المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين

الدار البيضاء الكبرى

بحث تربوي تحت عنوان:

تصورات التلاميذ للعدد π

إعداد الأساتذة المتدربين:

- المهدي زهري.
- أسماء دنون.
- بلعيد وانزار.

تحت إشراف الأستاذ:

- بنيونس بطيوي.

لجنة المناقشة:

ذ. جمال حراق: أستاذ مكون في المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين.

ذة. لطيفة فوزي: أستاذة مكونة في المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين.

تاريخ المناقشة: 12/07/2014.

السنة الدراسية: 2013/2014.

محتويات البحث التربوي

الجـزء الأول : القســــــــم النظري

- **الفصـــل الأول : تقـــــــــــــــــديم عام للبحث**
- **الفصـــل الثاني: تــــــــــــــــــــاريخ العدد π**
- **الفصـــل الثالث: خاصيات العدد π واستعمالاته**

الفصـل الأول

I. الإهــــــــــــــــــــــداء

إنه لمن دواعي الاعتراف بالجميل، أن نتقدم بالشكر الجزيل وعظيم الامتنان والاحترام والتقدير إلى الأستاذ الفاضل السيد بنيونس بطيوي، الذي لم يبخل علينا بوقته وإرشاداته من أجل الخروج بهذا العمل المتواضع.

ولا ننسى أن ننحني إجلالا وتقديرا واعتزازا لطاقم مؤسستنا بأجمعه، والذي وجدنا منه المساعدة القيمة والنصح النبيل. كما ننوه بجميع من مد لنا يد العون والمساعدة من قريب أو بعيد، ونخص بالذكر رؤساء المؤسسات التي زرناها أثناء ملء الاستمارة.

ونهدي بحثنا هذا إلى الذين قال فيهم أحمد شوقي:

أعلمت أجل أو أشرف من الذي

يبني وينشئ أنفسا وعقولا ؟

- و إلى تلك الشموع التي تحرق نفسها لتضيء لغيرها الطريق.

- إلى الذين يبنون النفوس، وينشؤون العقول، ويخلقون الأمم.

وختاما نرجو من العلي القدير أن نكون عند حسن الظن حتى نسهم بقسم بسيط في العملية التعليمية التربوية بهذا الوطن الغال.

II. المــــــــــــــــــدخل

تعتبر المدرسة الحديثة مجتمعا صغيرا يعيش فيه التلاميذ حيث يتدربون على العمل الجماعي، وعلى تحمل المسؤولية. فهي تحتضن عددا من التلاميذ تختلف أعمارهم ومستوياتهم الفكرية وقدراتهم العقلية والجسمية ومشاربهم الاجتماعية والاقتصادية وتكوينهم النفسي.

فالإطار المدرسي إذن إطار تعليمي تتفاعل فيه عناصر الأستاذ والمتعلم والمادة والطريقة والإدارة، وقبل ذالك الأسرة، أو بعبارة أخرى فنشاط التلميذ مقيد بمعارف وخبرات مستقاة من برامج ومناهج وضعت قصدا لتحقق للمتعلم أغراضا فكرية وعاطفية وأنماطا من السلوك والمهارات. والتربية الحديثة لا تقنع اليوم بأن يظل التلميذ في حالة تعليمه يعتمد على غيره، بل تريده أن يكون في حالة تعلم يبحث عن المعارف، ويتوصل إلى النتائج بمجهوده الذاتي، ويشارك في الأعمال الإجتماعية والتربوية المتصلة بالحياة.

ولما أصبح البحث ضروريا في قضايا التربية والتعليم، بعدما تبين لنا قدرتهما على تذليل الكثير من الصعوبات التي اعترضت الإنسان قديما، ارتأينا أن ندلي بدلونا عن طريق هذا البحث المتواضع والمعنون ب "تصورات التلاميذ للعدد π". وقد جاء تصميم هذا البحث على الشكل الآتي :

- **القسم الأول (النظري):** سنتعرف في هذا القسم على تاريخ العدد π من حيث الظهورالأول عند مختلف الحضارات القديمة ثم سنتناول أهم خاصياته واستعمالاته.
- **القسم الثاني (التطبيقي):** في هذا القسم، سنقوم بدراسة تحليلية لمقررات الرياضيات من السنة الخامسة الإبتدائي حتى السنة الثانية ثانوي تأهيلي، ثم سنقوم بتحليل الإستمارات التي تم ملئها من طرف التلاميذ.
- **القسم الثالث:** سنقوم بوضع خلاصة عامة للبحث مع اقتراح بعض الحلول التي نراها مناسبة للمساهمة في وضع حد لهذه المشكلة التربوية.

ونسأل الله التوفيق والسداد لنا ولكم.

III. الـــــــدوافع إلى هذا البحث

في إطار التداريب الميدانية التابعة للعملية التعليمية التعلمية والبحث في بعض المفاهيم والقيم الرياضية، طفت على السطح قيمة العدد π والتي ارتبطت لدى بعض التلاميذ بشكل بديهي بقيم بعينها كـ $3{,}14$ و $\frac{22}{7}$ ... هذه القيم التي اخترقت تفكير التلميذ بشكل واسع لدرجة يمكن اعتبارها من بين الأخطاء الشائعة الأكثر شهرة في الرياضيات داخل المنظومة التربوية المغربية. وما نعنيه بالخطأ الشائع هنا أو المعتقد الخاطئ كما يسميه البعض، هو ذلك الخطأ الذي ينتشر بين شريحة واسعة من التلاميذ. فإذا تمكنا من فهم كيف يتم ترسيخ هذا الخطأ في ذهن التلميذ نكون بذلك قد وفرنا آلية تساعدهم تطوير مفاهيم مقبولة. ومن هذا المنطلق تمخضت فكرة هذا البحث التربوي لسبر أغوار مكمن الخلل.

وكوننا منذ سنوات مضت ضمن هذه المنظومة التعليمية كتلاميذ، فقد سمعنا تلك الآراء المتضاربة والمختلفة بين التلاميذ حول قيمة هذه الثابتة الرياضية، فمنهم من يعتبرها عددا عشريا ويحصرها في $3{,}14$. ومنهم من يراها عددا جذريا ويعطيها قيمة $\frac{22}{7}$. ومنهم من يربطها مباشرة بالزاوية وينسبها الى $180°$.

وككل بحث تربوي وحتى يستمد قيمته العلمية والموضوعية، أن يتبع منهجية ويستند إلى أسس علمية، فقد خصصنا لهذا البحث استمارة تستقي أراء التلاميذ وتصوراتهم حول قيمة هذا العدد.

وسنركز إن شاء الله اهتمامنا على مستويات الثانوي التأهيلي نظرا لمميزاتها كمرحلة انتقالية من التعليم الأساسي إلى التعليم العالي.

IV. هـــــــــــــــدف البحث

إن اختيار أي موضوع يستجيب في غالب الأحيان لغاية منشودة، ويروم ظاهرة معينة من أجل غرض ما. ولا شك أن التصورات الخاطئة لدى التلميذ حول العدد π تشكل عائقا أمام البناء المعرفي السليم. ونظرا للأهمية الكبرى التي يحظى بها هذا العدد في شتى المجالات وخصوصا في الرياضيات حيث يظهر في كثير من الصيغ وتبنى عليه بعض المفاهيم كما سنرى ذلك في الفصلين الثاني والثالث.

وقصدنا من الخوض في هذه العملية هو استجلاء آثار هذا التصور الخاطئ لدى التلميذ وتأثيره على سيرورة العملية التعليمية والتعلمية. فباستجلاء الآثار نستطيع أن نكون أكثر استعدادا لتوفير خبرات تدريسية تساعدهم على تثبيت المفاهيم بالكيفية الصحيحة، وذلك بالبحث عن مكمن الخلل إنطلاقا من بداية احتكاك التلميذ بهذا العدد.

ولقد اخترنا أن يكون هذا البحث منصبا على مستويات الثانوي التأهيلي دون أن نغفل المستويات الابتدائية والثانوية الإعدادية التي تشكل البداية الأولى لظهور هذا العدد والتعرف عليه ولو بشكل سطحي، لكن تأثيرها في ترسيخه يبقى ذا ت أهمية قصوى.

والهدف من هذا الاختيار نجمله في نقطتين هما :

- مرحلة الثانوي التأهيلي حيث تنضج أفكار وآراء التلاميذ حول بعض المفاهيم الرياضية.
- الثانويات هي التي تمد المعاهد العليا بالتلاميذ.

7. طرح الإشكاليـــــــــــــــة

تواجه المدرسة المغربية مشاكل رهيبة تزداد خطورة وتفشيا مع مرور الزمن، ومن بين هذه المشاكل انتشار الأخطاء الشائعة في الرياضيات، حيث أصبح أغلبية التلاميذ لا يستطيعون حل تمرين رياضي دون الوقوع في الخطأ. لذلك كان من الضروري على الأطر التربوية من أساتذة وإداريين القيام ببحوث تربوية تعالج هذه المشاكل. ولعل بحثنا هذا يدخل في هذا الإطار، فوجود عدد كبير من التلاميذ لا يعرفون حقيقة العدد π بل يحصرونه في قيم بعينها، مشكلة تربوية كان من وراء ظهورها سبب ما.

فهل يا ترى السبب كامن في الطريقة التي جاء بها المفهوم في المقررات الدراسية ؟ أم أن هناك عوامل أخرى ساهمت بكيفية مباشرة أو غير مباشرة في ظهور هذه المشكلة ؟

نظن أن هذا البحث المتواضع ربما سيكون مرآة موضوعية يعكس صورة تمثلات التلاميذ للعدد π كما هي في الواقع من خلال الاستمارات. وسيجعل التلميذ والمدرس والإداري أمام الأمر الواقع، فيعملون جميعا على أن تصل سفينة العملية التعليمية إلى بر الأمان.

VI. الفرضيـــــــــــــات

لرصد تصور التلاميذ للعدد π حاولنا صياغة مجموعة من الفرضيات التي تسلط الضوء على جملة من العوامل والأسباب الكامنة وراء شيوع التمثلات الخاطئة له بين التلاميذ.

الفرضية الأولى : ترى هل كيفية تقديم مفهوم العدد π ، في المقررات الدراسية هو السبب الكامن وراء التصورات الخاطئة عند التلميذ لهذه الثابتة الرياضية ؟

الفرضية الثانية : هل السبب راجع إلى الاستعمال المفرط للقيم التقريبية (في بعض الأحيان يلجأ التلميذ إلى استعمال الآلة الحاسبة) خصوصا في مادة العلوم الفيزيائية ؟ الشيء الذي يؤثر بكيفية غير مباشرة على المعرفة الحقة لهذا المفهوم؟

الفرضية الثالثة : ربما السبب عائد إلى المفهوم بذاته من حيث صعوبته وتعقيده، وهذا ما يشكل عائقا أمام التلميذ، لذلك يتم الاقتصار فقط على استعمال القيم التقريبية للتبسيط.

الفرضية الرابعة : ربما الأساتذة لا يلقنون المفهوم بطريقة تصل إلى مستوى يمكن التلميذ من استيعابه بشكل صحيح. أو ربما السبب راجع إلى لا مبالاة التلاميذ وعدم اهتمامهم وفضولهم بالبحث وباكتشاف المعرفة.

الفرضية الخامسة : هل هذه التصورات الخاطئة مرتبطة بالعوامل التالية :

- *عامل الشعبة :* أي أن تلاميذ الشعبة العلمية يتميزون بتصور أكثر دقة للعدد π بخلاف تلاميذ الشعبة الأدبية.
- *عامل المستوى الدراسي :* هل هناك اختلاف في التصورات للعدد π لدى التلاميذ باختلاف مستوياتهم الدراسية ؟
- *عامل المؤسسة:* هل يؤثر المحيط الدراسي على التصور الصحيح لهذا المفهوم ؟

وختاما، لمعرفة مدى صحة هذه الفرضيات وكأي بحث تربوي، سنقوم بدراسة تحليلية لبعض المقررات الدراسية، وكذلك بتحليل الاستمارات التي سنقوم بتوزيعها على التلاميذ من مختلف المستويات الدراسية (وسنقتصر هنا على مستويات الثانوي التأهيلي).

VII. تحـــــــــــديد المفاهيم

إذا كان عنوان البحث التربوي هو " تصورات التلاميذ للعدد π " نرى أنه من اللازم تحديد بعض المفاهيم لغة واصطلاحا.

- **تصورات:** اسم جمع، مفرده تصور.التصور في علم النفس هو استحضارُ صورةِ شيء محسوس في العقل دون التصرف فيه. التَّصَوُّرعند المناطقة هو إدراك المفرد أي معنى الماهية من غير أن يحكم عليها بنفي أَو إِثبات .

- **العدد:** عَدَد :اسم . العَدَدُ :مِقدار ما يُعَدُّ ، ومَبْلَغُهُ والجمع : أَعْدَادٌ
جمع أعداد : نتيجة تقدير الكميّة بالوحدة.

- π : هو حرف إغريقي يُقرأ بي. استعمل من طرف علماء الرياضيات من أجل تمثيل النسبة بين محيط الدائرة وشعاعها r (أو قطرها) ويعتبر ويليام جونز William Jones أول عالم رياضيات استعمله للدلالة على هذه النسبة وذلك سنة 1706 في عمل له. ونكتب $\pi = \frac{P}{d}$ ، حيث P هو محيط الدائرة و d قطرها .
هذا التعريف ل π يستعمل بشكل كبير في الهندسة الأقليدية المستوية. كما أن هناك تعريفات أخرى. على سبيل المثال، π هو ضعف أصغر عدد موجب حيث تنعدم دالة الجيب التمام $x \mapsto \cos(x)$.

تقـــــــــــــــــــــــــــديم عام

انشغل الرياضيون منذ قديم الزمان بالأعداد وطوروا مفهومها ووسعوا مجموعاتها فانتقلوا، كما هو معلوم، من الأعداد الصحيحة الطبيعية إلى الأعداد الصحيحة النسبية ثم إلى الأعداد الجذرية تلتها مجموعة الأعداد الحقيقية ثم مجموعة الأعداد المركبة (العقدية). وقد يعتقد البعض أن دراسة المجموعة الأولى(مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية) انتهت منذ عهد بعيد. أما المختصون فلهم في هذا الموضوع رأي آخر ... هناك تساؤلات تبدو لعامة الناس بسيطة لكن الإجابة عنها لدى المختصين عسيرة.

إن ما نجهله بخصوص هذه الأعداد يفوق ما نعلمه عنها. ولا زال المختصون في نظرية الأعداد يكدون لمعرفة المزيد من عجائب هذه الكائنات. والواقع أن معالجة هذه الأعداد التي يعرفها الجميع، رياضيون وغير رياضيين، تتعمق يوما بعد يوم وتستخدم أحدث الأجهزة للغوص في متاهاتها. والأعداد الطبيعية ليست الوحيدة التي شغلت بال الرياضيين، فهناك على سبيل المثال العدد π الذي لم تنته الحسابات بشأنه إلى اليوم. فعندما يتعلق الأمر بحساب محيط الدائرة أو مساحتها فإنه لا مناص من استعمال عدد يرمز له الرياضيون بالرمز π. وقد اختاروا هذا الرمز لأنه الحرف الأول من الكلمة اليونانية التي تدل على المحيط. ويبدو أن أول من استعمل هذا الرمز هو الرياضي الإنكليزي وليم جونس *William* Jones سنة 1706، لكن تعميم استعماله لم يحدث إلا ابتداء من سنة 1748 عندما تبناه الرياضي السويسري أولر *Euler*. بينما يذهب آخرون إلى القول بأن أول من استخدم الرمز هو الهولندي رومانوس *Adrianus Romanus*. ولحساب π يكفي رسم دائرة وقياس محيطها ثم قسمة المحيط على قطر هذه الدائرة. إن العدد الذي تجده هو π. لكن ما نجده عمليا هو، في الواقع، قيمة تقريبية لـ π إذ أنه من المستحيل أن نحسب بدقة كاملة محيط أية دائرة. ولهذا فنحن نعتبر أن العدد يساوي (بالتقريب) 3,14. وإن شئت المزيد من الدقة في الحساب فبإمكانك كتابة $\pi \simeq 3.14159$، ومن المهم أن نشير الى أن خامس رقم عشري في قيمة π هو 9، وهو ما يفسر الدقة الكبيرة التي يحصل عليها الفيزيائيون والمهندسون وعلماء الفلك حتى لو أخذوا $\pi \simeq 3.14159$ أو $\pi \simeq 3.1416$ ذلك أن وجود الرقم 9 في المرتبة الخامسة يسحق الأرقام التي تأتي بعده (ابتداء من المرتبة السادسة) ويجعلها مهملة. وعلى كل حال فإن 39 رقما عشريا للعدد π يكفي لحساب محيط دائرة قطرها كقطر الأرض بخطإ لا يتجاوز قطر ذرة الهيدروجين !

لِمَاذا إذن كل هذا الاهتمام بالعدد π؟ لقد تزايد فضول الرياضيين بحكم تضارب معلوماتهم فكثرت تساؤلاتهم حول العدد π: هل هو عدد جذري (أي هل هو حاصل قسمة عددين صحيحين) أو هل هو عدد جبري (أي هل هو جذر لحدودية معاملاتها أعداد صحيحة) ... ثم إن هناك مسألة من كبريات المسائل الرياضية التي طرحها الرياضيون في اليونان منذ أزيد من ألفي سنة : " هل يمكن إنشاء مربع بالبركار والمسطرة تكون مساحته تساوي مساحة دائرة ؟ " تلك هي المسألة الشهيرة المعروفة باسم تربيع الدائرة التي ظلت مطروحة أكثر من عشرين قرنا دون أن يتمكن أحد من الإجابة عنها ! ... بل لقد أجاب عنها الكثير، معتقدين أنهم حلوا هذا اللغز، لكن مراجعة أعمالهم من طرف الخبراء والهيئات العلمية كانت تكشف في كل مرة على أخطاء تسقط الحلول المقترحة. ونظرا لكثرة عدد الحلول وكثرة أخطائها فإن أكاديمية العلوم الفرنسية، مثلا، رفضت سنة 1755 مراجعة أي حل لمسألة تربيع الدائرة ! ... لأن عدد موظفيها لا يكفي لدراسة ومتابعة هذه الحلول. وحدثت المفاجأة في آخر القرن التاسع عشر عندما أثبت ليندمان *Lindemann* أن العدد π ليس جبريا. وكان معروفا آنذاك أن إثبات هذه الخاصية يكفي للبرهان على أن تربيع الدائرة مسألة مستحيلة. وهكذا جاءت الإجابة عن إمكانية تربيع الدائرة بالنفي وأسدل الستار على هذه المسألة التي ضربت رقما قياسيا في مدة طول طرحها.

وبطبيعة الحال فإن العمل المتواصل حول هذه المسألة - حتى وإن لم يقدم الإجابة إلا مؤخرا - قد ساعد على تقدم العلوم الرياضية سيما نظرية الأعداد.

وهناك سبب آخر جعل الرياضيون ينشغلون بالعدد π : إن هذا العدد يدخل في الكثير من العلاقات الرياضية، وبالتالي فهو متواجد في الفيزياء وعلم الفلك وعلوم الهندسة وعلم النبات، الخ ... والواقع أن حضوره في كل فروع العلم يرجع إلى الدور الذي تلعبه الدائرة في تعريف الدوال المثلثية (دالة الجيب وجيب التمام والظل وظل التمام). والدوال المثلثية تَحُلّ في كل مكان يتعلق فيه الأمر بإيجاد علاقات بين المسافات والزوايا، كما أنها لا تغيب عن الحساب التكاملي. ولعل أبسط مثال يمكن تقديمه حول هذه الظاهرة هو المسألة المعروفة باسم إبرة بوفون *L'aiguille de Buffon* (للمزيد من المعلومات أنظر الملحقات). إن هذه التجربة بسيطة جدا ويمكن لكل منا القيام بها. وقد تأكد منها الكثيرون، من بينهم عالم الفلك جوهان رودلف أو ولف *Wolf* حيث قام سنة 1850 برمي الإبرة 5000 مرة فلمست الخطوط 2532 مرة. وبالتالي فحاصل القسمة المشار إليه أعلاه هو 3,1596 . وهي قيمة تقريبية لـ π ، لكنها بعيدة عن 3,14 وسبب ذلك أن وولف لم يأخذ عرض أشرطته مساويا لنصف طول الإبرة. أما الإنكليزي سميث *Smith* فقد أنجز هذه التجربة سنة 1855 حيث رمى بإبرته 3200 مرة فوجد القيمة التقريبية 3,1553 ، وكذلك فعل الإنكليزي فوكس *Fox* سنة 1864 الذي اكتفى بـ 1030 رمية ورغم ذلك حصل على نتيجة حسنة فوجد 3,1595 . كما أن الإيطالي لازيريني *Lazzerini* قام سنة 1901 برمي الإبرة 3404 مرة فوجد التقريب 3,1415929 . ويمكننا تقديم مثال آخر حول حضور العدد π في أماكن غير منتظرة : ما هو احتمال أن يكون العدد المسحوب من بين الأعداد الصحيحة الطبيعية عدد أولي ؟ الإجابة : هذا الاحتمال هو حاصل قسمة العدد 6 على مربع π ($\frac{6}{\pi^2}$). إذن دعونا نرفع الستار عن هذا العالم الغريب، عالم هذا العدد السحري كما يسميه البعض، ولنتفحص بعض التقريبات التي استعملها الإنسان للتعبير عن هذا العدد، منذ بزوغ فجره عند مختلف الحضارات القديمة حتى عصر الحاسوب (الفصل الثاني)، وكذلك بعض خاصياته واستعمالاته (الفصل الثالث).

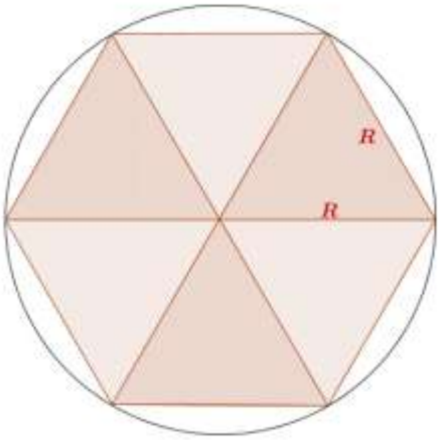
الفصل الثاني

تاريـــــــــــــــــــــخ العــــدد π

I. العــــــــــدد π في زمن الهندسة

1- البابليـــــــــون

إن معرفتنا للرياضيات البابلية أتت من ألواح طينية كتبت بالكتابة المسمارية اكتشف منها حتى الآن حوالي 400 لوح منذ سنة 1850. ومن بين هذه الألواح واحدة ذكر فيها العدد $3+\frac{1}{8}$ كتقريب للعدد π.



وقد أثبت البابليون من جهة أن محيط سداسي أضلاع منتظم يُساوي ثلاث أضعاف قطره(أول تقريب للعدد π هو 3) ومن جهة أخرى أن النسبة بين محيط دائرة شعاعها 1 ومحيط سداسي الأضلاع المحاط بها يساوي $\frac{57}{60}+\frac{36}{(60)^2}$ (مع العلم أن البابليون كانوا يستعملون نظمة العد ذو الأساس 60).

