ثانوية أبو حياهُ التوحيـدي

# المتتاليات العدديلة

الاستاذ: محمد حمدان

السنة الدراسية : 2011-2011 الثانية باك علوم رياضية

سلسلة التماريسن

$$v_n=2\sqrt{n}$$
 و  $u_n=rac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}$  نعتبر المتتاليتين:  $oldsymbol{0}$ 

 $\lim_{n o +\infty}v_n=+\infty$  بين باستعمال التعريف أن:  $u_n=rac{1}{2}$  و

$$a_n = \left(rac{\sqrt{2}}{3}
ight)^n + \left(rac{\sqrt{3}}{2}
ight)^n$$
 : حدد نهاية المتتاليات التالية  $oldsymbol{arrho}$ 

$$c_n \; = \; \sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n} \;\; , \;\; b_n \; = \; rac{2011^n - 2012^n}{2011^n + 2012^n} \;\; ,$$

$$g \ e_n \ = \ rac{4n + (-1)^n}{3n - 2(-1)^n} \ g \ d_n \ = \ rac{\sqrt{2^n} + \sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n + 3^n}} \ g \ h_n \ = \ rac{1}{n(3 - \sin n)} \ g \ g_n \ = \ rac{(-2)^n + 1}{5^n + 7} \ g \ f_n \ = \ rac{(-1)^n}{n}$$

$$n(3-\sin n)$$
  $b^n+7$   $n$   $w_n=rac{7^n+\sin(n)}{7^n+\cos(5^n)}$   $b^n=\sum_{i=0}^n\left(rac{\sqrt{3}}{2}
ight)^i$   $b^n=\sum_{k=0}^n k$   $b^n=\sum_{i=0}^n k$   $b^n=\sum_{k=0}^n k$ 

$$n\in\mathbb{N}^*$$
لتكن  $u_n=1+rac{1}{\sqrt{2}}+rac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+rac{1}{\sqrt{n}}$ لتكن  $orall n\in\mathbb{N}^*$  لكل  $u_n=1+rac{1}{\sqrt{2}}+rac{1}{\sqrt{2}}+rac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+rac{1}{\sqrt{2}}$  بين أن:  $n\in\mathbb{N}^*$   $n\in\mathbb{N}^*$  رثم حدد ...

$$n\in\mathbb{N}^*$$
 نعتبر المتتالية:  $u_n=\sum_{k=1}^nrac{1}{\sqrt{k+n^2}}$  نعتبر المتتالية

. أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية  $oldsymbol{0}$ 

$$(orall n\in \mathbb{N}^*):rac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant u_n\leqslant rac{n}{\sqrt{n^2+1}}:$$
ين ان $\lim_{n o +\infty}u_n$  عدد وم

$$n\in\mathbb{N}^*$$
 نعتبر  $u_n=rac{1}{1.2}+rac{1}{2.3}+\ldots+rac{1}{n.(n+1)}$  نعتبر

. $(u_n)$  أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية  $oldsymbol{0}$ 

$$.(orall k\in \mathbb{N}^*): \ rac{1}{k(k+1)}=rac{1}{k}-rac{1}{k+1}$$
 نحقق آن:  $\lim_{n o +\infty}u_n$  ثم حدد

$$n\in\mathbb{N}^*$$
 نعتبر المتتالية:  $u_n=1+rac{1}{4}+rac{1}{9}+\cdots+rac{1}{n^2}$  لكل

أدرس رتابة المتتالية  $(u_n)$ .

$$. orall k \in \mathbb{N}^* ackslash \{1\}$$
  $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$  :استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة.

$$n\in\mathbb{N}^*$$
 نعتبر $u_n=1+rac{1}{2!}+rac{1}{3!}+\cdots+rac{1}{n!}$ : نعتبر

- $(u_n)$  أدرس رتابة المتتالية ( $u_n$ ).
- ب $(u_n)$  بین أن:  $k!\geqslant 2^k$  : استنتج أن $(orall k\in \mathbb{N}^*)$  متقاربة

