تمرين 1

في الحالات التالية، أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في x_o

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}; x > 0 \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}; x \leqslant 0 \\ x_o = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1}; x \geqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x - 3\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x} - 1}; x < 1 \\ x_o = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x}; x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}; x > 1 \\ x_o = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \text{Arctg}(x\sqrt{x}); x \geqslant 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - x}; x < 0 \\ x_o = 0 \end{cases}$$

تمرين 2

باستعمال تعريف العدد المشتق ، أحسب النهايات :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{x+1} - 1}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{x-1}$

و $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt[3]{2-\cos x} - \sqrt[3]{3}}{x-\pi}$ و $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^n(x) - 1}{x}$ و

$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{\text{Arctg}(x) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{3}}$ و $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{\tan(x) - x}$.

تمرين 3

في كل من الحالات التالية، أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على مجموعة تعريفها و حدد دالتها المشتقة:

$f(x) = x\text{Arctg}\sqrt{x}$ و $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ و

$f(x) = x - 2\sqrt[3]{x-2}$ و $f(x) = \sqrt{x + \text{Arctg}(x)}$

و $f(x) = |2x+3|^{\frac{3}{4}}$ و $f(x) = \sqrt[6]{\dfrac{x}{1+x^2}}$ و

$f(x) = (\text{Arctg}(\sin x))^3$ و $f(x) = \text{Arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$ و

$f(x) = \sin(\sqrt[3]{x})$.

تمرين 4

نعتبر الدالتين : $f : x \mapsto \sin(x)$ و $g : x \mapsto \cos(x)$

بين أنه لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ و $g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

($f^{(n)}$ هي المشتقة من الرتبة n للدالة f)

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$

❶ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 2 و على اليسار في 1 ثم أول هندسيا النتائج المحصلة.

❷ أعط جدول تغيرات الدالة f.

❸ ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty; 1]$.

ا) بين أن g تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب) أدرس قابلية اشتقاق g^{-1} على J و احسب $(\text{g}^{-1})'(\sqrt[3]{2})$.

تمرين 6

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x) = \text{Arctg}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}\right)$ و $f(0) = 0$

❶ بين أن f متصلة في 0 ثم أحسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$.

❷ بين أن f قابلة للإشتقاق في 0. و أن f دالة فردية.

❸ أعط جدول التغيرات. ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❹ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

❺ بين أن f^{-1} قابلة للإشتقاق على المجال J .

❻ ا) تحقق أن $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ ثم أحسب $f(1)$ و $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

ب) بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arctg}(x)$ ثم حدد $f^{-1}(x)$.

II) نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $\begin{cases} u_o > 0\ ; \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

❶ بين أن: $0 < u_n < \dfrac{\pi}{4}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$:.

❷ بين أن: $(\forall t > 0) : \text{Arctg}(t) < t$.

استنتج رتابة المتتالية (u_n).

❸ بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} < \dfrac{1}{2}u_n$. استنتج $\lim u_n$

تمرين 7

نعتبر الدالة : $\begin{cases} f(x) = -\sqrt[3]{1-x^3}\ ;\ x \leqslant 1 \\ f(x) = 2\text{Arctg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right);\ x > 1 \end{cases}$

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ ثم أحسب نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$.

❷ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f في 1. التأويل الهندسي

❸ أدرس تغيرات f . ثم حدد الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr{C}_f)$.

❹ بين أن $I(0; -1)$ هي نقطة انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❺ بين أن f تقابل من $\mathscr{D}_f$ نحو مجال J يتم تحديده . ثم حدد $f^{-1}(x)$.

❻ أنشئ $(\mathscr{C}_f)$ و $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$ في نفس المعلم $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

تمرين 8

❶ f قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح. بين أنه إذا كانت المعادلة $f(x)=0$ تقبل 4 حلول في المجال I، فإن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل 3 حلول في المجال I.

❷ a و b عددان حقيقيان بحيث $0<a<b<\frac{\pi}{2}$.

ا) بين أن $\frac{b-a}{\cos^2 a}\leqslant \tan b-\tan a\leqslant \frac{b-a}{\cos^2 b}$.

ب) بين أن $\frac{a}{b}<\frac{\sin(a)}{\sin(b)}<\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}$. (يمكنك دراسة $u(x)=\frac{\sin x}{x}$)

❸ f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن a و b و c ثلاث عناصر من I بحيث: $2f(c)=f(a)+f(b)$

بين أن: $(\exists\alpha\in I):\ f'(\alpha)=0$

❹ f دالة متصلة على $[0;1]$ و قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ بحيث: $f(0)=0$ و $f(1)=1$.

