درس: حساب التكامل

I. تكامل دالة متصلة على قطعة:

1. تعريف و ترميز:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و F و G دالتين أصليتين للدالة f على المجال $[a;b]$

لدينا: $G(x)=F(x)+c$ $\left(\forall x\in[a;b]\right)$ حيث c عدد حقيقي،

و لدينا: إذن العدد الحقيقي $G(b)-G(a)=\left(F(b)+c\right)-\left(F(a)+c\right)=F(b)-F(a)$

إذن: F غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية $F(b)-F(a)$

2. تعريف التكامل:

لتكن f دالة متصلة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I. و F دالة أصلية لـِ f على I، يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ تكامل f من a إلى b. و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

ملاحظات:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتحديد دالة أصلية F للدالة f على مجال I بحيث أن العددين a و b ينتميان إلى المجال I، ثم نكتب: $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

2. يمكن تغيير المتغير x بأحد الحروف t، q،... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

مثال: $\int_1^2\frac{1}{t}dt=\left[\ln(t)\right]_1^2=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$

تمرين تطبيقي:

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_0^2(x+1)dx$ **2)** $\int_0^1(x^2+x)dx$ **3)** $\int_{-1}^2(x^3-5)dx$

الحل:

1) $\int_0^2 (x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2 = \left(\frac{4}{2}+2\right) - 0 = 4$

2) $\int_0^1 (x^2+x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{5}{6}$

3) $\int_{-1}^2 (x^3-5)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 5x\right]_{-1}^2 = \left(\frac{16}{4}-10\right) - \left(\frac{1}{4}+5\right) = \frac{-45}{4}$

4. نتائج:

- لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على المجال $[a;b]$ بحيث : الدالة f' متصلة على على المجال $[a;b]$
  لدينا : $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$
- لكل عدد حقيقي k لدينا: $\int_a^b kdx = [kx]_a^b = k(b-a)$
- لتكن f دالة دالة متصلة على المجال $[a;b]$ لدينا: $\int_a^a f(x)dx = 0$ و $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

I. خاصيات التكامل (علاقة شال – خطانية التكامل)

خاصية:

لتكن f و g دالتين معرفتين و متصلتين على مجال I. و a و b و c عناصر من I و k عدد حقيقي.

علاقة شال: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

الخطانية: $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

أمثلة:

1) أحسب : $\int_{-1}^1 |x|dx$

بتطبيق علاقة شال لدينا:

$$\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}|x|dx+\int_{0}^{1}|x|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}-xdx+\int_{0}^{1}xdx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

2) أحسب التكامل: $s=\int_{0}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx-\int_{2\ln 2}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$s=\int_{0}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx-\int_{2\ln 2}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx+\int_{1}^{2\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$$
$$=\int_{0}^{2\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$$
$$=\left[\ln(e^x+1)\right]_{0}^{2\ln 2}=\ln 5-\ln 2=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

تمرين تطبيقي: لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[-1;4]$ حيث: $\int_{-1}^{4}f(x)\,dx=3$ و $\int_{-1}^{4}g(x)\,dx=-5$

أحسب التكاملات التالية: أ) $\int_{-1}^{4}\left(f(x)+g(x)\right)dx$ ، ب) $\int_{-1}^{4}6f(x)\,dx$ ، ج) $\int_{-1}^{4}\left(2f(x)+3g(x)\right)dx$

الحل: ا) $\int_{-1}^{4}\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_{-1}^{4}f(x)dx+\int_{-1}^{4}g(x)dx=3-5=-2$

ب) $\int_{-1}^{4}6f(x)\,dx=6\int_{-1}^{4}f(x)\,dx=6\times 3=18$

ج) $\int_{-1}^{4}\left(2f(x)+3g(x)\right)dx=2\int_{-1}^{4}f(x)\,dx+3\int_{-1}^{4}g(x)\,dx=2\times 3-3\times 5=-9$

II. التكامل و الترتيب.

1. خاصية:

