثيات  $\overline{AB}$  هو  $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

\* مثلوث إحداثيات  $I$  هو  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

## 2- الشرط التحليلي لاستقامية متجهتين

### نشاط

لتكن  $\vec{u}(a; b; c)$  و  $\vec{v}(a'; b'; c')$  متجهتين من الفضاء

أ/ بين أنه إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فإن  $ab' - a'b = 0$  و  $bc' - b'c = 0$  و  $ac' - a'c = 0$

ب/ بين أنه إذا كان  $ab' - a'b = 0$  و  $bc' - b'c = 0$  و  $ac' - a'c = 0$  فإن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتان

### مبرهنة

لتكن  $\vec{u}(a; b; c)$  و  $\vec{v}(a'; b'; c')$  متجهتين من الفضاء

\* تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين إذا وفقط إذا كان  $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$  و  $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$  و  $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$

\* تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين إذا وفقط إذا كان  $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$  أو  $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$  أو  $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$

الأعداد الحقيقية  $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$  تسمى المحددات المستخرجة للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$

### ملاحظة

يمكن أن نحصل على المحددات المستخرجة بالتقنية التالية

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = d_3 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ e & e' \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = d_2 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = d_1 \leftarrow \begin{pmatrix} e & e' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

## 3- المتجهات المستوائية

### نشاط

لتكن  $\vec{u}(a; b; c)$  و  $\vec{v}(a'; b'; c')$  و  $\vec{w}(a''; b''; c'')$  متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1- نفترض أن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية.

$$\begin{cases} a = x \cdot a' + y \cdot a'' \\ b = x \cdot b' + y \cdot b'' \\ c = x \cdot c' + y \cdot c'' \end{cases} \text{ حيث } (x; y) \text{ من } \mathbb{R}^2$$

$$b' \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

2- أكتب النتيجة العكسية لنتيجة السؤال 1. لنقبلها

هل المتجهات  $\vec{u}(1; 2; 3)$  و  $\vec{v}(2; 0; 1)$  و  $\vec{w}(3; 1; 3)$  مستوائية.

## أ- محددة ثلاث متجهات تعريف

لتكن  $\vec{u}(a;b;c)$  و  $\vec{v}(a';b';c')$  و  $\vec{w}(a'';b'';c'')$  متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس  $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

العدد  $a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$  يسمى محددة المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  نرمز له  $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

أو بـ  $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$  نكتب  $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$

### ملاحظة

$d_1$  و  $d_2$  و  $d_3$  المحددات المستخرجة من  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ad_1 - bd_2 + cd_3$$

### ب- مبرهنة

لتكن  $\vec{u}(a;b;c)$  و  $\vec{v}(a';b';c')$  و  $\vec{w}(a'';b'';c'')$  متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس  $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية إذا و فقط إذا  $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$

تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  غير مستوائية إذا و فقط إذا  $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

### تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم  $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط  $A(2;2;4)$  و  $B(2;1;3)$  و  $C(1;-1;0)$

و  $D(-1;2;1)$  و المتجهات  $\vec{u}(-1;2;1)$  و  $\vec{v}(1;-3;2)$  و  $\vec{w}(-1;1;4)$

1- أدرس استقامية  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$

2- أدرس استوائية  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$

3- أدرس استوائية النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$

### تمرين

في الفضاء  $V_3$  المنسوب إلى أساس متعامد منظم  $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر  $\vec{u}(m;2;1-m)$

و  $\vec{v}(2m+1;2;-2m+3)$  حيث  $m$  بارامتر حقيقي

1- بين أن مهما كانت  $m$  من  $\mathbb{R}$  :  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين

2- لتكن  $\vec{w}(1;-2;1)$ ، بين أن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية

### 4- تمثيل بارامتري لمستقيم- معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء أ- تمثيل بارامتري لمستقيم

في الفضاء منسوب إلى معلم  $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر  $(D)$  المستقيم المار من النقطة  $A(x_0;y_0;z_0)$

و الموجه بالمتجهة  $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$

لتكن  $M(x;y;z)$  من الفضاء

$M \in (D)$  تكافئ  $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$   $\exists t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \lambda t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{تكافئ}$$

## تعريف

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . لتكن  $A(x_0; y_0; z_0)$  نقطة من الفضاء و  $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$  متجهة غير منعدمة

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \lambda t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{النظمة}$$

تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(D)$  المار من  $A(x_0; y_0; z_0)$  و موجه بالمتجهة  $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$

## مثال

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

تمثيل بارامترى للمستقيم  $(D)$  المار من  $A(1; 5; -2)$  و موجه ب  $\vec{u}(-2; 3; 1)$

