

الاشتقاق و تطبيقاته

ع رياضيات الدرس 1 الدورة الثانية 12 ساعة	القدرات المنتطرة $x_0 \cdot$
ع تجريبية الدرس 3 الدورة الثانية 10 ساعات	

1- الاشتقاق في نقطة أ/نشاط

بينت تجربة الفيزياء هند السقوط الحر لجسم بدن سرعة بدئية أي $v_0 = 0$ في اللحظة $t = 0$ تكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالدالة الزمنية $d = f(t) = 5t^2$ حيث t هي المدة بالثانية و $d = f(t)$ المسافة بالمتر

1- بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين t و $t+h$ حيث $h \neq 0$ و $t+h > 0$ هي $10t+5h$
 2- نضع $t = 0,5s$

أ/ أملئ الجدول التالي

0,01	0,001	0,0001	-0,0001	-0,001	-0,01	h
						$t + h$
						السرعة المتوسطة بين t و $t + h$

ب/ باستعمال الجدول تضمن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول h الى 0

ج/ أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ ثم قارنها مع نتيجة ب

العدد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ يسمى السرعة اللحظية للجسم عند اللحظة $t = 0,5s$

و يسمى أيضا العدد المشتق للدالة f في النقطة $t_0 = 0,5$

نكتب في هذه الحالة $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h} = f'(0,5)$

ب- تعریف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي l حيث $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$ نرمز لها.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0 ونرمز له بـ $f'(x_0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{نکته}$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ملاحظة:}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

مثال: نعتبر $f(x) = x^2 + 2x$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 4$$

إذن f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1) = 4$

(ج) الدالة التالفية المماسية لدالة

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{نضع} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{لدينا}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad / \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

أي أنه بجوار x_0 لدينا $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

الدالة $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التالفية المماسية لدالة f في النقطة x_0

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن الدالة التالفية المماسية لدالة f في النقطة x_0

هي الدالة $g : x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

تمرين نعتبر $f(x) = \sqrt{x}$

(1) حدد الدالة التالفية المماسية لدالة f في النقطة 1

(2) استنتج قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,001}$

الجواب

$$/1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

ومنه الدالة التالفية المماسية لدالة f في النقطة 1 هي الدالة $g : x \rightarrow \frac{1}{2}(x - 1) + 1$

$$\text{أي } g : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{0,99} = f(0,99) \approx g(0,99) = 0,5 \times 0,99 + 0,5 = \dots \quad \text{ومنه } 0,99 \approx 1 \quad \text{لدينا}$$

$$\sqrt{1,001} = f(1,001) \approx g(1,001) = 0,5 \times 1,001 + 0,5 = \dots \quad \text{ومنه } 1,001 \approx 1 \quad \text{لدينا}$$

2 - الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0; x_0 + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على

الييمين في x_0 و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{نكتب} \quad \text{العدد } l \text{ يسمى العدد المشتق لـ } f \text{ على اليمين في } x_0$$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0 - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 نرسم لها $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ملاحظة

$$f'_g(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ و } f'_d(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ب - خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

تمرين نعتبر $f(x) = x^2 + |x|$ أدرس قابلية اشتقاق f في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1=1$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f'_d(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x-1=-1$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f'_g(0) = -1$

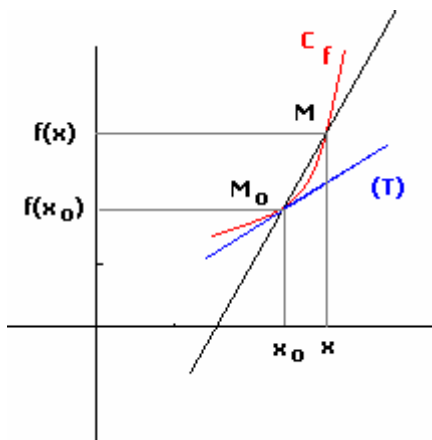
لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ ومنه f قابلة للاشتقاق في 0