بين أن: $(\exists c\in]0;1[):\ f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}}$

❺ a و b عددان حقيقيان بحيث $a<b$. f و g دالتين متصلتين على المجال $[a,b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث: $\forall x\in]a,b[:\ g'(x)\neq 0$.

ا) بيـــن أن $g(a)\neq g(b)$.

ب) نعتبر الدالة

$$H(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big(g(x)-g(a)\Big)-\Big(f(x)-f(a)\Big)$$

بين أن $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$: $(\exists c\in]a,b[)$.

ج) استنتج النهاية $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

❻ أحسب النهاية: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

❼ f دالة متصلة على $[-1;1]$ و قابلة للاشتقاق مرتين على $]-1;1[$ بحيث: $f(0)=0$ و $f(1)=1$ و $f(-1)=-1$. بين أن: $(\exists c\in]-1;1[):\ f''(c)=0$

❽ ليكن $a\in]0;+\infty[$ و $f:[0;a]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على $[0;a]$ بحيث f' متصلة على $[0;a]$ و $f(0)=0$.

بين أن: $(\exists c\in]0;a]):\ f'(c)=\frac{2f(a)+af'(a)}{3a}$

❾ f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a>0)$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث: $bf(a)=af(b)$.

بين أن: $(\exists c\in]a;b[):\ cf'(c)=f(c)$

❿ f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a>0)$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$. بين أن:

$$(\exists c\in]a;b[):\ \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(c)-cf'(c)$$

تمرين 9

I) أحسب بدلالة n المجاميع: $\sum_{k=0}^{n}C_n^k$ و $\sum_{k=1}^{n}kC_n^k$ و $\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k$.

II) نعتبر الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$؛ ليكن n من $\mathbb{N}^*$.
بين أن مشتقة f من الرتبة n معرفة بما يلي: $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ حيث P_n دالة حدودية درجتها n.

تمرين 10

حدد جميع الدوال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $\forall x,y\in\mathbb{R}:\ f(x+y)=f(x)+f(y)$.

تمرين 11

I) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=-x+\sqrt{1+x^2}\,; & x\geqslant 0\\ f(x)=\frac{4}{\pi}\mathrm{Arctg}(-x+\sqrt{1+x^2})\,; & x<0\end{cases}$$

❶ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f في 0.

❷ بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^\star\quad f'(x)<0$.

❸ أعط جدول تغيرات f محددا نهايتيها عند $+\infty$ و $-\infty$.

❹ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$. نأخذ $||\vec{i}||=2cm$

❺ نضع: $I=\left[\frac{1}{4};1\right]$ بين أن: $f(I)\subset I$.

II) نعتبر المتتالية (u_n) حيث:

$$\begin{cases} u_o=1\,;\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

❶ بين أن: $(\forall x\in I):\quad |f'(x)|<\frac{4}{5}$

❷ باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^\star)\quad \left|u_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|<\frac{4}{5}\left|u_{n-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$.

❸ استنتج أن (u_n) متقاربة وأحسب نهايتها.

❹ بين أن: $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right):f\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

❺ نضع $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad a_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$.
تحقق من أن $a_o=1$ و

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\ a_{n+1}=2^{n+1}-a_n$$

ثم بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n=\tan\left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right)$.

تمرين 12

I) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\text{Arctg}\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)$$

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ ؛ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ أدرس قابلية اشتقاق f على يمين -1 ؛ أول هندسيا.

❸ أدرس تغيرات f. ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❹ نعتبر : $\text{g}(x)=\frac{1}{9}(x+\tan(f(x)))^3-2\text{Arctg}(x)$

ا) حدد $\mathscr{D}_\text{g}$ حيز تعريف الدالة g؛ ثم بين أن: $(\forall x\in\mathscr{D}_\text{g})\ \ \text{g}(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{3}-2\text{Arctg}(x)\right)$.

ب) بين أن: $\exists!\alpha\in[-1;1]:\ \text{g}(\alpha)=\alpha$.

ج) بين أن: $\exists k\in[0;1[\ /\ (\forall x\in]-1;1[):|\text{g}'(x)|\leqslant k$

II) نعتبر المتتالية (u_n) بحيث : $\begin{cases}-1\leqslant u_o\leqslant 1\ ;\\ u_{n+1}=g(u_n)\end{cases}$

❶ بين أن: $|u_n|<1 \quad (\forall n\in\mathbb{N}):$.

