

I- قابلية القسمة في \mathbb{Z}

أنشطة

نشاط 1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا
بين أن 8 يقسم $n^2 - 1$ لكل عدد صحيح طبيعي فردي n

الحل

ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من \mathbb{N} حيث $n = 2k + 1$

$$\text{لدينا } n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \text{ ومنه } n^2 - 1 = 4k(k+1)$$

وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد k' من \mathbb{N} حيث $k(k+1) = 2k'$ و بالتالي $n^2 - 1 = 8k'$

إذن 8 يقسم $n^2 - 1$

نشاط 2

بين أن لكل n من \mathbb{N} العدد $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3

الحل

$$\text{لدينا } n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

ليكن n من \mathbb{N} و منه يوجد $k \in \mathbb{N}$ حيث $n = 3k$ أو $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$

و بالتالي $n^3 - n = 3k(3k-1)(3k+1)$ أو $n^3 - n = (3k+1)(3k)(3k+2)$ أو

$$\text{أو } n^3 - n = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3(3k+2)(3k+1)(k+1)$$

و في جميع هذه الحالات $n^3 - n = 3k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$

اذن $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3

نشاط 3

أنشر $(10^6 - 1)^3$ ثم استنتج باقي القسمة للعدد 999999^3 على 5

نشاط 4

حدد الأرقام x و y بحيث العدد الصحيح الطبيعي $11x1y$ قابل للقسمة على 28

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z}
نقول إن b يقسم a و نكتب b/a إذا وجد k في \mathbb{Z} حيث $a = kb$

$$(a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = kb$$

2- ملاحظات

*- إذا كان b يقسم a إننا نقول إن b قاسم لـ a أو a مضاعف لـ b

*- ليكن $b \in \mathbb{Z}$ مجموعة مضاعفات العدد b هي المجموعة $b \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot b / k \in \mathbb{Z}\}$

- ليكن $a \in \mathbb{Z}^$ $b \in \mathbb{Z}$: $b/a \Rightarrow |b| \leq |a|$

3- خاصيات العلاقة " b/a "

*- a/a $\forall a \in \mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة " b/a " انعكاسية

*- $b/a \Rightarrow b/c$ $\forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$ نقول إن العلاقة " b/a " متعدية

*- $|a| = |b|$ $\Rightarrow b/a$ $\forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$

ملاحظة

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{N}^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} b/a \\ a/b \end{array} \Rightarrow a = b \right.$$

نقول إن العلاقة "b/a" تخالفية في \mathbb{N}

تمرين

- 1- بين أن $\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow a \cdot \mathbb{Z} \subset b \cdot \mathbb{Z}$
- 2- بين أن $\forall (a; x_1; x_2; y_1; y_2) \in \mathbb{Z}^5 \quad a/(x_1 - y_1) \wedge a/(x_2 - y_2) \Leftrightarrow a/(x_1 x_2 - y_1 y_2)$

II- القسمة الاقليدية في \mathbb{Z}

1- القسمة الاقليدية في \mathbb{N}

مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{N} حيث $a \neq b$
يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من \mathbb{N}^2 حيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q; r)$ بحيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في \mathbb{N}
العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي.

2- القسمة الاقليدية في \mathbb{Z}

مبرهنة

ليكن a من \mathbb{Z} و b في \mathbb{N}^* حيث $a \neq b$
يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ حيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q; r)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ بحيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في \mathbb{Z}
العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي

تمرين

حدد الأعداد الصحيحة النسبية x بحيث يكون للقسمة الاقليدية لـ x على 7 خارج q و باقي q^2

تمرين

بين إذا كان للقسمة الاقليدية لـ a على b و القسمة الاقليدية لـ a' على b نفس الخارج q و كان $a' < x < a$ فان q خارج القسمة الاقليدية لـ x على b

- الأعداد الأولية

1- تعاريف

أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$
نقول إن العدد d قاسم فعلي للعدد a إذا و فقط إذا كان d يقسم a و $d \notin \{-1; 1; -a; a\}$

أمثلة

- *- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و -2 و 3 و -3
- *- لدينا $D_7 = \{1; -1; 7; -7\}$ العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

ب- الأعداد الأولية

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$
نقول إن العدد a أولي إذا و فقط إذا كان a يخالف 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية
 a أولي $\Leftrightarrow D_a = \{1; -1; a; -a\}$ و $|a| \neq 1$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ P