لتكن f و g دالتين معرفتين و متصلتين على مجال I و a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\leq b$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن: $\int_{a}^{b}f(x)\,dx\geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن: $\int_{a}^{b}f(x)\,dx\leq\int_{a}^{b}g(x)\,dx$

مثال:

نعلم أن الدالة : $x \mapsto \ln(x)$ متصلة و موجبة على المجال $[1;2]$ إذن : $\int_1^2 \ln(x)\,dx \geq 0$

تمرين تطبيقي:

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\leq 1$. استنتج أن $\int_0^1 f(x)dx \leq 1$

2) نعتبر الدالة f المعرفة على بِمايلي: $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$

بين أن : $\dfrac{1}{6}\leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq \dfrac{1}{3}$

الحل: 1) لدينا لكل x من $[0;1]$، $1+x^2\geq 1$ و منه لكل x من $[0;1]$، $\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$.

و بالتالي نستنتج أن $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 1dx$ و بما أن $\int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1$ فإن: $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \leq 1$.

2) ليكن $x\in[0;1]$

$$\begin{aligned}
1\leq x+1\leq 2 &\Rightarrow \frac{1}{2}\leq \frac{1}{x+1}\leq 1\\
&\Rightarrow \frac{x^2}{2}\leq \frac{x^2}{x+1}\leq x^2\\
&\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx \leq \int_0^1 x^2\,dx\\
&\Rightarrow \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 \leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\
&\Rightarrow \frac{1}{6}\leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2. خاصيات:

- لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$
- لتكن M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على مجال $[a;b]$، لدينا :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

3. القيمة النتوسطة لدالة على مجال:

تعريف:

لتكن f دالة معرفة و متصلة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a<b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

تمرين تطبيقي: نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3x^2+1$

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;4]$.

الحل: لدينا f دالة متصلة على $[1;4]$ القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;4]$ هي العدد الحقيقي m حيث:

$$m=\frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2+1)\,dx=\left[x^3+x\right]_1^4=(64+4)-(1+1)=66$$

4. المكاملة بالأجزاء:

خاصية:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و a و b من I و u' و v' متصلتان على المجال I لدينا:

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,dx=[u(x).v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x).v(x)\,dx$$

تمرين تطبيقي: باستعمال المكاملة بالأجزاء، أحسب : $I=\int_1^2 (x-1)e^x\,dx$ و $J=\int_0^\pi x\sin x\,dx$

الحل : . نضع : $\begin{cases} u(x)=x-1 \Rightarrow u'(x)=1 \\ v'(x)=e^x \quad \Rightarrow v(x)=e^x \end{cases}$

بتطبيق المكاملة بالأجزاء لدينا:

$$\begin{aligned} I &= \left[(x-1)e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx \\ &= \left[(x-1)e^x\right]_1^2 - \left[e^x\right]_1^2 \\ &= e^2 - e^2 + e = e \end{aligned}$$

ملاحظة: كان بالإمكان وضع $u(x)=e^x$ ، $v'(x)=x-1$ و من تم $u(x)=e^x$ ، $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.

2. نضع: $\begin{cases} u(x)=x \quad \Rightarrow u'(x)=1 \\ v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x \end{cases}$ ،

بتطبيق مبدأ المكاملة بالأجزاء يكون لدينا:

$$\begin{aligned} J &= \left[-x\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x\,dx \\ &= \left[-x\cos x\right]_0^\pi + \left[\sin x\right]_0^\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

III. حساب المساحات و الحجوم

1. حساب المساحات:

في كل ما يلي المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

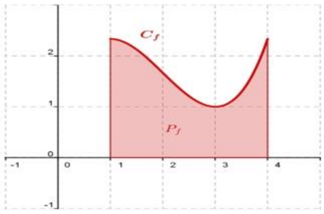
- **وحدة قياس المساحات و التي نرمز لها بالرمز** $u.a$ **يعني :** $u.a=\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$