## ب- معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء

ليكن  $(D)$  مارا من النقطة  $A(x_0; y_0; z_0)$  و  $\vec{u}(a; b; c)$  متجهة موجهة له

لتكن  $M(x; y; z)$  من الفضاء

$M \in (D)$  تكافئ  $\overrightarrow{AM}$  و  $\vec{u}$  مستقيمتين

تكافئ جميع المحدد المستخرجة من  $\overrightarrow{AM}$  و  $\vec{u}$  منعدمة

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \quad \text{و} \quad c(x - x_0) - a(z - z_0) = 0 \quad \text{و} \quad c(y - y_0) - b(z - z_0) = 0$$

الأعداد  $a$  و  $b$  و  $c$  ليست جميعها منعدمة  
لنفرض أن  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  و  $c \neq 0$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{تكافئ} \quad M \in (D)$$

لنفرض أن أحدهما منعدما مثلا  $a = 0$  و  $b \neq 0$  و  $c \neq 0$

$$x - x_0 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{تكافئ} \quad M \in (D)$$

لنفرض أن اثنين منهما منعدمين مثلا  $a = 0$  و  $b = 0$  و  $c \neq 0$

$$x - x_0 = 0 \quad \text{و} \quad y - y_0 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad M \in (D)$$

## مرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

إذا كان مستقيم  $(D)$  مارا من النقطة  $A(x_0; y_0; z_0)$  و  $\vec{u}(a; b; c)$  متجهة موجهة له فان النظمة:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

تسمى نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم  $(D)$  إذا كان  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  و  $c \neq 0$  أما إذا كان أحد المعاملات منعدما فان البسط المرتبط به يكون منعدما أيضا.

## أمثلة

\* المستقيم  $(D)$  المار من  $A(1; 5; -2)$  و موجه ب  $\vec{u}(-2; 3; 1)$

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z + 2}{1}$$

معادلتان ديكارتيتان للمستقيم  $(D)$

\* المستقيم  $(D')$  المار من  $B(1; -2; 2)$  و موجه ب  $\vec{u}'(-3; 0; 2)$

$$y + 2 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{x - 1}{-3} = \frac{z - 2}{2}$$

معادلتان ديكارتيتان للمستقيم  $(D')$

\* المستقيم  $(D'')$  المار من  $C(3; 2; -5)$  و موجه ب  $\vec{u}''(-3; 0; 0)$

$$z + 5 = 0 \quad \text{و} \quad y - 2 = 0$$

معادلتان ديكارتيتان للمستقيم  $(D'')$

## 5 - تمثيل بارامترى لمستوى - معادلة ديكارتية للمستوى

### أ / تمثيل بارامترى لمستوى

في الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر  $(P)$  المستوى المار من النقطة  $A(x_0; y_0; z_0)$  والموجه بالمتجهين  $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$  و  $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$  لتكن  $M(x; y; z)$  من الفضاء

$$\exists (t; t') \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u} + t' \cdot \vec{u}' \quad M \in (P)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z = z_0 + \lambda t + \lambda' t' \end{cases} \quad (t; t') \in \mathbb{R}^2 \quad \text{تكافئ}$$

### تعريف

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، لتكن  $A(x_0; y_0; z_0)$  نقطة من الفضاء و  $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$  و  $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$  متجهتين غير منعدمتين

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z = z_0 + \lambda t + \lambda' t' \end{cases} \quad (t; t') \in \mathbb{R}^2 \quad \text{النظمة}$$

تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى  $(P)$  المار من

$A(x_0; y_0; z_0)$  و موجه بالمتجهتين  $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$  و  $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

### ب - معادلة ديكارتية للمستوى

ليكن  $(P)$  المستوى المار من  $A(x_0; y_0; z_0)$  و موجه بالمتجهتين  $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$  و  $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \lambda & \lambda' \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow (x - x_0) \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

بوضع  $a = d_1$  ;  $b = -d_2$  ;  $c = d_3$  حيث  $d_1$  و  $d_2$  و  $d_3$  المحددات المستخرجة المرتبطتين

بالمتجهتين  $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$  و  $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

نضع  $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

$$M \in (P) \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

### مبرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

للمستوى  $(P)$  المار من  $A(x_0; y_0; z_0)$  والموجه بالمتجهتين  $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$  و  $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

معادلة من شكل  $ax + by + cz + d = 0$  حيث  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق العلاقة  $ax + by + cz + d = 0$  حيث  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ ،

مستوى

$ax + by + cz + d = 0$  تسمى معادلة ديكارتية للمستوى  $(P)$

### مثال

نعتبر المستوى  $(P)$  المار من  $A(1; -1; 0)$  و الموجه بالمتجهتين  $\vec{u}(0; 3; 2)$  و  $\vec{v}(-2; -1; 0)$