2- خاصيات

أ- إذا كان p و q عددين أوليين و $|q| \neq |p|$ فان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1 (العكس غير صحيح)
 ب- ليكن a عددا غير أولي في \mathbb{Z}^* و يخالف 1 و -1 .
 أصغر قاسم فعلي موجب للعدد a هو عدد أولي
 د- مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

لتكن P^+ مجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$$P^+ \neq \emptyset \text{ لأن } 2 \in P^+$$

لنفترض أن P^+ منتهية و ليكن p أكبر عنصر من P^+ . لنعتبر $m = p! + 1$ لدينا $m > p$

ومنه $m \notin P^+$ أي m ليس أوليا و بالتالي للعدد m قاسم أولي q ومنه $q \in P^+$ و $q \leq p$

$q \leq p$ يستلزم q يقسم $p!$ لأن q أحد عوامل $p!$ (

لدينا q/m و $q/p!$ ومن $q/(m-p!)$ أي $q/1$ وهذا يتناقض مع كون q أولي

ومنه P^+ غير منتهية إذن P غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

مبرهنة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

إذا كان n غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n و $p^2 \leq n$

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ و n غير أولي و ليكن p أصغر قاسم فعلي موجب لـ n إذن p أولي ومنه يوجد

k من \mathbb{N}^* حيث $n = pk$

بما أن $1 < p < n$ فان $1 < k < kp = n$ إذن k قاسم فعلي موجب للعدد n و بالتالي $p \leq k$

$$\text{إذن } p^2 \leq pk = n$$

ملاحظة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

لتأكد من أن n هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية p حيث $p^2 \leq n$

❖ فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فان n غير أولي

❖ وإذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد مهن فان n عدد أولي

(عمليا نتوقف عندما تكون $n > p^2$)

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

$$13^2 = 169 ; 17^2 = 289$$

4- خاصيات

خاصية

*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

نتيجة

لتكن p_1 و p_2 و و p_n أعداد أولية موجبة و p عددا أوليا

$$p / p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \Rightarrow \exists i \in \{1; 2; \dots; n\} \quad p = p_i$$

5- التفكيك الى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم ومخالف لـ 1 و -1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل

$$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \text{ حيث } p_1, p_2, \dots, p_n \text{ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و } \alpha_1$$

و $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و $\varepsilon = \pm 1$

ملاحظة عندما نكتب n على شكل $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ فاننا نقول اننا فككنا n الى جداء

عوامل أولية

مثال فكك العدد 1752- الى جداء عوامل أولية

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 و p_n أعداد أولية
يكون عدد d قاسما للعدد n إذا وفقط إذا كان تفكيك d إلى عوامل جداء أولية على شكل
$$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$$

حيث $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ لكل i من $\{1; 2; \dots; k\}$

نتيجة 2

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 و p_n أعداد أولية
يكون عدد m مضاعفا للعدد n إذا وفقط إذا كان تفكيك m إلى عوامل جداء أولية على شكل
$$d = \varepsilon p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$$

حيث $0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i$ لكل i من $\{1; 2; \dots; k\}$

IV- القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسبي a بالرمز D_a

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعاً لـ a و b يرمز له
 $a \wedge b$

$$\delta = a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \in D_a \cap D_b \\ \forall x \in D_a \cap D_b \quad x \leq \delta \end{cases}$$

2- خاصيات

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*
$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \wedge a = |a|$$

مثال $48 \wedge 60 = 12$

3- خوارزمية اقليدس أو طريقة " القسمة المتتالية " لتحديد القاسم المشترك أ- ملاحظة

$$\forall a \in \mathbb{Z}^* \quad D_a = D_{-a} \quad *$$

$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^{*2} \quad a \wedge b = |a| \wedge |b| \quad *$ ومنه تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين نسبين
يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين.