نستنتج أن $$\pi=\frac{3}{\left(\frac{57}{60}+\frac{36}{3600}\right)}=3+\frac{1}{8}$$

2- المصريـــــــون

إن المصدر الأساسي لما نعرفه عن الحضارة المصرية القديمة يتمثل في ورقتين من أوراق البردي، أحدهما يسمى بردية رند Le papyrus de Rhind ويعود تاريخها إلى سنة 1650 قبل الميلاد، صاحب هذه البردية يدعى أحميس Ahmès، يقال أنه نقلها من كتاب قديم يتناول مسائل رياضية يعود تاريخه إلى أكثر من 1800 سنة قبل الميلاد. ما جاء في هذه البردية يدل على أن المصريين القدماء استعملوا العدد $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ كتقدير للعدد π.

<u>طريقة حذف التسع La diminution d’un neuvième</u>

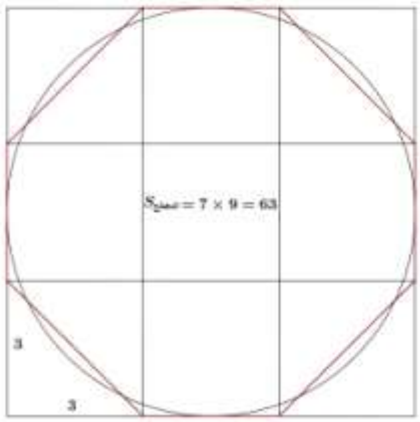
لحساب مساحة دائرة يجب المرور من مرحلتين:

- حذف تسع القطر.
- ثم ضرب النتيجة المحصل عليها في نفسها.

إذن إذا كان D قطر دائرة و S مساحتها، فإنه باستعمال الطريقة السابقة نحصل على $S=\left(D-\frac{D}{9}\right)^2$. وإذا ربطنا هذه العلاقة بالعلاقة الصحيحة لمساحة قرص فإننا سنحصل على: $S=\left(\frac{D}{2}\right)^2\pi$ ، ومنه نستنتج أن $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2$.

لكننا لا ندري كيف توصل المصريون إلى هذه الطريقة، لعل المسألة رقم 48 من بردية راند تعطينا فكرة.

المسألة 48 من بردية راند



نعتبر مضلعا ودائرة محاطين بمربع كما في الشكل جانبه. يمكننا حساب مساحة المضلع بالاعتماد على مساحة المربعات الصغيرة فنحصل على $S=63$.

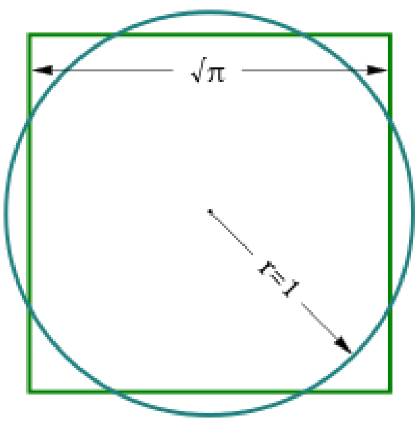
ولدينا مساحة الدائرة (والتي يتبين انها تساوي تقريبا مساحة المضلع او أكبر منه بقليل) تساوي $\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2$.

وبتعويض 63 ب 64 نحصل على القيمة التقريبية للعدد π التي وجدناها باستعمال طريقة حذف التسع.

وفي الأخير نذكر ان المصريين يعلمون أن النسبة بين محيط دائرة وقطرها تساوي النسبة بين مساحة هذه الدائرة ومربع شعاعها أي أن π في العلاقة $P=2\pi r$ هي نفسها في العلاقة $S=\pi r^2$.

3- اليونـــــــــــــــــان

تميزت الرياضيات عند الإغريق بظهور مجموعة من المسائل الرياضية التي إستنزفت الكثير من مجهود الرياضيين لمدة 23 قرنا والتي أثبت استحالتها فيما بعد. ومن بين هذه المسائل مسالة تربيع الدائرة *La* quadrature du cercle ومسألة *La* rectification du cercle ، ومسألة تثليث الزاوية *La* trisection de l'angle ، ومسألة مضاعفة المكعب *La* duplication du cube ....



مسألة تربيع الدائرة La quadrature du cercle

مسألة تربيع الدائرة هي مسألة طرحت من قبل الرياضي الإغريقي أناكساغور *Anaxagore* . تطرح المسألة تحدي إنشاء مربع له مساحة مساوية لمساحة دائرة معطاة باستخدام عدد منته من إنشاءات البركار

والمسطرة. وقد تمّ إثبات استحالتها في العام 1882 على يد العالم فرديناند فون ليندمان *Lindmann* .

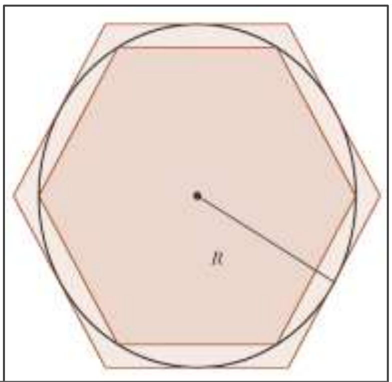
مسألة La rectification du cercle

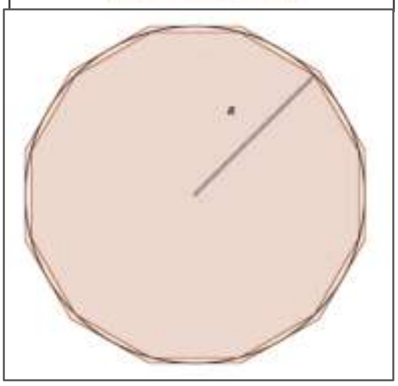
المسألة تطرح تحدي رسم قطعة (باستعمال البركار والمسطرة فقط) يساوي طولها محيط دائرة معطاة.

إذا نظرنا في عمق هاتين المسألتين فإننا سنجد أن الأولى تهدف إلى رسم العدد $\sqrt{\pi}$ والثانية تهدف إلى رسم العدد π بالبركار والمسطرة فقط.

وفي القرن السابع قبل الميلاد اقترح الفيلسوف والرياضي اليوناني أتنيفون *Antiphoné* طريقة لتربيع الدائرة وذالك بإنشاء مضلعات يكون عدد أضلاعها كبير جدا وبالتالي الحصول على مضلع منطبق مع الدائرة (*Le principe d'exhaustion de Eudoxe de Cnide*) . لكن السؤال الذي يطرح نفسه هنا هل سيتحقق هذا بإنشاء عدد منته من المضلعات؟

أرخميدس Archimède





يعد العالم الرياضي الإغريقي أرخميدس أول من درس العدد π دراسة رياضية. ففي نص له تحت عنوان "في قياس الدائرة" بدأ في البرهنة على أنه توجد ثابتة وحيدة π بحيث لدينا $P = 2\pi R$ و $S = \pi R^2$ (P و S محيط و مساحة دائرة شعاعها R).

لحساب قيمة العدد π قام أرخميدس بتأطير نصف الدائرة التي شعاعها 1 ب a_n و b_n أنصاف محيطات المضلعات المنتظمة المحيطة والمحاطة بالدائرة (C) على التوالي، حيث أن عدد أضلاعها يساوي $N = 6\times 2^n$ ، ثم أخد على التوالي $n = 0,1,2,3,4$ أي أن $N = 6,12,24,48,96$. وبحساب قيم a_n و b_n في كل حالة حصل على التأطير التالي: $3+\frac{10}{71} < b_4 < \pi < a_4 < 3+\frac{1}{7}$

أي أن $3,1408 < \pi < 3,1429$

وأشار في هذا النص أيضا، أنه كلما أخذنا n كبيرة كلما حصلنا على تقريب جيد للعدد π .

4- المايـــــــــــا

إن أي فهم للعلم الماياني أو للرياضيات المايانية يتعثر بغياب النصوص المكتوبة التي تزودنا بخلفية لأفكار المايا. ليس لدينا سوى نتائج مصاغة بتعابير عقيمة، علينا ان نستنتج منها، في كل حالة، المسألة الأصلية وطرائق الحل والخوارزميات وحقائق أخرى. ولا يوجد أي سجل للعبقريات المجهولة التي أنجزت النظام

الزمني، كما لا يوجد ما يدل على ذلك. لكن بعض الإختصاصيين يرون أن علماء المايا كانوا يستعملون قيما للعدد π مع دِقة لا تقل عن ثمانية أرقام رغم أنه لا يوجد ما يثبت ذلك.

5- الهنـــــــــــــــــد

كان لسكان شبه الجزيرة الهندية منذ حضارتهم الأولى اهتمام كبير جدا بالأعداد. وعلى سبيل المثال فقد استخدم شعب موهنجو دارو، إحدى حضارات وادي إندوس ($4550-2550$ قبل الميلاد) النظام العشري البسيط. وكانت لديهم طرائق متقدمة جدا للعد والوزن والقياس على معاصرهم من المصريين والبابليين ويونان ميسنا. وقد استعمل بعض الرياضيين الهنود العدد π وحاولوا ايجاد قيما تقريبية له.

- في الكتاب الهندي المشهور في علم الفلك والرياضيات سيدهانتا *Siddhanta* (يعني "المعرفة والعلم والمذهب" يرجع تاريخه إلى سنة 380 م) استعملت القيمة $3+\frac{177}{1250}=3,1416$.
- في الكتاب أريابهاتيا *Aryabhatiya* الذي كتبه أريابهاتا سنة 499م، استعملت فيه أيضا القيمة $3,1416$. وقد اعتمد أريابهاتا على المضلعات واستعمل طريقة تشبه طريقة أرخميدس في تحديد هذه القيمة.
- عند الرياضي الهندي بهراماكويتا *Brahmagupta* ($598-655$)، الذي اقترح القيمة $\sqrt{10}=3,162277$، وهي أقل دقة من سابقاتها.

6- الصيـــــــــــــــــن

- في القرن الثاني عشر قبل الميلاد، استعمل الصينيون القيمة 3.
- في سنة 130م، إقترح هو هان تشو *Hou* Han Shu القيمة $3,1622$. هذه القيمة بدون شك حصل عليها كقيمة تقريبية للعدد $\sqrt{10}$.
- في سنة 263م، قام الرياضي لي هي *Lui* Hui بدراسة مضلع عدد أضلاعه 192 (إستعمل طريقة أرخميدس) ووجد التاطير التالي: $3,141024<\pi<3,142704$. ثم بعد ذلك استعمل مضلع ذو 3072 ضلع فحصل على القيمة التقريبية $\pi=3,14159$.
- في القرن الخامس ميلادي، وجد تسو شانغ شي *Tsu* Chung-Chih وابنه تسو كانغ شي *Tsu* Keng-Chih التأطير $3,1415926<\pi<3,1415927$ واكتشفوا القيمة التقريبية $\frac{355}{113}$ التي لم يصل إليها الأوروبيين إلا في القرن السادس عشر.

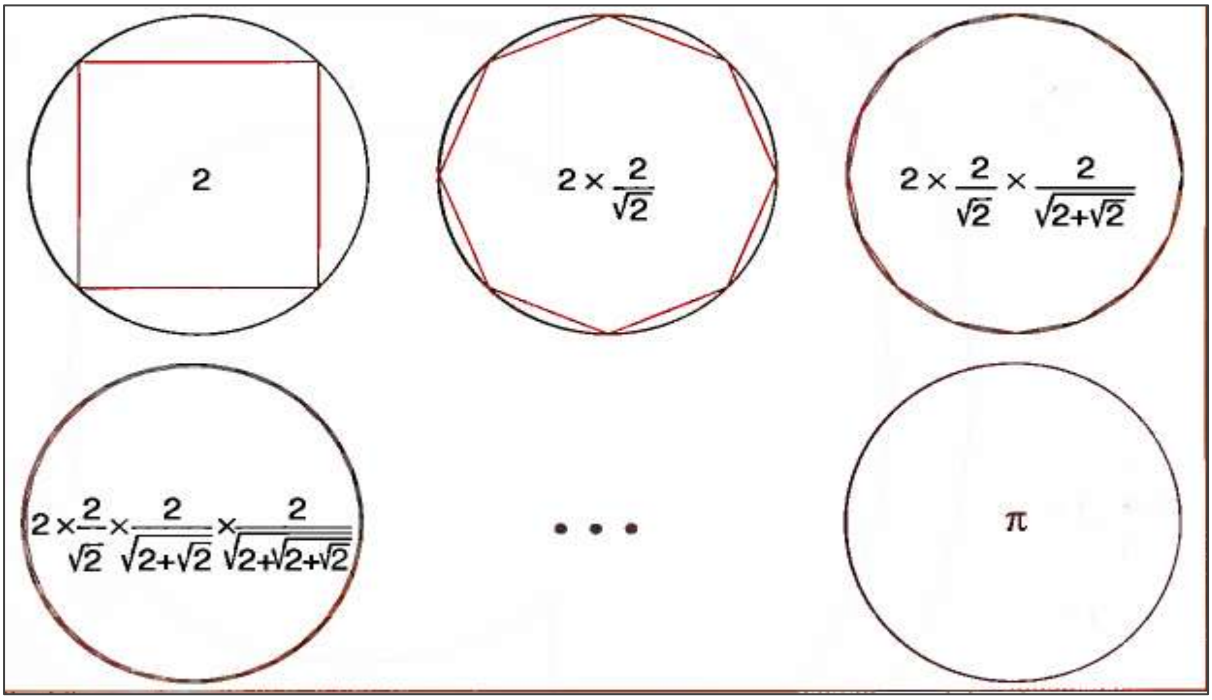
هذا التطور الذي شهده العدد π عند الصينيين راجع إلى استعمالهم لنظام العد العشري الذي يسهل الحسابات.

7- أوروبـــــــــــــا قبل زمن التحليل

❖ **فرانسوا فييت François Viète (1540-1603)**

في سنة 1579 عرف حساب العدد π تغيرا كبيرا مع الرياضي الفرنسي فرانسوا فييث الذي إعتمد على حساب مساحات مضلعات (عدد أضلاعها يساوي 2^n) محاطة بدائرة شعاعها 1. فوجد أول صيغة لامنتهية للعدد π:

$$\pi = 2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\cdots$$



العدد 2 يساوي مساحة المربع المحاط بالدائرة التي شعاعها يساوي 1. و $2\times\frac{2}{\sqrt{2}}=2\times\frac{1}{\cos(\pi/4)}$ يساوي مساحة المضلع الثماني. للحصول على مساحة المضلع ذو 16 ضلع نضرب في $\frac{1}{\cos(\pi/8)}$، ثم في $\frac{1}{\cos(\pi/16)}$ للحصول على مساحة المضلع ذو 32 ضلع، وهكذا دوالي. هذه النتيجة اشتقت من العلاقة: $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{2\cos(2\alpha)+2}}{2}$.

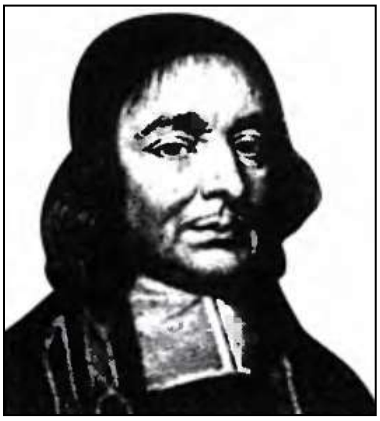
باستعمال العلاقة السابقة نحصل على:

$V_1 = 2\times 2/\sqrt{2} = 2,82844271247$
$V_2 = 3,0614674589$
$V_3 = 3,1214451522$
$V_4 = 3,1365484905$
$V_5 = 3,1403311569$
$V_6 = 3,1412772509$
$V_7 = 3,1415138011$

II. العـــــــــــــــدد π في زمن التحليل

شهدت العصور الوسطى ثورة فكرية وعلمية بامتياز شملت شتى المجالات العلمية و الفنية، فمثلا في مجال الرياضيات ساهم ظهور مجموعة من المفاهيم الجديدة كحساب التكامل و التفاضل من إيجاد تقريبات جديدة للعدد π باستعمال طرق حسابية بحثة، بعيدا عن الطرق الهندسية الكلاسيكية، وذلك اعتمادا على متسلسلات وكسور وجداءات لا منتهية. وفي هذا السياق نذكر مجموعة من الرياضيين الذين ساهموا في تقريب العدد π بأعداد عشرية أكثر دقة.

1. جـــون واليس John Wallis $(1616-1703)$



عالم رياضي إنجليزي ساهم في تطوير الحساب التفاضلي والتكامل اللامتناهي في الصغر *Infinitésimal* . وهو أول من قدم رمز اللانهاية ∞ كما استخدمها للتعبير عن اللامتناهي في الصغر. وقد استطاع تقريب العدد π مستعملا جداءات لا منتهية، لا تحتوي على جذور مربعة و ذلك عبر الصيغة التالية :

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2}{1\times3}\times\frac{4\times4}{3\times5}\times\frac{6\times6}{5\times7}\times\cdots$$

يمكن كتابتها أيضا على الشكل التالي:

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

هذه العلاقة جميلة جدا، فهي أول علاقة تقدم π دون الجدور (على خلاف علاقة فييت)، إلا أنها غير ناجعة نظرا لأن سرعة تقاربها بطيئة جدا، فبعد 2000 عملية ضرب نحصل فقط على 12 رقما صحيحا بعد الفاصلة.

2. جيـــــــــمس غريغوري James Gregory $(1638-1675)$

الرياضي الإسكتلندي جيمس غريغوري، أستاذ في جامعة Saint Andrews ثم في جامعة Edimbourg ، اخترع أول تلسكوب عاكس سنة 1663. حاول عبثا البرهنة على استحالة حل مسألة تربيع الدائرة.

في إطار بحثه عن طريقة لتقريب العدد π تمكن من اكتشاف المتسلسلة التالية :

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

وبوضع $x=1$ ، نجد:

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=4\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$$

لكن هذه الطريقة غير ناجعة أيضا وذلك راجع الى بطئ تقاربها، فبعد 50000 كسرا يتم الحصول على 3 أرقام صحيحة بعد الفاصلة.

و في نفس السياق اقترح طريقة ثانية (تشبه طريقة أرخميدس) استعمل فيها مضلعات منتظمة ب n ضلع، لكنه اعتمد على حساب مساحة المضلعات عوض محيطها، فوجد العلاقة التالية:

$$A_{2n} = \sqrt{A_n B_n} \quad \text{و} \quad B_{2n} = \frac{2B_n A_{2n}}{B_n + A_{2n}}$$

حيث أن: A_n يساوي مساحة المضلع المنتظم المحاط بدائرة شعاعها 1.

و B_n يساوي مساحة المضلع المنتظم المحيط بدائرة شعاعها 1.

3. وليـــام ليبنيز Gottfried Wilhelm leibniz $(1646-1716)$

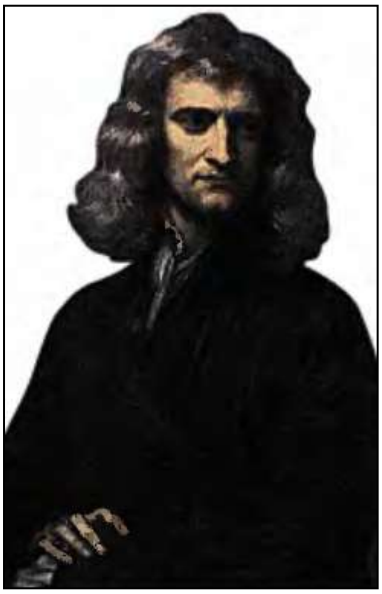
وليام ليبنيز، فيلسوف ورياضي ألماني، شغل موقعاً هاماً في تاريخ الرياضيات، أسس علم التفاضل و التكامل الرياضي بشكل مستقل عن إسحاق نيوتن، كما أن رموزه الرياضية ما زالت تُستخدم و بشكل شائع.

في إطار بحثه عن طريقة لتقريب العدد π تمكن من اكتشاف المتسلسلة التالية :

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{9\times 11} + \cdots\right) = 8\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}\right)$$

هذه الصيغة تسمى صيغة غريغوري- ليبنيز-مادهافا.

4. اسحـــــــــــاق نيوتن Isaac Newton $(1642-1727)$



اسحاق نيوتن، عالم فيزيائي و رياضي إنجليزي. يعد من أبرز العلماء مساهمة في الفيزياء والرياضيات عبر التاريخ وأحد رموز الثورة العلمية. وضع أسس الحساب التفاضلي والتكامل، كما ساهم في ايجاد صيغة لامنتهية للعدد π .

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2k)}\times\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$$

إذا وضعنا $x = \frac{1}{2}$ نحصل على:

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots(2k-1)}{2\times 4\times\cdots(2k)}\times\frac{1}{2k+1}\times\frac{1}{2^{2k+1}} + \cdots\right)$$

هذه المتسلسلة سريعة التقارب، فبعد 50 طرفا في المجموع نكون قد ربحنا 33 رقما صحيحا بعد الفاصلة.

5. جـــــــــــون ماشين John Machin $(1680-1752)$

جون ماشين، أستاذ إنجليزي مختص في علم الفلك.
في سنة 1706، اكتشف الصيغة التالية:

$$\pi = 4\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right)$$

وباستعمال متسلسلة غريغوري، حصل على :

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{4(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)}-\frac{(-1)^k}{(239)^{2k+1}(2k+1)}\right)$$

وبفضل هذه الصيغة استطاع ماشين أن يكون أول رياضي توصل إلى 100 رقم بعد الفاصلة للعدد π .

6. ليـونـاردو أولير Leonhard Euler $(1707-1783)$

يعتبر أولير من بين الرياضيين الذين تركوا أثرا في تاريخ العلوم، نظرا لأعماله الكثيرة التي ساهمت في إغناء شتى فروع الرياضيات.
عمم استعمال الحرف الإغريقي π للدلالة على النسبة بين محيط دائرة شعاعها 1 وقطرها. وفي هذا الإطار أيضا توصل إلى مجموعة من الصيغ التي تتضمن العدد π ومن بينهم نذكر:

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

يمكن كتابتها أيضا على الشكل التالي:

$$\pi=\left(6\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

كما أن أبحاثه حول العدد π لم تتوقف عند هذا الحد. فقد توصل أيضا الى صيغتين مستعملا دالة arctan . ففي سنة 1794، توصل الى الصيغة $\pi = 20\arctan\left(\frac{1}{7}\right)+8\arctan\left(\frac{3}{79}\right)$. أما في سنة 1764، فقد توصل الى صيغة ثانية $\pi = 16\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{70}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{99}\right)$ ، هذه الأخيرة استخدمها غيدغفرد سنة 1841 للحصول على 208 رقم بعد الفاصلة (152 منها صحيحا) للعدد π .

7. سرينفاسا أينجار رامانجن Srinivasa Ramanuja $(1887-1920)$

سرينفاسا رامانجن، رياضي هندي، عرف بذكائه وعبقريته في الرياضيات، رغم أنه لم يتمم درساته العليا. توصل إلى نتائج حيرت الرياضيين وبقي مصدر أفكاره لغزا، و كان له إسهام كبير في تقريب العدد π . حيث توصل الى الصيغة التالية:

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4n)!\ (1103+26390n)}{396^{4n}(n!)^4}\right)^{-1}$$

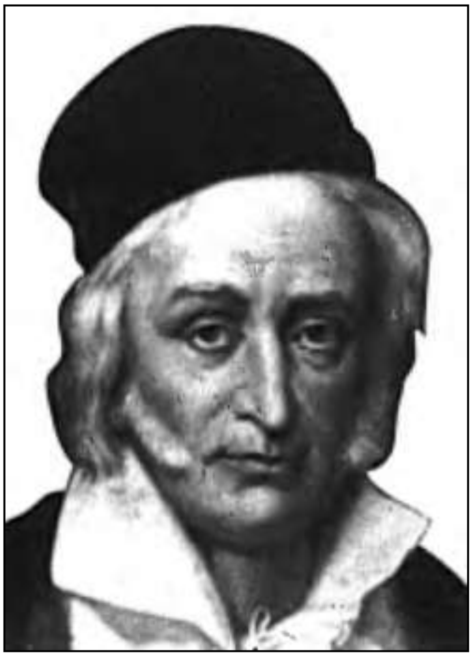
إلا أنه لم يعطي برهانا عليها. وفي سنة 1987 تمكن العالمان جوناثان *Jonathan* و بيتر براون *Peter* Browein من تسليط الضوء على أعماله و تبسيطها.

