



## I. الاشتقاق في نقطة الاشتقاق على اليمين و اليسار:

### 01. تعريف (تذكير):

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$  و  $\ell \in \mathbb{R}$  نقول أن: الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا كان:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \quad \text{أو أيضا:} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

العدد  $\ell$  يسمى العدد المشتق ل  $f$  في  $x_0$  و يرمز له ب:  $f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

### 02. خاصية:

- لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x_0$ .
  - معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة  $f$  في النقطة التي أفصولها  $x_0$  هي:  $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$
  - كل دالة قابلة للاشتقاق في  $x_0$  تكون متصلة في  $x_0$ . (العكس ليس دائما صحيح).
  - تكون  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي  $a$  و توجد دالة  $\varepsilon$  حيث:
- $$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \forall x \in D_f \setminus \{x_0\} \quad \text{مع} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$
- (و في هذه الحالة  $f'(x_0) = a$ ).

### 03. الدالة التآلفية $h$ ل $f$ بجوار $x_0$ :

■ تعريف:

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x_0$ .

الدالة  $h$  المعرفة ب:  $h(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$  تسمى الدالة التآلفية المماس ل  $f$  بجوار  $x_0$ .

نكتب  $f(x) \approx h(x)$  بجوار  $x_0$  (أي  $h$  تقرب ل  $f$  بجوار  $x_0$ )

### 04. ملحوظة:

منحنى الدالة  $h$  هو المستقيم (T) المماس لمنحنى  $f$  في النقطة التي أفصولها  $x_0$

### 05. نشاط 2:

لنعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -3x + 4 & ; x \geq 1 \\ f(x) = x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$

1. أدرس اشتقاق  $f$  على يمين  $x_0 = 1$ . ثم أنشئ نصف المماس.

2. أدرس اشتقاق  $f$  على يسار  $x_0 = 1$ . ثم أنشئ نصف المماس.

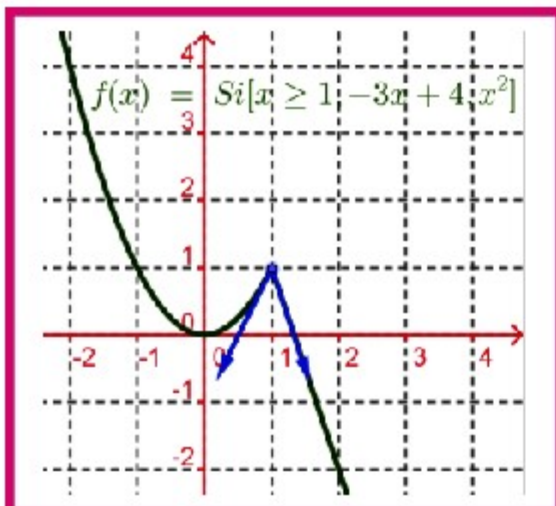
3. هل  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 1$ ؟

4. حدد معادلتى نصفي المماس لمنحنى الدالة  $f$  على يمين و يسار النقطة ذات الأفصول  $x_0 = 1$ .

الجواب

بطريقة مبيانيا

ملاحظة: النقطة ذات الأفصول  $x_0 = 1$  تسمى نقطة مزواة.





06. تعريف: (الاشتقاق على اليمين  $x_0$ )

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من شكل  $[x_0, x_0 + \alpha]$ ،  $(\alpha > 0)$

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين في } x_0 \text{ إذا كان } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$$

العدد  $f'_d(x_0)$  يسمى العدد المشتق على اليمين لـ  $f$ .

07. تعريف: (الاشتقاق على يسار  $x_0$ )

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من شكل  $]x_0 - \alpha, x_0]$ ،  $(\alpha > 0)$

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على اليسار في } x_0 \text{ إذا كان } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g = f'_g(x_0) \in \mathbb{R}$$

العدد  $f'_g(x_0)$  يسمى العدد المشتق على اليسار لـ  $f$ .

## 08. خاصية:

تكون  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت ما يلي:

- $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $x_0$ .
- $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في  $x_0$ .
- العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار في  $x_0$ . أي  $(f'_d(x_0) = f'_g(x_0))$ .

