Etude de fonction numérique

I. Branches infinies

Dans ce cours, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i};\vec{j})$

Définition

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe

Soit $M(x, f(x))$ un point de (C_f).

Si x ou $f(x)$ tend vers l'infinie $(+\infty$ ou $-\infty)$; alors on dit que (C_f) admet une branche infinie.

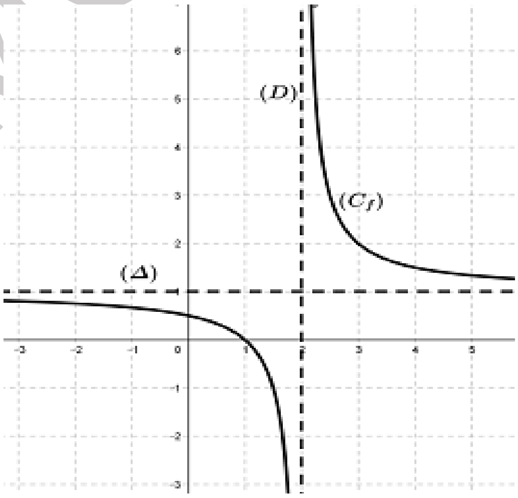
1) Asymptote verticale – asymptote horizontale

Activité

Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ et (C_f) sa courbe.

Soient (D) et (Δ) deux droits d'équation $x=2$ et $y=1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2) Calculer les limites suivantes
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3) Que remarquez-vous sur (C_f) si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
4) Calculer les limites suivantes
   $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
5) Que remarquez-vous sur (C_f) si x tend vers 2.



Définition

Soit f une fonction numérique et soient a et b deux nombres réels.

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ alors (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=b$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ alors (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=a$

Exemples

a. On considère $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$; on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$

b. On considère $f(x)=\dfrac{-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ alors (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=1$

Application ①

1) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=3+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$; puis interpréter les résultats graphiquement.

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x+5}{(x+2)^2}$

Calculer $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement.

3) Soit f une fonction numérique définie par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

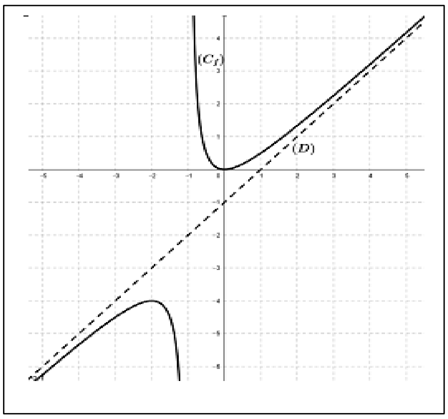
a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

b. Déterminer les limites aux bornes de D_f puis interpréter les résultats graphiquement.

2) Asymptote oblique

☞**Activité** :

Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ et (C_f) sa courbe et soit (D) une droit d'équation $y=x-1$



1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2) Vérifier que $\left(\forall x\in D_f\right); f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$
3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$
4) Que remarquez-vous sur (C_f) si x tend vers ∞
5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
6) Déterminer a et b puis la droite d'équation $y=ax+b$ sachant $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$
7) Déduire les étapes pour déterminer l'asymptote oblique de (C_f) en $+\infty$

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ avec $a\in R^*$ et $b\in R$ **alors** on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$.

Exemple : Soit f une fonction définie par $f(x)=2x-3+\dfrac{3}{x^2}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(2x-3)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-3)\right) \\ =\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0 \end{cases}$

Donc la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

Propriété :

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe.

On dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une **asymptote oblique** de la courbe (C_f) au voisinage de ∞ si et seulement si : $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$

Remarque :

L'utilité de la propriété :

- Démontrer que la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique au voisinage de ∞
- Déterminer l'équation de l'asymptote oblique au voisinage de ∞

Application②

Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2) Montrer que la droite d'équation $y=x-2$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) *Position relative de (C_f) et l'asymptote oblique* :

Propriété

Si la courbe (C_f) admet la droite (Δ): $y=ax+b$ comme asymptote oblique ; alors la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) se déduit par l'étude le signe de $f(x)-(ax+b)$

- Si $f(x)-(ax+b)>0$ alors (C_f) est au-dessus de (Δ)
- Si $f(x)-(ax+b)<0$ alors (C_f) est au-dessous de (Δ).
- Si $f(x)-(ax+b)=0$ alors (C_f) est coupe (Δ).

Application③

Soit g une fonction définie par : $g(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g
2) Montrer que (C_g) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y=ax+b$ en $+\infty$, en déterminant a et b
3) Déterminer la position relative de (D) et (C_g).