4- التأويل الهندسي - معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0 و C_f منحنىها

نعتبر $M_0(x_0; f(x_0))$ و $M(x; f(x))$ نقطتين من C_f



المعامل الموجه للمستقيم (MM_0) هو $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

نلاحظ عندما تقترب M من M_0 (أي x تتوّل إلى x_0) فإن $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تتوّل إلى $f'_g(x_0)$

و بالتالي المستقيم (MM_0) يدور حول M_0 إلى أن ينطبق مع المستقيم (T) ذا المعامل الموجه $f'_g(x_0)$.

المستقيم (T) مماس للمنحنى C_f

معادلة (T) هي $y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحنىها

قابلية اشتقاق f في x_0 تتوّل هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول x_0

معادلته $y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

تمرين: نعتبر $f(x) = x^3$

أدرس قابلية اشتقاق f في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول 2

الجواب

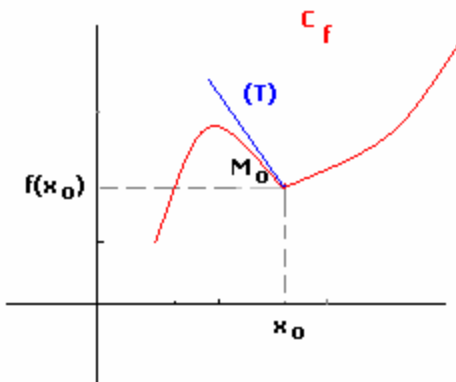
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

اذن f قابلة للاشتقاق في 2 و $f'(2) = 12$

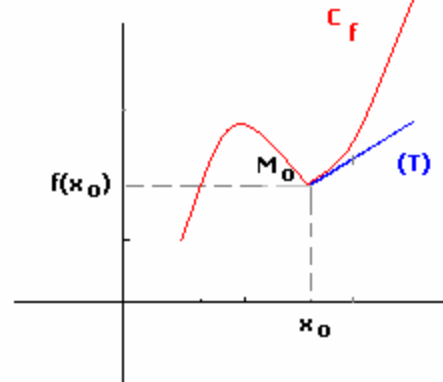
ومنه معادلة المماس هي $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ أي $y = 12(x - 2) + 8$