ب- ليكن a و b من \mathbb{N}^*

- إذا كان b/a فإن $a \wedge b = b$

- إذا كان b لا يقسم a فانه يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ حيث $0 < r < b$ و $a = bq + r$

بما أن $r = a - bq$ فإن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم r

و بالتالي قاسم قاسم مشترك لـ a و b هو قاسم مشترك لـ r أي $D_a \cap D_b \subset D_r \cap D_b$

عكسياً كل قاسم مشترك لـ b و r يقسم a (لأن $a = bq + r$)

ومنه كل قاسم مشترك لـ b و r هو قاسم مشترك لـ a و b أي $D_r \cap D_b \subset D_a \cap D_b$

إذن $D_a \cap D_b = D_r \cap D_b$ وبالتالي $a \wedge b = r \wedge b$

تمهيدة

ليكن a و b من \mathbb{N}^* بحيث b لا يقسم a و r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b

$$a \wedge b = r \wedge b$$

ج- ليكن a و b من \mathbb{N}^* نفترض أن $b < a$

بإجراء القسمة الاقليدية لـ a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ حيث $0 \leq r_1 < b$

❖ إذا كان $r_1 = 0$ فإن b/a و منه $a \wedge b = b$

❖ إذا كان $r_1 > 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ b على r_1 و نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$

إذا كان $r_2 = 0$ فإن $b \wedge r_1 = r_1$ و منه $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1$

إذا كان $r_2 > 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ r_1 على r_2 و نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 < r_2$

بإجراء العملية n مرة نحصل على

$$a \wedge b = b \wedge r_1, \quad 0 < r_1 < b, \quad a = bq_1 + r_1$$

$$b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2, \quad 0 < r_2 < r_1, \quad b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3, \quad 0 < r_3 < r_2, \quad r_1 = r_2q_3 + r_3$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}, \quad r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

و منه نستنتج $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = \dots = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$

$$0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_3 < r_2 < r_1 < b$$

نضع $A = \{r_1; r_2; r_3; \dots; r_n; \dots\}$

A جزء من \mathbb{N} مكبور بالعدد b و منه A مجموعة منتهية

إذن $\exists p \in \mathbb{N} / r_{p+1} = 0$; $r_p \neq 0$

بما أن $r_{p+1} = 0$ فإن $r_{p-1} = r_pq_{p+1}$ و منه $r_{p-1} \wedge r_p = r_b$

إذن $a \wedge b = r_p$

نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{N}^*

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو آخر باقي غير منعدم في طريقة القسمة المتتالية لـ a على b

مثال باستعمال طريقة القسمة المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 156 و 1640

$$1640 = 156 \times 10 + 80$$

$$156 = 80 \times 1 + 76$$

$$80 = 76 \times 1 + 4$$

$$76 = 4 \times 19 + 0$$

$$1640 \wedge 156 = 4 \quad \text{إذن}$$

1- خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $\delta = a \wedge b$

يوجد عددا u و v من \mathbb{Z} حيث $\delta = au + bv$

البرهان

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $\delta = a \wedge b$

نعتبر $A = \{n \in \mathbb{N}^* / n = au + bv ; (u; v) \in \mathbb{Z}^2\}$

لدينا $A \neq \emptyset$ لأن $a^2 + b^2 \in A$

$A \subset \mathbb{N}$ و بالتالي $\forall x \in A \quad x \geq p$

ليكن $p = au_0 + bv_0$ نبرهن أن $\delta = p$

- ❖ بما أن δ/a و δ/b فان δ/p و منه $\delta \leq p$
- ❖ بإنجاز القسمة لـ a على p نحصل على $0 \leq r < p$; $a = pq + r$; $\exists (q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
- ❖ ومنه $r = a - q(a u_0 + b v_0) = a(1 - q u_0) + b(-q v_0)$
- إذا كان $r > 0$ فان $r \in A$ و منه $r \geq p$ وهذا يتناقض مع كون $r < p$
- و بالتالي $r = 0$ أي p/a و بنفس الطريقة نبرهن أن p/b
- ومنه p قاسم مشترك لـ a و b وبالتالي $\delta \geq p$
- لدينا $\delta \leq p$ و $\delta \geq p$ إذن $\delta = p$

ب- استنتاجات

- * من البرهان السابق نستنتج $\delta = a \wedge b$ هو أصغر عدد موجب قطعاً من المجموعة $B = \{n \in \mathbb{Z}^* / n = au + bv \ ; \ (u; v) \in \mathbb{Z}^2\}$
- * بما أن δ قاسم مشترك لـ a و b فان أي قاسم لـ δ يقسم a و b
- عكسيا إذا كان c قاسم مشترك لـ a و b فان $a = k_1 c$; $b = k_2 c$; $\exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2$
- بما أن $\delta = a \wedge b$ فانه $\delta = au + bv$ / $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2$
- ومنه $\delta = (k_1 u + k_2 v) c$ أي c يقسم δ

مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $\delta = a \wedge b$
مجموعة قواسم δ هي مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b ($D_a \cap D_b = D_\delta$)

نتيجة

إذا كان a و b و c أعداد من \mathbb{Z} فان
 $a \wedge b = \delta \Rightarrow ca \wedge cb = |c| \delta$

خاصية

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ وحيث p_1 و p_2 و p_3 و p_4 و p_5 و p_6 و p_7 و p_8 و p_9 و p_{10} و p_{11} و p_{12} و p_{13} و p_{14} و p_{15} و p_{16} و p_{17} و p_{18} و p_{19} و p_{20} و p_{21} و p_{22} و p_{23} و p_{24} و p_{25} و p_{26} و p_{27} و p_{28} و p_{29} و p_{30} و p_{31} و p_{32} و p_{33} و p_{34} و p_{35} و p_{36} و p_{37} و p_{38} و p_{39} و p_{40} و p_{41} و p_{42} و p_{43} و p_{44} و p_{45} و p_{46} و p_{47} و p_{48} و p_{49} و p_{50} و p_{51} و p_{52} و p_{53} و p_{54} و p_{55} و p_{56} و p_{57} و p_{58} و p_{59} و p_{60} و p_{61} و p_{62} و p_{63} و p_{64} و p_{65} و p_{66} و p_{67} و p_{68} و p_{69} و p_{70} و p_{71} و p_{72} و p_{73} و p_{74} و p_{75} و p_{76} و p_{77} و p_{78} و p_{79} و p_{80} و p_{81} و p_{82} و p_{83} و p_{84} و p_{85} و p_{86} و p_{87} و p_{88} و p_{89} و p_{90} و p_{91} و p_{92} و p_{93} و p_{94} و p_{95} و p_{96} و p_{97} و p_{98} و p_{99} و p_{100} و p_{101} و p_{102} و p_{103} و p_{104} و p_{105} و p_{106} و p_{107} و p_{108} و p_{109} و p_{110} و p_{111} و p_{112} و p_{113} و p_{114} و p_{115} و p_{116} و p_{117} و p_{118} و p_{119} و p_{120} و p_{121} و p_{122} و p_{123} و p_{124} و p_{125} و p_{126} و p_{127} و p_{128} و p_{129} و p_{130} و p_{131} و p_{132} و p_{133} و p_{134} و p_{135} و p_{136} و p_{137} و p_{138} و p_{139} و p_{140} و p_{141} و p_{142} و p_{143} و p_{144} و p_{145} و p_{146} و p_{147} و p_{148} و p_{149} و p_{150} و p_{151} و p_{152} و p_{153} و p_{154} و p_{155} و p_{156} و p_{157} و p_{158} و p_{159} و p_{160} و p_{161} و p_{162} و p_{163} و p_{164} و p_{165} و p_{166} و p_{167} و p_{168} و p_{169} و p_{170} و p_{171} و p_{172} و p_{173} و p_{174} و p_{175} و p_{176} و p_{177} و p_{178} و p_{179} و p_{180} و p_{181} و p_{182} و p_{183} و p_{184} و p_{185} و p_{186} و p_{187} و p_{188} و p_{189} و p_{190} و p_{191} و p_{192} و p_{193} و p_{194} و p_{195} و p_{196} و p_{197} و p_{198} و p_{199} و p_{200} و p_{201} و p_{202} و p_{203} و p_{204} و p_{205} و p_{206} و p_{207} و p_{208} و p_{209} و p_{210} و p_{211} و p_{212} و p_{213} و p_{214} و p_{215} و p_{216} و p_{217} و p_{218} و p_{219} و p_{220} و p_{221} و p_{222} و p_{223} و p_{224} و p_{225} و p_{226} و p_{227} و p_{228} و p_{229} و p_{230} و p_{231} و p_{232} و p_{233} و p_{234} و p_{235} و p_{236} و p_{237} و p_{238} و p_{239} و p_{240} و p_{241} و p_{242} و p_{243} و p_{244} و p_{245} و p_{246} و p_{247} و p_{248} و p_{249} و p_{250} و p_{251} و p_{252} و p_{253} و p_{254} و p_{255} و p_{256} و p_{257} و p_{258} و p_{259} و p_{260} و p_{261} و p_{262} و p_{263} و p_{264} و p_{265} و p_{266} و p_{267} و p_{268} و p_{269} و p_{270} و p_{271} و p_{272} و p_{273} و p_{274} و p_{275} و p_{276} و p_{277} و p_{278} و p_{279} و p_{280} و p_{281} و p_{282} و p_{283} و p_{284} و p_{285} و p_{286} و p_{287} و p_{288} و p_{289} و p_{290} و p_{291} و p_{292} و p_{293} و p_{294} و p_{295} و p_{296} و p_{297} و p_{298} و p_{299} و p_{300} و p_{301} و p_{302} و p_{303} و p_{304} و p_{305} و p_{306} و p_{307} و p_{308} و p_{309} و p_{310} و p_{311} و p_{312} و p_{313} و p_{314} و p_{315} و p_{316} و p_{317} و p_{318} و p_{319} و p_{320} و p_{321} و p_{322} و p_{323} و