4) Branche parabolique

Définitions

a) Branche parabolique orienté vers l'axe des abscisses

Soit f une fonction numérique et C_f sa courbe et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique Orienté vers l'axe des abscisses au voisinage de ∞.

b) Branche parabolique orienté vers l'axe des ordonnées

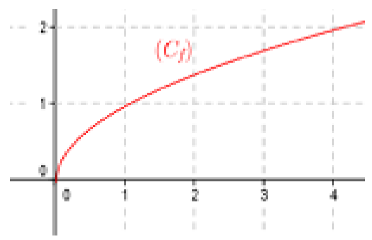
Soit f une fonction numérique et C_f sa courbe et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\infty$ on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique orienté vers l'axe des ordonnées au voisinage de ∞.

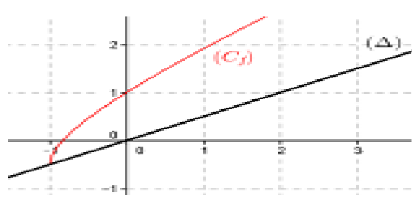
c) Branche parabolique orienté vers la droite d'équation $y=ax$

Soit f une fonction numérique et C_f sa courbe et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

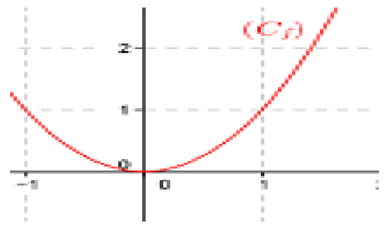
Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\infty$ On dit que la courbe C_f admet une branche parabolique orienté vers la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de ∞



Branche parabolique vers l'axe des abscisses.



Branche parabolique vers la droite d'équation $y=ax$.



Branche parabolique vers l'axe des ordonnés.

Application ④

Etudier les branches infinies de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=2x^3-x$; **2)** $f(x)=\sqrt{2x+1}$; **3)** $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{x}$

Schéma illustratif des Branches infinies

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

La droite d'équation $x=a$ a est une asymptote verticale à (C_f) au voisinage de a

$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$

La droite d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de ∞

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=0$

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=a$

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$

La droite $(\Delta): y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\infty$

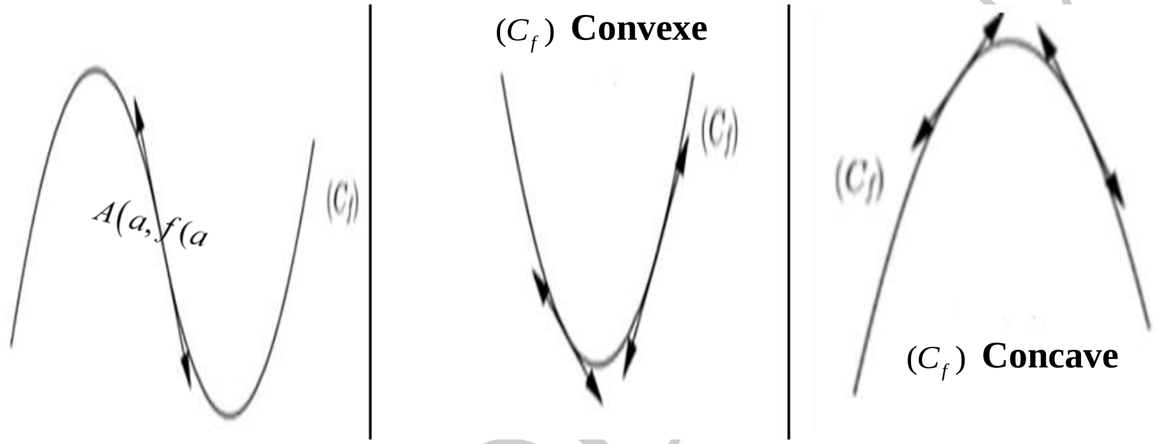
La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$

II. Concavité d'une courbe - point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et C_f sa courbe.

* On dit que C_f la courbe de la fonction f est **convexe** sur I (dirigée vers les ordonnés positifs) s'elle est au-dessus de ses tangentes.
* On dit que C_f la courbe de la fonction f est **concave** sur I (dirigée vers les ordonnés négatifs) s'elle est au-dessous de ses tangentes.
* On dit que le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de C_f la courbe de la fonction f , s'elle **change sa concavité** à gauche et à droite de a (changement de concavité).



(C_f) **Convexe**

(C_f) **Concave**

Remarque :

Etudier la concavité de C_f signifie, déterminer les intervalles où C_f est concave et les intervalle où C_f est convexe.

Si C_f admet une point d'inflexion A alors la tangente de C_f en A ; pénètre la courbe C_f .