❷ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_{n+1}-\alpha|<k\,|u_n-\alpha|$.

❸ استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_n-\alpha|<k^n\,|u_o-\alpha|$.

❹ استنتج أن (u_n) متقاربة و أحسب نهايتها.

❺ نفترض أن: $u_o=0$ حدد قيمة مقربة للعدد α بالدقة 10^{-1}.

تمرين 13

I) نعتبر الدالة h المعرفة بما يلي:

$$h(x)=\frac{1}{x}-2\text{Arctg}(x)$$

بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+^*$ و أن $\frac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<1$. ثم أدرس إشارة $h(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{\text{Arctg}(x)}{1+x^2}$

❶ أدرس تغيرات f و بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha^2)}$.

❷ استنتج أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ :\ 0\leqslant f(x)<\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

❸ باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أنه لكل x و x_o من $\mathbb{R}^+$ بحيث $x>x_o$ لدينا:

$$\text{Arctg}^2(x)-\text{Arctg}^2(x_o)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}(x-x_o)$$

❹ ليكن x من $\mathbb{R}^+$. نعتبر المتتالية $(u_n(x))$ المعرفة بما يلي: $u_n(x)=\sum\limits_{p=0}^{n}\left(\text{Arctg}\dfrac{x}{2^p}\right)^2$.

بين أن $(u_n(x))$ مكبورة بالعدد $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x$ ثم استنتج أنها متقاربة.

❺ لكل x من $\mathbb{R}^+$ نضع: $\mathcal{C}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)$.

ا) بين أنه لكل x و x_o من $\mathbb{R}^+$ لدينا:

$$|u_n(x)-u_n(x_o)|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}|x-x_o|\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2^p}$$

ب) استنتج أن الدالة $\mathcal{C}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$.

تمرين 14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=x-3\sqrt[3]{x-1}\ ; & x\geqslant 1\\ f(x)=\dfrac{\text{Arctg}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\ ; & x<1\end{cases}$$

❶ بين أن f متصلة في 1 ثم أحسب $\lim\limits_{+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{-\infty}f(x)$.

❷ أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❸ أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 1 ، التأويل الهندسي.

❹ لكل t من $\mathbb{R}_+^*$ نضع: $u(t)=t-\text{Arctg}(t)$ و $v(t)=t^3$.

ا) تحقق من أن: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{u(t)}{v(t)}$

ب) ليكن t من $\mathbb{R}_+^*$ نضع: $g(x)=u(t)v(x)-u(x)v(t)$.
بين أن: $\exists c\in]0;t[:\ g'(c)=0$.

ج) استنتج أن $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{u(t)}{v(t)}=\dfrac{1}{3}$ و أن f قابلية للاشتقاق على يسار 1 ثم أعط التأويل الهندسي.

❺ ا) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب) بين أن لكل من $]-\infty;1[$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}\left(\text{Arctg}\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{1-x}}{2-x}\right)$$

ج) بين أن: $\left(\forall t\in\mathbb{R}^+\right)\ :\ \text{Arctg}(t)\geqslant\dfrac{t}{1+t^2}$. ثم استنتج أن f تزايدية على $]-\infty;1]$.

❻ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]3;4[$، ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

تمرين 15

في كل من الحالات التالية، حدد الدوال الأصلية للدالة f على مجال مناسب: $f(x)=x^3(x^4+1)^2$ و $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

و $f(x)=\dfrac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$ و $f(x)=\dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$

و $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x}}$ و $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$ و

و $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)}}$ و $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2 x}$

و $f(x) = \dfrac{3}{x^2+2x+2}$ و $f(x) = \dfrac{\text{Arctg}(x)}{1+x^2}$

$f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ و $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}$

و $f(x) = x\sqrt[3]{x+1}$ و $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ و

. $f(x) = \sin 2x\sqrt{1-\cos 2x}$ و $f(x) = \tan^2(x)$

تمرين 16

في كل من الحالات التالية، حدد الدالة الأصلية F للدالة f على مجال ينبغي تحديده و تحقق $F(a) = b$:

$$\begin{cases} f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \\ b = 0 \quad \text{و} \quad a = \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \\ b = 0 \quad \text{و} \quad a = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}} \\ b = 2 \quad \text{و} \quad a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{x+5}{(x-1)^4} \\ b = 3 \ \text{و} \ a = 2 \end{cases}$$

تمرين 17

نعتبر f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \sin^4(x)$.

❶ أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 2x$.