- في سنة 1985، استخدم الرياضي غوسبر *W.* Gosper الصيغة السابقة وحصل على 17 مليون رقما بعد الفاصلة.
- في سنة 1994، استخدم الأخوان شيدونفسكي *Chudnovsky* الصيغة التالية :

$$\pi = \left(12\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591409+545140134n)}{640320^{3n+\frac{3}{2}}(3n!)(n!)^3}\right)^{-1}$$

التي استتنتجت من متسلسلة رامانُجَن، وبهذا تمكنا من الحصول على 4 ملايير رقم بعد الفاصلة (عن كل حد جديد 14 رقما إضافيا بالضبط).

8. يوهان كارل فريدريش غوس Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$



عالم رياضي ألماني، عرف بعبقريته وذكاءه الشديد منذ طفولته. لقب بأمير الرياضيات، ويعد واحدًا من بين أهم العلماء في تاريخ الرياضيات. فرغم عدم اهتمامه بتقريب العدد π إلا أنه توصل الى الخوارزمية التالية :

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad s_0 = \frac{1}{2}\ ,$$

$$b_k = \sqrt{a_{k-1}b_{k-1}} \qquad c_k = {a_k}^2 - {b_k}^2$$

$$p_k = \frac{2{a_k}^2}{s_k}$$

$$a_0 = 1$$
$$a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$$
$$s_k = s_{k-1} - 2^k c_k$$

مستعملا المعدل الحسابي والهندسي. هذه الخوارزمية اكتشفها العالمان أوجين السلامي *Eugène salamin* وريتشارد برنت *Richard Brent* سنة 1973، ونشراها بشكل مستقل سنة 1976. كما أنها تتميز بسرعة تقاربها نحو العدد π ، فبعد 25 عملية نحصل على خمسة و أربعين مليون رقم بعد الفاصلة.

الفصل الثالث

خاصيـــــات العـــــــــدد π واستعمالاته

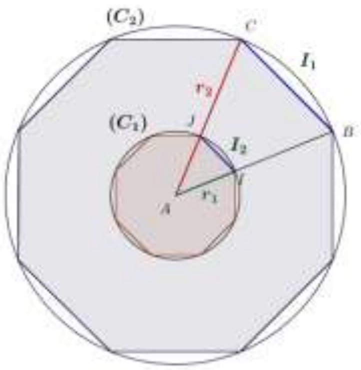
I. خاصيـــــــــــات العدد π

1. π عـــدد ثابت Constant

نعلم أن π هي النسبة بين محيط دائرة P وقطرها D، ونكتب $\pi = \frac{P}{D} = \frac{P}{2R}$ (حيث R هو شعاع الدائرة). لكن هل هذه النسبة ستبقى ثابتة عند تغيير أبعاد الدائرة.

الجواب هنا، نعم.

<u>البرهان:</u>



لتكن (C_1) و (C_2) دائرتين محيطتين بمضلعين منتظمين عدد أضلاعهما يساوي n ولهما نفس المركز. وليكن r_1 شعاع االدائرة (C_1) و r_1 شعاع الدائرة (C_2) بحيث $r_1 < r_2$ (أنظر الشكل الشكل جانبه).

لتكن a_n محيط المضلع المحاط ب (C_1) و b_n محيط المضلع المحاط ب (C_2).

نفترض أن $\lim \frac{a_n}{2r_1} = \pi_1$ و $\lim \frac{b_n}{2r_2} = \pi_2$ ونبين أن $\pi_2 = \pi_1$.

لدينا $a_n = n\, IJ$ و $b_n = n\, \mathrm{BC}$ إذن $\frac{a_n}{b_n} = \frac{IJ}{BC}$. (2)

وبتطبيق مبرهنة طاليس على المثلث ABC حيث $\mathrm{(IJ)} \parallel \mathrm{(BC)}$ نستنتج أن: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{IJ}{BC}$ (3)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{b_n}{2r_2} = \frac{a_n}{2r_1}$. أي أن $\lim \frac{b_n}{2r_2} = \lim \frac{a_n}{2r_1}$. ومنه $\pi_2 = \pi_1$.

2. π عـــــــدد لا جذري Irrationnel

ظهر مفهوم الأعداد اللاجذرية في عصر الحضارة اليونانية، مع العالم الرياضي فيثاغورس، الذي أكد أن العدد $\sqrt{2}$ عددا لا جذريا، أي لا يمكن كتابته على شكل $\frac{p}{q}$ حيث $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

وبالرغم من قدم هذا المفهوم، إلا أن هناك صعوبة في البرهنة على أن عددا ما عددا لاجذريا. ويعد العدد π من أقدم الأعداد اللاجذرية إلا أن هذه الخاصية ظلت بدون برهان مدة طويلة من الزمان. لكن مع تطور التحليل الرياضي في القرنين 16م و 17م، تمكن الرياضي لمبيرت Lambert

$(1728-1777)$ من البرهنة على هذه الخاصية وذالك سنة 1761م. وقد جاء برهانه على الشكل الآتي : في الأول بين أن كل عدد يكتب على شكل كسر لا منتهي

$$\cfrac{a_0}{b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{\cdots}{\cdots+\cfrac{a_n}{b_n+\cdots}}}}}$$

فهو عدد لا جذري (حيث المتتاليتين (a_i) و (b_i) يحققان بعض الشروط). ثم بين المبرهنتين التاليتين :

" لكل x من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. لدينا: $\tan(x)=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}$ "

"إذا كان x عددا جذريا غير منعدما، فإن العدد $\tan(x)$ عددا لا جذريا."

وفي الأخير افترض أن العدد π عددا جذريا، ثم وضع $x=\frac{\pi}{4}$. و توصل الى تناقض وهو أن $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

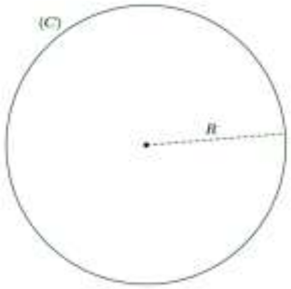
3. π عـــــدد متسام Transcendant

نقول إن عددا حقيقيا أو عقديا عددا جبريا إذا كان جذرا لحدودية غير منعدمة معاملاتها أعداد جذرية. ونسمي الأعداد اللاجبرية بالأعداد المتسامية. ويعود تاريخ اكتشاف الأعداد المتسامية إلى سنة 1844م، مع الرياضي الفرنسي جوزيف ليوفيل *Joseph Liouville* $(1809-1882)$، الذي قام بنشرها بعد ذلك سنة 1851. وقد جاء تعريفه لهذه الاعداد على الشكل التالي : " إذا كان x عددا لا جذريا وحلا لمعادلة جبرية درجتها n، فإنه توجد ثابتة $C>0$ بحيث، كل عدد جذري $\frac{p}{q}$ يحقق : $\left|x-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C}{q^n}$ ". ومع ذلك بقي من الصعب تحديد هذه المجموعة. فحتى سنة 1872 تمكن هيرميت *Hermite* $(1822-1901)$ من البرهنة على أن e عدد متسامي و بعد ذلك بقليل استطاع ليندمان *Lindemann* $(1852-1939)$ أن يبرهن أن π عدد متسام.

II. استعمـــــــــــــالات العدد π

1. الهنـــــــــــدسة

يستعمل العدد π كثيرا في الهندسة حيث يظهر في حساب المحيط والمساحة والحجم لبعض الاشكال الهندسية التي تتضمن الدائرة. ومن بين هذه الأشكال نذكر:

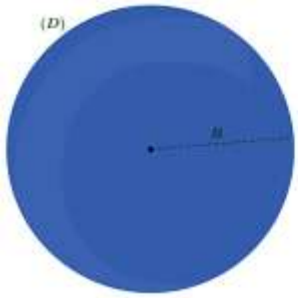


أ- الدائرة

لتكن (C) دائرة شعاعها R (الشكل جانبه).

يعبر عن P محيط الدائرة (C) بالعلاقة :

$$P = 2\pi R$$

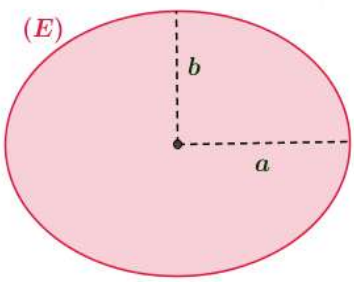


ب- القرص

ليكن (D) قرصا شعاعه R (الشكل جانبه).

يعبر عن P محيط القرص (D) بالعلاقة : $P = 2\pi R$

و عن S مساحة القرص (D) بالعلاقة : $S = \pi R^2$.

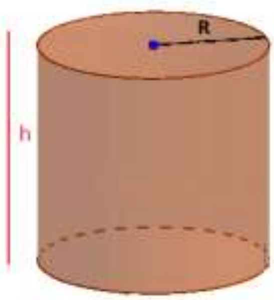


ج- الإهليليج

ليكن (E) إهليليجا بعداه a و b(الشكل جانبه).

يعبر عن P محيط الإهليليج (E) بالعلاقة : $P = \pi(a+b)$

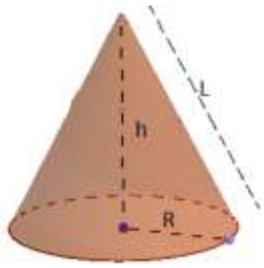
و عن S مساحة الإهليليج (E) بالعلاقة : $S = \pi ab$.



د- الأسطوانة

- المساحة الجانبية للأسطوانة هي : $S_L = 2\pi Rh$.
- المساحة الكلية للأسطوانة هي: $S_T = S_L + 2\pi R^2$.
- حجم الأسطوانة هو: $V = \pi R^2 h$.

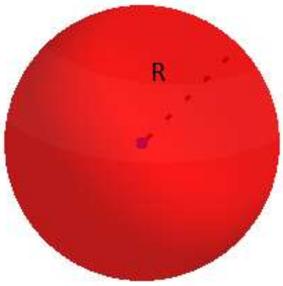
ه- المخروط الدوراني



- المساحة الجانبية : $S_L = \pi RL$.
- المساحة الكلية : $S_T = \pi R(L+R)$.
- الحجم : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

$L = \sqrt{h^2 + R^2}$

و- الفلكة

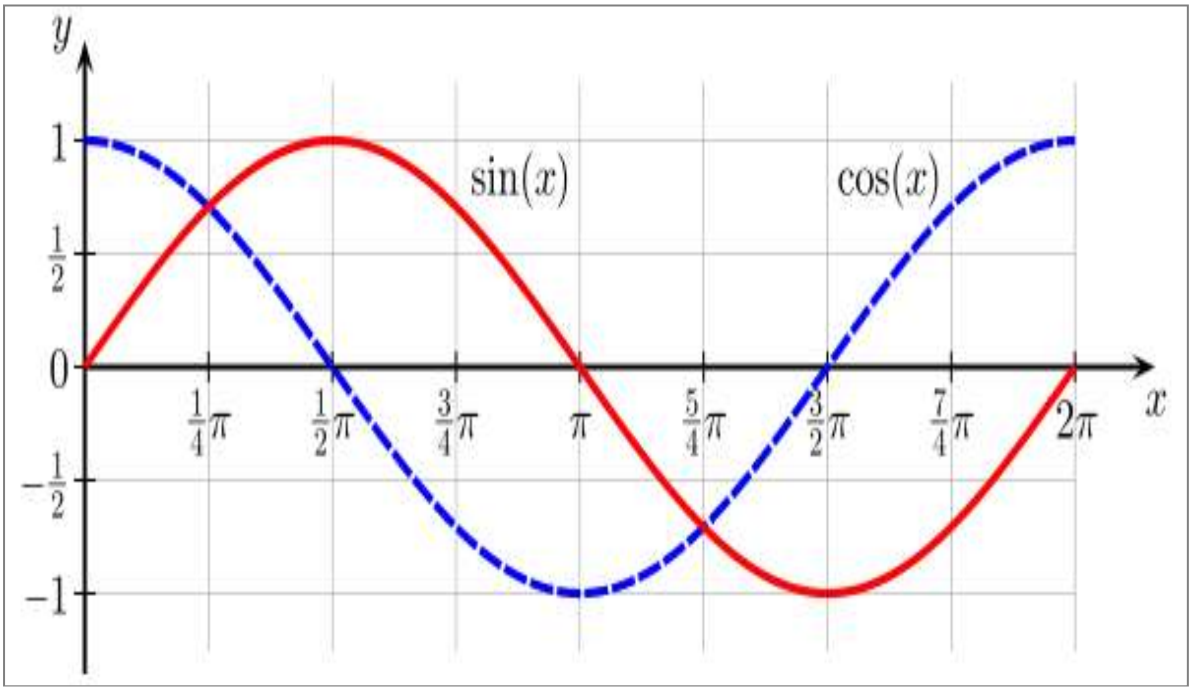


- المساحة : $S = 4\pi R^2$.
- الحجم : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

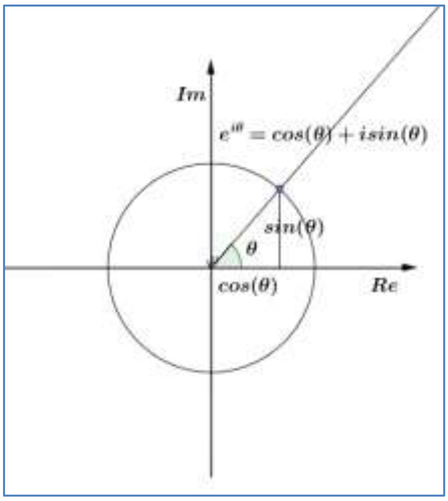
2. الحســـــــــاب المثلثي

يستعمل العدد π في الحساب المثلثي كوحدة عالمية لقياس الزاوية بالراديان حيث أن $\pi rad = 180°$. والراديان هو قياس زاوية مركزية في دائرة شعاعها R ، محصورة بقوس قياس طولها R .

إنشاء الدوال المثلثية



3. الأعـــــــــــــداد العقدية



كل نقطة $M(x,y)$ من المستوي العقدي $(O,\vec{u},\vec{v})$، لها لحق على الشكل التالي $z = x + iy$ حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$، ويمكن كتابته أيضا على الشكل المثلثي $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ حيث $r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ يسمى معيار العدد العقدي z و $\theta = (\vec{u},\overrightarrow{OM})$ عمدته.

في سنة 1748م، قام أولير بنشر صيغة تتضمن ثلاث توابث رياضية :

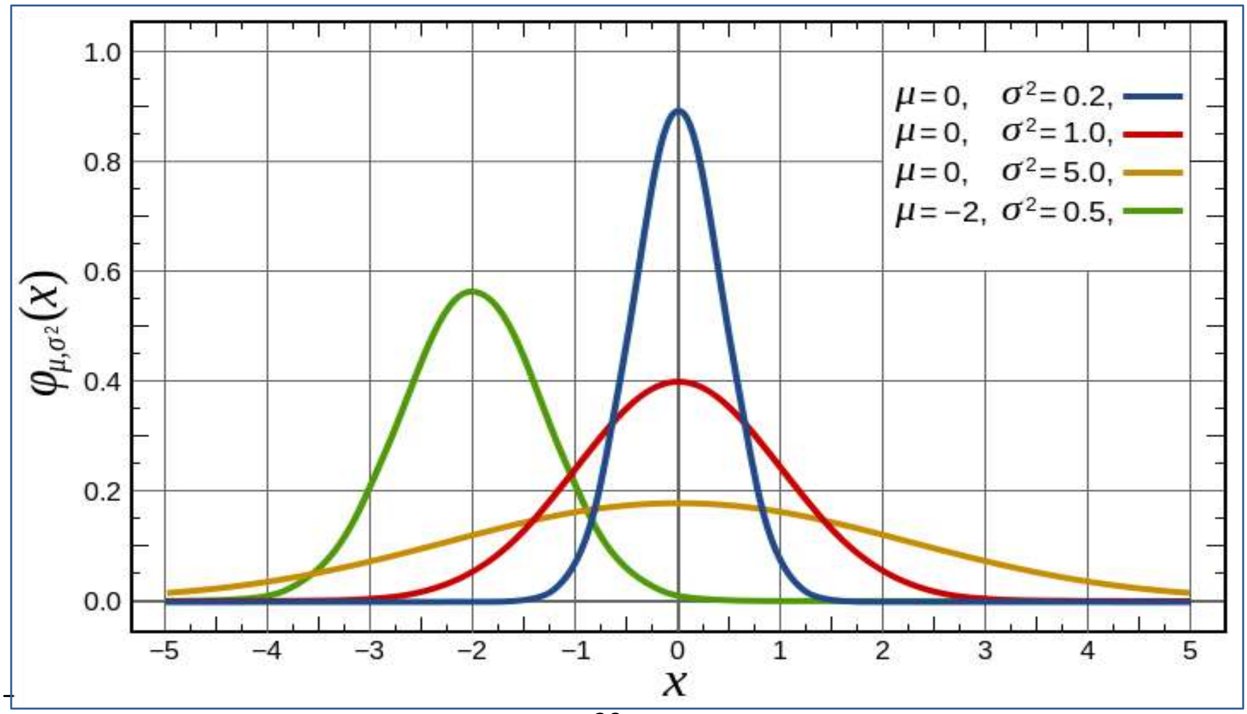
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

4. الاحتمـــــالات و الاحصاء

توجد العديد من قوانين الإحتمالات التي تتضمن العدد π ، ومن بين هذه القوانين نذكر:

- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم بالمتوسط μ والانحراف الطرازي σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوشي:

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(x^2+1\right)}.$$

5. في نظرية الأعداد ودالة زيتا لريمان

دالة زيتا لريمان $s\mapsto\zeta(s)$ هي دالة استعملت في مجالات كثيرة في الرياضيات. فعندما نأخذ مثلا $s=2$ نحصل على :

$$\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

وقد كان حساب هذه المتسلسلة مسألة مشهورة في الرياضيات سميت بمسألة بازل. هذه المسألة قام أولير بحلها سنة 1735م، حيث بين أنها تساوي $\frac{\pi^2}{6}$.

6. الفيـــــــــــــــزيــــــــــــــــاء

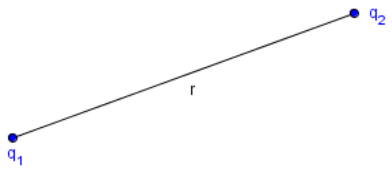
يمكن رؤية العدد π في العديد من القوانين الفيزيائية من أهمها:

أ- <u>قانون كولوم للقوة الكهربائية</u>

قانون كولوم، أو قانون التربيع العكسي لكولوم، هو قانون فيزيائي يصف التفاعل بين الكهروستاتيكي الحاصل بين الجسيمات المشحونة كهربائياً. نشر هذا القانون سنة 1785م من قبل الفيزيائي الفرنسي شارل أوجستين دي كولوم، وكان أساساً في تطوير النظرية الكهرومغناطيسية.

نص القانون : " القوة بين شحنتين كهربائيتين q_1 و q_2 تفصلهما مسافة r هي :

$$F=\frac{|q_1q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ "$$



ب- <u>النفاذية المغناطيسية في الفراغ</u>

$$\mu_0=4\pi.10^{-7}N/A^2$$

ج- <u>قوانين كيبلر</u>

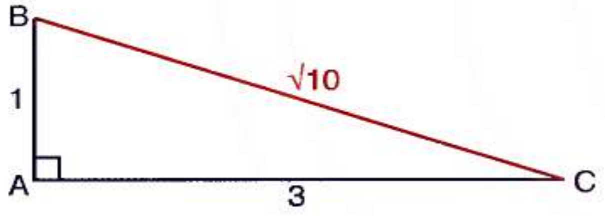
تربط بين الزمن المداري (P) والمحور الإهليجي الأكبر a والكتل (M و m) لجسمين مداريين حول بعضهما:

$$\frac{P^2}{a^3}=\frac{(2\pi)^2}{G(m+M)}$$

III. إنشـــــــــــاء تقريبات العدد π بالبركار والمسطرة

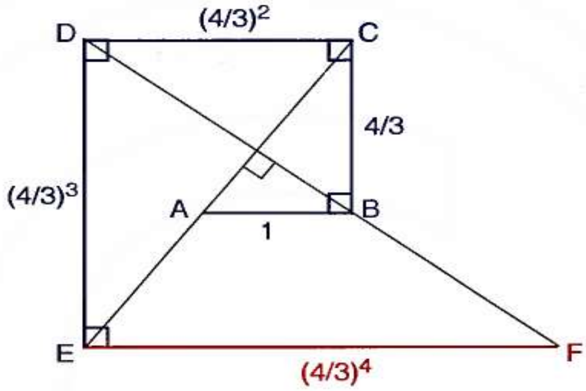
هذه بعض الحلول المقترحة لمسألة تربيع الدائرة :

1- الإنشاء الأول (إنطلاقا من تقريب Hou Han Shu)



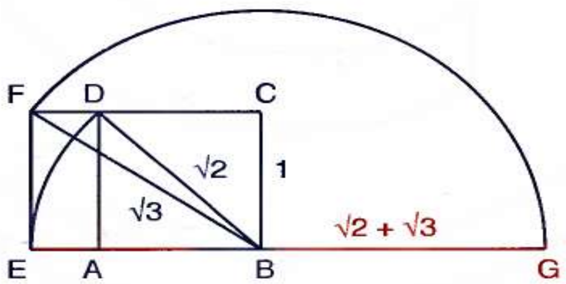
AB = 1
AC = 3
BC = √10 = 3,1622 ≈ π
Erreur : 0,66 %

2- الإنشاء الثاني (إنطلاقا من تقريب المصريين)



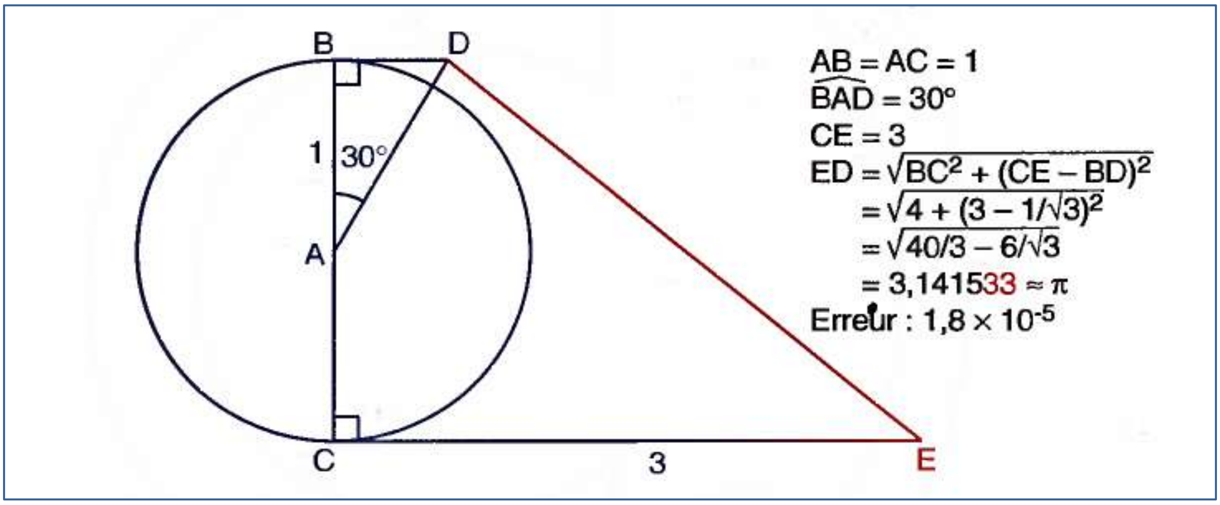
AB = 1
BC = 4/3
CD = $(4/3)^2$
DE = $(4/3)^3$
EF = $(4/3)^4$ = 3,16049 ≈ π
Erreur : 0,6 %