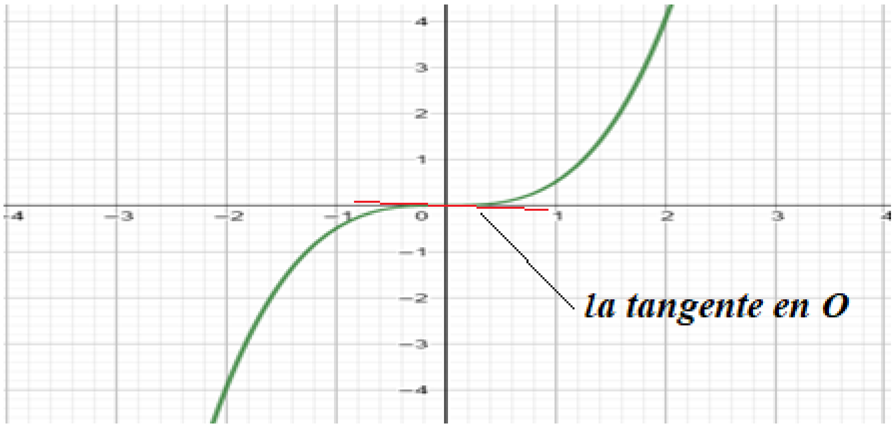
Propriété

Soit f une fonction **deux fois** dérivable sur un intervalle ouvert I et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

* Si $(\forall x \in I); f''(x) \geq 0$ alors On dit que C_f la courbe de la fonction f est **convexe sur I.**
* Si $(\forall x \in I); f''(x) \leq 0$ alors On dit que C_f la courbe de la fonction f est **concave sur I.**
* **Si f'' s'annule et change le signe en** $A(a, f(a))$ alors le point A est le point d'inflexion de C_f

Exemple

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ et sa courbe représentée dans la figure ci-dessous :



Le point $O(0,0)$ est le point d'inflexion de la courbe car elle change la concavité dans ce point.

Exemple 2

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+x+1$

On a $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=3x^2-6x+1$ donc $(\forall x\in\mathbb{R});\ f''(x)=6x-6=6(x-1)$

On résoudre l'équation $f''(x)=0$

On a $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

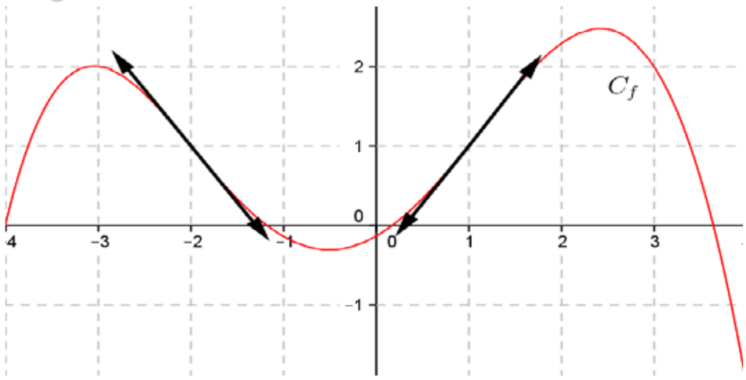
On a $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>1$ et $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<1$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
C_f	$\cap$	$A(a,f(a))$	$\cup$

f'' Change le signe en A donc le point A est le point d'inflexion de la courbe.

Application ⑤

Etudier la concavité de (C_f) sur l'intervalle $[-4;4]$



III. Eléments de symétrie d'une courbe

1) Axe de symétrie d'une courbe

Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur D et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé

On dit que la droite d'équation $x = a$ est **un axe de symétrie** de (C_f) si et seulement les conditions suivantes soient vérifiées :

- $(\forall x \in D)$ On a $(2a - x) \in D$
- $(\forall x \in D); f(2a - x) = f(x)$

Exemple

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$

Montrons que la droite d'équation $x = \pi$ est l'axe de symétrie de (C_f)

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$ on a $(2\pi - x) \in D$

Et on a $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(2\pi - x) = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$

Donc la droite d'équation $x = \pi$ est un axe de symétrie de (C_f).

2) Centre de symétrie d'une courbe :

Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur D et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

On dit que le point $I(a,b)$ est **le centre de symétrie** de (C_f) si et seulement les conditions suivantes soient vérifiées :

- $(\forall x \in D)$ On a $(2a - x) \in D$
- $(\forall x \in D); f(2a - x) + f(x) = 2b$ Ou $(\forall x \in D); f(2a - x) = 2b - f(x)$

Application ⑥ :

1) Montrer que la droite d'équation $x = a$ est l'axe de symétrie de (C_f) dans les cas suivants :

   a) $f(x) = x^2 + x + 1$ et $(\Delta): x = \dfrac{-1}{2}$

   b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ et $(\Delta): x = 1$

2) Montrer que $I(a;b)$ est l'axe de symétrie de (C_f) dans les cas suivants :

   a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ et $I(1;2)$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 1}$ et $I(-1;-2)$

   c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$ et $I\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$