p_{324} و p_{325} و p_{326} و p_{327} و p_{328} و p_{329} و p_{330} و p_{331} و p_{332} و p_{333} و p_{334} و p_{335} و p_{336} و p_{337} و p_{338} و p_{339} و p_{340} و p_{341} و p_{342} و p_{343} و p_{344} و p_{345} و p_{346} و p_{347} و p_{348} و p_{349} و p_{350} و p_{351} و p_{352} و p_{353} و p_{354} و p_{355} و p_{356} و p_{357} و p_{358} و p_{359} و p_{360} و p_{361} و p_{362} و p_{363} و p_{364} و p_{365} و p_{366} و p_{367} و p_{368} و p_{369} و p_{370} و p_{371} و p_{372} و p_{373} و p_{374} و p_{375} و p_{376} و p_{377} و p_{378} و p_{379} و p_{380} و p_{381} و p_{382} و p_{383} و p_{384} و p_{385} و p_{386} و p_{387} و p_{388} و p_{389} و p_{390} و p_{391} و p_{392} و p_{393} و p_{394} و p_{395} و p_{396} و p_{397} و p_{398} و p_{399} و p_{400} و p_{401} و p_{402} و p_{403} و p_{404} و p_{405} و p_{406} و p_{407} و p_{408} و p_{409} و p_{410} و p_{411} و p_{412} و p_{413} و p_{414} و p_{415} و p_{416} و p_{417} و p_{418} و p_{419} و p_{420} و p_{421} و p_{422} و p_{423} و p_{424} و p_{425} و p_{426} و p_{427} و p_{428} و p_{429} و p_{430} و p_{431} و p_{432} و p_{433} و p_{434} و p_{435} و p_{436} و p_{437} و p_{438} و p_{439} و p_{440} و p_{441} و p_{442} و p_{443} و p_{444} و p_{445} و p_{446} و p_{447} و p_{448} و p_{449} و p_{450} و p_{451} و p_{452} و p_{453} و p_{454} و p_{455} و p_{456} و p_{457} و p_{458} و p_{459} و p_{460} و p_{461} و p_{462} و p_{463} و p_{464} و p_{465} و p_{466} و p_{467} و p_{468} و p_{469} و p_{470} و p_{471} و p_{472} و p_{473} و p_{474} و p_{475} و p_{476} و p_{477} و p_{478} و p_{479} و p_{480} و p_{481} و p_{482} و p_{483} و p_{484} و p_{485} و p_{486} و p_{487} و p_{488} و p_{489} و p_{490} و p_{491} و p_{492} و p_{493} و p_{494} و p_{495} و p_{496} و p_{497} و p_{498} و p_{499} و p_{500} و p_{501} و p_{502} و p_{503} و p_{504} و p_{505} و p_{506} و p_{507} و p_{508} و p_{509} و p_{510} و p_{511} و p_{512} و p_{513} و p_{514} و p_{515} و p_{516} و p_{517} و p_{518} و p_{519} و p_{520} و p_{521} و p_{522} و p_{523} و p_{524} و p_{525} و p_{526} و p_{527} و p_{528} و p_{529} و p_{530} و p_{531} و p_{532} و p_{533} و p_{534} و p_{535} و p_{536} و p_{537} و p_{538} و p_{539} و p_{540} و p_{541} و p_{542} و p_{543} و p_{544} و p_{545} و p_{546} و p_{547} و p_{548} و p_{549} و p_{550} و p_{551} و p_{552} و p_{553} و p_{554} و p_{555} و p_{556} و p_{557} و p_{558} و p_{559} و p_{560} و p_{561} و p_{562} و p_{563} و p_{564} و p_{565} و p_{566} و p_{567} و p_{568} و p_{569} و p_{570} و p_{571} و p_{572} و p_{573} و p_{574} و p_{575} و p_{576} و p_{577} و p_{578} و p_{579} و p_{580} و p_{581} و p_{582} و p_{583} و p_{584} و p_{585} و p_{586} و p_{587} و p_{588} و p_{589} و p_{590} و p_{591} و p_{592} و p_{593} و p_{594} و p_{595} و p_{596} و p_{597} و p_{598} و p_{599} و p_{600} و p_{601} و p_{602} و p_{603} و p_{604} و p_{605} و p_{606} و p_{607} و p_{608} و p_{609} و p_{610} و p_{611} و p_{612} و p_{613} و p_{614} و p_{615} و p_{616} و p_{617} و p_{618} و p_{619} و p_{620} و p_{621} و p_{622} و p_{623} و p_{624} و p_{625} و p_{626} و p_{627} و p_{628} و p_{629} و p_{630} و p_{631} و p_{632} و p_{633} و p_{634} و p_{635} و p_{636} و p_{637} و p_{638} و p_{639} و p_{640} و p_{641} و p_{642} و p_{643} و p_{644} و p_{645} و p_{646} و p_{647} و p_{648} و p_{649} و p_{650} و p_{651} و p_{652} و p_{653} و p_{654} و p_{655} و p_{656} و p_{657} و p_{658} و p_{659} و p_{660} و p_{661} و p_{662} و p_{663} و p_{664} و p_{665} و p_{666} و p_{667} و p_{668} و p_{669} و