Exercice 00

1) On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$(\forall n\in\mathbb{N});U_n=(n+2)(3-n)$

1) Calculer $U_0;U_1;U_2;U_3;U_4$
2) Exprimer en fonction de n les termes suivants :

   $U_{n+1};U_{n^2};U_{n+2};U_{3n}$
3) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et n

Exercice 01

2) On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0=6$ et $(\forall n\in\mathbb{N});U_{n+1}=\sqrt{U_n+6}$

a) calculer U_1

b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});U_n\geq 3$

3) on considère la suite numérique $(V_n)_{n\geq1}$ définie par :

$V_1=2$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*);V_{n+1}=1+\dfrac{1}{V_n}$

a) calculer V_2 et V_3

b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\dfrac{3}{2}\leq V_n\leq 2$

Exercice 02

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0=\dfrac{3}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;U_{n+1}=\dfrac{U^2_n+U_n}{U^2_n+1}$

1) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});U_n>1$
2) Etudier la monotonie de la suite (U_n)
3) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});U_{n+1}-1\leq\dfrac{1}{2}(U_n-1)$

Exercice 03

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0=2$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;U_{n+1}=\dfrac{5U_n-4}{U_n}$

1) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});2\leq U_n\leq 4$
2) Etudier la monotonie de la suite (U_n)
3) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});\ 4-U_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(4-U_n)$
4) Déduire que $(\forall n\in\mathbb{N});0\leq 4-U_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

Exercice 04

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0=5$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;U_{n+1}=\dfrac{4U_n-9}{U_n-2}$

1) Montrer que $U_n>3$

2) on pose $(\forall n\in\mathbb{N});W_n=\dfrac{1}{U_n-3}$

a) Montrer que (W_n) est une suite arithmétique en précisant sa raison

b) En déduire W_n et U_n en fonction de n .

c) Calculer en fonction de n la somme suivante :

$$S_n=W_0+W_1+\cdots\cdots\cdots+W_n$$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

Exercice 05

1) soit (U_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $U_0=-5$

a- Calculer U_{10} et U_{30}.

b- Calculer la somme $S=U_0+U_1+\cdots\cdots+U_{30}$.

2) soit $(V_n)_{n\geq1}$ une suite arithmétique telles que :

$$V_5=-12 \text{ et } V_{11}=-30$$

a) Calculer la raison de la suite $(V_n)_{n\geq1}$, et son premier terme.

b) Calculer la somme $S=\sum_{k=5}^{11}V_k$

Exercice 06

Soit (U_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases}U_0=2\\(\forall n\in\mathbb{N});U_{n+1}=\dfrac{3}{2}U_n+1\end{cases}$$

On pose $(\forall n\in\mathbb{N});V_n=U_n+2$

1) Calculer U_1 et V_0 .

2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.

3) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire U_n en fonction de n

4) On pose $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S=V_0+V_1+.......+V_n$

Calculer S_n en fonction de n .

Exercice 07

1) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $U_1=-2$

Calculer la somme $S=U_1+U_2+\cdots\cdots+U_{10}$

2) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ telle que $V_3=5$

Calculer la somme $S'=V_3+V_4+\cdots\cdots+V_{15}$

Exercice 08

Soit (U_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 5} \end{cases}$$

1) Calculer U_1

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > -1$.

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n + 1)(U_n + 3)}{U_n + 5}$$

4) on considère la suite (V_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = \frac{\boldsymbol{U_n} + 1}{\boldsymbol{U_n} + 3}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$,puis calculer V_0 .

b) Exprimer V_n en fonction de n .

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \boldsymbol{U_n} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1}$

4)

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} + 1 \leq \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{U_n} + 1)$

b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); \boldsymbol{U_n} + 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Exercice 09

Soit (U_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 4}{U_n} \end{cases}$$

1) a) Calculer U_1 .

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 4$

2) a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(\boldsymbol{U_n} - 1)(4 - \boldsymbol{U_n})}{\boldsymbol{U_n}}$$

b) Montrer que la suite $(\boldsymbol{U_n})$ est décroissante.

3) on considère la suite $(\boldsymbol{V_n})$ définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 1}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$; puis calculer son premier terme V_0 .

b) Exprimer $\boldsymbol{V_n}$ en fonction de n .

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n = \dfrac{1 - 4^{n+2}}{1 - 4^{n+1}}$

4) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_{n-1}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$