 $n\in\mathbb{N}^*$  نعتبر المتتالية:  $u_n=rac{2^n}{n!}$  لكل

 $\lim_{n o +\infty}u_n$ بین آن:  $u_n\leqslant u_3\left(rac{1}{2}
ight)^{n-3}$ : ثم حدد  $u_n\leqslant u_3\left(rac{1}{2}
ight)^{n-3}$ 

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n\geqslant 1}$  المعرفة بما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1; \\ u_{n+1} = \frac{1}{16} \left( 1 + 4u_n + \sqrt{1 + 24u_n} \right) \end{array} \right.$$

 $v_{n+1}-3=rac{1}{2}(v_n-3)$  نضع  $v_n=\sqrt{1+24u_n}$  بين أن .  $\lim_{n o +\infty}u_n$  بدلالة  $u_n$  بدلالة  $u_n$  بدلالة الم

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:

$$\left\{egin{array}{l} u_0=0 \ arrho=u_1=1 \ u_{n+2}=rac{2}{5}u_{n+1}-rac{1}{25}u_n \end{array}
ight.$$

 $w_n=5^nu_n$  نضع لكل n من  $v_n=u_{n+1}$  نضع لكل  $v_n=1$ 

n بين أن  $(v_n)$  هندسية أساسها  $rac{1}{5}$  ثم أكتب  $v_n$  بدلالة  $oldsymbol{0}$ 

بين أن المتتالية  $(w_n)$  حسابية أساسها  $v_n$  بين أن المتتالية  $v_n$  بدلالة  $v_n$  بدلالة  $v_n$  بدلالة  $v_n$  بدلالة  $v_n$  بدلالة  $v_n$ 

 $.(orall n\in \mathbb{N}^*):\ 0< u_{n+1}\leqslant rac{2}{5}u_n$  : (ا

 $.(orall n\in \mathbb{N}^*): 0 < u_n \leqslant \left(rac{2}{5}
ight)^n$  ب) باستنتج أن:  $\lim_{n o +\infty} u_n$  ثم حدد ثم حدد

بين أن المتتاليتان  $(u_n)_{n\geqslant 1}$  و  $(v_n)_{n\geqslant 1}$  المعرفتان بما يلي:  $v_n = \sum\limits_{k=1}^n rac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$  g  $u_n = \sum\limits_{k=1}^n rac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ 

ر المتتالية  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  المعرفة بما يلى:

$$\begin{cases} u_0 = 2; \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$$

- $.(orall n\in \mathbb{N}): \ -1\leqslant u_n\leqslant 3$  بين أن:  $oldsymbol{0}$
- . أدرس وتابة المتتالية  $(u_n)$ ، ثم استنتج أنها متقاربة  $oldsymbol{arrho}$ 
  - $n\in\mathbb{N}$  نعتبر المتالية :  $v_n=rac{u_n-3}{u_n+1}$  لكل  $v_n\in\mathbb{N}$
- ) بين أن  $(v_n)$  هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
- $\lim_{n o +\infty}v_n$  ب $v_n$  ثم  $u_n$  برلالة  $v_n$  استنتج  $v_n$  و
  - ج) أحسب بدلالة  $n \rightleftharpoons 0$

$$S_n = \sum_{i=0}^n v_i = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$P_n = \prod_{i=0}^n v_i = v_0.v_1\cdots v_n$$

 $P_n$  د $\lim_{n o +\infty} S_n$  و  $\lim_{n o +\infty} S_n$ 

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلى:

$$\left\{egin{array}{l} u_0=1$$
 و  $u_1=1$   $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ 

- $(orall n\in\mathbb{N}):\;u_n\geqslant n$  أحسب  $u_3$  و  $u_3$  . $u_3$  أحسب  $u_2$
- $(orall n\in \mathbb{N}):\; u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2=(-1)^n$  بين أن ${f 2}$
- $eta_n=rac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$  و نعتبر المتتاليتين:  $lpha_n=rac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$  ونعتبر المتتاليتين:  $oldsymbol{artheta}$
- $(orall n\in \mathbb{N}): \quad eta_n\!-\!lpha_n=rac{1}{u_{2n}u_{2n+1}}$  بين أن (
  - $(orall n \in \mathbb{N}^*): \quad lpha_n < eta_n$  ب (ب ) $(orall n \in \mathbb{N}^*): \quad 0 < eta_n - lpha_n < rac{1}{n}$  و أن
- $(orall n\in \mathbb{N}): \quad lpha_{n+1}\!-\!lpha_n=rac{1}{u_{2n}u_{2n+2}}$ ج) بین أن (
- د) بین أن  $(orall n\in \mathbb{N}):\; lpha_n=rac{1}{eta_n}-1$  . ثم استنتج أن  $(lpha_n)$  و  $(eta_n)$  متحاديتان و أحسب نهايتهما
  - ${\mathbb N}$  بين أن لكل n من  ${\mathbb N}$  لدينا:
- $u_n = rac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(rac{1+\sqrt{5}}{2}
  ight)^{n+1} \left(rac{1-\sqrt{5}}{2}
  ight)^{n+1} 
  ight)$