$$y = 12x - 16$$

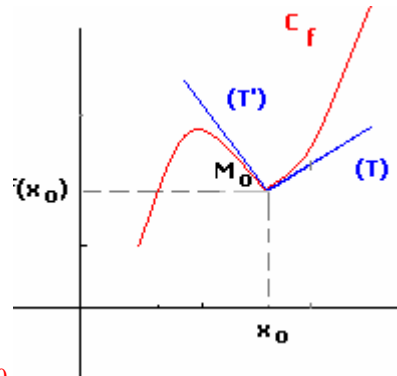
ب- نصف المماس



$$\begin{cases} (T): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



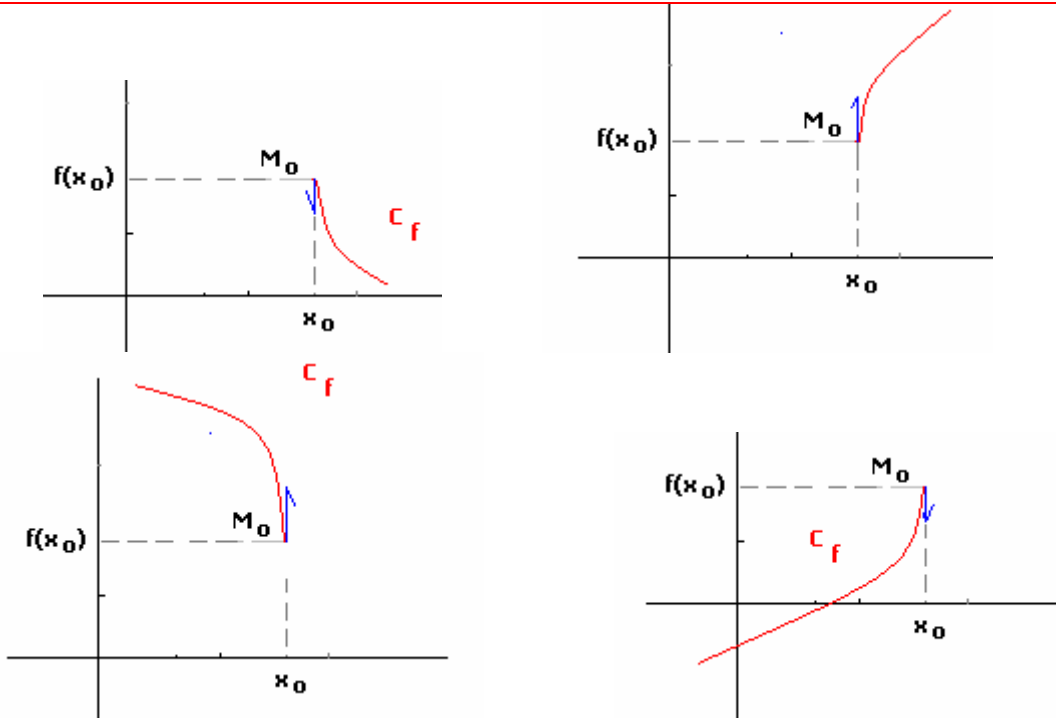
نقطة مزواة M_0

$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \geq x_0 \\ (T'): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \leq x_0 \end{cases}$$

خاصة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فإن C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الأفصول x_0 معامل الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)

إذا كانت نهاية $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ هي $f' \pm \infty$ في x_0 (على اليمين في x_0 أو على اليسار في x_0) فإن C_f يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0 (نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0)



تمرين نعتبر $f(x) = |x^2 - 1|$ و $g(x) = \sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا
أدرس قابلية اشتقاق g على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2 *$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يمين 1 و $f'_d(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x-1 = -2$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يسار 1 و $f'_g(1) = -2$

نلاحظ $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ إذن f غير قابلة للاشتقاق في 1

(C_f) يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته $y = 2(x-1)$.

(C_f) يقبل نصف مماس على يسار 1 معادلته $y = -2(x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty *$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و (C_g) يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

5- الدالة المشتقة

أ- تعاريف

تعريف 1

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

تعريف 2

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال $[a; b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $]a; b[$ و على يمين a و على يسار b .

ملاحظة: بالمثل نعرف الاشتقاق على $]a; b[$ و على $[a; b]$

تعريف 3

لتكن قابلة للاشتقاق على المجال I
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرسم لها بـ f' .

مثال: نعتبر $f(x) = x^2$

ندرس قابلية اشتقاق f و نحدد الدالة المشتقة

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

ومنه قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) = 2x_0$

اذن f قابلة للاشتقاق في \mathbb{R} و $f'(x) = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

ملاحظة:

يكون للمنحنى الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I مماس عند كل نقطة

من هذا المنحنى

ب- المشتقة الثانية - المشتقات المتتالية

لتكن f قابلة للاشتقاق مجال I

إذا الدالة f' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية و نرسم لها بالرمز f''

إذا كانت f'' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثالثة أو المشتقة من الرتبة 3 و نرسم لها بالرمز f''' أو $f^{(3)}$ و هكذا

نرسم للدالة المشتقة من الرتبة n حيث $n \in \mathbb{N}^*$ بالرمز $f^{(n)}$

مثال: نعتبر $f(x) = x^2$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x \quad \text{وحيث} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 2 \quad \text{فان} \quad f''(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6- عمليات على الدوال المشتقة

- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$

$f + g$ و $f \times g$ و λf و $f^{(n)}$ دوال قابلة للاشتقاق على المجال I

و اذا كانت g لا تنعدم على I فان $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ قابلتان للاشتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$\forall x \in I$ بحيث g لا تنعدم

على I

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$

$$(f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x) \quad (\text{نبين ذلك بالترجع}) \quad \forall x \in I$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{نبرهن}$$

$$\begin{aligned} (f \times g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\text{فان } (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

* الدالة الثابتة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = k$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

* الدالة $f: x \rightarrow x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

* الدالة $f: x \rightarrow ax + b$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

* الدالة $f: x \rightarrow x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{و} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

* الدالة $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x \times x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{و}$$

* الدالة $f: x \rightarrow \sqrt{x}$ لتكن $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{و} \quad \text{إذن } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}_+^*$$

f غير قابلة للاشتقاق في 0

* الدالة $f : x \rightarrow \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(2 \cos(x_0 + h) \right) \times 2 \times \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad x \rightarrow \sin x \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

* الدالة $f : x \rightarrow \cos x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = -\sin x \quad \text{و} \quad x \rightarrow \cos x \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

* الدالة $f : x \rightarrow \tan x$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

إذن $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x$

$$x \rightarrow \tan x \text{ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من } \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x \quad \text{و}$$

نتائج

* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في \mathbb{R}

* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها

أمثلة

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + x - 2} \quad \text{نعتبر}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1; -2\}$$

f الدالة الجدرية ومنه f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R} - \{1; -2\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1; -2\} \quad f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(2x^3 - 3x)}{(x^2 + x - 2)^2} = \dots \quad \text{و}$$

8- مشتقة $f(ax+b)$ - مشتقة \sqrt{f}

مبرهنة

ليكن المجال J صورة المجال I بالدالة التآلفية $x \rightarrow ax+b$
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على J فان $g : x \rightarrow f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I و

$$\forall x \in I \quad g'(x) = af'(ax+b)$$

مثال: نعتبر $f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$

f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $f'(x) = 5 \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$

خاصة

لتكن f دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I

$$\forall x \in I \quad (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \text{و} \quad \sqrt{f} \text{ قابلة للاشتقاق على } I$$

مثال: نعتبر $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$

$$D_f = [0;1]$$

$x \rightarrow -x^2 + x$ دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال $]0;1[$

$$\text{إذن } f \text{ قابلة للاشتقاق على } [0;1] \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} \quad \forall x \in]0;1[$$

جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
\mathbb{R}	0	a
\mathbb{R}	1	x
\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	nx^{n-1}	$x^n \quad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
\mathbb{R}^*	nx^{n-1}	$x^n \quad n \in \mathbb{Z}^{*-}$
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
\mathbb{R}	$-\sin x$	$\cos x$
\mathbb{R}	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
\mathbb{R}	$-a \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
\mathbb{R}	$a \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

تمارين

1- أدرس اشتقاق f و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-x} \quad * \quad f(x) = \frac{3x-1}{2x-2} \quad * \quad f(x) = \frac{5}{x^2} \quad * \quad f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4 \quad *$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \quad * \quad f(x) = (\cos x)^5 \quad * \quad f(x) = (x^2 + x)^5 \quad *$$

$$f(x) = x^2 + x|x| \quad * \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x > 0 \end{cases} \quad *$$

$$2- \text{ نعتبر } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$$

أ- بين أن منحنى f يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y = -3x$

ب- أكتب معادلتين هذين المماسين.