❷ استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

تمرين 18

❶ f دالة فردية و متصلة على $\mathbb{R}$ و F دالة أصلية لها على $\mathbb{R}$. بين أن F دالة زوجية.

❷ g دالة زوجية و متصلة على $\mathbb{R}$ و G دالة أصلية لها على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم في 0. بين أن G دالة فردية.

تمرين 19

I) نعتبر الدالة : $h(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \text{Arctg}(x)$.

أعط جدول تغيرات h و استنتج إشارة $h(x)$.

II) ❶ ا) تحقق أن: $(\forall t \in \mathbb{R}) : 1 - t^2 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.

ب) بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \text{Arctg}(x) \leqslant x$.

❷ لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\text{Arctg}(x)}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

بين أن g تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$.

III) لتكن G الدالة الاصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم في 0. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{G(x)}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في م م م $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

❶ بين أن f دالة زوجية. و أن

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \ x - \frac{x^3}{9} \leqslant G(x) \leqslant x$$

❷ استنتج أن f متصلة و قابلة للإشتقاق على يمين 0.

❸ بين أن $(\forall x \in [1; +\infty[) : 0 \leqslant G(x) \leqslant 4\sqrt{x}$. ثم حدد $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

❹ بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}_+^*$

❺ نعتبر الدالة q المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$\begin{cases} q(x) = x^2 f'(x) \ ; \ x > 0 \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

تحقق من أن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : xq'(x) = h(x)$.

❻ أعط جدول تغيرات f ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

تمرين 20

f دالة متصلة على $[a; b]$ بحيث $(a < b)$.

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على $[a; b]$ بحيث: $F(a) = 0$.

بين أن:

$$(\exists \alpha \in]a; b[) : \ \sqrt{2(b-a)\,|f(\alpha)F(\alpha)|} < 1 + F^2(\alpha)$$

(تطبيق TAF على الدالة $(H(x) = \dfrac{1}{1+F^2(x)}$)

تمرين 21

f دالة معرفة بما يلي: $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{1 - 2\sin(x)}$.

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ مجموعة تعريف الدالة f.

❷ بين أن النقطة $I\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$ مركز تماثل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. و أنه يكفي دراسة f على المجموعة $E = \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

❸ أحسب نهايات f عند محدات مجالي E.

❹ أدرس تغيرات f على كل من مجالي E.

❺ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على $[-\pi; \pi] \cap \mathscr{D}_f$.

تمرين 22

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$.

❶ ا) تحقق من أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

ب) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم استنتج طبيعة الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❷ ا) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و احسب $f'(x)$.

ب) استنتج منحى تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

❸ بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ثم استنتج تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❹ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

❺ بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;+\infty[$ و أن: $2<\alpha<3$.

❻ ا) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$ ثم حدد f^{-1}.

ب) أنشئ في نفس المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ المنحنى $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$

❼ نعتبر الدالة ϕ المعرفة على $\left[0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ بما يلي:

$$\phi(x)=\frac{f(x)+1}{2}-f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{Ax^2}{8}$$

حيث A عدد حقيقي يحقق: $\phi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$

ا) بين أن:

$$\left(\exists a\in\left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\right):\ f'(a)-f'\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{Aa}{2}$$

ب) بين أن: $A=f''(b)$: $\left(\exists b\in\left]\dfrac{a}{2};a\right[\right)$.

ج) استنتج أن: $\left|f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt[4]{3}}{96}$

تمرين 23

f دالة معرفة على $[0;\pi]$ بما يلي: $f(x)=\cos(x)$.

I) ❶ بين أن f تقابل من $[0;\pi]$ نحو $[-1;1]$.

❷ بين أن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على $]-1;1[$ و أن:

$$(\forall x\in]-1;1[):\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

II) نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي

$$g(x)=f^{-1}\left(4x^3-3x\right)$$

❶ حدد $\mathscr{D}_g$ مجموعة تعريف الدالة g.

❷ بين أن g قابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$.

و أن: $\left(\forall x\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[\right):\ g'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

❸ استنتج أن :

$$\left(\forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right):\ g(x)=2\pi-3f^{-1}(x)$$

III) ليكن a عددا حقيقيا بحيث $|a|<1$ نعتبر الدالة f_a المعرفة بما يلي: $f_a(x)=h\left(\dfrac{a+\cos(x)}{1+a\cos(x)}\right)$.

❶ بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}):1+a\cos(x)>0$.

ثم حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\left|\dfrac{a+\cos(x)}{1+a\cos(x)}\right|\leqslant 1$.