p_{670} و p_{671} و p_{672} و p_{673} و p_{674} و p_{675} و p_{676} و p_{677} و p_{678} و p_{679} و p_{680} و p_{681} و p_{682} و p_{683} و p_{684} و p_{685} و p_{686} و p_{687} و p_{688} و p_{689} و p_{690} و p_{691} و p_{692} و p_{693} و p_{694} و p_{695} و p_{696} و p_{697} و p_{698} و p_{699} و p_{700} و p_{701} و p_{702} و p_{703} و p_{704} و p_{705} و p_{706} و p_{707} و p_{708} و p_{709} و p_{710} و p_{711} و p_{712} و p_{713} و p_{714} و p_{715} و p_{716} و p_{717} و p_{718} و p_{719} و p_{720} و p_{721} و p_{722} و p_{723} و p_{724} و p_{725} و p_{726} و p_{727} و p_{728} و p_{729} و p_{730} و p_{731} و p_{732} و p_{733} و p_{734} و p_{735} و p_{736} و p_{737} و p_{738} و p_{739} و p_{740} و p_{741} و p_{742} و p_{743} و p_{744} و p_{745} و p_{746} و p_{747} و p_{748} و p_{749} و p_{750} و p_{751} و p_{752} و p_{753} و p_{754} و p_{755} و p_{756} و p_{757} و p_{758} و p_{759} و p_{760} و p_{761} و p_{762} و p_{763} و p_{764} و p_{765} و p_{766} و p_{767} و p_{768} و p_{769} و p_{770} و p_{771} و p_{772} و p_{773} و p_{774} و p_{775} و p_{776} و p_{777} و p_{778} و p_{779} و p_{780} و p_{781} و p_{782} و p_{783} و p_{784} و p_{785} و p_{786} و p_{787} و p_{788} و p_{789} و p_{790} و p_{791} و p_{792} و p_{793} و p_{794} و p_{795} و p_{796} و p_{797} و p_{798} و p_{799} و p_{800} و p_{801} و p_{802} و p_{803} و p_{804} و p_{805} و p_{806} و p_{807} و p_{808} و p_{809} و p_{810} و p_{811} و p_{812} و p_{813} و p_{814} و p_{815} و p_{816} و p_{817} و p_{818} و p_{819} و p_{820} و p_{821} و p_{822} و p_{823} و p_{824} و p_{825} و p_{826} و p_{827} و p_{828} و p_{829} و p_{830} و p_{831} و p_{832} و p_{833} و p_{834} و p_{835} و p_{836} و p_{837} و p_{838} و p_{839} و p_{840} و p_{841} و p_{842} و p_{843} و p_{844} و p_{845} و p_{846} و p_{847} و p_{848} و p_{849} و p_{850} و p_{851} و p_{852} و p_{853} و p_{854} و p_{855} و p_{856} و p_{857} و p_{858} و p_{859} و p_{860} و p_{861} و p_{862} و p_{863} و p_{864} و p_{865} و p_{866} و p_{867} و p_{868} و p_{869} و p_{870} و p_{871} و p_{872} و p_{873} و p_{874} و p_{875} و p_{876} و p_{877} و p_{878} و p_{879} و p_{880} و p_{881} و p_{882} و p_{883} و p_{884} و p_{885} و p_{886} و p_{887} و p_{888} و p_{889} و p_{890} و p_{891} و p_{892} و p_{893} و p_{894} و p_{895} و p_{896} و p_{897} و p_{898} و p_{899} و p_{900} و p_{901} و p_{902} و p_{903} و p_{904} و p_{905} و p_{906} و p_{907} و p_{908} و p_{909} و p_{910} و p_{911} و p_{912} و p_{913} و p_{914} و p_{915} و p_{916} و p_{917} و p_{918} و p_{919} و p_{920} و p_{921} و p_{922} و p_{923} و p_{924} و p_{925} و p_{926} و p_{927} و p_{928} و p_{929} و p_{930} و p_{931} و p_{932} و p_{933} و p_{934} و p_{935} و p_{936} و p_{937} و p_{938} و p_{939} و p_{940} و p_{941} و p_{942} و p_{943} و p_{944} و p_{945} و p_{946} و p_{947} و p_{948} و p_{949} و p_{950} و p_{951} و p_{952} و p_{953} و p_{954} و p_{955} و p_{956} و p_{957} و p_{958} و p_{959} و p_{960} و p_{961} و p_{962} و p_{963} و p_{964} و p_{965} و p_{966} و p_{967} و p_{968} و p_{969} و p_{970} و p_{971} و p_{972} و p_{973} و p_{974} و p_{975} و p_{976} و p_{977} و p_{978} و p_{979} و p_{980} و p_{981} و p_{982} و p_{983} و p_{984} و p_{985} و p_{986} و p_{987} و p_{988} و p_{989} و p_{990} و p_{991} و p_{992} و p_{993} و p_{994} و p_{995} و p_{996} و p_{997} و p_{998} و p_{999} و p_{1000} و p_{1001} و p_{1002} و p_{1003} و p_{1004} و p_{1005} و p_{1006} و p_{1007} و p_{1008} و p_{1009} و p_{1010} و p_{1011} و p_{1012} و p_{1013} و $p_{$