## 09. تمرين تطبيقي:

- أدرس اشتقاق  $f$  في  $x_0$  (1 :  $x_0 = 0$  ؛  $f(x) = \sqrt{x}$  على اليمين .
- (2 :  $x_0 = 0$  ؛  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  على اليمين .
- (3 :  $x_0 = 0$  ؛  $f(x) = [x]$  على اليمين و على اليسار.
- (4 :  $x_0 = 0$  ؛  $f(x) = \arctan x$  على اليمين .

## II. اشتقاق دالة على مجال – الدالة المشتقة الأولى لدالة:

## 01. تعريف:

- إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في كل نقطة  $x_0$  من  $]a, b[$  نقول أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]a, b[$ .
- دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال  $]a, b[$  إذا كانت
- الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]a, b[$
- $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $a$ .

## 02. الدالة المشتقة للدالة:

## تعريف:

الدالة التي تربط كل عنصر  $x_0$  من المجال  $I$  بالعدد  $f'(x_0)$  تسمى الدالة المشتقة لـ  $f$  ونرمز لها بـ  $f'$

## ملحوظة:

إذا كان :  $I = ]a, b[$  و  $I = [a, b[$  و  $I = ]a, b]$ f'(a) = f'\_d(a) و  $f'(b) = f'_g(b)$





■ مثال : الدالة المشتقة ل  $f(x) = x^3$  على  $\mathbb{R}$  هي  $f'(x) = 3x^2$ .

### III. جدول الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية: (الجدول 1)

الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف $f$	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف $f'$	الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف $f$	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف $f'$
$a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$D_f = \mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} = ]0, +\infty[$
$x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ و $c \neq 0$	$f'(x) = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ و $c \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

### IV. العمليات على الدوال المشتقة:

01. خاصيات: ( أنظر الجدول 2 )

لتكن $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $I$ .					
الدالة	مشتقتها	شرط	الدالة	مشتقتها	شرط
$f + g$	$(f + g)' = f' + g'$		$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$g$ لا تنعدم على $I$
$\alpha \times f$	$(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$f^n$	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$	$n \in \mathbb{N}^*$
$f \times g$	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$		$f^n$	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$	$f$ و $n \in \mathbb{Z}^{*-}$ لا تنعدم على $I$
$\frac{1}{g}$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$	$g$ لا تنعدم على $I$			

02. أمثلة : أحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  في الحالات التالية

أ-  $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$     ب-  $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$     ج-  $f(x) = 2x \cos x$     د-  $f(x) = 1 + (3x+2)^4$

### V. الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة $f$ .

1. مفردات :

- المشتقة ل  $f'$  تسمى المشتقة الثانية ل  $f$ . نرمز لها ب :  $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$ .
- إذا كانت  $f^{(2)}$  بدورها قابلة للاشتقاق على  $I$  فدالتها المشتقة  $(f^{(2)})'(x)$  تسمى المشتقة الثالثة ل  $f$  ونرمز لها ب  $(f^{(2)})' = f^{(3)}$ .

2. بصفة عامة :





المشتقة من الرتبة  $n$  للدالة  $f$  (أي  $f^{(n)}(x)$ ) هي المشتقة لـ  $f^{(n-1)}(x)$  (أي المشتقة من الرتبة  $n-1$ )  $f^{(n-1)}(x)$  ونرمز لها بـ:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

مثال:

أحسب  $f^{(3)}(x)$  حيث: أ -  $f(x) = x^5$  - ب -  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  - ج - بين أن:  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ .

## VI. مشتقة مركب دالتين - مشتقة الدالة العكسية

### 01. مشتقة مركب دالتين:

(1) مبرهنة 1:

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و  $g$  قابلة للاشتقاق في  $f(x_0)$  فإن  $g \circ f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$ .

ولدينا:  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$ .

(2) مبرهنة 2:

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين قابلتين للاشتقاق على  $I$  و  $f(I)$  على التوالي

إذا كان  $x_0$  عنصرا من  $I$  وكانت  $f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $g$  قابلة للاشتقاق في  $f(I)$  فإن  $g \circ f$  قابلة للاشتقاق على  $I$ .

ولدينا:  $\forall x \in I: (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$ .