- $n\geqslant 1$  عدد صحیح طبیعی بحیث n
- - $rac{1}{2}$  بين أن المتتالية  $(a_n)$  تناقصية و مصغورة بالعدد  $oldsymbol{2}$
- $\lim_{n o +\infty}u_n=rac{1}{2}$  بين أن المتتالية  $(a_n)$  متقاربة و أن  $oldsymbol{\mathfrak{G}}$

نعتبر المتتاليتين  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  و  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  بحيث:

$$\left\{egin{array}{l} a_1 < 0; \ (orall n \in \mathbb{N}^*): a_{n+1} = rac{a_n}{n} \end{array}
ight. egin{array}{l} b_1 > 0; \ (orall n \in \mathbb{N}^*): b_{n+1} = rac{b_n}{n} \end{array}
ight.$$

- $a_n < 0 < b_n$  . 1 بين أن
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  أدر س رتابة كل من المتتاليتين  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  و  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 
  - $a_n(orall n\in \mathbb{N}^*): \quad b_n-a_n=rac{b_1-a_1}{(n-1)!}$  بين أن $oldsymbol{arphi}$ 
    - ا استنتج أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  و  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  متحاديتان.
      - $\lim_{n o +\infty} b_n$  و  $\lim_{n o +\infty} a_n$  احسب  $oldsymbol{6}$

ر المتتا $\overline{ ext{U}_n}$ يتين  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  و  $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$  بحيث:

$$\left\{egin{array}{ll} u_0=1; \ u_{n+1}=rac{u_n+v_n}{2} \end{array}
ight.$$
 9  $\left\{egin{array}{ll} v_0=\sqrt{2}; \ v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}.v_n} \end{array}
ight.$ 

- $.(orall n \in \mathbb{N}): \quad 0 < u_n < v_n$  بين أن 0
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$  أدرس رتابة كل من المتتاليتين  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  و 2
- $(orall n\in\mathbb{N}):\ v_{n+1}-u_{n+1}<rac{1}{2}(v_n-u_n)$  بین آن ${f 3}$
- $(orall n\in \mathbb{N}):\ v_n\!-\!u_n<\left(rac{1}{2}
  ight)^n \left(\!oldsymbol{v}_0\!-\!oldsymbol{u_0}\!
  ight)$  اِستنتج أن  $oldsymbol{0}$
- $(v_n)$  و  $(u_n)$  حدد  $\lim (v_n-u_n)$  حدد  $oldsymbol{\mathfrak{G}}$ 
  - $(orall n\in \mathbb{N}):$   $oldsymbol{v_n}=rac{1}{2^n\sin\left(rac{\pi}{2^{n+2}}
    ight)}$  :بین آن
  - $u_n=v_n\cos\left(rac{\pi}{2^{n+2}}
    ight)$  . ( $orall n\in\mathbb{N}$ ): و أن
    - $\lim_{n o +\infty}v_n$  و  $\lim_{n o +\infty}u_n$  . حدد النهايتين0

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  المعرفة بما يلى:

$$\left\{egin{array}{l} u_o=1; \ (orall n\in \mathbb{N}): \ u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+rac{1}{(n+1)^2}} \end{array}
ight.$$