أ- * - ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

$$a \vee b = b \vee a$$

$$(a \vee b)|c| = ac \vee bc$$

$$a \wedge a = |a|$$

$$b/a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$$

ب- * - ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $a \vee b = m$
كل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف للعدد m

ج- مبرهنة

$$\text{ليكن } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{Z}^* \text{ و } a \vee b = m \text{ و } a \wedge b = \delta \text{ و } m\delta = |ab|$$

نتيجة

$$\text{ليكن } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{Z}^* \\ a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$$

خاصية

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ وحيث p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو العدد $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$ حيث $\lambda_i = \sup(\alpha_i; \beta_i)$ و i تنتمي $\{1; 2; \dots; k\}$

مثال حدد $180 \vee 1170$

3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

a_1 و a_2 و a_3, \dots, a_k أعداد من \mathbb{Z}^*
أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد a_1 و a_2 و a_3, \dots, a_k يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ a_1 و a_2 و a_3, \dots, a_k
و استنتج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

III- الموافقة بترديد n

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}
نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $a \equiv b [n]$ إذا كان n يقسم $a - b$
 $\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b [n] \Leftrightarrow n/a - b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = kn$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n "

أ- $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n " انعكاسية
ب- $\forall (a; b) \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b [n] \Rightarrow b \equiv a [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n " تماثلية
ج- $\forall (a; b) \in \mathbb{Z} \quad (a \equiv b [n]) \wedge (b \equiv c [n]) \Rightarrow a \equiv c [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n " متعدية
نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n " علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}
 $a \equiv b [n]$ تكافئ a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n