❷ استنتج أن $\mathscr{D}_{f_a}=\mathbb{R}$. ثم بين أنه يمكن الاكتفاء بدراسة f_a على المجال $[0;\pi]$.

❸ بين أن الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $]0;\pi[$ و أن : $(\forall x\in]0;\pi[):\ f_a'(x)=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{1+a\cos(x)}$.

❹ لتكن g_a الدالة المعرفة على $[0;\pi]$ بما يلي:

$$g_a(x)=\left(\frac{1}{1+a\cos(x)}-\frac{1}{1+a}\right)$$

ا) أدرس تغيرات الدالة g_a حسب قيم a. ثم استنتج أن:

$$\left(\forall(c;x)\in[0;\pi]^2\right)\ 0<c<x\Longrightarrow|g_a(c)|\leqslant|g_a(x)|$$

ب) ليكن x من $]0;\pi[$، بتطبيق TAF على الدالة $\varphi: t\longmapsto f_a(t)-t\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}$ و في المجال $[0;x]$ ، بين أن: $\left|f_a(x)-x\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right|\leqslant x\sqrt{1-a^2}\,|g_a(x)|$

ج) استنتج أن f_a قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ثم حدد $(f_a)'_d(0)$.

❺ بين أن : $(\forall\in]-1;1[):h(-t)=\pi-h(t)$.

و استنتج أن f_a قابلة للاشتقاق على يسار π و حدد $(f_a)'_g(\pi)$.

❻ أعط جدول تغيرات f_a على $[0;\pi]$. ثم أنشئ منحنى الدالة $f_{\frac{1}{2}}$ على $[-2\pi;2\pi]$.

IV) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_o=\dfrac{\pi}{2}$ و $u_{n+1}=f_a(u_n)$ و نفترض أن: $0<a<1$.

❶ بين أن : $h(a)<\dfrac{\pi}{2}$. و أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):0\leqslant u_n\leqslant\pi$

❷ بين أن (u_n) تناقصية و استنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها.

تمرين 24

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ ، و قابلة للاشتقاق مرتين على $]a;b[$ بحيث $f(a)=f(b)=0$. و ليكن c عنصر من $]a;b[$. باعتبار الدالة $\varphi(x)=f(x)-A(x-a)(x-b)$ بحيث $A=\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$ بيـــن أن:

$$(\exists\alpha\in]a;b[):\quad f(c)=(c-a)(c-b)\frac{f''(\alpha)}{2}$$

تمرين 25

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}\cos(x)$$

❶ ا) بين أنه يكفي دراسة f على المجال $I = [0;\pi]$.

ب) أدرس تغيرات f على المجال I.

ج) أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال I.

د) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $[-4\pi;4\pi]$.

❷ ا) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0;\pi[$ و تحقق أن $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

ب) بين أن: $(\forall x \in I) : |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

❸ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_o = 1$$

ا) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

ب) بين أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

تمرين 26

I) بين أن: $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) : \text{Arctg}(x) + \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

❶ حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f.

❷ أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0 . أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

❸ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 1 . أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

❹ أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0;1[$. أعط جدول تغيرات f

❺ بين أن النقطة $\mathcal{I}\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}\right)$ مركز تماثل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❻ بين أن $\mathcal{I}\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}\right)$ نقطة انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❼ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

تمرين 27

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{3}x - \sqrt[3]{x} \ ; \ x \geqslant 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + \text{Arctg}(x) \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

❶ ا) أحسب $f(8)$ و $f(3\sqrt{3})$ و $f(-1)$.

ب) أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f في 0.

❷ ا) ضع جدول تغيرات الدالة f .

ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

ج) مثل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❸ ليكن g قصور f على $I = [1;+\infty[$.

ا) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده

ب) أنشئ $(\mathscr{C}_{\text{g}^{-1}})$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ج) حدد $\text{g}^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 28

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;0[$ بما يلي:

$$\text{g}(x) = \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2}$$

أدرس تغيرات g و استنتج إشارتها.

II) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} - x \ ; \ x \geqslant 0 \\ f(x) = x\text{Arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

❶ ا) أدرس اتصال f في 0.

ب) أدرس قابلية اشتقاق f في 0 و أعط تأويلا هندسيا.

❷ أحسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}$ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

❸ ضع جدول تغيرات الدالة f .

❹ ا) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$.

ب) بين أن $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$ ثم استنتج قيمة α

ج) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❺ بين أنه إذا كان a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $0 < a < \alpha < b$ فإن: $\frac{a}{b} > \frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$.