9- تطبيقات الدالة المشتقة

a- قابلية الاشتقاق و المطراف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$
 نعتبر f قابلة للاشتقاق في x_0 و تقبل مطرافا في x_0
 لنفترض أن f تقبل قيمة قصوى نسبية عند x_0

ومنه يوجد مجال مفتوح J مركزه x_0 ضمن I حيث $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in J$
 $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ ومنه $f'(x_0) = 0$

$$\text{أي } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

و حيث $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in J$ فان $\forall x \geq x_0$ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ و $\forall x \leq x_0$ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$
 ومنه $f'_g(x_0) \geq 0$; $f'_d(x_0) \leq 0$ أي أن $f'(x_0) \geq 0$; $f'(x_0) \leq 0$ اذن $f'(x_0) = 0$
 (إذا كانت f تقبل قيمة دنيا نسبية عند x_0 نتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج)

مبرهنة

لتكن f دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$
 اذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و تقبل مطرافا في النقطة x_0 فان $f'(x_0) = 0$

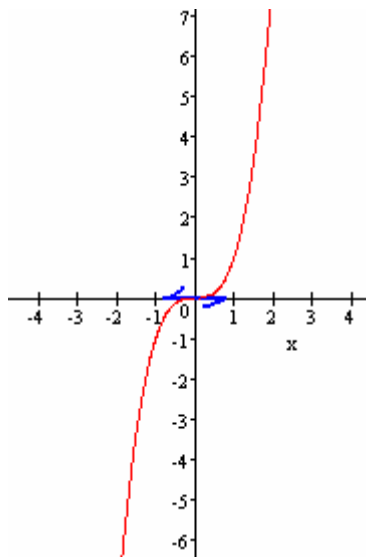
ملاحظة:

المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية

مثال $f(x) = x^3$; $x_0 = 0$

f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و $f'(0) = 0$

و مع ذلك f لا تقبل مطرافا عند 0



b- الاشتقاق ورتابة دالة

مبرهنة

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
 تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة على I
 أي $f'(x) \geq 0 \forall x \in I$ (f' موجبة قطعا على I أي $f'(x) > 0 \forall x \in I$)
 تكون f تناقصية (قطعا) على I إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة على I
 أي $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$ (f' سالبة قطعا على I أي $f'(x) < 0 \forall x \in I$)
 تكون f ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة على I أي $f'(x) = 0 \forall x \in I$

مثال

نعتبر $f(x) = x^3 - 6x + 1$

أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرات f (في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات)
 حدد مطاري ف f ان وجدت

الجواب

* مجموعة تعريف $D_f = \mathbb{R}$

* $f(x) = x^3 - 6x + 1$ ومنه $f'(x) = (x^3)' - (6x)' + (1)' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - 2$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
x^2-2	+	0	-	0	+

ومنه f' موجبة على كل $[\sqrt{2}; +\infty[$ و $]-\infty; -\sqrt{2}]$ و سالبة على $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
ومنه f تزايدية على كل $[\sqrt{2}; +\infty[$ و $]-\infty; -\sqrt{2}]$ و تناقصية على $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f						

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن f تقبل قيمة قصوى عند $-\sqrt{2}$ و دنيا عند $\sqrt{2}$

ملاحظة لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

f تقبل مطرافا في x_0 إذا و فقط إذا كانت f' تنعدم في x_0 و تتغير إشارتها في مجال مفتوح

يحتوي على x_0

10- المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$

تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية

تعريف

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم

المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ تسمى معادلة تفاضلية.

كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على \mathbb{R} و تحقق $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ تسمى حلا

للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$

أمثلة $y'' + 4y = 0$ و $y'' + \sqrt{2}y = 0$ و $y'' + \frac{3}{2}y = 0$ معادلات تفاضلية

خاصية

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي $x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

ملاحظة

حل المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ يرجع إلى تحديد الحل العام لهذه المعادلة

مثال

حل المعادلة $y'' + 4y = 0$

لدينا $\omega^2 = 4$ ومنه $\omega = 2$ يمكن أخذ $\omega = -2$ هذا لن يغير مجموعة الحلول

الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y : x \rightarrow \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

معادلة تفاضلية خاصة

حل المعادلة $y'' = 0$

إذا كان $y'' = 0$ فإن y' دالة ثابتة ومنه الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y : x \rightarrow ax + b$

حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$