3- الإنشاء الثالث (إنطلاقا من تقريب π ب $\sqrt{2}+\sqrt{3}$)

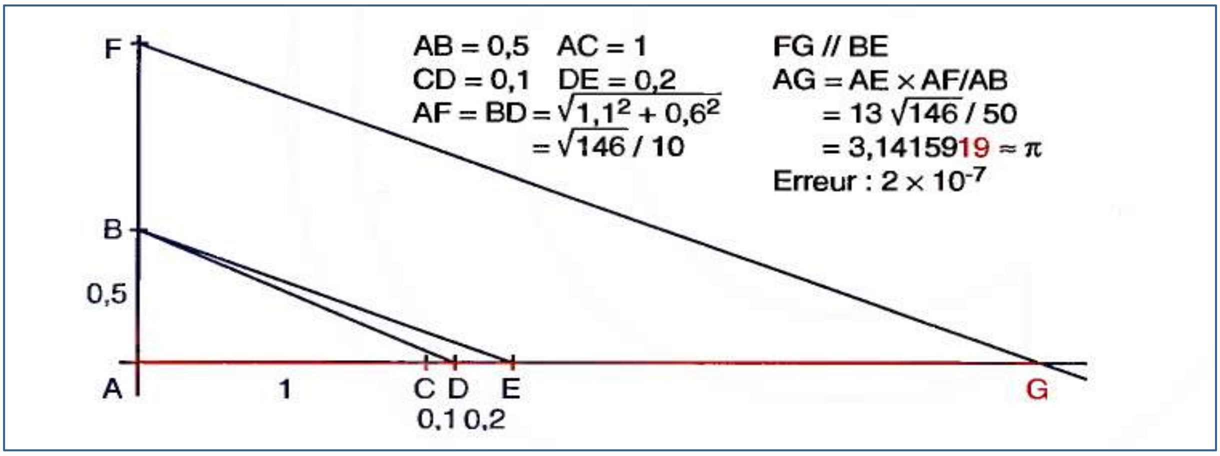


$ABCD$ مربع طول ضلعه يساوي 1.
BD = BE = √2
CF = BE = √2
BG = BF = √3
EG = √2 + √3 = 3,1462 ≈ π
Erreur : 0,46 %

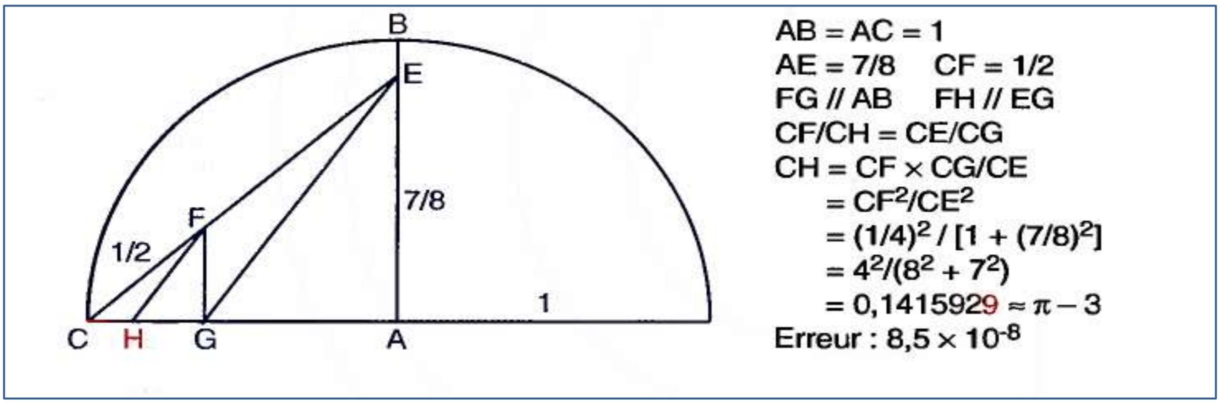
4- الإنشاء الرابع (طريقة كوشانسكي *Kochansky* – 1685)



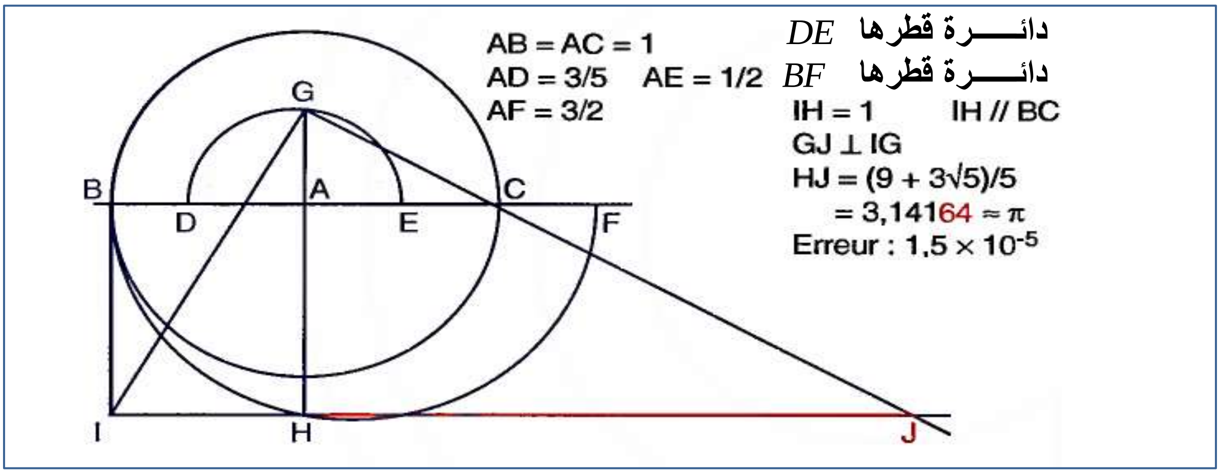
5- الإنشاء الخامس (طريقة *Specht*–1836)



6- الإنشاء السادس(طريقة *Jacob de Gelder* – 1849)

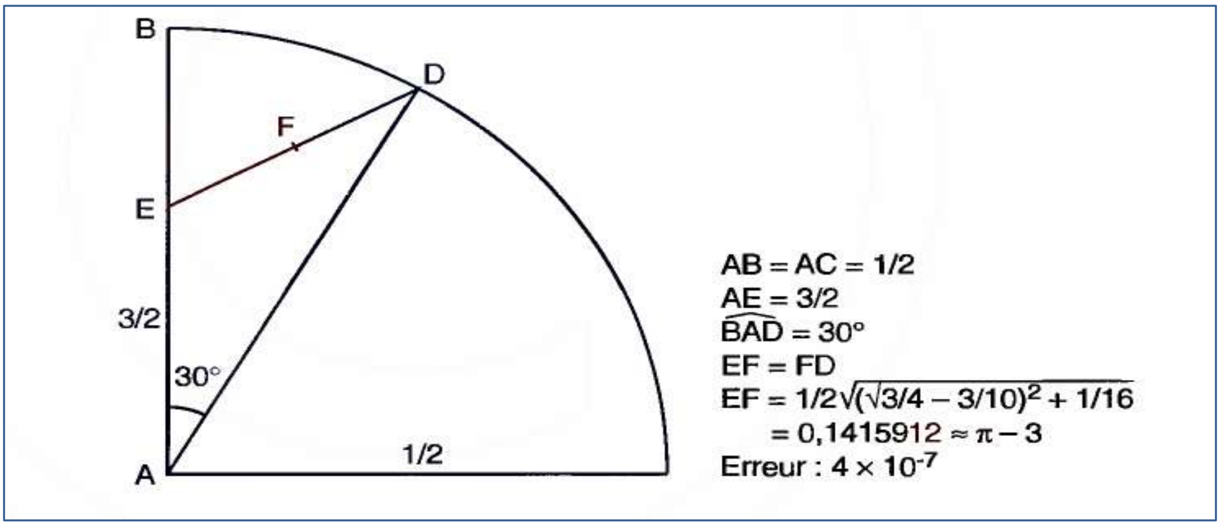


7- الإنشاء السابع (طريقة $Hobson-1913$)



لاحظ أن $GH = \sqrt{\pi}$ إذن المربع ذو الضلع GH هو حل تقريبي لمسألة تربيع الدائرة.

8- الإنشاء الثامن (طريقة $Goodhue-1974$)



الجـزء الثاني : القســــــــم التطبيقي

- الفصـــل الرابـــع: دراســـة تحليلية للمقررات
- الفصـــل الخامس: البحـــــــــث الميداني

الفصل الرابع

دراســــــــــــــــــــة تحليلية للمقررات

I. تمهيــــــــــــــــــــــــــــد

يهدف هذا الفصل إلى مراجعة مقررات الرياضيات من السنة الخامسة ابتدائي حيث الظهور الأول للعدد π حتى السنة الختامية من السلك الثانوي التأهيلي، لمعرفة الطريقة التي قدم بها هذا العدد. وبالتالي الوقوف عند الأسباب التي جعلت أغلبية التلاميذ لا يعرفون حقيقته، وإنما يحصرونه في قيم تقريبية له. وقد اعتمدنا في هذه الدراسة على المقررات التي نراها مناسبة والتي جاءت بالمفهوم على أحسن وجه. وقد تعمدنا دراسة المقررات نظرا للأهمية الكبرى التي تلعبها في العملية التعليمية التعلمية باعتبارها المرجع الأول لبناء الدروس عند أغلبية الأساتذة.

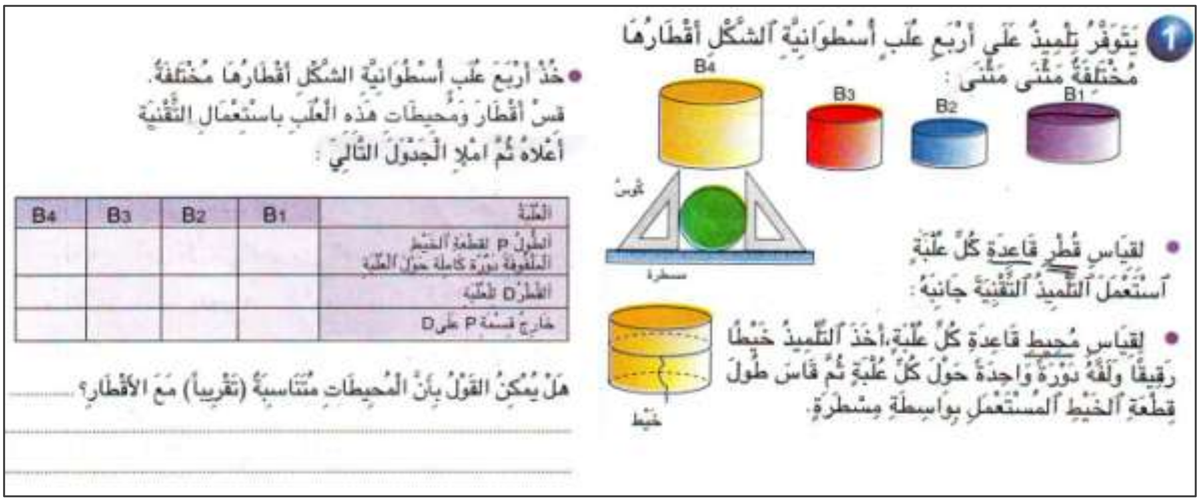
II. الســـلك الابتـــــــــــــــــــدائي

1- المستوى الخـــــــــــــــــامس

المقرر المعتمد : النجاح في الرياضيات.

ذكر مفهوم العدد π لأول مرة في المستوى الخامس ابتدائي في درس "محيط الدائرة - مساحة القرص". وكان الهدف من هذا الدرس هو أن يتمكن التلميذ من حساب محيط الدائرة ومساحة القرص انطلاقا من القطر (أو الشعاع) أي أن يتمكن من تطبيق علاقات المساحة والمحيط والتي تحوي العدد π. وقد جاء تمهيد الدرس بنشاطين، الأول يهدف إلى اثبات وجود ثابتة تساوي خارج قسمة محيط الدائرة على قطرها (أي π) والثاني يهدف إلى تحديد قيمة تقريبية لمساحة قرص كما سنلاحظ ذلك في الصورتين التاليتين.

- *النشاط الأول*



1 يَتَوَفَّرُ تِلْمِيذٌ عَلَى أَرْبَعِ عُلَبٍ أُسْطُوَانِيَّةِ الشَّكْلِ أَقْطَارُهَا مُخْتَلِفَةٌ مَثْنَى مَثْنَى :

- لِقِيَاسِ قُطْرِ قَاعِدَةِ كُلِّ عُلْبَةٍ اسْتَعْمَلَ التِّلْمِيذُ التِّقْنِيَّةَ جَانِبَهُ :
- لِقِيَاسِ مُحِيطِ قَاعِدَةِ كُلِّ عُلْبَةٍ، أَخَذَ التِّلْمِيذُ خَيْطًا رَقِيقًا وَلَفَّهُ دَوْرَةً وَاحِدَةً حَوْلَ كُلِّ عُلْبَةٍ ثُمَّ قَاسَ طُولَ قِطْعَةِ الْخَيْطِ الْمُسْتَعْمَلِ بِوَاسِطَةِ مِسْطَرَةٍ.
- خُذْ أَرْبَعَ عُلَبٍ أُسْطُوَانِيَّةِ الشَّكْلِ أَقْطَارُهَا مُخْتَلِفَةٌ. قِسْ أَقْطَارَ وَمُحِيطَاتِ هَذِهِ الْعُلَبِ بِاسْتِعْمَالِ التِّقْنِيَّةِ أَعْلَاهُ ثُمَّ امْلَإِ الْجَدْوَلَ التَّالِي :

العلبة	B1	B2	B3	B4
الطول P لقطعة الخيط الملفوفة دورة كاملة حول العلبة				
القطر D للعلبة				
خارج قسمة P على D				

هَلْ يُمْكِنُ الْقَوْلُ بِأَنَّ الْمُحِيطَاتِ مُتَنَاسِبَةٌ (تَقْرِيبًا) مَعَ الْأَقْطَارِ؟ ....

المطلوب من التلميذ في هذا النشاط هو القيام بثلاث عمليات أربع مرات متتالية ثم تسجيل النتائج المحصل عليها في الجدول.

العملية الأولى: قياس قطر العلبة الأسطوانية الشكل باستعمال الكوس والمسطرة المدرجة.

العملية الثانية: قياس محيط العلبة باستعمال الخيط والمسطرة المدرجة.

العملية الثالثة: حساب خارج قسمة المحيط على القطر.

وكخلاصة للنشاط، فالتلميذ سيتوصل في الأخير إلى حساب القيمة التقريبية للعدد π والتي سيجدها في غالب الأحيان –بمساعدة الأستاذ- هي $3,14$ كما سيتم الإشارة إلى ذلك في خلاصة الدرس.

ايجابيات النشـــــاط

- النشاط بسيط جدا ولا يحتاج إلا إلى المسطرة المدرجة والكوس والخيط وأربع علب أسطوانية الشكل ومختلفة الأبعاد.
- النشاط يجعل التلميذ يكتشف المفهوم بنفسه من خلال التجربة.

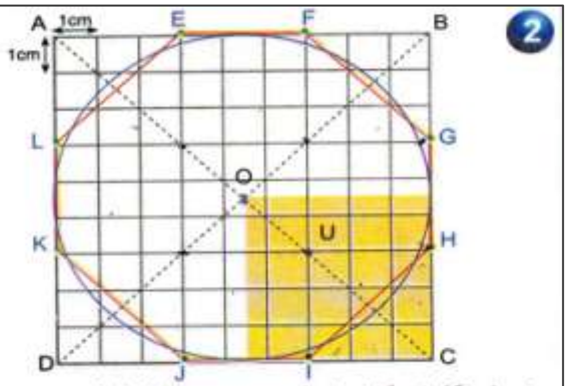
معيقات النشـــــاط

- عدم توفر المدارس على العلب الكافية للقسم لإنجاز النشاط.
- هاجس الوقت: النشاط يحتاج إلى وقت لا بأس به لإنجازه.

خلاصـــــــــــة

هذا النشاط جميل جدا وبسيط، يوافق مستوى التلاميذ لذلك يجب على الأستاذ القيام به وتخصيص وقت كاف. فهو يساعد التلاميذ في اكتشاف القيم التقريبية للعدد π. وعلى الأستاذ كذلك الإشارة إلى أن النتائج المحصل عليها في التجربة مجرد قيم تقريبية ل π.

- ***النشاط الثاني***



لاَحِظْ جيِّدًا ٱلشَّكْلَ أعلاهُ ABCD مُرَبَّعٌ طولُ ضِلْعِه 9 cm.

أحْسُبِ ٱلمِساحَةَ S لِلْمُضَلَّعِ ٱلَّذي رُؤوسُهُ E وF وG وH وI وJ وK وL (مُضَلَّعٌ لَهُ ثَمانِيَةُ أضْلاعٍ)

عَبِّرْ عَنِ ٱلمِساحَةِ U لِلْمُرَبَّعِ ٱلأصْفَرِ بِواسِطَةِ ٱلشُّعاعِ R لِلْقُرْصِ ٱلَّذي مَرْكَزُهُ O وَقُطْرُهُ 9 cm وَٱحْسُبْ U ثُمَّ خارِجَ S عَلى U. هَلْ مِساحَةُ ٱلمُضَلَّعِ تُساوي تَقْريبًا مِساحَةَ ٱلقُرْصِ؟

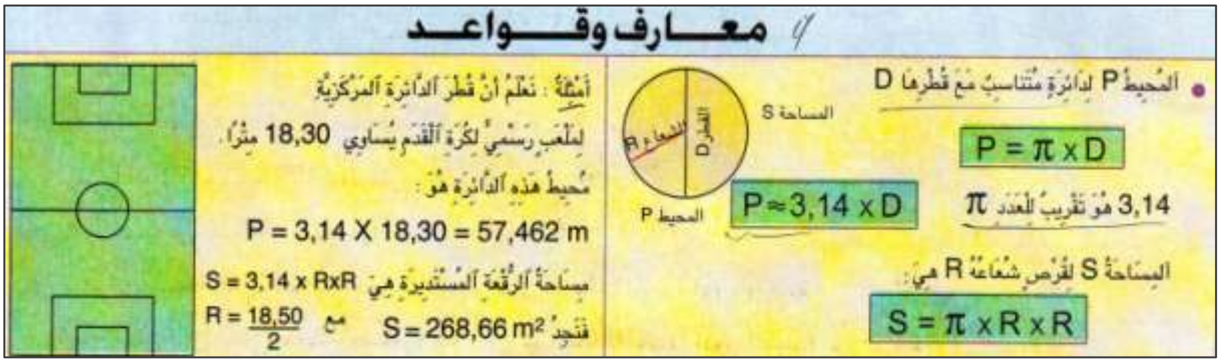
المطلوب من التلميذ في هذا النشاط هو حساب كل من مساحتي المضلع والمربع U باستعمال المربعات الصغيرة (هذه الطريقة سبق للتلميذ أن رآها في دروس سابقة) ثم عن طريق الملاحظة سيرى أن مساحة المضلع تساوي تقريبا مساحة القرص. وعند حساب خارج S على U سيجد أنه يساوي تقريبا $3,14$. ومنه استنتاج صيغة لحساب مساحة القرص انطلاقا من الشعاع كما سنرى ذلك في خلاصة الدرس.

ايجابـــــــــيات النشاط

- النشاط بسيط جدا يمكن إنجازه فقط بحساب المربعات والملاحظة.
- النشاط يجعل التلميذ يكتشف المفهوم بنفسه وذلك باستعمال معارف ومكتسبات سابقة.

خلاصة

هذا النشاط بسيط، يوافق مستوى التلاميذ لذلك يجب على الأستاذ القيام به وتخصيص وقت كاف. فهو يساعد التلاميذ في اكتشاف العلاقة بين مساحة القرص وشعاعه أي تطبيق القيم التقريبية للعدد π .
وعلى الأستاذ كذالك الإشارة إلى أن القيمة المحصل عليها في التجربة مجرد قيمة تقريبية ل π .كما في الخلاصة التالية:



نتائج

في هذا المستوى الدراسي تم تقديم مفهوم العدد π بالشكل المطلوب ، كما تمت الإشارة إلى أن 3,14 كمجرد قيمة تقريبية للعدد π . ثم في أخر الدرس (أنظر الصورة أسفله) جاءت مجموعة من التمارين لتطبيق علاقتي المساحة والمحيط السابقتين. وقد استعمل أيضا (أي العدد π) في درس آخر لحساب المساحة الجانبية للأسطوانة.

2- المستوى السادس

المقرر المعتمد : النجاح في الرياضيات.

ذكر مفهوم العدد π في هذا المستوى في درس "محيط الدائرة ومساحة القرص". وكان الهدف من هذا الدرس هو أن يتمكن التلميذ من حساب محيط الدائرة ومساحة القرص انطلاقا من القطر (أو الشعاع) -كما في المستوى الخامس- أي أن يتمكن من تطبيق علاقات المساحة والمحيط والتي تحوي العدد π . وقد جاء تمهيد الدرس بنشاطين.

- *النشاط الأول*

المطلوب من التلميذ في هذا النشاط هو قراءة النتائج المحصل عليها في التجريبتين ثم ملء الجدول وحساب الخارج المقرب ل $\frac{P}{D}$ والتي سيجدها تساوي تقريبا $3,14$ في كلتا الحالتين. وفي الشق الثاني من النشاط سيعيد التلميذ نفس تجربة النشاط الأول الذي رأيناه في المستوى الخامس لكن هنا سيستعمل الورق المقوى مما يجعل التجربة أكثر تبسيطا وسهولة للإنجاز، لأنها لا تتطلب إلا أدوات متوفرة في جميع المؤسسات.

ايجابيـــــــــــــــــات النشاط

- النشاط بسيط جدا ولا يحتاج إلا إلى المسطرة المدرجة والكوس والخيط وورق مقوى.
- النشاط يجعل التلميذ يكتشف المفهوم بنفسه من خلال التجربة.