(3) نتائج:

الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف $f$	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف $f'$	الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف $f$	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف $f'$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g$ $g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g$ $g(x) > 0$	$f(x) = \cos(ax+b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -a \times \sin(ax+b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = a \times \cos(ax+b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f(x) = \tan(ax+b)$	$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$f'(x) = a \times [1 + \tan^2(ax+b)]$	$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

(4) مثال:

أحسب  $f'(x)$  مع أ -  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$  - ب -  $f(x) = \cos(2x - 4)$ .

جواب:

•  $f'(x) = (\sqrt{x^2 - x})' = \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$

•  $f'(x) = (\cos(2x - 4))' = (2x - 4)' \cos'(2x - 4) = -2x \sin(2x - 4)$

### 02. مشتقة الدالة العكسية

(1) مبرهنة 1:



لتكن  $f$  متصلة و رتيبة قطعاً على  $I$  (لأن الدالة  $f$  تقابل من المجال  $I$  إلى المجال  $J = f(I)$ ).  
إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و  $f'(x_0) \neq 0$  فإن الدالة العكسية  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق في  $y_0 = f(x_0)$   
لدينا:  $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(2) برهان :

بما أن  $f$  متصلة على  $I$  إذن دالتها العكسية  $f^{-1}$  متصلة على  $J = f(I)$  و منه لكل  $y_0$  من  $J$  لدينا  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$   
ندرس اشتقاق  $f^{-1}$  في  $y_0$  من  $J$ . نضع  $f^{-1}(y) = x$  و  $f^{-1}(y_0) = x_0$  مع  $x$  و  $x_0$  من  $I$ .  
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R} ; (f'(x_0) \neq 0) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} ; (f^{-1}(y_0) = x_0) \\ &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} \end{aligned}$$

خلاصة :  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق في  $y_0 = f(x_0)$  من  $J = f(I)$  حيث :  $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(3) مبرهنة 2 :

لتكن  $f$  دالة تقابل من المجال  $I$  إلى المجال  $J = f(I)$ .

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و دالتها المشتقة  $f'$  لا تنعدم على  $I$  (أي  $\forall x \in I ; f'(x) \neq 0$ ) فإن الدالة  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق

المجال  $J = f(I)$ . لدينا :  $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(4) تطبيق 1 : مشتقة :  $\sqrt[n]{x}$  و  $x^r$  و  $g(x) = [f(x)]^r$ . (جدول 4)

$n \in \mathbb{N}^*$  و  $r \in \mathbb{Q}^*$  و  $f$  موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على  $I$

$f$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$	$f'(x) = \left( (x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$
	$f(x) = (x^r)' = r x^{r-1}$	$f(x) = x^r$
$g$ قابلة للاشتقاق على $I$	$g'(x) = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
	$g'(x) = ([f(x)]^r)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1}$	$g(x) = [f(x)]^r$



■ أمثلة: أحسب  $f'$  مع:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} \quad f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} \quad f(x) = \sqrt[5]{x}$$

جواب :

$$\left[ f(x) = \sqrt[5]{x} \right]' = \left[ x^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

$$\left[ f(x) = \sqrt[5]{(x^2 + 1)} \right]' = \left[ (x^2 + 1)^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} (x^2 + 1)' (x^2 + 1)^{\frac{1}{5}-1} = \frac{14}{7} x (x^2 + 1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{14}{7} x \sqrt[5]{(x^2 + 1)^4}$$

$$\left[ f(x) = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^7} \right]' = \left[ (x^2 + 1)^{\frac{7}{5}} \right]' = \frac{7}{5} (x^2 + 1)' (x^2 + 1)^{\frac{7}{5}-1} = \frac{14}{7} x (x^2 + 1)^{\frac{2}{5}} = \frac{14}{7} x \sqrt[5]{(x^2 + 1)^2}$$

(5) تطبيق 2 : مشتقة الدالة  $f(x) = \arctan x$  ثم  $f(x) = \arctan(u(x))$ .

