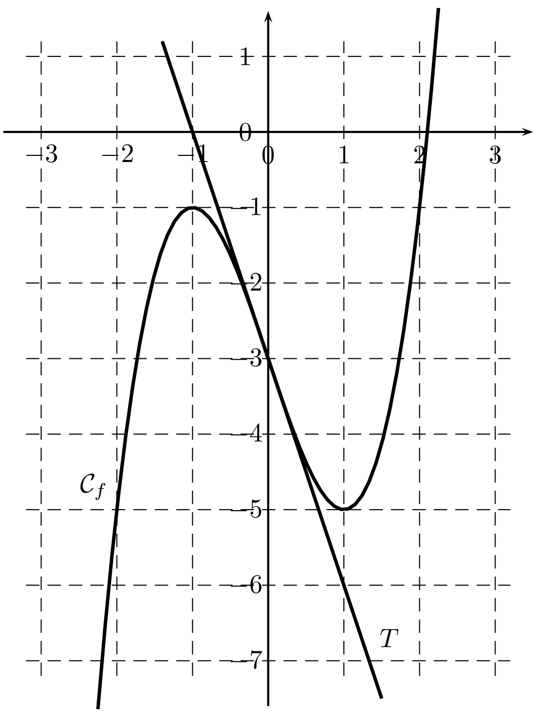
Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

1. f est une fonction polynôme du troisième degré définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$.
   On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	

2. T a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -3x - 3$.
3.



4. Sur $[2;3]$, la fonction f est dérivable, strictement croissante, avec $f(2) = -1 < 0$ et $f(3) = 15 > 0$. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
   A l'aide de la calculatrice, on trouve que $f(2,10) \simeq -0,039$ et $f(2,11) \simeq 0,06$, et donc que $2,10 < \alpha < 2,11$.

Exercice 2

1. La fonction f doit vérifier les conditions suivantes :
   - $f(0) = 0$ soit, comme $f(0) = d$, $\underline{d = 0}$.
   - $f'(0) = 0$ soit, comme $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, donc $f'(0) = c$, et $\underline{c = 0}$.
     On a alors, $f(x) = ax^3 + bx^2$.
   - $f(5) = 125a + 25b = 2$
   - $f'(5) = 0$ soit, comme $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$, l'équation $75a + 10b = 0$

   Les deux dernières équations permettent de calculer a et b : $\left\{\begin{array}{l} 125a + 25b = 2 \\ 75a + 10b = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{4}{125} \\ b = \dfrac{6}{25} \end{array}\right.$

   En résumé, la fonction f s'écrit $\underline{f(x) = -\dfrac{4}{125}x^3 + \dfrac{6}{25}x^2}$.

2. Le point I, milieu de $[OA]$ a pour coordonnées $I\left(\dfrac{5}{2};1\right)$.

   De plus, $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{4}{125}\left(\dfrac{5}{2}\right)^3 + \dfrac{6}{25}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 1$. Ainsi, <u>le point I appartient à $\mathcal{C}$</u>.

La pente en I est $f'\left(\frac{5}{2}\right)$, or $f'(x) = -\frac{12}{125}x^2 + \frac{12}{25}x$, et donc,

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{12}{125}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{12}{25}\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3}{5}\,.$$

La pente en I est donc de $\frac{3}{5}$.

Exercice 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-2) - (x^2+ax+b)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-2a-b}{(x-2)^2}$$

2. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 a pour équation :
   $y = f'(3)(x-3) + f(3) = f'(3)x - 3f'(3) + f(3)$.
   On doit donc avoir, pour cette tangente ait pour équation $y = 8$, $\left\{\begin{array}{l} f'(3) = 0 \\ -3f'(3) + f(3) = 8 \end{array}\right.$

   soit, $\left\{\begin{array}{l} f'(3) = 0 \\ f(3) = 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -3-2a-b = 0 \\ 9+3a+b = 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2a+b = -3 \\ 3a+b = -1 \end{array}\right. \iff \boxed{\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -7 \end{array}\right.}$

Exercice 4 Pour l'équation $\sin 2x = \cos\frac{x}{2}$ une solution consiste à écrire :

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

(en utilisant la formule : $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$).
L'équation se réécrit alors :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\frac{x}{2}$$

d'où :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} - 2x = \frac{x}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = -\frac{x}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{5} + 4k\frac{\pi}{5} & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + 4k\frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Exercice 5

1. $P(1) = 2 \times 1^3 - 17 \times 1^2 + 7 \times 1 + 8 = 0$, et donc 1 est bien une racine de P.
   On en déduit que P se factorise selon $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (-a+b)x^2 + (-b+c)x - c$, d'où, en identifiant les coefficients : $\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ -a+b = -17 \\ -b+c = 7 \\ -c = 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -15 \\ c = -8 \end{array}\right.$
   Ainsi, le polynôme P se factorise suivant : $P(x) = (x-1)(2x^2-15x-8)$.
2. L'équation s'écrit, en utilisant le polynôme P précédent : $P(\sin x) = 0$.
   On recherche donc les racines de P.
   $P(x) = 0 \iff (x-1)(2x^2-15x-8) = 0$. Le discriminant du trinôme du second degré est $\Delta = (-15)^2 - 4\times2\times(-8) = 289 = 17^2 > 0$. Ce trinôme admet donc deux racines distinctes : $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 8$.

   Le polynôme P admet donc 3 racines : $x_0 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_3 = 8$.

   Les solutions de l'équation sont donc les valeurs de x telles que
   - $\sin x = x_0 = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
   - $\sin x = x_1 = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \iff x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.
   - $\sin x = x_3 = 8$: impossible, car pour tout x, $\sin x < 1$.

   Les solutions de l'équation sont donc, $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6} + k2\pi\ ;\ \frac{7\pi}{6} + k2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$