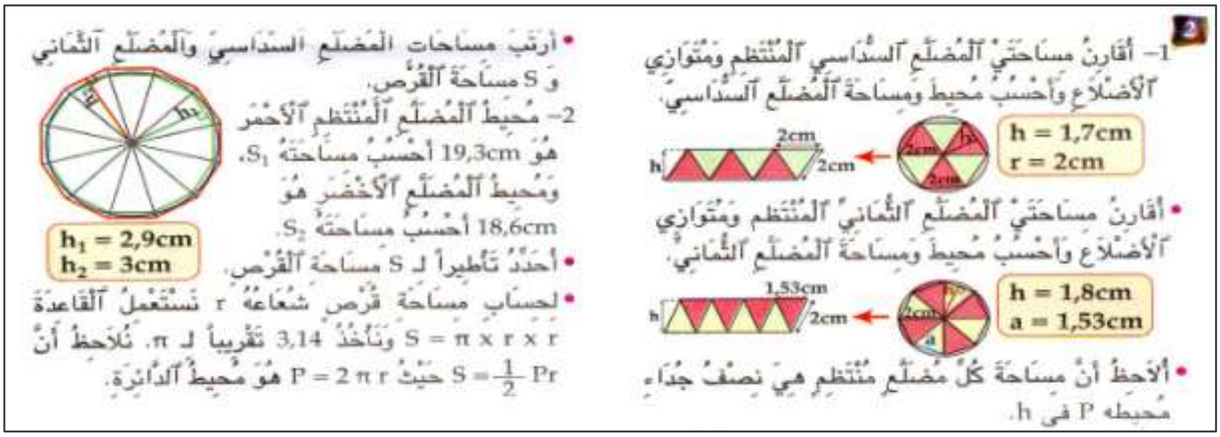
معيقـــــــــــــــــات النشاط

- هاجس الوقت: النشاط يحتاج إلى وقت لا بأس به لإنجازه.

خلاصــــــــــــــــــــــة

هذا النشاط جميل جدا وبسيط، يوافق مستوى التلاميذ لذلك يجب على الأستاذ القيام به وتخصيص وقت كاف له. فهو يساعد التلاميذ في اكتشاف القيم التقريبية للعدد π. وعلى الأستاذ كذلك الإشارة إلى أن النتائج المحصل عليها في التجربة مجرد قيم تقريبية ل π.

- ***النشاط الثاني***



2

1- أقارن مساحتي المضلع السداسي المنتظم ومتوازي الأضلاع وأحسب محيط ومساحة المضلع السداسي.

$h = 1,7cm$
$r = 2cm$

- أقارن مساحتي المضلع الثماني المنتظم ومتوازي الأضلاع وأحسب محيط ومساحة المضلع الثماني.

$h = 1,8cm$
$a = 1,53cm$

- ألاحظ أن مساحة كل مضلع منتظم هي نصف جداء محيطه P في h.

- أرتب مساحات المضلع السداسي والمضلع الثماني و S مساحة القرص.

2- محيط المضلع المنتظم الأحمر هو 19,3cm أحسب مساحته S_1، ومحيط المضلع الأخضر هو 18,6cm أحسب مساحته S_2.

$h_1 = 2,9cm$
$h_2 = 3cm$

- أحدد تأطيرا لـ S مساحة القرص.
- لحساب مساحة قرص شعاعه r نستعمل القاعدة $S = \pi \times r \times r$ ونأخذ 3,14 تقريبا لـ π. نلاحظ أن $S = \frac{1}{2} Pr$ حيث $P = 2\pi r$ هو محيط الدائرة.

المطلوب من التلميذ في هذا النشاط هو حساب مساحة المضلعات المنتظمة وذلك بمقارنتها بمتوازيات الأضلاع الموافقة لها. حيث سيحصل التلميذ على علاقة تساعده في حساب مساحة أي مضلع منتظم انطلاقا من محيطه (أي طول ضلعه) والإرتفاع . هذه الأخيرة سيستعملها في الشق الثاني من النشاط حيث سيطلب منه تأطير مساحة القرص بمساحتي المضلعين المنتظمين المحيط والمحاط به. وقد تمت الإشارة إلى العلاقة المستعملة لحساب مساحة القرص و أن $3,14$ قيمة مقربة للعدد π.

ايجابيـــــــــــــــات النشاط

- النشاط بسيط جدا يمكن إنجازه فقط بالملاحظة وتطبيق علاقة حساب مساحة متوازي الأضلاع.
- النشاط يجعل التلميذ يكتشف طرقا جديدة لتأطير مساحة القرص بمساحات المضلعات المنتظمة المحيطة والمحاطة.

خلاصـــــــــــــــة

هذا النشاط بسيط، يوافق مستوى التلاميذ لذلك يجب على الأستاذ القيام به وتخصيص وقت كاف. فهو يساعد التلاميذ في اكتشاف العلاقة بين مساحة القرص وشعاعه وتطبيق القيم التقريبية للعدد π.

خلاصات ونتائج :

• مُحيطُ الدّائرةِ هو : $P = \pi D$ ، $P = 2 \times \pi \times r$

حيثُ D هو قُطرُ الدّائرةِ و r شعاعُها

• مساحةُ القرصِ هي : $S = \pi \times r \times r$ ، $S = \pi r^2$

• لحسابِ P أوْ S نأخُذُ 3,14 كتقريبٍ لـ π أوْ نستَعمِلُ الزّرّ $\boxed{\pi}$ في المحسبةِ.

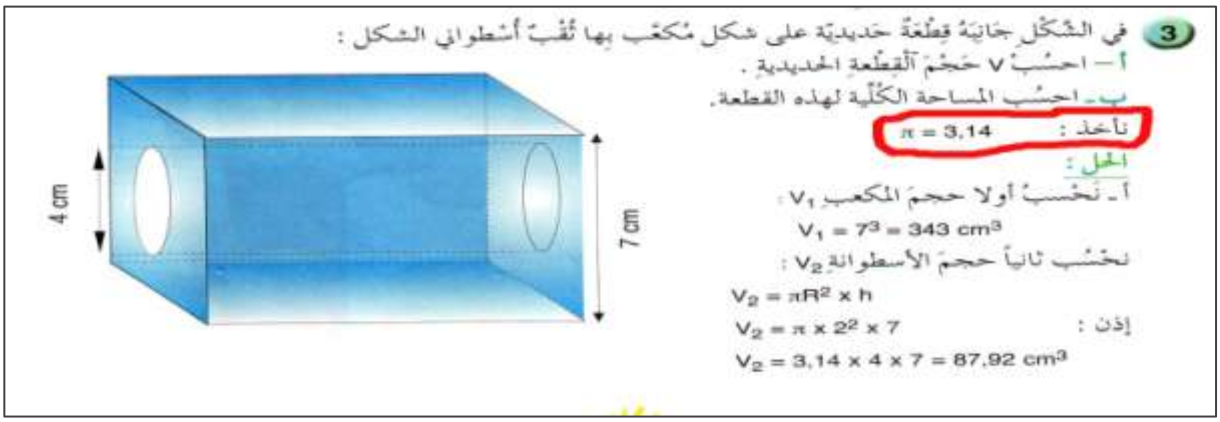
نُلاحِظُ أنّ : $S = \frac{1}{2} P \times r$

نتـــــــــــــــــائج

في هذا المستوى الدراسي تم تقديم مفهوم العدد π بالشكل المطلوب ، كما تمت الإشارة إلى أن 3,14 مجرد قيمة تقريبية للعدد π (أنظر الصورة أسفله). ثم في آخر الدرس جاءت مجموعة من التمارين لتطبيق علاقتي المساحة والمحيط السابقتين. وقد استعمل أيضا (أي العدد π) في درس آخر لحساب المساحة الجانبية للأسطوانة.

III. السلك الثانوي الإعـــــــــــــــــــــــــــــــــدادي

في هذا السلك لم يتم التطرق إلى مفهوم العدد π إلا في بعض التمارين حيث يطلب حساب مساحة بعض الأشكال الهندسية التي تتضمن الدائرة. ولم يتم الإشارة إلى القيم التقريبية له إلا في موضوع واحد في السنة الأولى كما سنلاحظ ذلك في الصورة أسفله.



3 في الشكلِ جانبَهُ قِطعَةٌ حديديّة على شكلِ مُكعّبٍ بها ثُقبٌ أسْطوانيُّ الشكلِ :

أ ـ احسُبْ V حَجمَ القِطعةِ الحديديةِ .

ب ـ احسُبِ المساحةَ الكُلّيةَ لهذهِ القطعةِ.

نأخذ : $\pi = 3,14$

الحل :

أ ـ نحسُبُ أولا حجمَ المكعبِ V_1 :

$V_1 = 7^3 = 343\ cm^3$

نحسُبُ ثانياً حجمَ الأسطوانةِ V_2 :

$V_2 = \pi R^2 \times h$

إذن : $V_2 = \pi \times 2^2 \times 7$

$V_2 = 3,14 \times 4 \times 7 = 87,92\ cm^3$

نرى أنه في هذا التمرين أرتكب خطأ في تقديم القيمة المقربة ل π . فعبارة "نأخذ : $\pi = 3{,}14$ " قد يفهمها بعض التلاميذ على نحو أن $3{,}14$ هي القيمة الحقيقية للعدد π .

IV. السلك الثانوي التــــــــــــــــــــأهيلي

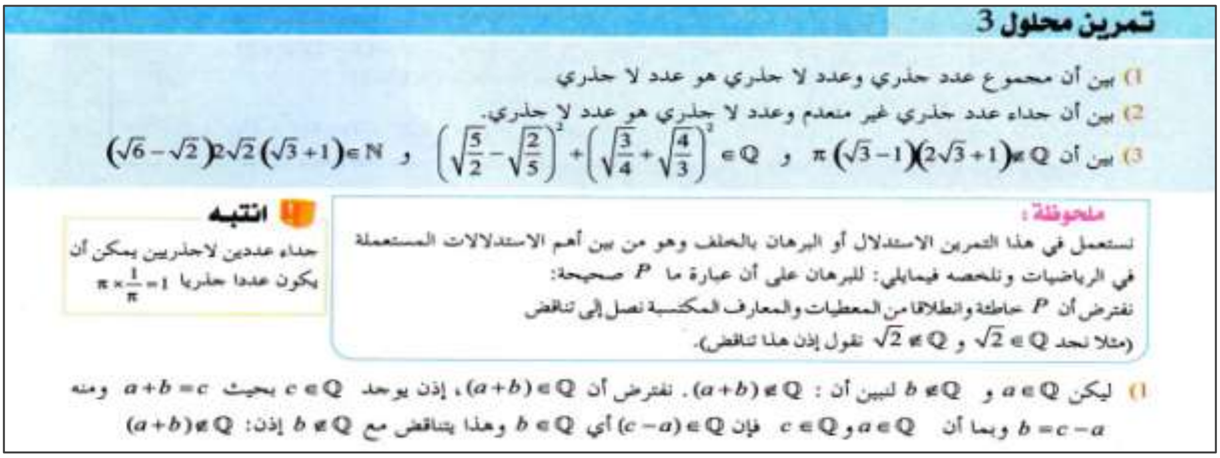
1. الجــــــــــذع المشترك

في هذا المستوى تم تقديم العدد π بشكل جديد حيث أن استعمال وحدة الراديان في الحساب المثلثي كوحدة جديدة لقياس الزاوية إلى جانب الدرجة جعلت للمفهوم أهمية كبرى فالعلاقة $180° = \pi rad$ بسطت الكثير من العلاقات بين الزوايا. وقد تم استعماله أيضا في الدوال المثلثية و الأفاصيل المنحنية...

لكن ما نسجله في هذا الدرس هو أنه لم يتم الإشارة إلى بعض القيم التقريبية له مما يجعل بعض التلاميذ يخطئون في العلاقة السابقة ويعتبرون أن $\pi = 180$.

في المقرر الدراسي : "في رحاب الرياضيات" للجذع المشترك العلمي وجدنا أن π ذكر في درسين آخرين غير درس الحساب المثلثي :

- في درس **"مجموعة الأعداد"** : تم إدراجه في تمرين محلول كما نلاحظ ذلك في الصورة أسفله.


تمرين محلول 3

1) بين أن مجموع عدد جذري وعدد لا جذري هو عدد لا جذري
2) بين أن جداء عدد جذري غير منعدم وعدد لا جذري هو عدد لا جذري.
3) بين أن $\pi\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right) \notin \mathbb{Q}$ و $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 \in \mathbb{Q}$ و $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) \in \mathbb{N}$

ملحوظة :
نستعمل في هذا التمرين الاستدلال أو البرهان بالخلف وهو من بين أهم الاستدلالات المستعملة في الرياضيات وتلخصه فيمايلي: للبرهان على أن عبارة ما P صحيحة:
نفترض أن P خاطئة وانطلاقا من المعطيات والمعارف المكتسبة نصل إلى تناقض
(مثلا نجد $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ و $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ نقول إذن هذا تناقض).

انتبه
جداء عددين لاجذريين يمكن أن يكون عددا جذريا $\pi \times \frac{1}{\pi} = 1$

1) ليكن $a \in \mathbb{Q}$ و $b \notin \mathbb{Q}$ لنبين أن : $(a+b) \notin \mathbb{Q}$. نفترض أن $(a+b) \in \mathbb{Q}$ ، إذن يوجد $c \in \mathbb{Q}$ بحيث $a+b=c$ ومنه $b=c-a$ وبما أن $a \in \mathbb{Q}$ و $c \in \mathbb{Q}$ فإن $(c-a) \in \mathbb{Q}$ أي $b \in \mathbb{Q}$ وهذا يتناقض مع $b \notin \mathbb{Q}$ إذن: $(a+b) \notin \mathbb{Q}$

- في الصفحة الأولى في درس: **"الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$ "** : تم ذكر نبذة تاريخية حوله كما أعطيت أيضا قيمة تقريبية ب 338 رقم بعد الفاصلة وسنرى هذا في الصورة التالية:

3 الترتيب في المجموعة IR

1. الترتيب والعمليات
2. المجالات والتأطير
3. القيمة المطلقة و خاصياتها
4. التقريبات - التقريبات العشرية.

القدرات المنتظرة

- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين أو تعبيرين واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة.
- تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي.
- إدراك وتحديد تقريب عدد أو تعبير بدقة معلومة.
- إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية.
- استعمال المحسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.

أهداف الدرس

- استعمال خاصيات الترتيب.
- التعرف على المجالات المحدودة والمجالات غير المحدودة.
- استعمال تقنيات تأطير عدد.
- التعرف على القيمة المطلقة وربطها بالمسافة.
- التعرف على مركز وشعاع مجال.
- توظيف المحسبة في تحديد قيم مقربة لعدد.

- لمدة 2000 سنة حاول علماء الرياضيات إنشاء مربعا محيطه يساوي محيط دائرة معينة (باستعمال المسطرة والبركار فقط) (quadrature du cercle) وقد باءت جميع محاولاتهم بالفشل ولم تتوقف المحاولات إلا بعد أن برهن العالم الرياضي كارل ليندمان LIENDEMANN CARL سنة 1882 على أن العدد π ليس عددا جذريا ومن ثم استحالة هذا الإنشاء الهندسي.
- الآن وبفضل الحاسوب تم التعرف على 1200 مليار رقم أول بعد الفاصلة في الكتابة العشرية للعدد π.

تقريب عشري للعدد π (338 رقم بعد الفاصلة في الصورة)

2. **الأولـــــــــــــــــــى باكالوريا**

في المقررين المعتمدين (في رحاب الرياضيات و الجيد في الرياضيات) استعمل العدد π كقياس لزاوية بالرديان فقط، وذكر في مجموعة من الدروس (الحساب المثلثي والدوران ...)

3. **الثانيــــــــــــــــــة باكالوريا**

نفس الشئ استعمل العدد π كقياس لزاوية بالرديان فقط في المقررين معا، مع ظهوره في صيغة اولير $e^{i\pi}=-1$ في درس **"الأعداد العقدية"** حيث يظهر على أنه عمدة للعدد العقدي.

V. خلاصـــــــــــــــة الفصل

من خلال مراجعتنا للمقررات الدراسية وتحليلنا لبعض الأنشطة والفقرات التي ذكر فيها العدد π نستنتج ما يلي:

- في السلك الإبتدائي: لقد تم تقديم العدد π بالشكل المطلوب والذي يوافق مستوى التلاميذ. كما تم استعمال $3{,}14$ كقيمة تقريبية له، مع الإشارة إلى ذلك. إذن إن كانت هناك تصورات خاطئة للمفهوم لدى تلاميذ السنة السادسة ابتدائي فهذا يعني أن السبب وراء وجودها مرتبط بعوامل أخرى خارجة عن المقررات الدراسية وربما تكون خارجة أيضا عن المحيط المدراسي في بعض الأحيان.
- في السلك الثانوي الإعدادي : لم ترد أية أنشطة أو فقرات في الكتب المدرسية الخاصة بهذا السلك، تغني الرصيد المعرفي للتلميذ بمعلومات عن العدد π. فقد أكتفي فقط باستعماله في حساب مساحة وحجوم بعض الأشكال الهندسية. وهذا ما سيجعل الكثير من التلاميذ يقعون ضحية هذه المقررات فتتلاشى معرفتهم التي اكتسبوها في السلك الإبتدائي، فيكون التلميذ في السنة الثالثة من الثانوية الإعدادية قد نسي أن $3{,}14$ مجرد تقريب للعدد π.
- في السلك الثانوي التأهيلي: في هذا السلك ذكر العدد π في كثير من الدروس لكن لم ترد أية معلومات عن القيم التقريبية له.

الفصل الخامس

البحث الميـــــــــــــــــــــــــــــــداني

I. تمهيـــــــــــــــــــــــــــد

إن كل بحث تربوي لابد له من جانب نظري وجانب تطبيقي ليكتسب مصداقيته، وتكون نتائجه مدعمة بآراء المعنيين بميدانه. وفي هذا الصدد لم نكتف بالجانب النظري بل وقفنا على واقع تصور التلاميذ للعدد π من خلال استمارات، وذلك في مؤسستين مختلفتين من جهة الدار البيضاء الكبرى، هما : الثانوية التأهيلية ابن تومرت والثانوية التاهيلية ولادة. وبهذا نكون قد استجوبنا طبقات وشرائح من المجتمع تختلف مستوياتهم الفكرية والثقافية.

عينـــــــــــــات البحث

فيما يخص عينات البحث فقد إقتصرنا على عينة واحدة هي:
عينة التلاميذ: وتشمل 170 تلميذا من مختلف مستويات الثانوي التأهيلي. وتعمدنا اختيارهم عشوائيا من مؤسستين متقاربتين لنعرف إن كان هناك تباين في التصورات والتمثلات لدى التلاميذ للعدد π من مؤسسة إلى أخرى.

استمـــــــــــــارة البحث

تتضمن هذه الاستمارة بطاقة تقنية لتحديد مواصفات العينة المستجوبة، متبوعة بأربعة أسئلة تهدف الى معرفة مدى تصور وتمثل التلميذ للعدد π .

- *البطاقة التقنية :* لقد تم الأخذ بعين الاعتبار في تهيئها مجموعة من العوامل :
  - عامل المستوى: اقتصرنا في عينة الدراسة على ثلاث مستويات في الثانوي التأهيلي (الجدع المشترك، الاولى باكالوريا والثانية باكالوريا).
  - عامل الشعبة : تمت الدراسة على عينات من الشعب العلمية و الادبية.
  - عامل المؤسسة : تمت الدراسة على عينات من مؤسستين مختلفتين أي أن عينات الدراسة من بيئتين مختلفتين و من مستوى اجتماعي و ثقافي مختلف (الثانوية التأهيلية ولادة والثانوية التأهيلية ابن تومرت).

- *أسئلة الإستمارة :* لكي تكون الإجابات محددة اقترحنا أسئلة مغلقة يرجى أن يجاب عليها بعلامة (×) داخل الخانة المربعة (أسئلة $1-2-3$) وكان احتمال الحصول على الجواب الصحيح بشكل اعتباطي هو $\frac{1}{4}$. ثم ختمناها بسؤال مباشر يرجى الجواب عليه باختصار ووضوح ودقة.

الاستمارة الموجهة إلى التلاميذ و التلميذات

هذه مجموعة من الأسئلة الغاية منها أن تستغل لإجراء بحث تربوي، فالمرجو منك أخي التلميذ أختي التلميذة الإجابة بكل نزاهة وصراحة وشكرا .

- المستوى الدراسي:
- الشعبة:
- المؤسسة:

(ضع علامة × على جوابك)

1) π عـــدد :

☐ صحيح طبيعي ☐ عشري

☐ جذري ☐ لا جذري

2) π يســاوي :

☐ $180°$ ☐ 3,14

☐ $\frac{22}{7}$ ☐ قيمة أخرى

3) من بين الأشكال التالية، ما هي تلك التي تتضمن العدد π:

☐ أسطوانة ☐ هرم

☐ مربع ☐ متوازي المستطيلات

4) في أي مستوى دراسي تعرف على العدد π لأول مرة :

....

ولما قمنا بدراسة نتائج الإستمارات حسب العوامل التي افترضنا سابقا أنها تؤثر على تصورات التلاميذ، وجدنا التقسيم التالي:

العـــــــــــــوامل		عـــدد التلاميذ	النسب المئـــوية
عامـــل المؤسسة	ث.ت. ابن تومرت	106	62,35%
	ث.ت. ولادة	64	37,65%
عامـــل الشعبة	علـــمي	153	90%
	أدبـــــي	17	10%
عامـــل المستوى الدراسي	الجذع المشترك	62	36,47%
	الأولى باكالوريا	58	34,12%
	الثانية باكالوريا	50	29,41%

II. تحليل نتائج الإستمارات

في هذه الفقرة سنحاول أن نحلل نتائج الاستمارات، ونجيب على بعض الأسئلة المرتبطة بالعوامل المؤثرة على تصورات التلاميذ للعدد π.

1- الســــــــــــؤال الأول : "

π عــــــــــدد :

☐ صحيح طبيعي ☐ عشري

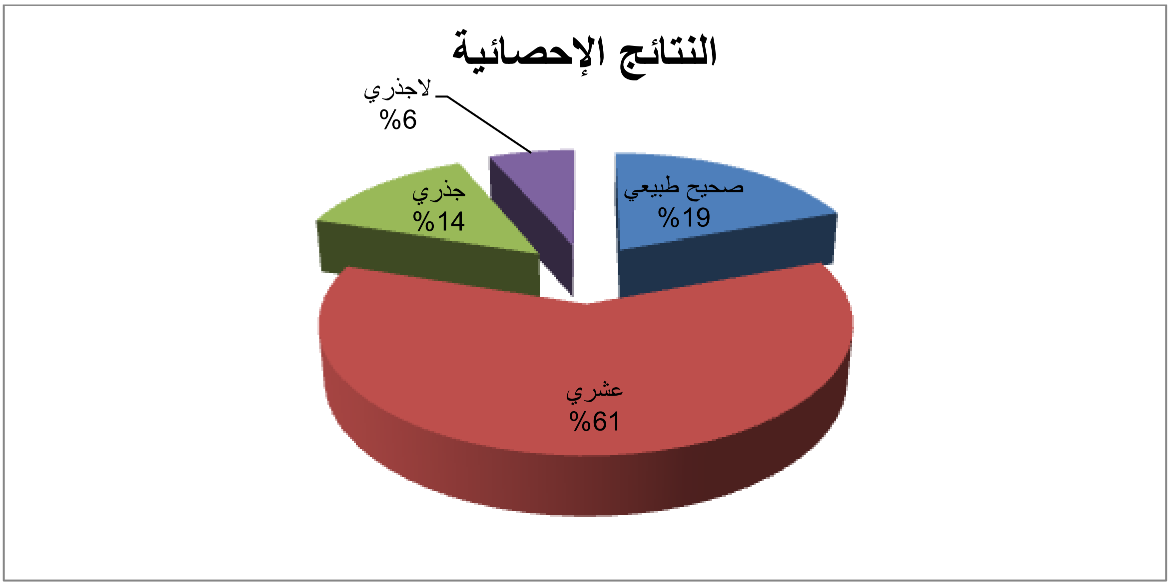
☐ جذري ☐ لا جذري "

- يتمحور حول طبيعة العدد π.
- الهدف منه، معرفة مدى شيوع التمثلات والتصورات الخاطئة لدى التلاميذ حول طبيعة العدد π.