بین أن  $u_n>0$  :  $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n>0$  بین أن  $\mathbf{0}$ 

$$v_n = \sum_{k=1}^n rac{1}{k^2}$$
: نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة ب

$$.(orall n\in \mathbb{N}^*): \quad v_n\leqslant 2-rac{1}{n}$$
 بين أن (۱

$$u_n = \sqrt{1+v_n}$$
 ب $v_n = \sqrt{1+v_n}$  ب $v_n \in \mathbb{N}^*$  ب $v_n \in \mathbb{N}^*$ 

$$(u_n)$$
 .  $(orall n\in \mathbb{N}^*):u_n\leqslant \sqrt{3}$  . و أن  $\ell$  إستنتج أن  $\ell$  متقاربة نهايتها  $\ell$ 

$$.(orall k\in \mathbb{N}^*ackslash\{1;2\}):\ 2^{k+1}\geqslant (k+1)^2$$
ب بين ان  $(orall k\geqslant 3):\ u_{k+1}^2-u_k^2\leqslant rac{1}{2^{k+1}}$ ب) استنتج ان (ب

$$\sqrt{rac{179}{72}}\leqslant \ell\leqslant \sqrt{3}$$
 :إستنتج أن  $\ell$  تحقق  $\ell$ 

$$\left\{egin{array}{ll} u_0=2; & & & \\ u_{n+1}=2+rac{1}{u_n} & & & \\ & & & & \end{array}
ight.$$
نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  بحيث

$$(orall n\in \mathbb{N}): \quad 2\leqslant u_n\leqslant 3$$
 بين أن:  $oldsymbol{0}$ 

$$w_n=u_{2n+1}$$
 و نعتبر المتتاليتين  $w_n=u_{2n}:$  و نعتبر المتتاليتين  $v_{n+1}=2+rac{v_n}{1+2v_n}$  انه لكل  $n$  من  $n$  لدينا:  $w_{n+1}=2+rac{w_n}{1+2w_n}$  و  $w_n=2+rac{1}{v_n}$ 

$$(orall n\in \mathbb{N}): \quad v_n\leqslant w_n$$
 اثبت أن $($   $oldsymbol{0}$ 

$$(w_n)$$
 و  $(v_n)$  و رتابة كل من المتتاليتين و أدرس رتابة أدرس

$$(orall n \in \mathbb{N}): w_{n+1} - v_{n+1} \leqslant rac{1}{25}(w_n - v_n)$$

ب $\left( v_{n}
ight)$  ب $\left( v_{n}
ight)$  و  $\left( w_{n}
ight)$  متحادیتین و حدد

 $f(t)=rac{t}{\sqrt{1+t}}$  : يما يلي  $0;+\infty[$  على  $f(t)=rac{t}{\sqrt{1+t}}$  على  $f(t)=(0;+\infty[$  على الله معرفة على  $f(t)=(0;+\infty[$  على الله على الله

$$u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}$$

$$v_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

$$|f(t)-t|\leqslant rac{t^2}{2}$$
  $:\mathbb{R}^+$  بین أن ٹکل  $t$  من  $oldsymbol{0}$ 

$$|w_n| \leqslant rac{1}{2} \sum_{k=1}^n rac{k^2}{n^4}$$
 ابین آن ٹکل  $n$  من  $n$  من  $2$ 

$$|w_n|\leqslant rac{1}{2n}$$
 : $\mathbb{N}^*$  من  $n$  استنتج أن لكل  $n$  من  $\lim_{n o +\infty}v_n=rac{1}{2}$  و أن

 $(u_n)$  عدد حقيقي موجب قطعا. نعتبر المتتالية  $\left\{egin{array}{l} u_{n+1}=rac{1}{2}\left(u_n+rac{a}{u_n}
ight) \end{array}
ight.$ المعرفة بما يلي:

$$u(orall n\in\mathbb{N}):\ u_{n+1}^2-a=rac{\left(u_n^2-a
ight)^2}{4u_n^2}$$
بين أن $\mathbf{0}$ 

$$(orall n\in \mathbb{N}^*):\; u_n\geqslant \sqrt{a}$$
 بين أن $Q$ 

بين أن المتتالية 
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
 تناقصية.  $oldsymbol{\Im}$ 

$$\lim_{n o +\infty}u_n=\sqrt{a}$$
 استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة. و أن  $oldsymbol{0}$ 

$$u_{n+1}-\sqrt{a}\leqslant rac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2$$
 بین آن  $oldsymbol{6}$ 

$$u_1-\sqrt{a}\leqslant k$$
 نفتر  $k$  نفتر ف أنه يو جد عدد حقيقي  $k$  بحيث  $u_1-\sqrt{a}\leqslant k$  . $(orall n\in\mathbb{N}):\ u_n-\sqrt{a}\leqslant 2\sqrt{a}\left(rac{k}{2\sqrt{a}}
ight)^{2^{n-1}}$  : بين أن

