السلسلة 1: إتصال دالة عددية

تمرين 1

أدرس إتصال الدالة f في x_0 في كل حالة:

1- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}; & x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ و $x_0=0$

2- $\begin{cases} f(x)=x+3; & x\geqslant 2 \\ f(x)=(x-4)^2+1; & x<2 \end{cases}$ و $x_0=2$

3- $\begin{cases} f(x)=x-x^2; & x<1 \\ f(x)=x-1-\sqrt{x^2-1}; & x\geqslant 1 \end{cases}$ و $x_0=1$

4- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}; & x<0 \\ f(x)=\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{2}; & x\in[0;+\infty[\end{cases}$ و $x_0=0$

5- $\begin{cases} f(x)=2x^2-3x; & x<-1 \\ f(x)=x^2+4; & -1\leqslant x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+1}+2; & x\geqslant 1 \end{cases}$ و $x_0\in\{-1;1\}$

6- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+x}{|x|}; & x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ و $x_0=0$

7- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-7x-6}{|x-3|}; & x\neq 3 \\ f(3)=20 \end{cases}$ و $x_0=3$

8- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x-1}{3x-4}; & x>\dfrac{4}{3} \\ f(x)=2x+7; & x\leqslant\dfrac{4}{3} \end{cases}$ و $x_0=\dfrac{4}{3}$

تمرين 2

حدد مجموعة تعريف الدالة g و أدرس إتصالها في l في كل حالة:

1- $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}; & x\neq 2 \\ g(2)=\dfrac{9}{8} \end{cases}$ و $l=2$

2- $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}{x-\sqrt{x}}; & x\neq 1 \\ g(1)=-\sqrt{2} \end{cases}$ و $l=1$

3- $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}; & x\neq 0 \\ g(0)=1 \end{cases}$ و $l=0$

4- $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}-2; & x>0 \\ g(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-4}; & x\leqslant 0 \end{cases}$ و $l=0$

تمرين 3

لتكن g دالة معرفة بـ: $g(x)=x-E(x)$.

1- أكتب $g(x)$ بدلالة x في الحالات: $x\in[-1;0[$ و $x\in[0;1[$ و $x\in[1;2[$.

2- أدرس إتصال الدالة g في كل من 0 و 1.

تمرين 4

أدرس إتصال الدالة f على المجال I في كل حالة:

1- $f(x)=4x-5+\cos x$ و $I=]-\infty;+\infty[$

2- $f(x)=\dfrac{1}{2-x}+\sqrt{x}$ و $I=]2;+\infty[$

3- $f(x)=|3x+5|$ و $I=]-\infty;+\infty[$

4- $\begin{cases} f(x)=1+x^2; & x<1 \\ f(x)=\dfrac{2}{x}; & x\geqslant 1 \end{cases}$ و $I=]-\infty;+\infty[$

5- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2}; & x\neq 0 \\ f(0)=4 \end{cases}$ و $I=[-4;+\infty[$

6- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{3-x}; & x<2 \\ f(x)=x-\sqrt{x-2}; & x\geqslant 2 \end{cases}$ و $I=]-\infty;+\infty[$

7- $\begin{cases} f(x)=2x^2-5x+3; & x\in[2;5] \\ f(x)=\dfrac{3x+8}{4-x}-6; & x\in[0;2[\end{cases}$ و $I=[0;5]$

8- $f(x)=\sqrt{2x-1}$ و $I=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

9- $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ و $I=\mathbb{R}$

10- $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}}$ و $I=]1;+\infty[$

11- $f(x)=3\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ و $I=]-\infty;+\infty[$

12- $f(x)=\cos(4x^2+3x-1)$ و $I=\mathbb{R}$

تمرين 5

حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة:

1- $f(x)=7x-2$ و $I=[-1;4]$

2- $f(x)=-2x^2+5x-4$ و $I=]-\infty;-2[$

3- $f(x)=\dfrac{2x-3}{4-x}$ و $I=]4;5]$

4- $\begin{cases} f(x)=2x-3; & x<2 \\ f(x)=x^2-3; & x\geqslant 2 \end{cases}$ و $I=[-2;4]$

5- $f(x)=-4\sqrt{3x+2}$ و $I=[0;3[$

6- $f(x)=x^2+1$ و $I=[-2;2]$

7- $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ و $I=]-\infty;0[$

تمرين 6

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال I في كل حالة:

1- $f(x)=7x^3-x-1$ و $I=[0;1]$

2- $f(x)=\cos(x)-x$ و $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

3- $f(x)=x^3-2x^2+x+2$ و $I=]-1;0[$

4- $f(x)=x^4+x^3-9$ و $I=[-2;2]$

تمرين 7

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل في المجال I في كل حالة:

1- $(E):\ x^3=4x+1$ و $I=[2;3]$

2- $(E):\ x^3-6x=7$ و $I=[0;3]$

3- $(E):\ x^3-5x=m$ و $I=[-1;3]$ و $m\in[4;12]$

4- $(E):\ 2\sin(x)=x$ و $I=\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$

5- $(E):\ \cos(x)=x$ و $I=\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$

6- $(E):\ 1+\sin(x)=x$ و $I=\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

7- $(E):\ 2\sin(2x)=1+\cos(x)$ و $I=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3}\right]$

تمرين 8

أثبت في كل حالة أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال J يجب تحديده نحو المجال I ثم حدد f^{-1} و أرسم منحنيا الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ممنظم:

1- $f(x)=5x-3$ و $I=\mathbb{R}$

2- $f(x)=3-\frac{4}{x+2}$ و $I=]-2;+\infty[$

3- $f(x)=x|x|$ و $I=\mathbb{R}$

4- $f(x)=\sqrt[3]{x}$ و $I=\mathbb{R}_+$

5- $f(x)=2\sqrt{x}-x$ و $I=]0;2[$

تمرين 9

بين في كل حالة أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J يجب تحديده نحو المجال I ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J:

1- $g(x)=x+\frac{1}{x}$ و $I=[-1;0[$

2- $g(x)=x^4-2x^2$ و $I=[0;1]$

3- $g(x)=(x-3)^2-1$ و $I=]-\infty;3]$

تمرين 10

لتكن f دالة عددية معرفة ب: $(\forall x\in]1;+\infty[)\ :\ f(x)=\frac{1-\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}{x-1}$.

1- تحقق من أن $f(x)=-\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$.

2- بين أن المعادلة $\sqrt{x}=\frac{1}{x-1}$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1;2[$.

3- بين أن $\beta^2(\beta-2)=1-\beta$.

تمرين 11

بين أن المعادلة $(E):\ x^3+x-1$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن $0<\alpha<1$ ثم تحقق من أن $\alpha=\sqrt[3]{1-\alpha}$.

تمرين 12

لتكن h دالة عددية معرفة ب: $h(x)=3x^3-4x^2+4x-1$.

1- بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا γ.

2- تحقق من أن $\gamma\in]0;1[$.

3- إعط قيمة مقربة للعدد γ بالدقة 10^{-2}.

تمرين 13

لتكن f دالة عددية معرفة ب: $f(x)=x^3+x+1$.

1- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا μ في المجال $[-2;2]$.

2- باستعمال طريقة التفرع الثنائي حدد تأطيرا للعدد μ سعته 0.125.

تمرين 14

لتكن g دالة عددية معرفة ب: $g(x)=\sqrt{x}+x$.

1- بين أن المعادلة $g(x)=5$ تقبل حلا وحيدا γ في المجال $]0;+\infty[$.

2- إعط تأطيرا للعدد γ بعددين صحيحين نسبيين.

3- باستعمال طريقة التفرع الثنائي حدد تأطيرا للعدد γ سعته 10^{-1}.

تمرين 15

لتكن f و g دالتين معرفتين ب: $f(x)=x^3$ و $g(x)=3-x$.

بين أن المعادلة $x^3=3-x$ تقبل حلا وحيدا μ في $\mathbb{R}$ و أن $1<\mu<\frac{3}{2}$.

تمرين 16

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

1- $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=\sqrt[6]{x}$

2- $\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}=2$

3- $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$

4- $x^6-3x^3-4=0$

5- $\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}=0$

6- $\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3=64$

7- $x+2>\sqrt[3]{x^2+8}$

8- $\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6}>x-2$

9- $\sqrt{1+2x}<\sqrt{2+x}+3$

10- $\frac{(x^3-1)(x^3+8)}{x^3-3\sqrt{3}}>0$

تمرين 17

أحسب النهايات التالية:

1- $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{2-x}$

2- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x}-1}$

3- $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}$

4- $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{x-2}$

5- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x}}$

6- $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{x-2}$

7- $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{\sin x}$

8- $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}$

9- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$

10- $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)^{\frac{1}{3}}-(2x)^{\frac{1}{3}}$

11- $\lim_{x\to1}\frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-x}$

تمرين 18

لتكن f دالة معرفة على المجال $]2;+\infty[$ ب: $f(x)=\sqrt{x}-\frac{5}{x-2}$.

1- بين أن f متصلة على المجال $]2;+\infty[$.

2- بين أن f تزايدية قطعا على المجال $]2;+\infty[$.

3- بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة من مجال J يتم تحديده نحو $]2;+\infty[$.

4- إستنتج أن المعادلة $\sqrt{x}=\frac{5}{x-2}$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2;+\infty[$ و أن $4<\alpha<5$.

تمرين 19

لتكن g دالة عددية معرفة ب: $g(x)=x+\sqrt{x+3}$.

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة g.

2- بين أن g متصلة و رتيبة قطعا على المجال D.

3- إستنتج أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال I يتم تحديده.

4- أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من I.

5- بين أن المعادلة $g(x)=g^{-1}(x)$ تقبل حلا وحيدا α في $]-3;+\infty[$.

تمرين 20

لتكن h دالة عددية معرفة ب: $h(x)=x(x+\sqrt{1+x^2})$.

1- أثبت أن h تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$.

2- تحقق من أن $(\forall x\in\mathbb{R}):\ h(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}$.

3- أثبت أن h تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_-$.

4- بين أن $h(x)$ و $h(x)-x^2$ و x لهم نفس الإشارة مهما يكن x من $\mathbb{R}$.

5- بين أن h تقبل دالة عكسية معرفة على مجال I يتم تحديده نحو $\mathbb{R}$.

6- حدد الدالة العكسية h^{-1}.

تمرين 21

لتكن f دالة عددية معرفة على $]1;+\infty[$ ب: $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

1- بوضع $u(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و $v(x)=\sqrt[3]{x}$ حدد تغيرات f على $]1;+\infty[$.

2- بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة من مجال I يتم تحديده نحو $]1;+\infty[$.

3- حدد الدالة العكسية f^{-1}.

تمرين 22

بين أن المعادلة $x=\sqrt[3]{x^2+1}$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]1;2[$.