أ- جـــــــــــــدول النتائج

عدد التلاميذ	صحيح طبيعي		عشري		جذري		لاجذري	
	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
170	133	19,41%	103	60,59%	23	13,53%	11	6,47%

ب- التمثيــــــــــــل المبياني



ج- تحليـــــــــــــــل النتائج

إن قراءة المبيان تؤكد لنا شيوع التمثل الخاطئ لطبيعة العدد π ، لأن 94% من التلاميذ لهم تصور خاطئ عن طبيعة هذا العدد، حيث وجدنا أن 61% منهم يعتبرونه عددا عشريا و 19% يعتبرونه عددا صحيحا طبيعيا بينما 14% يعتبرونه عددا جذريا.

د-ملحـــــــــــوظة

يمكن أن يكون عدم ضبط التلاميذ (أو بعضهم) لتعريف عدد صحيح طبيعي - عدد جذري – عدد لاجذري عامل يجعلهم يجيبون بكيفية عشوائية، إذن من هنا يصبح المشكل ليس في تحديد طبيعة π وإنما في المفاهيم السالفة الذكر.

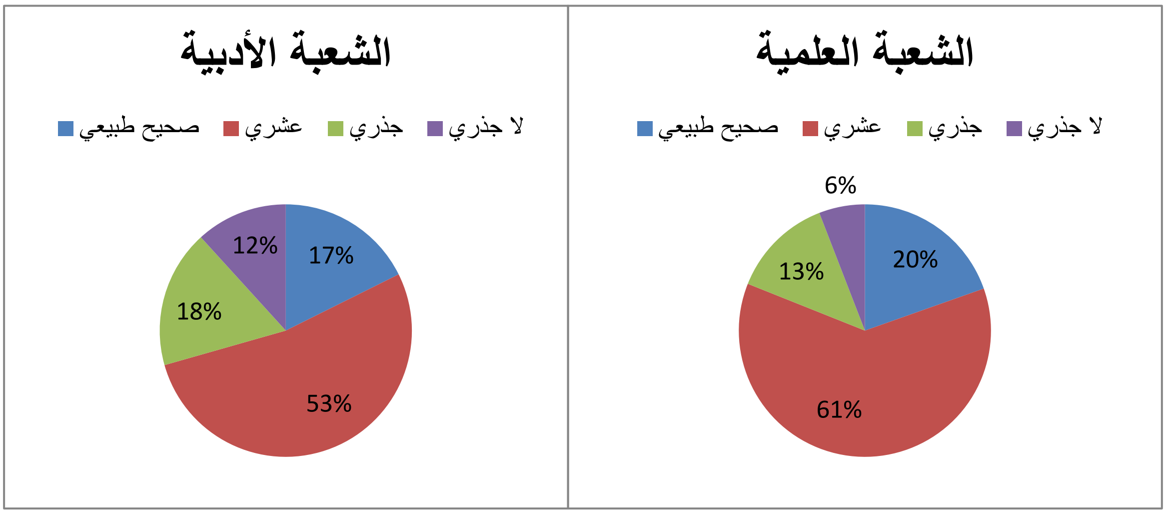
وللتعمق أكثر في دراسة البيانات سنقوم بالتحليل وفق العوامل التي افترضناها سابقا، لنرى أن هناك ارتباط بينها وبين هذه التمثلات الخاطئة حول طبيعة العدد π .

❖ عـــــــــامل الشعبة

جـــــــــدول النتائج

الشعبة	عدد التلاميذ	صحيح طبيعي		عشري		جذري		لاجذري	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
العلمية	153	30	19,60%	94	61,44%	20	13,07%	9	5,89%
الأدبية	17	3	17,65%	9	52,94%	3	17,65%	2	11,76%

التمثيـــــــــــل المبياني



قـــــــــــــراءة المبيان

من خلال المبيانين أعلاه، يتبين لنا أن هناك هيمنة لنسبة التلاميذ الذين يعتبرون العدد π عددا عشريا في كلتا الحالتين (53% بالنسبة للأدبيين و 61% بالنسبة للعلميين). كما أن هناك تقارب في نسبة التلاميذ الذين يعتقدون أن π عددا صحيحا طبيعيا. أما بالنسبة للتلاميذ الذين يعرفون طبيعة العدد π فهي تساوي 12% بالنسبة للأدبيين و 6% بالنسبة للعلميين.

استنتـــــــــــــــــــاج

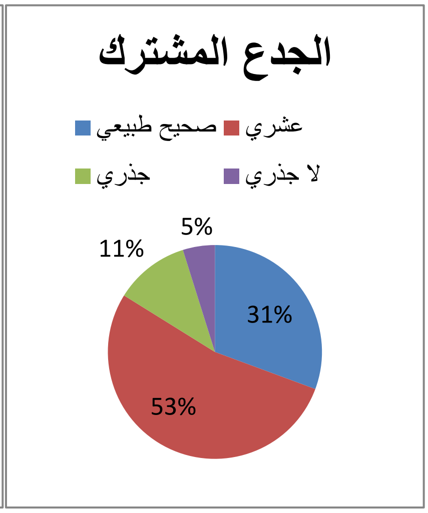
التمثل الخاطئ لطبيعة العدد π لا يتأثر بعامل الشعبة. ففي كلتا الحالتين نجد أن أكثر من 75% من التلاميذ لايعرفون طبيعته.

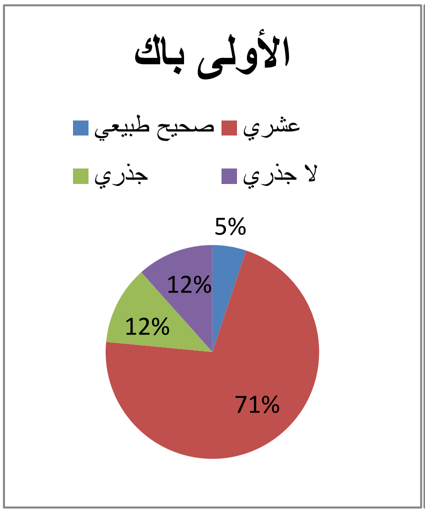
❖ عـــــــــامل المستوى الدراسي

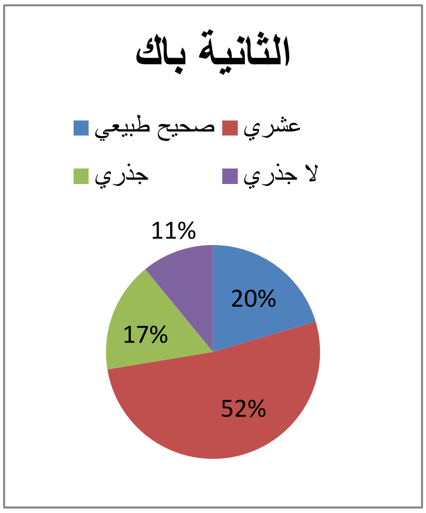
جــــــــــــدول النتائج

المستوى الدراسي	عدد التلاميذ	صحيح طبيعي		عشري		جذري		لاجذري	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
الجدع المشترك	62	19	30,64%	33	53,22%	7	11,30%	3	4,84%
الأولى باك	58	3	5,17%	42	72,42%	7	12,07%	6	10,34%
الثانية باك	50	11	22%	28	56%	9	18%	2	4%

التمثيـــــــــــــل المبياني







قراءة المبيـــــــــــــان

يلاحظ ارتفاع نسبة التلاميذ الذين يعتبرون العدد π عددا عشريا في كل المستويات. ويأتي في المركز الثاني نسبة التلاميذ الذين يعتبرونه عددا صحيحا طبيعيا، في المستويين الجدع المشترك والثانية باك.

بينما نسبة تلاميذ الأولى والثانية باك، الذين يعرفون طبيعته لم تتعدى 12% و 5% من تلاميذ الجدع المشترك.

استنتـــــــــــــاج

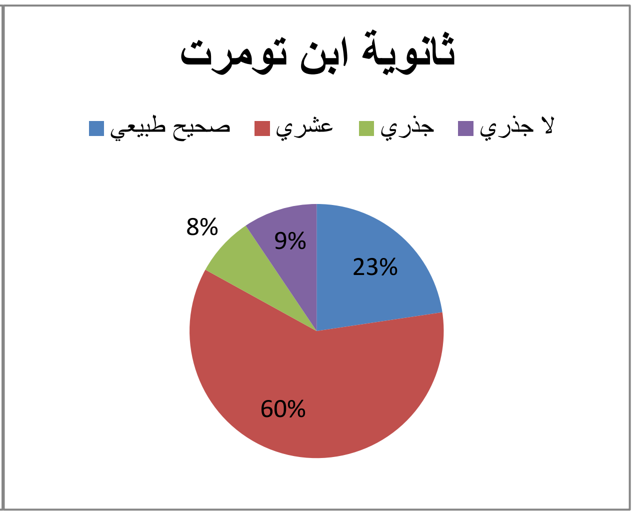
عامل المستوى لا يؤثر بشكل كبير على شيوع التمثلات الخاطئة لطبيعة π عند التلاميذ. فهي تشمل كل المستويات وبنسب كبيرة من التلاميذ.

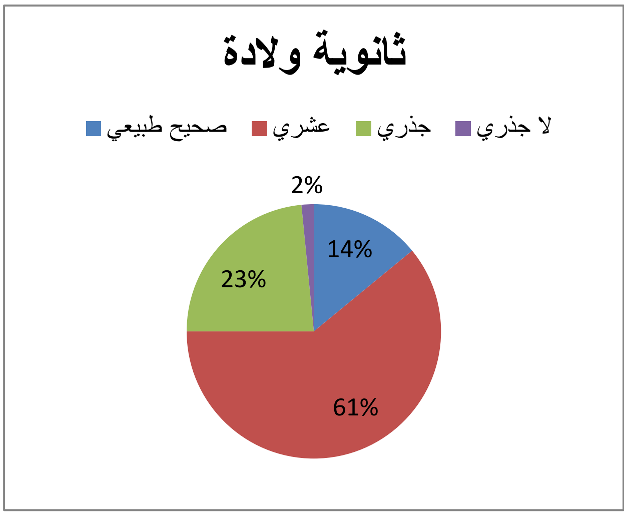
❖ عـــــــــامل المؤسسة

جـــــــــــــدول النتائج

المؤسسة	عدد التلاميذ	صحيح طبيعي		عشري		جذري		لاجذري	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
ثانوية ابن تومرت	106	24	22,64%	64	60,38%	8	7,55	10	9,43%
ثانوية ولادة	64	9	14,06%	39	60,94%	15	23,44	1	1,56%

التمثيـــــــــــــــل المبياني





قـــــــــــــــراءة المبيان

يلاحظ ارتفاع وتساوي في نسبة التلاميذ الذين يعتبرون العدد π عددا عشريا في الثانويتين معا. أما الذين يعتقدون أنه عددا صحيحا طبيعيا فيمثلون 23% في ابن تومرت و 14% في ولادة. والذين يظنونه عددا جذريا فنسبتهم تساوي 23% في ولادة و 8% في ابن تومرت. بينما نسبة التلاميذ الذين يعرفون طبيعته فلم تتعدى 9% في ابن تومرت و 2% في ولادة.

استنتـــــــــــــــاج

رغم وجود تباين في النتائج إلا أن هذا العامل لايؤثر بشكل كبير في شيوع هذه التمثلات والتصورات الخاطئة بين التلاميذ.

2- الســـــــــؤال الثاني : "

π يســـــــــــاوي:

☐ $180°$ ☐ 3,14

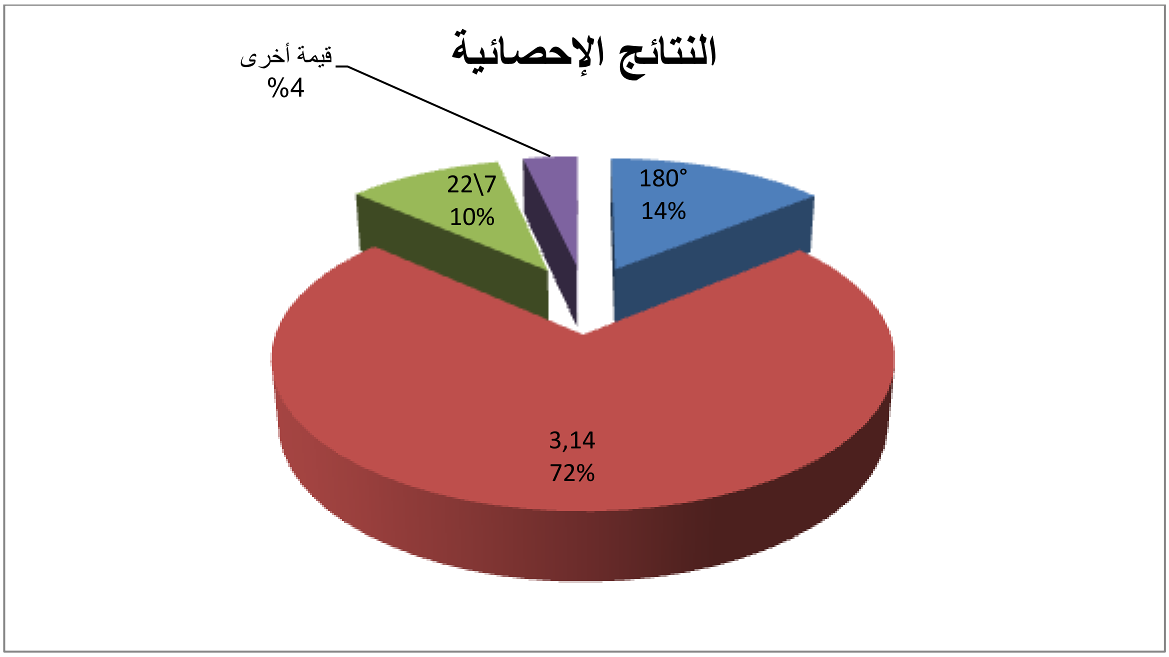
☐ $\frac{22}{7}$ ☐ قيمة أخرى "

- يتمحور حول قيمة العدد π.
- الهدف منه هو معرفة مدى شيوع التمثلات الخاطئة لدى التلاميذ حول قيمة العدد π.

أ- جـــــــــدول النتائج

عدد التلاميذ	180°		3,14		$\frac{22}{7}$		قيمة أخرى	
	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
170	24	14,12%	123	72,35%	17	10%	6	3,53%

ب- التمثيـــــــل المبياني



ج- تحليـــــــــــــل النتائج

لقد تأكد لنا من خلال قراءتنا للمبيان شيوع التمثل الخاطئ لقيمة العدد π. حيث وجدنا أن 96% من التلاميذ لا يعرفونها. فأكثر من الثلثين يعتقدون أنها تساوي 3,14.

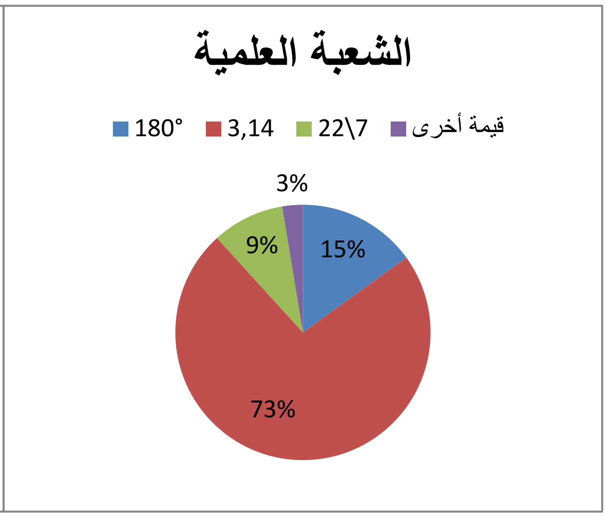
لمعرفة مدى تأثير العوامل (الشعبة، المستوى، المؤسسة أو المحيط الدرسي) على التمثلات والتصورات الخاطئة حول هذه القيمة سنقوم بتحليل النتائج وفق هذه العوامل.

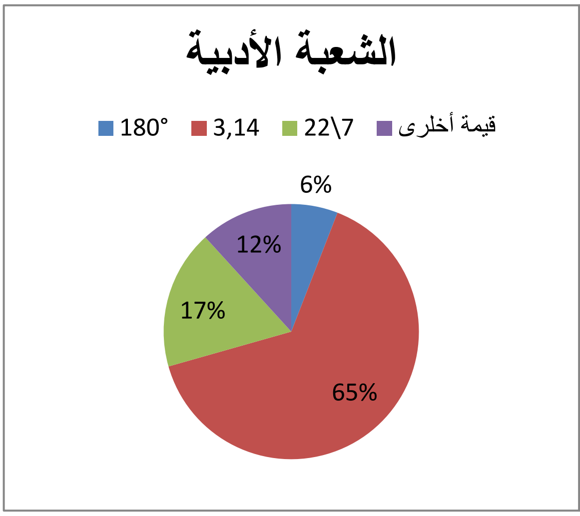
❖ عـــــــامل الشعبة

جـــــدول النتائج

الشعبة	عدد التلاميذ	180°		3,14		$\frac{22}{7}$		قيمة أخرى	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
العلمية	153	23	15,04%	112	73,20%	14	9,15%	4	2,61%
الأدبية	17	1	5,9%	11	64,70%	3	17,64%	2	11,76%

التمثيـــــل المبياني





قراءة المبيــــــــان

من خلال المبيانين أعلاه، يتبين لنا أن هناك ارتفاع في نسبة التلاميذ الذين يعطون للعدد π القيمة 3,14 في كلتا الشعبتين (65% بالنسبة للأدبيين و 73% بالنسبة للعلميين). أما بالنسبة للقيم الأخرى فنلاحظ تباين بسيط بين نسب تلاميذ الشعبتين.

استنتـــــــــــاج

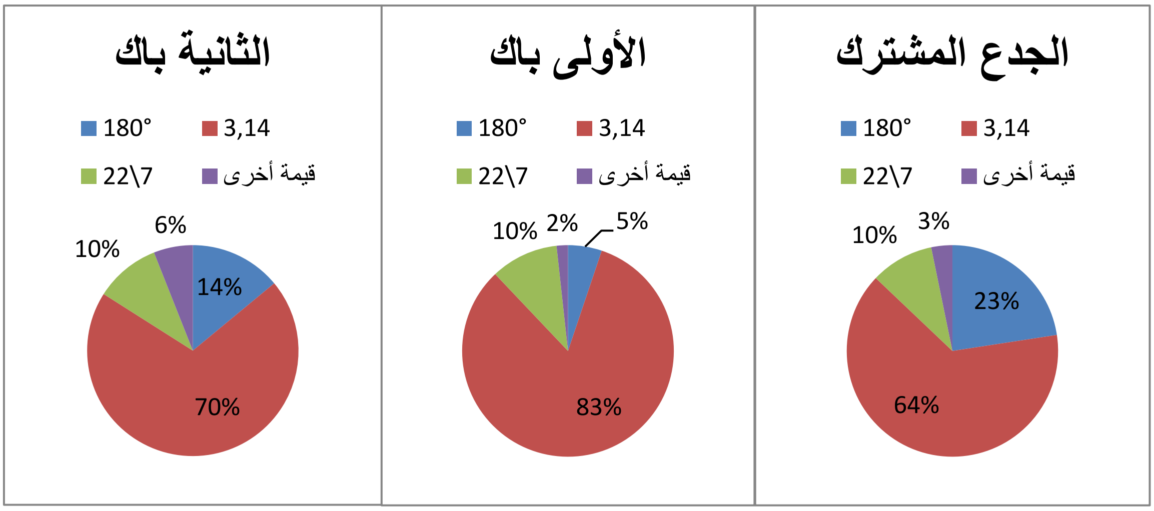
التمثل الخاطئ لقيمة العدد π لا يتأثر بعامل الشعبة. ففي كلتا الحالتين نجد أن أكثر من 65% من التلاميذ يربطون π بالعدد 3,14 .

❖ عــــــــامل المستوى الدراسي

جدول النتـــــــــائج

المستوى الدراسي	عدد التلاميذ	$180°$		3,14		$\frac{22}{7}$		قيمة أخرى	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
الجدع المشترك	62	14	22,58%	40	64,52%	6	9,68%	2	3,22%
الأولى باك	58	3	5,17%	48	82,76%	6	10,34%	1	1,73%
الثانية باك	50	7	14%	35	70%	5	10%	3	6%

التمثيل المبيـــــــــاني



قراءة المبيـــــــــان

يلاحظ ارتفاع نسبة التلاميذ الذين يعتبرون العدد π يساوي 3,14 في كل المستويات. ويأتي في المركز الثاني نسبة التلاميذ الذين يعتبرونه يساوي $180°$، في المستويين الجدع المشترك والثانية باك. بينما نسبة الذين يعرفون أنه يساوي قيمة أخرى غير المعطاة في الإختيارات لم تتعدى 6% في كل المستويات.

استنتـــــــــــــاج

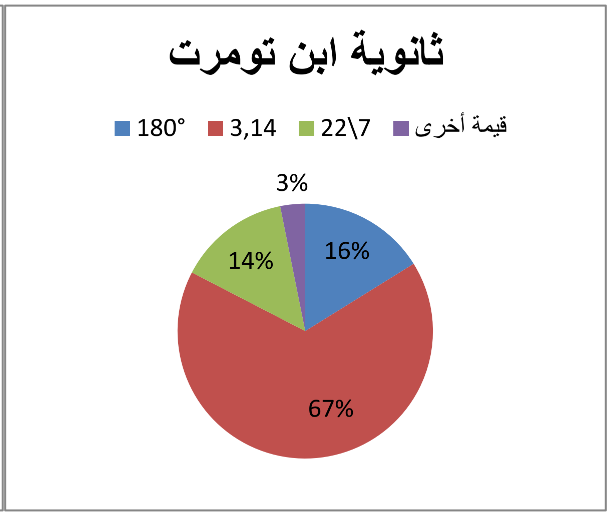
عامل المستوى لا يؤثر بشكل كبير على شيوع التمثلات الخاطئة لقيمة π عند التلاميذ. فهي تشمل كل المستويات وبنسب كبيرة من التلاميذ.

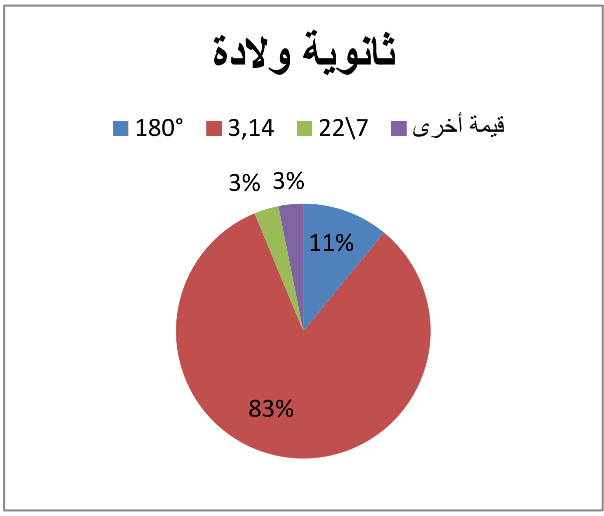
❖ عــــــــامل المؤسسة

جدول النتــــــــــــائج

المؤسسة	عدد التلاميذ	180°		3,14		$\frac{22}{7}$		قيمة أخرى	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
ثانوية ابن تومرت	106	17	16,04%	70	66,04%	15	14,15%	4	3,77%
ثانوية ولادة	64	7	10,93%	53	82,81%	2	3,13%	2	3,13%

التمثيــــــــــــل المبياني





قــــــــــــراءة المبيان

يلاحظ ارتفاع في نسبة التلاميذ الذين يعتبرون العدد π هو 3,14 في الثانويتين معا. أما الذين يعتقدون أنه يساوي 180° فيمثلون 16% في ابن تومرت و 11% في ولادة. والذين يظنونه عددا جذريا فنسبتهم تساوي 14% في ولادة و 3% في ابن تومرت. بينما نسبة التلاميذ الذين يعتبرون له قيمة أخرى فلم تتعدى 3% في كلتا الثانويتين.