نأخذ 
$$u_o=3$$
 ، أعط قيمة مقربة للعدد  $u_o=3$  بالدقة  $0$  . $10^{-8}$ 

 $f(x)=x+\cos(x)$  دالة معرفة على  $\left[0;rac{\pi}{2}
ight]$  بما يلي: f $\left\{egin{array}{l} u_0=lpha\in\left[0;rac{\pi}{2}
ight]; \ \end{array}
ight.$ نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  بحيث:  $\Big|\ u_{n+1}=f(u_n)$ 

أدر س تغيرات الدالة 
$$f$$
 ثم استنتج أن:  $f\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ 

$$(orall n\in \mathbb{N}):\ 0\leqslant u_n$$
 بين أن:  $(1$ 

ب) بين أن المتتالية 
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
 تزايدية.

ج) استنتج أن 
$$(u_n)$$
 متقاربة ثم أحسب نهايتها.

$$oldsymbol{v_n} = rac{\pi}{2} - u_n$$
 : نعتبر المتتالية  $oldsymbol{\Im}$ 

$$(orall n\in \mathbb{N}):0\leqslant v_n\leqslant rac{\pi}{2}$$
 () نحقق آن: $(orall n\in \mathbb{N}):v_{n+1}=v_n-\sin(v_n)$  () بين آن:

. 
$$(orall n \in \mathbb{N}): v_{n+1} = v_n - \sin(v_n)$$
 بين أن:

$$-\left(orall x\in\left[0;rac{\pi}{2}
ight]
ight):\;0\leqslant x-\sin(x)\leqslantrac{x^3}{6}$$
 نقبل أن:  $oldsymbol{0}$ 

$$(orall n\in \mathbb{N}):\; 0\leqslant v_{n+1}\leqslant rac{1}{6}v_n^3$$
 بين أن:  $($ 

$$(orall n\in \mathbb{N}):\ 0\leqslant v_n\leqslant \left(rac{1}{6}
ight)^{rac{3^n-1}{2}}\left(v_0
ight)^{3^n}$$
ب) استنتج أن:

## تمرین 21

 $f(x)=rac{1}{4x^2+4}$ : لتكن f دالة معرفة بما يليf بحيث  $f(x)=rac{1}{4x^2+4}$  نعتبر المتتالية  $f(x)=rac{1}{2}$  بحيث  $f(x)=rac{1}{4x^2+4}$  نعتبر المتتالية  $f(x)=rac{1}{4x^2+4}$ 

 $\mathbb{R}^+$  ا أدر س تغيرات الدالة f على  $\mathbb{R}^+$ .

 $lpha \in \left]0; rac{1}{2} 
ight[$  بین آن f(x) = x تقبل حلا و حیداf(x) = x بین آن:

 $\left(orall (x,y)\in [0;1]^2
ight): |f(x)\!-\!f(y)|\leqslant rac{1}{2}|x\!-\!y|$ 

$$.(orall n \in \mathbb{N}): \ 0 < u_n \leqslant rac{1}{2}$$
 بين أن:  $2$ 

 $|u_{n+1}-lpha|\leqslant rac{1}{2}|u_n-lpha|$  بین آن:  $|u_{n+1}-lpha|\leqslant rac{1}{2}|u_n-lpha|$  بین آن:  $(u_n)$  متقاربة ثم أحسب نهایتها.

$$w_n=u_{2n+1}$$
 و نعتبر المتتاليتين  $oldsymbol{v}_n=u_{2n}$  نعتبر المتاليتين  $oldsymbol{0}$ 

را
$$(orall n\in \mathbb{N}): \ w_n\leqslant lpha\leqslant v_n$$
 ابين أن $($ 

 $(w_n)$  أدرس رتابة كل من المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(w_n)$ 