البرهان

- ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N} بحيث $a = nq_1 + r_1$ و $b = nq_2 + r_2$ مع $0 \leq r_1 < n$ و $0 \leq r_2 < n$ ❖ إذا كان a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n أي $r_1 = r_2$ فان $a - b = n(q_1 - q_2)$ أي أن $a \equiv b \pmod{n}$
- ❖ عكسيا إذا كان $a \equiv b \pmod{n}$ فانه يوجد k من \mathbb{Z} حيث $a - b = nk$ ومنه $r_1 - r_2 = (k - q_1 - q_2)n$ أي n يقسم $r_1 - r_2$ ولدينا $0 \leq r_1 < n$ و $0 \leq r_2 < n$ ومنه $|r_1 - r_2| < n$ وبالتالي $r_1 - r_2 = 0$ أي $r_1 = r_2$

3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- * $\forall (a; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists (q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad a = nq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < n$
- * $\forall (a; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad a \equiv r \pmod{n} \quad \text{et} \quad r \in \{0; 1; \dots; n-1\}$
- المجموعة $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv r \pmod{n}\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي r في القسمة الاقليدية على n نرمز لها بـ \bar{r}
- المجموعة \bar{r} تسمى صنف تكافؤ r بالنسبة للعلاقة "الموافقة بترديد n " في \mathbb{Z}
- * $x \in \bar{r} \Leftrightarrow x \equiv r \pmod{n}$
- * $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / \bar{a} \equiv \bar{r} \quad \text{أي} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / a \equiv r \pmod{n}$
- * إذا كان $\bar{r} = \bar{r}'$ و $0 \leq r < n$ و $0 \leq r' < n$ فان $r = r'$
- * $\forall (x; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / x \in \bar{r} \quad (r \text{ باقي القسمة الاقليدية على } n)$

اذن $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \dots \cup \overline{(n-1)}$

المجموعة $\{\bar{0}; \bar{1}; \dots; \overline{(n-1)}\}$ نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

عناصر $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

- * $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}\}$ حيث $\bar{0} = 2 \cdot \mathbb{Z}$ و $\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$
- * $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}$ حيث $\bar{0} = 7 \cdot \mathbb{Z}$ و $\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$ و $\bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 2 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$ و $\bar{3} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$ و و $\bar{6} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 6 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$
- في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ لدينا $\bar{532} = \bar{4}$ لأن $532 \equiv 4 \pmod{7}$
- $\bar{-36} = \bar{6}$ لأن $-36 \equiv 6 \pmod{7}$

4- انسجام العلاقة "الموافقة بترديد n " مع الجمع والضرب

أ- خاصية

ليكن x و y و z و t من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}

إذا كان $x \equiv y \pmod{n}$ و $z \equiv t \pmod{n}$ فان $x + z \equiv y + t \pmod{n}$

إذا كان $x \equiv y \pmod{n}$ و $z \equiv t \pmod{n}$ فان $x \times z \equiv y \times t \pmod{n}$

نقول إن العلاقة "الموافقة بترديد n " منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

- *- إذا كانت $x \in \bar{r}$ و $x' \in \bar{r}'$ فان $x + x' \in \overline{r + r'}$ و $x \times x' \in \overline{r \times r'}$ نكتب $\overline{r + r'} = \bar{r} + \bar{r}'$ و $\overline{r \times r'} = \bar{r} \times \bar{r}'$

- $\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (p; n) \in \mathbb{N}^ \times \mathbb{N} \quad a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^p \equiv b^p \pmod{n}$

أمثلة

$$\bar{3} \times \bar{4} = \overline{12} = \bar{2} \quad , \quad \bar{0} + \bar{1} + \bar{2} + \bar{3} + \bar{4} = \overline{10} = \bar{0} \quad , \quad \bar{3} + \bar{4} = \bar{7} = \bar{2} \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ في } *$$

تمرين

$$\bar{x} + \bar{5} = \bar{2} \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \text{ حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية } x \text{ حيث في}$$

تمرين

$$1- \text{ أعط جدول الجمع ثم الضرب في } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

$$2- \text{ بين أن العدد } 2^{70} + 3^{70} \text{ قابلة للقسمة على } 13$$

تمرين

$$3- \text{ بين أن } [n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n(n^4 - 1) \equiv 0$$

$$4- \text{ بين أن } 17 \text{ يقسم } 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$3- \text{ ليكن } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد } 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \text{ على } 4$$