استنتــــــــــــــاج

رغم وجود تباين في النتائج إلا أن هذا العامل لايؤثر بشكل كبير في شيوع هذه التمثلات والتصورات الخاطئة لقيمة العدد π بين التلاميذ، فهناك دائما نسبا كبيرة منهم لا يعرفون هذه القيمة رغم اختلاف مؤسساتهم ومحيطاتهم المدرسية. ومن هنا نستنتج أن هذا التمثل الخاطئ عام يشمل جل المدارس المغربية.

3- الســـــــــــؤال الثالث: "

من بين الأشكال التالية، ما هي تلك التي تتضمن العدد π ؟

☐ أسطوانة ☐ هرم

☐ مربع ☐ متوازي المستطيلات "

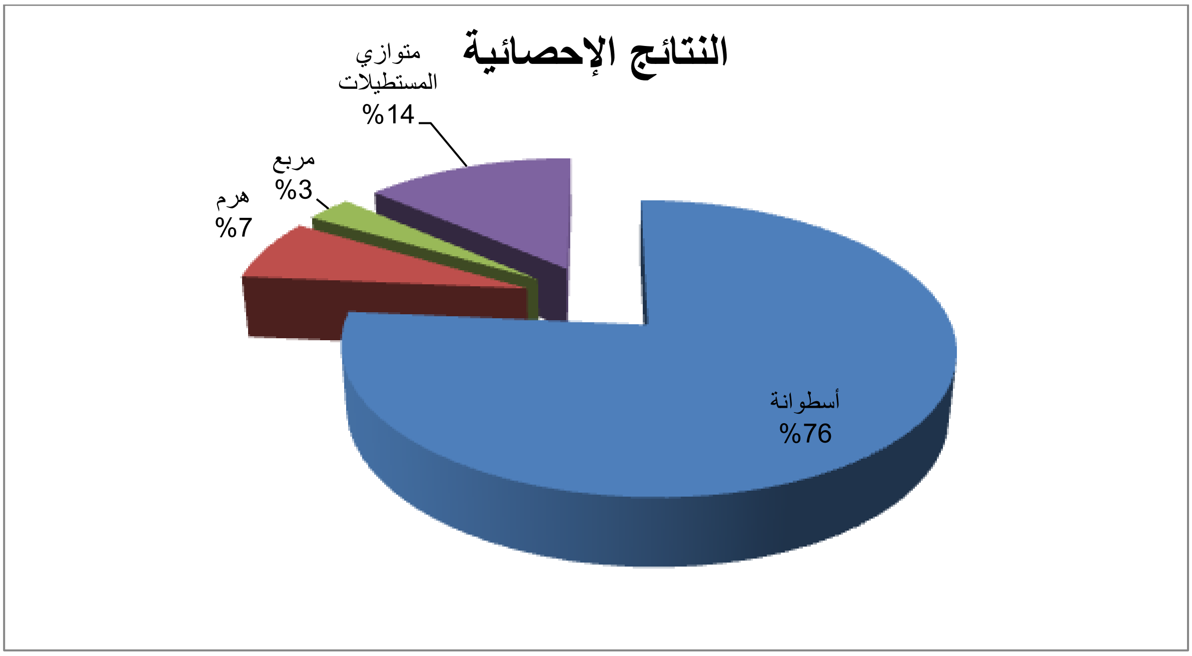
- يتمحور حول التمثيل الهندسي للعدد π .
- كان الهدف منه الإجابة على السؤال التالي: " هل التلاميذ يعرفون π هندسيا؟ "

لذلك اخترنا الأسطوانة للإجابة على هذا السؤال. وقد جاءت النتائج على الشكل الآتي:

أ- جـــــــــدول النتائج

عدد التلاميذ	أسطوانة		هرم		مربع		متوازي المستطيلات	
	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
170	130	76,47%	12	7,06%	5	2,94%	23	13,53%

ب- التمثيـــــــــل المبياني



ج- تحليـــــــــــل النتائج

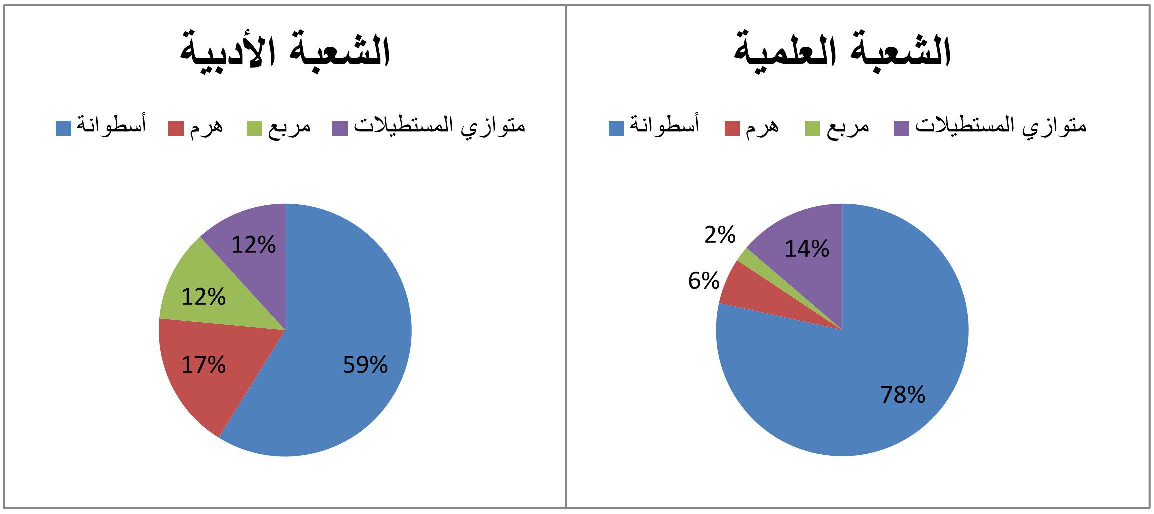
لقد تأكد لنا من خلال قراءتنا للمبيان أن أغلبية التلاميذ يعرفون أين يظهر العدد π هندسيا. فلقد وجدنا أن 76% منهم أجابو إجابة صحيحة. ولربط هذه النتائج بالعوامل (الشعبة، المستوى، المؤسسة أو المحيط الدرسي) سنقوم بتحليلها وفق هذه العوامل.

❖ عـــــــامل الشعبة

جـــــــــــــــدول النتائج

الشعبة	عدد التلاميذ	أسطوانة		هرم		مربع		متوازي المستطيلات	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
العلمية	153	120	78,43%	9	5,88%	3	1,96%	21	13,73%
الأدبية	17	10	58,83%	3	17,65%	2	11,76%	2	11,76%

التمثيـــــــــــــــل المبياني



قــــــــــــــراءة المبيان

نلاحظ أن 78% من التلاميذ العلميين يعلمون أن العدد π مرتبط بالدائرة. بينما 59% فقط من الأدبيين هم من يعرفون هذه الحقيقة. وهذا طبعا راجع إلى الاختلاف في مستوى مادة الرياضيات.

استنتـــــــــــــــاج

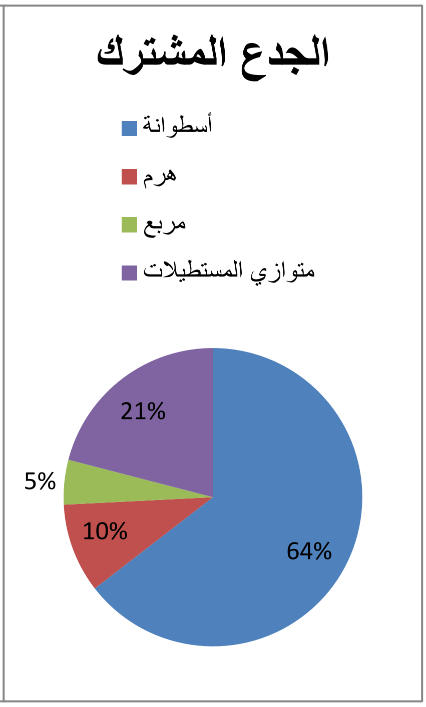
عامل المستوى لا يؤثر إلا بشكل نسبي على معرفة التلاميذ بالعدد π هندسيا حيث أن النتائج التي حصلنا عليها متقاربة.

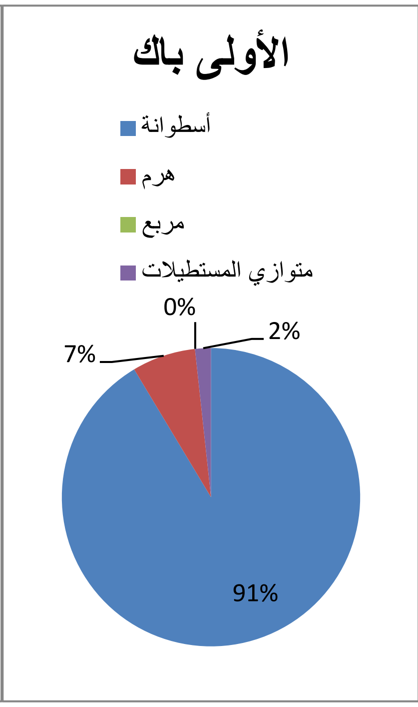
❖ عـــــــامل المستوى الدراسي

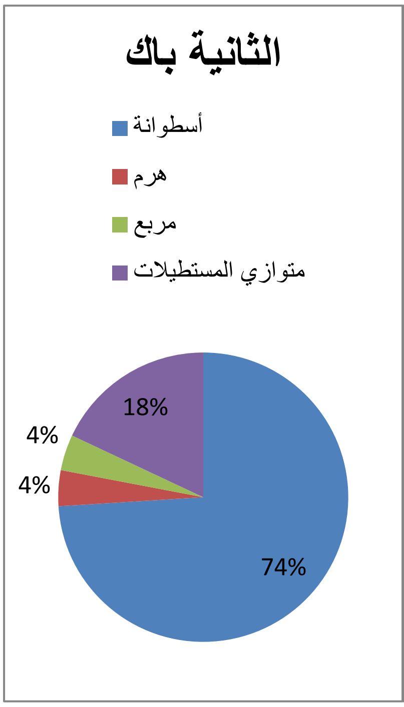
جـــــــــــــدول النتائج

المستوى الدراسي	عدد التلاميذ	أسطوانة		هرم		مربع		متوازي المستطيلات	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
الجدع المشترك	62	40	64,52%	6	9,68%	3	4,84%	13	20,96%
الأولى باك	58	53	91,38%	4	6,90%	0	0%	1	1,72%
الثانية باك	50	37	74%	2	4%	2	4%	9	18%

التمثيـــــــــــل المبياني







قـــــــــــــراءة المبيان

نلاحظ أن نسبة التلاميذ الذين يعرفون الشكل الهندسي الذي يتضمن العدد π تفوق 64% في جميع المستويات حتى أنها وصلت إلى 91% في الأولى باك. إلا أنه مازال هناك نسبة مهمة من التلاميذ يربطون π بمتوازي المستطيلات خصوصا في المستويين الجدع المشترك والثانية باك.

استنتـــــــــــاج

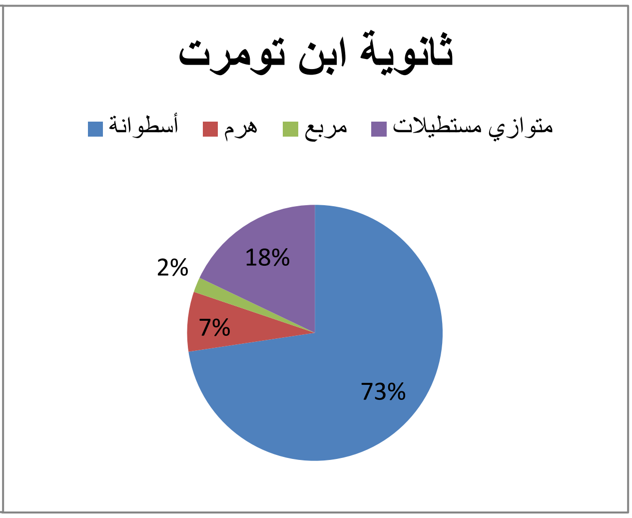
أغلبية التلاميذ في جميع المستويات يعرفون أن π مرتبط بالدائرة.

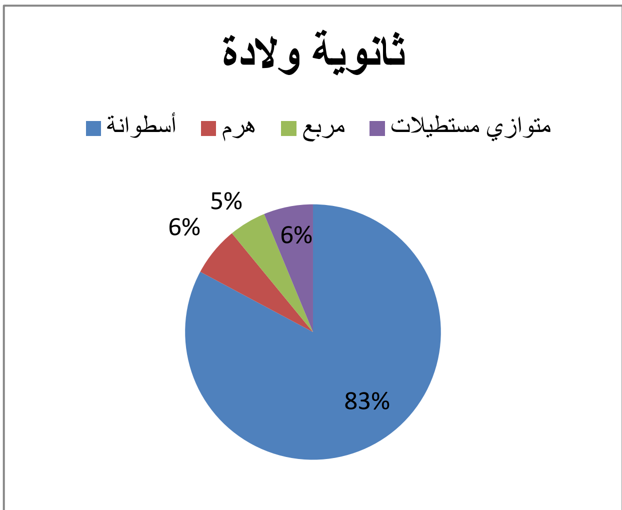
❖ عــــــــامل المؤسسة

جــــــــــــــدول النتائج

المؤسسة	عدد التلاميذ	أسطوانة		هرم		مربع		متوازي المستطيلات	
		العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
ثانوية ابن تومرت	106	77	72,64%	8	7,55%	2	1,89%	19	17,92%
ثانوية ولادة	64	53	82,81%	4	6,25%	3	4,69%	4	6,25%

التمثيـــــــــــــل المبياني





قــــــــــــراءة المبيان

نلاحظ أن كل النسب متقاربة رغم اختلاف المؤسسة التعليمية. فأغلبية تلاميذ المؤسستين يعرفون أن π مرتبط بالدائرة.

استنتـــــــــــــاج

من خلال قراءة النتائج يتبين لنا أن التلاميذ رغم اختلاف مؤسساتهم الدراسية ومحيطاتهم المدرسية يعرفون أن π مرتبط بالدائرة.

4- الســــــــــؤال الرابع :

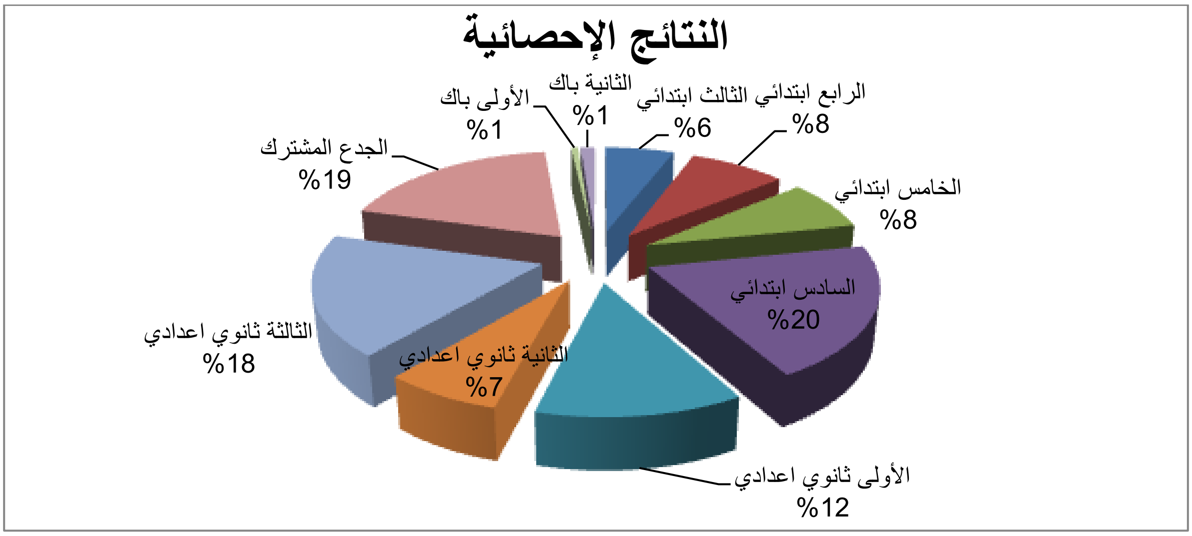
" في أي مستوى دراسي تعرفت على العدد π لأول مرة ؟ "

- عبارة عن سؤال مباشر يتمحور حول المستوى الدراسي الذي رأى فيه التلميذ العدد π.
- الهدف منه هو معرفة هل التلميذ تعرف على π في الوقت المطلوب.

أ- جـــــــــدول النتائج

المستوى الـــــــــــــــدراسي	العـــــــدد	النسبــــــــة المئوية
الثالثـــــة ابتدائي	10	5,88%
الرابعـــة ابتدائي	14	8,24%
الخامسة ابتدائي	13	7,65%
السادسة ابتدائي	34	20%
الأولى ثانوي اعدادي	21	12,35%
الثانية ثانوي اعدادي	12	7,06%
الثالثة ثانوي اعدادي	31	18,23%
الجــــذع المشترك	32	18,82%
الأولى بـــــاكالوريا	1	0,59%
الثانية بـــــاكالوريا	2	1,18%

ب- التمثيل المبياني



ج- تحليـــــــل النتائج

من خلال المبيان يتبين لنا أن 8% من التلاميذ فقط من تعرفوا على π في مستوى الخامسة ابتدائي حيث ظهر لأول مرة في المقررات الدراسية، بينما 20% لم يعرفوه حتى السنة الموالية. وهناك أيضا نسبة مهمة لم تتعرف عليه إلى بعد مرور أربع أو خمس سنوات . أما نسبة 14% فقد نسوه وظنوا أنهم رأوه في سنوات سابقة للسنة الخامسة ابتدائي.

III. خلاصـــــــــــــــــة الفصل

بعد أن قمنا بدراسة تحليلية لنتائج الإستمارات مع الأخد بعين الإعتبار مجموعة من العوامل التي نراها مؤثرة بشكل مباشر أو غير مباشر في هذه التصورات، توصلنا إلى مجموعة من النتائج التي سنلخصها في النقط التالية :

1- تأكد لدينا شيوع التمثلات والتصورات الخاطئة لدى التلاميذ لقيمة وطبيعة العدد π فهناك نسب كبيرة جدا من التلاميد يعتقدون أنه عددا عشريا ويربطونه ب $3,14$.

2- شيوع التمثلات والتصورات الخاطئة للعدد π لدى التلاميذ لايتأثر بالعوامل : الشعبة، المستوى الدراسي، المحيط المدرسي. فهي ظاهرة عامة تشمل جل المدارس المغربية كما تعاني منها أغلب الفئات من كل المستويات الدراسية ومن مختلف الشعب.

3- التلاميذ يعرفون أن العدد π مرتبط بالدائرة، وهذا راجع من طبيعة الحال إلى الطريقة التي قدم بها في المقررات الدراسية حيث يرد فقط في صيغ لحساب المساحات والحجوم.

4- أغلبية التلاميذ لم يتعرفوا على العدد π في السنة الخامسة ابتدائي حيث ظهوره الأول في المقررات الدراسية. هذا ما سيجعلنا نؤكد أن شيوع هذه التصورات والتمثلات الخاطئة مرتبط بعوامل أخرى كعدم قيام بعض الأساتذة بواجبهم المهني، الغياب، ضعف مستوى التلاميذ في مادة الرياضيات...

الجزء الثالث :

- خلاصة البحـــــــــــث
- حلول ومقترحـــــــــات
- الملحقـــــــــــــات
- لائحة المراجـــــــــع

I. خلاصـة البحـــــــــــث

من خلال الجانب التطبيقي نستطيع أن نؤكد أن شيوع التصورات الخاطئة للعدد π داخل المؤسسات التعليمية مرتبط بعوامل كثيرة، ديداكتيكية منها أو تعليمية. ومع ذلك قدمنا للقارئ الكريم صورة واقعية لهذا العدد داخل المنظومة التربوية المغربية. وكذالك الصورة التي يحملها تلاميذنا في أذهانهم حول هذا العدد.

ولقد تبين لنا عند تفريغ الإستمارات أن أغلبية التلاميذ لايعرفون قيمة وطبيعة العدد π لكنهم يعلمون أنه مرتبط بالدائرة. ومن خلال دراستنا للمقررات تأكد لدينا أن السبب الرئيسي في شيوع هذه التصورات الخاطئة يكمن في الطريقة التي قدم بها المفهوم داخلها (أي المقررات)، حيث أنه لم تعطى له أدنى أهميه رغم مكانته الكبيرة التي يحظى بها في الرياضيات. دون أن ننسى بعض العوامل التي يمكنها أن تتدخل بكيفية غير مباشرة كالغياب و ضعف المستوى في مادة الرياضيات وصعوبة المفهوم إلى غير ذلك.

وختاما نقول أنه إن تمت هناك حل فيجب أن يبدأ في مراجعة المقررات الدراسية ويعيد النظر فيها حتى يتسنى للتلميذ والأستاذ أن يعرف المفهوم بالشكل الصحيح دون أن يواجه أية صعوبة في ذلك.

II. حلـول ومقترحـــــــــــــات

1- إعادة النظر في الكيفية التي قدم بها العدد π في المقررات الدراسية خصوصا مقررات السلك الثانوي.
2- اعتباره من بين الأهداف التربوية وادماجه في التوجيهات التربوي.
3- التركيز في مستوى معين على تصنيف الأعداد إلى مجموعات، مع الإشارة باستمرار ومن خلال وضعيات مختلفة أن العدد π هو عدد لا ينتمي إلى $\mathbb{Q}$ وبالتالي $\frac{22}{7}$ ؛ $3,14$ ؛ ... تبقى كلها قيم مقربة له.
4- توظيف قيما تقريبية أخرى ل π مثلا في درس التقريب والتأطير.
5- الإشارة إلى أن العلاقة $\pi\ rad = 180°$ لا تعني أن $\pi = 180°$.
6- إدماج بعض المسائل والفقرات التي تتضمنه في بعض الدروس.

وفي الأخير سنقترح بعض المسائل التي يمكن ادماجها في المقررات الدراسية :

الأعداد الكسرية

يمكن أن ندرج بعض الأنشطة في درس الأعداد الكسرية من أجل اغناء الرصيد المعرفي للتلميذ ببعض القيم التقريبية للعدد π.

مثال:

تلعب الأعداد الكسرية دورا هاما في إيجاد تقريبات لبعض الثوابت الرياضية. فمن خلال النشاط أسفله سنتطرق الى بعض تقريبات العدد π.

1. مستعملا الآلة الحاسبة إعط قيمة مقربة للعدد π.
2. بسط العدد $3+\frac{1}{7}$، ثم قارنه مع القيمة المحصل عليها بالآلة الحاسبة.
   ماذا تستنتج ؟
3. بسط العدد $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}$، ثم قارنه مع القيمة المحصل عليها بالآلة الحاسبة.
   ماذا تستنتج ؟

4. بسط العدد $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}}$، ثم قارنه مع القيمة المحصل عليها بالآلة الحاسبة.