نحدد معادلة ديكارتية للمستوى  $(P)$

لتكن  $M(x, y, z)$  من الفضاء

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overline{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ y+1 & 3 & -1 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow 2(x-1) + 4(y+1) + 6z = 0$$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow 2x + 4y + 6z + 2 = 0$$

$2x + 4y + 6z + 2 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوى  $(P)$

## 6- الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء

### أ- الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

#### خاصية

ليكن  $(D) = D(A; \vec{u})$  و  $(\Delta) = D(B; \vec{v})$  مستقيمين في الفضاء  
إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين و  $A \in (\Delta)$  أو  $B \in (D)$  فإن  $(D) = (\Delta)$   
إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين و  $A \notin (\Delta)$  و  $B \notin (D)$  فإن  $(\Delta)$  و  $(D)$  متوازيان قطعاً  
إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين و  $\det(\overline{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$  فإن  $(\Delta)$  و  $(D)$  متقاطعان  
إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين و  $\det(\overline{AB}; \vec{u}; \vec{v}) \neq 0$  فإن  $(\Delta)$  و  $(D)$  غير مستوائيين

### ب- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

#### مبرهنة

$$(Q) = P(B; \vec{u}'; \vec{v}') \text{ و } (P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$$

- يكون  $(P)$  و  $(P')$  متوازيين إذا و فقط إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{u}'$  و  $\vec{v}'$  مستوائية  
أي  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') = 0$  و  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{v}') = 0$

- يكون  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعان إذا و فقط إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{u}'$  و  $\vec{v}'$  غير مستوائية  
أي  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') \neq 0$  أو  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{v}') \neq 0$

### خصائصات

$ax + by + cz + d = 0$  :  $(P)$  حيث  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$   
 $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  :  $(P')$  حيث  $(a'; b'; c') \neq (0; 0; 0)$   
\* يكون  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعين إذا و فقط إذا كان  $ab' - a'b \neq 0$  أو  $bc' - b'c \neq 0$  أو  $ac' - a'c \neq 0$   
\* يكون  $(P)$  و  $(P')$  متوازيين قطعاً إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم  $t$  حيث  
 $a' = ta$  ;  $b' = tb$  ;  $c' = tc$  و  $d' \neq td$   
\* يكون  $(P)$  و  $(P')$  منطبقين إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم  $t$  حيث  
 $a' = ta$  ;  $b' = tb$  ;  $c' = tc$  و  $d' = td$

### ج- الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

#### مبرهنة

$$(D) = D(B; \vec{u}') \text{ و } (P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$$

- يكون  $(P)$  و  $(D)$  متوازيان إذا و فقط إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{u}'$  مستوائية أي  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') = 0$   
- يكون  $(P)$  و  $(D)$  متقاطعان إذا و فقط إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{u}'$  غير مستوائية أي  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') \neq 0$

### ملاحظة

$(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$  و  $(D) = D(B; \vec{u}')$  حيث  $(P)$  و  $(D)$  متوازيان  
- إذا كان  $B \in (P)$  فإن  $(D) \in (P)$

- إذا كان  $B \notin (P)$  فان  $(D)$  يوازي  $(P)$  قطعاً

### تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر النقط  $A(2;1;2)$  و  $B(1;0;2)$  و  $C(1;2;2)$  .  
ليكن  $(D)$  المستقيم المار من  $A$  و الموجه بالمتجهة  $\vec{u}(1;0;2)$  و  $(P)$  المستوى الذي معادلته

$$x + 2y - z + 3 = 0$$

- 1- حدد تمثيلاً بارامترياً للمستقيم  $(D)$
- 2- حدد معادلتين ديكارتيتين للمستقيم  $(D)$
- 3- تأكد أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمية ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$
- 4- حدد تمثيلاً بارامترياً للمستوى  $(P)$
- 5- حدد تقاطع  $(D)$  و  $(P)$
- 6- نعتبر المستوى  $(P')$  المعرف بالمعادلة الديكارتية  $x + y - 2z + 1 = 0$   
أ- تأكد أن  $(P)$  و  $(P')$  يتقاطعان

ب- حدد تمثيل بارامترياً للمستقيم  $(\Delta)$  تقاطع  $(P)$  و  $(P')$  مع إعطاء متجهة موجهة لـ  $(\Delta)$

### تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر المستويين:

$$(P_m): 2x + 4y + mz - 2 = 0$$

$$(P): 2x + 4y - z - 3 = 0$$

$$(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
 و المستقيم

حيث  $m$  بارامتر حقيقي

أدرس حسب قيم  $m$  الوضع النسبي للمستويين  $(P)$  و  $(P_m)$   
أدرس حسب قيم  $m$  الوضع النسبي للمستوى  $(P_m)$  و المستقيم  $(D)$