■ خاصية 1 :

أ- الدالة  $f(x) = \arctan x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة هي  $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .ب- إذا كانت الدالة  $u(x)$  قابلة للاشتقاق على  $I$  فإن الدالة  $f(x) = \arctan(u(x))$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا :

$$\forall x \in I : f'(x) = (\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

■ مثال :

$$\left( \arctan(x^3 - 5x) \right)' = \frac{(x^3 - 5x)'}{1+(x^3 - 5x)^2} = \frac{3x^2 - 5}{1+(x^3 - 5x)^2}$$

$$\left( \arctan(\sin x) \right)' = \frac{(\sin x)'}{1+(\sin x)^2} = \frac{\cos x}{1+(\sin x)^2}$$

$$\begin{aligned} \left( \arctan^7(x^3 - 5x) \right)' &= 7 \left( \arctan(x^3 - 5x) \right)' \arctan^6(x^3 - 5x) = 7 \frac{(x^3 - 5x)'}{1+(x^3 - 5x)^2} \arctan^6(x^3 - 5x) \\ &= \frac{3x^2 - 5}{1+(x^3 - 5x)^2} \arctan^6(x^3 - 5x) \end{aligned}$$

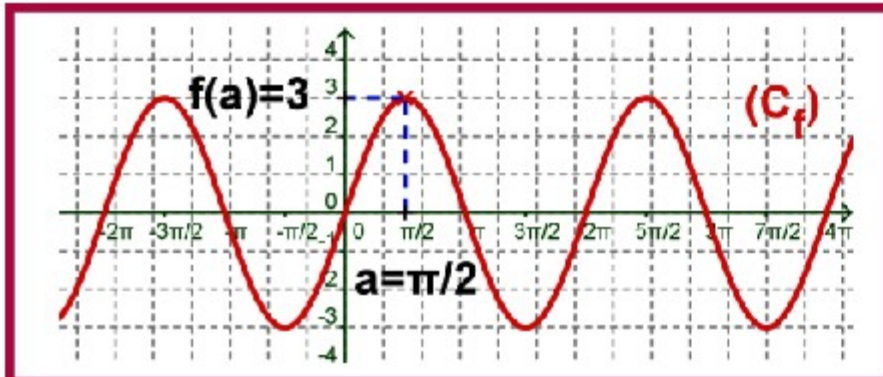
## VII. مبرهنة رول - مبرهنة التزايد المتناهية :

A. مطارف دالة عددية قابلة للاشتقاق.

1. نشاط:

المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح  $I$ .  $a$  عنصر من  $I$ .(1) هل  $f$  تقبل مطارف في  $a$  ؟(2) أعط قيمة ل  $f'(a)$ .

(3) أعط الخاصية.







## 2. خاصية :

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح  $I$ .  $a$  عنصر من  $I$ .  
إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في النقطة  $a$  و تقبل مطراف في النقطة  $a$  فإن  $f'(a) = 0$ .

## 3. ملحوظة :

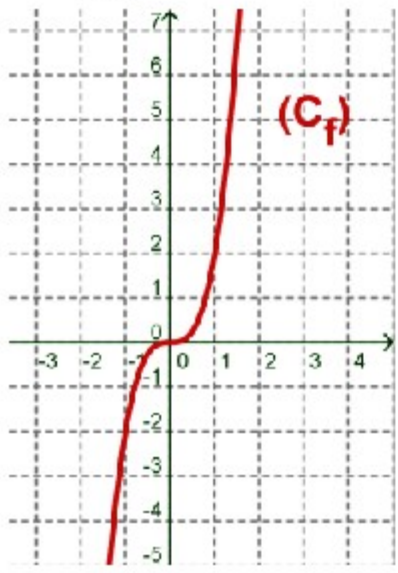
إذا كان  $f'(a) = 0$  فهذا لا يعني بالضرورة أن  $f$  مطراف للدالة  $f$ .

## 4. مثال :

$f(x) = 2x^3$  لدينا :  $f'(x) = 6x^2$  ومنه :  $f'(0) = 0$   
ولكن  $f(0)$  ليس مطراف ل  $f$ .

## 5. خاصية :

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح  $I$ .  $a$  عنصر من  $I$ .  
إذا كانت  $f'$  تنعدم في النقطة  $a$  وتتغير إشارتها بجوار  $a$  فإن  $f(a)$  مطراف ل  $f$ .