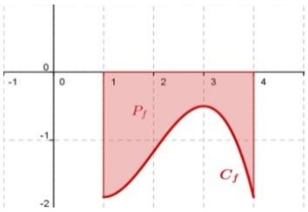
خاصية1:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ولتكن A مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) ومحور الأفاصيل بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي : $x=a$ ، $x=b$

- إذا كانت f موجبة على المجال $[a;b]$ فإن : $A=\int_a^b f(x)\,dx$
- إذا كانت f سالبة على المجال $[a;b]$ فإن : $A=-\int_a^b f(x)\,dx$





خاصية2:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) ومحور الأفاصيل بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي :

$x=a$ و $x=b$ هي العدد الحقيقي الموجب: $A=\int_a^b |f(x)|\,dx$ بوحدة قياس المساحات.

مثال: نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3$

لنحدد مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) ومحور الأفاصيل بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي :

$x=-1$ و $x=1$

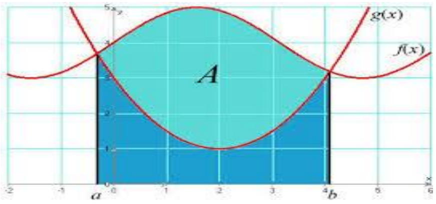
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx &= \int_{-1}^{1}|x^3|\,dx\\ &= \int_{-1}^{0}|x^3|\,dx+\int_{0}^{1}|x^3|\,dx\\ &= \int_{-1}^{0}-x^3\,dx+\int_{0}^{1}x^3\,dx\\ &= \left[\frac{-x^4}{4}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\,u.a\end{aligned}$$

خاصية3:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$ و (C_f) و (C_g) المنحنيين الممثلين لهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$

هي العدد: $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ بوحدة قياس المساحات.



مثال: نعتبر الدالتين : $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$

لنحدد مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\sqrt{2}-1\right)\,u.a$$

2.حساب الحجوم:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ وحدة قياس الحجوم هي: $u.v=\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|$

خاصية:

ليكن S مجسما محصور بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي: $z=a$ و $z=b$ حيث $a<b$

ولتكن $s(t)$ مساحة تقاطع المجسم S مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\le t\le b$.

إذا كانت الدالة المعرفة على المجال $[a;b]$ بما يلي : $t\mapsto s(t)$ متصلة على المجال $[a;b]$ فإن V حجم المجسم S

هو $V=\int_a^b s(t)\,dt$ بوحدة قياس الحجوم.

أمثلة:

حجم كرة شعاعها R : $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

حجم مخروط دوراني إرتفاعه h : $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$

حجم أسطوانة إرتفاعها h : $V=\pi R^2 h$

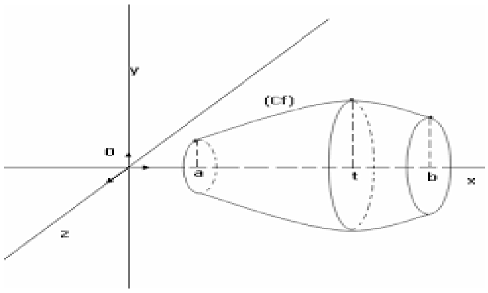
3.حجم مجسم الدوران:

خاصية:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$

حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل على المجال $[a;b]$ هو: $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$

بوحدة قياس الحجوم.



مثال: نعتبر الدالة العددية المعرفة بـ : $f(x)=\sqrt{x}$

لنحسب حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f على المجال $[0;1]$

لدينا f دالة متصلة على المجال $[0;1]$ إذن : $V=\int_0^1 \pi\left(f(x)\right)^2 dx=\int_0^1 \pi x\, dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\ u.v$

تمرين تطبيقي:

أحسب حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل على المجال $[a;b]$ في الحالات التالية:

$f(x)=\sqrt{x}\,e^x$; $I=[0;1]$ و $f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$; $I=[0;1]$