🗗 ۱) بین أن:

$$(orall n\in\mathbb{N}):v_{n+1}-w_{n+1}\leqslantrac{1}{4}(v_n-w_n)$$

ب $\left( v_{n}
ight)$  با استنتج ان  $\left( v_{n}
ight)$  و  $\left( w_{n}
ight)$  متحاديتان و حدد نهايتهما

# تمرین 22

نعتبر الدالة  $\overline{g}$  المعرفة على  $I=[1;+\infty[$  بما يلي:

$$g(x) = x^3 - 3x - 5$$

- أدرس تغيرات الدالة g على I. ثم بين أن المعادلة  $\mathbf{0}$  أدر $\alpha$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث g(x)=0
- أدر س إشارة g(x) على I ثم استنتج حلول المتراجحة I على I على I على I على I على I
  - $I:=[1;+\infty[$  دالة معرفة على  $f:=[1;+\infty[$  بما يلي:

$$f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$$

أدرس تغيرات الدالة f على I ثم بين أن:

$$f\left(\left[\alpha;\frac{5}{2}\right[\right)\subset\left[\alpha;\frac{5}{2}\right[$$

$$\left\{egin{array}{ll} u_0\geqslant 1;\ u_{n+1}=f(u_n) \end{array}
ight.$$
نعتبر المتتالية  $(u_n)$  بحيث  $oldsymbol{0}$ 

- ا) حدد  $u_o$  بحيث تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة.  $u_o=rac{5}{2}$  ب) نأخذ  $u_o=rac{5}{2}$
- $.(orall n \in \mathbb{N}): \; lpha < u_n < rac{5}{2}$  :بين أن (a)
  - بین أن $\stackrel{-}{(u_n)}$  تناقصیة قطعا. ig(big)
- . استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة ثم حدد نهايتها (c)
- . $(orall n\in \mathbb{N}):\ u_{n+1}-lpha\leqslant rac{1}{lpha^2}(u_n-lpha)$  : رین آن $(a_n+a_n)$ 
  - $(orall n \in \mathbb{N}): \; u_{n+1} lpha \leqslant \left(rac{1}{lpha}
    ight)^{2n} \left(rac{5}{2} lpha
    ight)$ 
    - ه) حدد من جدید نهایة المتتالیة ( $u_n$ ).

## نمرین 23

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = 2 \operatorname{Arctg} \left( \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right)$$

- حدد  $\mathscr{D}_f$  مجموعة تعريف الدالة f. ثم أحسب النهاية  $\lim\limits_{x o +\infty}f(x)$ 
  - $oldsymbol{arphi}$  أدرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها.
    - $I=[1;+\infty[$  ليكن g قصور f على المجال g
- ا) بین أن g تقبل دالة عکسیة  $g^{-1}$  معرفة علی مجال J یتم تحدیده.
  - $\cdot J$  لکال x مسن  $g^{-1}(x)$  کال x مسن  $g^{-1}(x)$
- lpha بيــن أن المعادلة f(x)=x تقبل حلا وحيدا ينتمي إلى المحال [1;2].

$$\left\{egin{array}{ll} u_o=1 \ u_{n+1}=f(u_n) \end{array}
ight.$$
نعتبر المتالية المعرفة ب $egin{array}{ll} egin{array}{ll} u_o=1 \ u_{n+1}=f(u_n) \end{array}
ight.$ 

$$f(2)>rac{\pi}{3}$$
 : ا بیسن أن (۱

. 
$$(orall n \in \mathbb{N})$$
 :  $1 \leqslant u_n \leqslant 2$  : ب $)$  بين أن

ج) نقبل أن:

 $\left(orall (x,y)\in [1;2]^2
ight): |f(x)-f(y)|\leqslant rac{1}{4}|x-y|$ 

 $(orall n\in \mathbb{N}): \, |u_{n+1}-lpha|\leqslant rac{1}{4}\,|u_n-lpha|$  بین آن:

 $|u_n-lpha|\leqslant \left(rac{1}{4}
ight)^n(lpha-1)$ د) استنتج أن:  $\lim_{n o +\infty}u_n$  عدد ثم حدد