الدالة  $f(x) = 2x^3$ 

## B. مبرهنة رول : théorème de Rolle

## 1. مبرهنة :

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  حيث  $a < b$ .  $f$  دالة عددية تحقق ما يلي :

- أ-  $f$  متصلة على القطعة  $[a, b]$ .
  - ب-  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]a, b[$ .
  - ج-  $f(a) = f(b)$ .
- إذن يوجد عنصر  $c$  من  $]a, b[$  حيث  $f'(c) = 0$

## 2. برهان :

حالة 1 :  $f$  دالة ثابتة على  $[a, b]$  :

بمأن  $f$  دالة ثابتة على  $[a, b]$  إذن :  $f'(x) = 0$  :  $\forall x \in ]a, b[$ .  
و بالتالي المبرهنة صحيحة.

حالة 2 :  $f$  ليست بدالة ثابتة على  $[a, b]$  :

بمأن  $f$  متصلة على القطعة  $[a, b]$  إذن  $f([a, b]) = [m, M]$  مع  $m < M$  لأن  $f$  ليست بدالة ثابتة.

نضع :  $m = f(\alpha)$  و  $M = f(\beta)$  مع  $\alpha$  و  $\beta$  من  $[a, b]$  ..

إذن :  $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = M$  . (1)

• حالة :  $\alpha = a$  أو  $\alpha = b$  نبين أن :  $\beta \in ]a, b[$ .

بالنسبة ل :  $\alpha = a$  لدينا  $\beta \neq \alpha$  إذن  $\beta \neq a$

نفترض أن :  $\beta = b$  إذن  $M = f(\beta) = f(b) = f(a) = f(\alpha) = m$  و هذا غير ممكن إذن  $\beta \neq b$ .

و منه :  $\beta \in ]a, b[$ .

بنفس الطريقة ل  $\alpha = b$  نحصل على  $\beta \in ]a, b[$ .

و بالتالي  $f$  تقبل مطراف في  $\beta$  (قيمة قصوى حسب (1)).



إذن :  $f'(\beta) = 0$  يكفي أن نأخذ  $c = \beta$  .

### 3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة رول حيث  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[a, b]$  و  $f(a) = f(b)$

C. مبرهنة التزايدات المنتهية T.A.F

### 1. مبرهنة :

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  حيث  $a < b$  .  $f$  دالة عددية تحقق ما يلي :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{أ- } f \text{ متصلة على القطعة } [a, b] . \\ \text{ب- } f \text{ قابلة للاشتقاق على } ]a, b[ . \end{array} \right.$$

إذن يوجد عنصر  $c$  من  $]a, b[$  حيث  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

أو أيضا يوجد عنصر  $c$  من  $]a, b[$  حيث  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

### 2. برهان :

نعتبر الدالة :  $g$  المعرفة على  $[a, b]$  بما يلي :  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(a)$

الدالة  $g$  تحقق ما يلي :

- $g$  متصلة على القطعة  $[a, b]$  .
- $g$  قابلة للاشتقاق على  $]a, b[$  .
- $g(a) = g(b)$  .

حسب مبرهنة رول  $\exists c \in ]a, b[ : g'(c) = 0$  أي :