ماذا تستنتج؟

الحساب التكاملي:

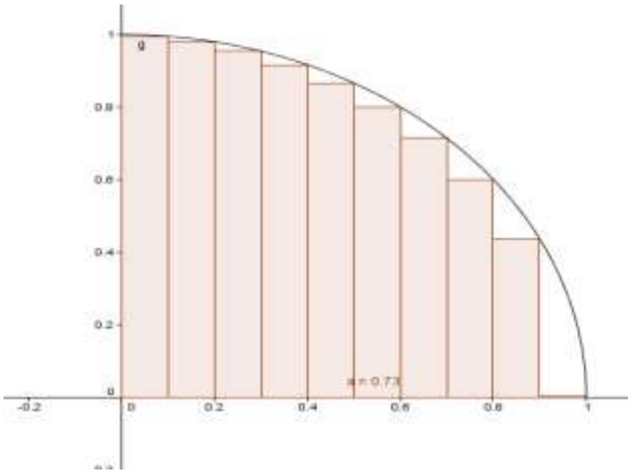
يعتبر الحساب التكاملي من بين الدروس التي تسهل حساب مساحات وحجوم بعض المجسمات، كما يساعد أيضا في إيجاد تقريبات لبعض الثوابت الرياضية. وفي هذا الإطار نقدم هذا النشاط كتطبيق للحساب التكاملي لتحديد قيم تقريبية للعدد π .

مثال

ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما و (C) التمثيل المبياني للدالة $f: x\mapsto \sqrt{1-x^2}$ على المجال $[0,1]$.

لحساب مساحة الحيز D المعرف بما يلي :

$$D=\{M(x,y)/\ \ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le f(x)\ \}$$



نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ الى n قطعة طول كل واحدة منها $\frac{1}{n}$. نرمز ب A_n للمساحة الكلية للمستطيلات المحاطة (أنظر الشكل جانبه) .

1- لتكن $M(a,b)$ نقطة من (C) أحسب b بدلالة a.

ثم استنتج مساحات المستطيلات المحاطة ب (C).

2- بين أن :

$$A_n=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

3- وأستنتج أن

$$\lim_{n\to+\infty} A_n=\pi$$

4- نضع $n=10$ إعط تقريبا للعدد π .

في الإحصاء:

يمكن توظيف العدد π في هذا الدرس بإدماج قيم تقريبية له في التمارين على شكل متسلسلات إحصائية تقدم للتلاميد كمعطى للدراسة، مع إضافة بعض المعلومات الخاصة به وذلك لإغناء الرصيد المعرفي للتلميذ.

مثال: " π ليس عددا عشريا أي أنه يتركب من ما لانهاية من الأرقام بعد الفاصلة. وكان البحث عن أكبر عدد من الأرقام بعد الفاصلة للعدد π من المسائل المشهورة في تاريخ الرياضيات.

ففي سنة 1450م، تمكن العالم الإسلامي غياث الدين الكاشي من ايجاد تقريب ل π ب 14 رقما بعد الفاصلة حيث وجد أن $\pi \simeq 3{,}14159265358979$.

نعتبر المتسلسلة الإحصائية المكونة من أعداد π أعلاه."

ثم نقوم بطرح الأسئلة الخاصة بدرس الإحصاء.

في التعداد والإحتمالات:

يمكن توظيف العدد π في درس الإحتمالات أيضا عن طريق إستعمال قيمه التقريبية بعدد ما من الأرقام بعد الفاصلة في معطيات التمرين، ثم تطرح أسئلة خاصة بالدرس.

مثال: نأخد معطيات المثال السابق.ثم نقوم بالتجربة التالية:

" نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاثة أرقام من القيمة التقريبية ل π "

في الهندسة:

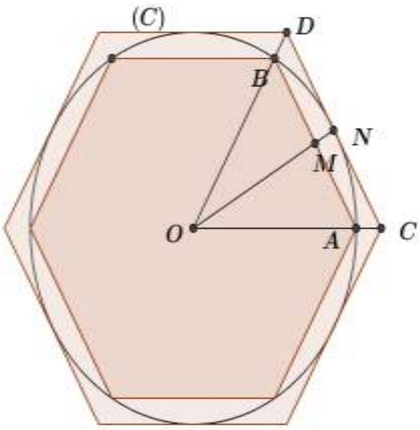
أن يطلب من التلميذ رسم قوس دائري طوله $k\pi$ مع k عدد يمكن تغييره حسب المستوى الدراسي الذي ستدرج فيه هذه المسألة مع الإشارة إلى أن $3{,}14$ مجرد قيمة تقريبية ل π.

التقريب والتأطير:

- يجب إعادة صياغة الأنشطة الواردة في مقررات السنة الخامسة والسادسة ابتدائي مع ادخال بعض التعديلات البسيطة وإدماجها في دروس التي تتناول التقريب والتأطير. كما يجب الإشارة باستمرار أن النتائج المحصل عليها مجرد قيم تقريبية ل π.
- يجب ادخال طريقة أرخميدس في المقررات الدراسية وتعليمها للتلاميذ، كطريقة كلاسيكسة لتأطير العدد π، مع احترام التدرج في عدد أضاع المضلعات المحيطة والمحاطة بالدائرة حسب المستوى الدراسي. وفي هذا الإطار نقترح مسألة يمكن ادراجها في مقررات الجذوع المشتركة العلمية في درس الترتيب أو الحساب المثلثي:

مثال:

في سنة 250 قبل الميلاد تمكن الرياضي اليوناني أرخميدس من إعطاء تقريبا للعدد π وذلك بإحاطة دائرة شعاعها 1 بمضلعات منتظمة من الداخل و الخارج، عدد أضلاعها 6، 12، 24 ثم 96. ففي هذا النشاط سنقوم نحن أيضا بتأطير العدد π باستعمال طريقة أرخميدس.



نعتبر دائرة (C) ومضلعين أحدهما محيط والآخر محاط بها، كما في الشكل جانبه.

لتكن $[AB]$ ($[CD]$) أحد أضلاع المضلع المحاط (المحيط) ب (C) و M و N منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي.

1. أحسب قياس الزاوية AOB ثم استنتج قياس الزاوية AOM .
2. أحسب طول كل من الضلعين $[CD]$ و $[AB]$ ثم استنتج محيط المضلعين المحيط والمحاط ب (C).
3. إعط تأطيرا للعدد π.

وختاما نرجو من الله العلي القدير أن نكون قد أسهمنا ولو بقسط بسيط في وضع حل لهذه المشكلة التربوية التي جابت جل مدارسنا.

III. الملحقـــــــــــــــــــــات

1- الاستمـــــــــــــــــــــــــــــــــــارة

2- Les méthodes de Monte-Carlo

3- L’aiguille de Buffon

4- Une poème pour apprendre π

5- Dix mille décimales de π

1-الاستمارة الموجهة إلى التلاميذ و التلميذات

هذه مجموعة من الأسئلة الغاية منها أن تستغل لإجراء بحث تربوي، فالمرجو منك أخي التلميذ أختي التلميذة الإجابة بكل نزاهة وصراحة وشكرا .

- *المستوى الدراسي :*
- *الشعبـــــــــــة :*
- *المؤسســــــــة :*

(ضع علامة × على جوابك)

1) π عـــــدد :

☐ صحيح طبيعي ☐ عشـــري

☐ جـــــذري ☐ لا جـذري

2) π يســاوي :

☐ $180°$ ☐ $3,14$

☐ $\frac{22}{7}$ ☐ قيمة أخرى

3) من بين الأشكال التالية، ما هي تلك التي تتضمن العدد π :

☐ أسطـــوانة ☐ هـــــــــــــرم

☐ مربـــــع ☐ متوازي المستطيلات

4) في أي مستوى دراسي تعرفت على العدد π لأول مرة :

....

2- Les méthodes de Monte-Carlo

La méthode des fléchettes s'adapte sous la forme d'un programme utilisant des tirages au sort faits par l'ordinateur. Le principe du programme est le suivant: au moyen de la fonction *random* du langage de programmation, l'ordinateur choisit au hasard deux nombres x et y compris entre les entiers $-m$ et $+m$ (pour un m assez grand, par exemple $1\ 000\ 000$). Il cherche ensuite si $\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{m}\right)^2$ est inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire si le point de coordonnées (x, y) est dans un cercle de rayon m. Il répète ces opérations un grand nombre de fois. La proportion de couples d'entiers satisfaisant l'inégalité s'approche progressivement de $\frac{\pi}{4}$, ce qui donne une mesure de π. Cette méthode présente plusieurs défauts:

- même en effectuant un très grand nombre de calculs, la proportion ne converge pas vraiment vers π, mais vers une valeur approchée de π (pour qu'elle converge vraiment vers π, il faudrait augmenter peu à peu le nombre m).
- elle s'appuie sur la fonction *random* du langage de programmation; or celle-ci ne n'est jamais une vraie fonction aléatoire.
- elle converge très lentement.

La même méthode avec des dés pour faire les tirages au hasard et en prenant soin d'augmenter m ne reposerait ni sur l'hypothèse que notre espace est euclidien, ni sur l'hypothèse (toujours fausse) que le générateur aléatoire de l'ordinateur est bon. Elle exigerait cependant que les dés soient parfaits et que le mélange des dés avant les lancers soit également parfait.

Toutes ces méthodes, même après qu'on les a rendues indépendantes des générateurs aléatoires ou-de l'hypothèse que l'espace est euclidien, conservent un grave défaut : elles convergent encore plus lentement que la définition arithmétique de π donnée précédemment.

On ne saurait les recommander!

3- L'aiguille de Buffon

Georges Louis Leclerc, comte de Buffon (1707–1788) est d'abord connu comme l'auteur de l'*Histoire naturelle* et l'organisateur du Jardin des Plantes de Paris. Son œuvre imposante comprend aussi des écrits mathématiques. Dans son *Mémoire sur le jeu de franc carreau*, présenté à l'Académie des Sciences les 14 et 17 mars 1736, on peut trouver le célèbre problème de l'aiguille.

Sur un parquet dont les rainures sont distantes de a, on laisse tomber une aiguille de longueur $l < a$. On parie avant le lancer qu'elle va couper l'une des rainures.

Soit N la variable aléatoire égale au nombre d'intersections de l'aiguille avec les rainures. Comme $l < a$, on a N prend la valeur 0 ou 1. L'espérance de N est donc

$$E(N) = 0 \times P(N = 0) + 1 \times P(N = 1) = P(N = 1).$$

Buffon a montré que

$$E(N) = \frac{2l}{\pi a}.$$

D'après la loi des grands nombres, si on répète un grand nombre de fois ce lancer d'aiguille et que l'on note $\overline{N}$ la moyenne des valeurs observées pour N, on a

$$\overline{N} \simeq E(N) = \frac{2l}{\pi a}.$$

d'où

$$\pi \simeq \frac{2l}{\overline{N} a}.$$

Ceci fournit une méthode expérimentale pour obtenir une valeur approchée du nombre π.

4- Une poème pour apprendre π

Ce poème donne 31 décimales de π . Les deux chiffres suivants sont 5 et 0. Comment faire pour coder «0» ? Dans la variante ci-dessous, on a convenu que les mots de dix lettres représentent le chiffre 0.

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!

3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Glorieux Archimède, artiste, ingénieur,

8 9 7 9

Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,

3 2 3 8 4 6 2 6

Soit ton nom conservé par de savants grimoires!

4 3 3 8 3 2 7 9

Jadis, mystérieux, un problème bloquait

5 0 2 8 8

Tout l' admirable procédé, l' œuvre grandiose

4 1 9 7 1 6 9

Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.

3 9 9 3 7 5

O quadrature! vieux tourment du Philosophe!

1 0 5 8 2 0

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez

9 7 4 9 4 4

Défié Pythagore et ses imitateurs.

5 9 2 3 0

Comment intégrer l' espace plan circulaire ?

7 8 1 6 4 0

Former un triangle auquel il équivaudra ?

6 2 8 6 2 0

Nouvelle invention: Archimède inscrira

8 9 9 8

Dedans un hexagone; appréciera son aire

6 2 8 0 3 4

Fonction du rayon. Pas trop ne s’ y tiendra :

8 2 5 3 4 2 1 1 7

Dédoublera chaque élément antérieur ;

0 6 7 9

Toujours de l' orbe calculée approchera ;

8 2 1 4 8 0

Définira limite; enfin, l' arc, le limiteur

8 6 5 1 3 2 8

De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle!

2 3 0 6 6 4 7

Professeur, enseignez son problème avec zèle !...

0 9 3 8 4 4

5- Dix mille décimales de π

3,

1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078
1640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058
2231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964
4288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486
1045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282
9254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433
0572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673
5188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522
4737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000
5681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301
4654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362
9774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024
4594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865
8753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378
7593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198938095
2572010654858632788659361533818279682303019520353018529689957736225
9941389124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785
5889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012858361
6035637076601047101819429555961989467678374494482553797747268471040
4753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803
8150193511253382430035587640247496473263914199272604269922796782354
7816360093417216412199245863150302861829745557067498385054945885869
2699569092721079750930295532116534498720275596023648066549911988183
4797753566369807426542527862551818417574672890977772793800081647060
0161452491921732172147723501414419735685481613611573525521334757418
4946843852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427
2550254256887671790494601653466804988627232791786085784383827967976
6814541009538837863609506800642251252051173929848960841284886269456
0424196528502221066118630674427862203919494504712371378696095636437
1917287467764657573962413890865832645995813390478027590099465764078
9512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026
4013639443745530506820349625245174939965143142980919065925093722169
6461515709858387410597885959772975498930161753928468138268683868942
7741559918559252459539594310499725246808459872736446958486538367362
2262609912460805124388439045124413654976278079771569143599770012961
6089441694868555848406353422072225828488648158456028506016842739452
2674676788952521385225499546667278239864565961163548862305774564980
3559363456817432411251507606947945109659609402522887971089314566913
6867228748940560101503308617928680920874760917824938589009714909675
9852613655497818931297848216829989487226588048575640142704775551323

7964145152374623436454285844479526586782105114135473573952311342716
6102135969536231442952484937187110145765403590279934403742007310578
5390621983874478084784896833214457138687519435064302184531910484810
0537061468067491927819119793995206141966342875444064374512371819217
9998391015919561814675142691239748940907186494231961567945208095146
5502252316038819301420937621378559566389377870830390697920773467221
8256259966150142150306803844773454920260541466592520149744285073251
8666002132434088190710486331734649651453905796268561005508106658796
9981635747363840525714591028970641401109712062804390397595156771577
0042033786993600723055876317635942187312514712053292819182618612586
7321579198414848829164470609575270695722091756711672291098169091528
0173506712748583222871835209353965725121083579151369882091444210067
5103346711031412671113699086585163983150197016515116851714376576183
5155650884909989859982387345528331635507647918535893226185489632132
9330898570642046752590709154814165498594616371802709819943099244889
5757128289059232332609729971208443357326548938239119325974636673058
3604142813883032038249037589852437441702913276561809377344403070746
9211201913020330380197621101100449293215160842444859637669838952286
8478312355265821314495768572624334418930396864262434107732269780280
7318915441101044682325271620105265227211166039666557309254711055785
3763466820653109896526918620564769312570586356620185581007293606598
7648611791045334885034611365768675324944166803962657978771855608455
2965412665408530614344431858676975145661406800700237877659134401712
7494704205622305389945613140711270004078547332699390814546646458807
9727082668306343285878569830523580893306575740679545716377525420211
4955761581400250126228594130216471550979259230990796547376125517656
7513575178296664547791745011299614890304639947132962107340437518957
3596145890193897131117904297828564750320319869151402870808599048010
9412147221317947647772622414254854540332157185306142288137585043063
3217518297986622371721591607716692547487389866549494501146540628433
6639379003976926567214638530673609657120918076383271664162748888007
8692560290228472104031721186082041900042296617119637792133757511495
9501566049631862947265473642523081770367515906735023507283540567040
3867435136222247715891504953098444893330963408780769325993978054193
4144737744184263129860809988868741326047215695162396586457302163159
8193195167353812974167729478672422924654366800980676928238280689964
0048243540370141631496589794092432378969070697794223625082216889573
8379862300159377647165122893578601588161755782973523344604281512627
2037343146531977774160319906655418763979293344195215413418994854447
3456738316249934191318148092777710386387734317720754565453220777092
1201905166096280490926360197598828161332316663652861932668633606273
5676303544776280350450777235547105859548702790814356240145171806246
4362679456127531813407833033625423278394497538243720583531147711992
6063813346776879695970309833913077109870408591337464144282277263465

9470474587847787201927715280731767907707157213444730605700733492436
9311383504931631284042512192565179806941135280131470130478164378851
8529092854520116583934196562134914341595625865865570552690496520985
8033850722426482939728584783163057777560688876446248246857926039535
2773480304802900587607582510474709164396136267604492562742042083208
5661190625454337213153595845068772460290161876679524061634252257719
5429162991930645537799140373404328752628889639958794757291746426357
4552540790914513571113694109119393251910760208252026187985318877058
4297259167781314969900901921169717372784768472686084900337702424291
6513005005168323364350389517029893922334517220138128069650117844087
4519601212285993716231301711444846409038906449544400619869075485160
2632750529834918740786680881833851022833450850486082503930213321971
5518430635455007668282949304137765527939751754613953984683393638304
7461199665385815384205685338621867252334028308711232827892125077126
2946322956398989893582116745627010218356462201349671518819097303811
9800497340723961036854066431939509790190699639552453005450580685501
9567302292191393391856803449039820595510022635353619204199474553859
3810234395544959778377902374216172711172364343543947822181852862408
5140066604433258885698670543154706965747458550332323342107301545940
5165537906866273337995851156257843229882737231989875714159578111963
5833005940873068121602876496286744604774649159950549737425626901049
0377819868359381465741268049256487985561453723478673303904688383436
3465537949864192705638729317487233208376011230299113679386270894387
9936201629515413371424892830722012690147546684765357616477379467520
0490757155527819653621323926406160136358155907422020203187277605277
2190055614842555187925303435139844253223415762336106425063904975008
6562710953591946589751413103482276930624743536325691607815478181152
8436679570611086153315044521274739245449454236828860613408414863776
7009612071512491404302725386076482363414334623518975766452164137679
6903149501910857598442391986291642193994907236234646844117394032659
1840443780513338945257423995082965912285085558215725031071257012668
3024029295252201187267675622041542051618416348475651699981161410100
2996078386909291603028840026910414079288621507842451670908700069928
2120660418371806535567252532567532861291042487761825829765157959847
0356222629348600341587229805349896502262917487882027342092222453398
5626476691490556284250391275771028402799806636582548892648802545661
0172967026640765590429099456815065265305371829412703369313785178609
0407086671149655834343476933857817113864558736781230145876871266034
8913909562009939361031029161615288138437909904231747336394804575931
4931405297634757481193567091101377517210080315590248530906692037671
9220332290943346768514221447737939375170344366199104033751117354719
1855046449026365512816228824462575916333039107225383742182140883508
6573917715096828874782656995995744906617583441375223970968340800535
5984917541738188399944697486762655165827658483588453142775687900290

9517028352971634456212964043523117600665101241200659755851276178583
8292041974844236080071930457618932349229279650198751872127267507981
2554709589045563579212210333466974992356302549478024901141952123828
1530911407907386025152274299581807247162591668545133312394804947079
1191532673430282441860414263639548000448002670496248201792896476697
5831832713142517029692348896276684403232609275249603579964692565049
3681836090032380929345958897069536534940603402166544375589004563288
2250545255640564482465151875471196218443965825337543885690941130315
0952617937800297412076651479394259029896959469955657612186561967337
8623625612521632086286922210327488921865436480229678070576561514463
2046927906821207388377814233562823608963208068222468012248261177185
8963814091839036736722208883215137556003727983940041529700287830766
7094447456013455641725437090697939612257142989467154357846878861444
5812314593571984922528471605049221242470141214780573455105008019086
9960330276347870810817545011930714122339086639383395294257869050764
3100638351983438934159613185434754649556978103829309716465143840700
7073604112373599843452251610507027056235266012764848308407611830130
5279320542746286540360367453286510570658748822569815793678976697422
0575059683440869735020141020672358502007245225632651341055924019027
4216248439140359989535394590944070469120914093870012645600162374288
0210927645793106579229552498872758461012648369998922569596881592056
00101655256375678

IV. لائحة المراجــــــــــــــع

1- باللغة الفرنسية :

[1] PIERRE EYMARD ET JEAN-PIERRE Lafon , Autour du nombre π , IRMANN juin 2000 .

[2] JEAN-PAUL DELAHAYE , Le fascinant nombre π , I.M.E , 1998.

2- باللغة العربية:

[3] سلسلة عالم المعرفة، العدد 251، عنوان الكتاب: "العدد من الحضارات القديمة حتى عصر الكمبيوتر"، تأليف: جون ماكليش، ترجمة: د. خضر الأحمد، د. موفق دعبول، مراجعة: د. عطية عاشور.

3- لائحة المقررات المعتمدة في الدراسة:

- النجاح في الرياضيات، السنة الخامسة من التعليم الابتدائي، مطبعة النجاح الجديدة، الدار البيضاء، طبعة 1434-2013.
- الجديد في الرياضيات، السنة السادسة من التعليم الابتدائي، دار النشر المعرفة، الرباط، طبعة 2011.
- المسار في الرياضيات، السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، منشورات النصر- مكتبة الأمة، الدار البيضاء، دا ر التجديد، الرباط، الطبعة الأولى 2005/2004.
- واحة الرياضيات، السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، لشركة النشر والتوزيع المدارس، البيضاء، طبعة 2011.
- في رحاب الرياضيات، الجذوع المشتركة للتعليم الثانوي التأهيلي (جذع العلوم وجذع التكنولوجيا)، الدار العالمة للكتاب، مكتبة السلام الجديدة، البيضاء، طبعة 2013.
- النجاح في الرياضيات، الجذوع المشتركة للتعليم الثانوي التأهيلي (جذع العلوم وجذع التكنولوجيا)، الدار العالمة للكتاب، مطبعة النجاح الجديدة، البيضاء، طبعة 2011.

♦ الجيد في الرياضيات، السنة الأولى من سلك البكالوريا،مسالك(العلوم التجريبية و التكنولوجيات الكهربائية و الميكانيكية)، المكتبة الوراقة الوطنية، الطبعة 2006.

♦ في رحاب الرياضيات، السنة الأولى من سلك البكالوريا، مسالك(العلوم التجريبية و التكنولوجيات الكهربائية و الميكانيكية)، الدار العالمية للكتاب، مكتبة السلام الجديدة، الطبعة 2006 .

♦ في رحاب الرياضيات، السنة الثانية من سلك البكالوريا،شعبة العلوم التجريبية مسالك (علوم الحياة و الأرض، العلوم الفيزيائية، العلوم الزراعية) شعبة العلوم و التكنولوجيات الصناعية مسالك (العلوم و التكنولوجيات الكهربائية و الميكانيكية)، الدار العالمية للكتاب، مكتبة السلام الجديدة، الطبعة 2006 .

4- لائحة مواقع الأنترنيت:

http://fr.wikipedia.org/wiki/Pi

http://trucsmaths.free.fr/Pi.htm

http://www.pi314.net

http://www.nombrepi.com

http://mapage.noos.fr/echolalie/l127.htm

http://www.gecif.net/articles/mathematiques/pi/pi_decimales.html