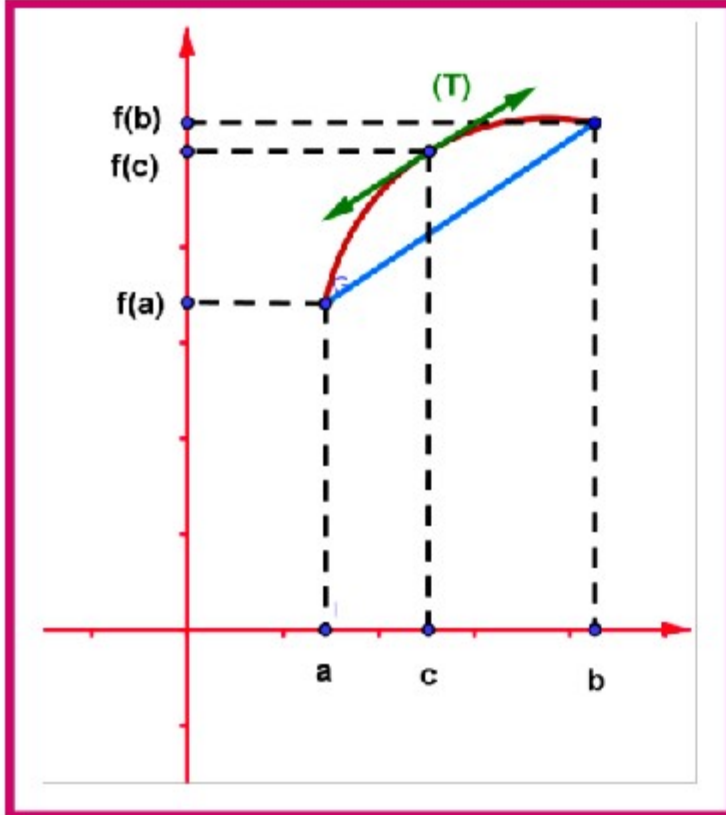
$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \exists c \in ]a, b[ : \left( f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(a) \right)'_{x=c} = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in ]a, b[ : \left( f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)_{x=c} = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in ]a, b[ : f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in ]a, b[ : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

### 3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية حيث  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[a, b]$

D. تطبيقات مبرهنة التزايدات المنتهية :

1. متفاوتة التزايدات المنتهية :







## ❖ خاصية :

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .  $k$  عنصر من  $\mathbb{R}^+$ .  
إذا كان :  $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k$  فإن  $\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ .  
أي :  $(\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k) \Rightarrow (\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$ .

## ❖ برهان :

حالة 1 :  $x = y$ . لدينا :  $|f(x) - f(y)| = 0 \leq k|x - y| = 0$  الاستلزام صحيح .  
حالة 2 :  $x \neq y$ . نأخذ :  $x < y$  ( نفس الشيء لـ  $y < x$  ).  
لدينا :  $[x, y] \subset I$  ( لأن  $I$  مجال )  
بمأن :  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  إذن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[x, y]$ .  
إذن :  $\exists c \in ]x, y[ : f(x) - f(y) = (x - y)f'(c)$  ( حسب مبرهنة T.A.F )  
ومنه :  $|f(x) - f(y)| = |(x - y)f'(c)| = |x - y||f'(c)| \leq k|x - y|$  مع  $k \geq 0$  و  $|f'(c)| \leq k$ .  
خلاصة :  $(\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k) \Rightarrow (\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$   
❖ مثال :

نبين :  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ .  
نضع :  $f(x) = \cos x$  لدينا : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $\forall x \in \mathbb{R} : |\cos x| \leq 1$   
ومنه حسب متفاوتة التزايد المتناهية :  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ .  
**2.** إشارة المشتقة الأولى ورتابة دالة :  
❖ خاصية :

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .  $k$   
▪ إذا كان  $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$  فإن  $f$  تزايدية على  $I$ .  
▪ إذا كانت  $\forall x \in I : f'(x) > 0$  فإن  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$ .  
▪ إذا كان  $\forall x \in I : f'(x) \leq 0$  فإن  $f$  تناقصية على  $I$ .  
▪ إذا كان  $\forall x \in I : f'(x) < 0$  فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$ .  
▪ إذا كان  $\forall x \in I : f'(x) = 0$  ( على  $I$  بكامله ) فإن  $f$  ثابتة على  $I$ .

**3.** برهان :

ليكن  $a$  و  $b$  من  $I$  مع  $a < b$  لدينا :  $[a, b] \subset I$  ( لأن  $I$  مجال ).  
بمأن :  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  إذن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[a, b]$ .  
ومنه حسب مبرهنة T.A.F :  $\exists c \in ]a, b[ : f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .  
حالة :  $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$  إذن :  $f'(c) \geq 0$  و منه  $(b - a)f'(c) \geq 0$  وبالتالي  $f(b) - f(a) \geq 0$  أي  $f(b) \geq f(a)$ .  
خلاصة :  $f$  تزايدية على  $I$ .  
**4.** ملحوظة : ( يمكن للدالة  $f'$  أن تنعدم في نقط منعزلة من  $I$  وهذا لا يؤثر على رتابة  $f$  )