

السلسلة 6: الأعداد العقدية « الجزء الأول »

تمرين 1

أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

$\frac{3+i}{4-i}$ [9]	$\frac{3+i}{i}$ [6]	$2i(1-i) + 3i$ [1]
$\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ [10]	$\frac{-3}{5i}$ [7]	$(1+2i)^2$ [2]
$\frac{(1-2i)^2}{(3+i)^2}$ [11]	$\frac{4}{i-5}$ [8]	$(1-2i)(7+3i)$ [3]
		$3i(1-2i)^2$ [4]
		$(1-i)^3$ [5]

تمرين 2

تعبر النقط $A(1; -3)$ و $B(4; 5)$ و $C(-3; 2)$.

- 1 حدد لحن كل من النقط A و B و C .
- 2 حدد لحن كل من المنحنيات \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{BC} و \overrightarrow{AB} .
- 3 حدد لحن كل من النقطين D و E حيث:
 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- 4 حدد لحن النقط I منتصف القطعة BC .
- 5 حدد لحن النقط G بحيث يكون $ABCG$ متوازي أضلاع.

تمرين 3

حدد العددين الحقيقين x و y بحيث:

$4x + y + i(x - 2y) = 5 - i$ [1]	
$2y + i(x - y + 5) = 4 + 7i$ [2]	

تمرين 4

حل في المجموعة C المعادلات التالية:

$2z + 5 - iz = 2i - 3z + 4iz$ [3]	$2iz + 3 = z - i$ [1]
$\frac{iz + 3}{z - 1} = -4i$ [4]	$3z(z - i) = iz$ [2]

تمرين 5

لكل عدد عقدي z بخالف العدد 1 نضع $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

- 1 ليكن $x + iy$ الشكل الجبري للعدد z . حدد $Re(Z)$ و $Im(Z)$ بدلالة x و y .
- 2 حدد في المستوى العقدي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا حقيقيا.
- 3 حدد في المستوى العقدي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا.

تمرين 6

حدد الشكل الجبري لمرافق العدد العقدي z في كل حالة:

$z = \frac{3+2i}{4+i}$ [3]	$z = (1-i)(3+2i)$ [1]
$z = \frac{(3+i)(4-i)}{2+3i}$ [4]	$z = (5-4i)^2$ [2]

تمرين 7

نضع $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

- 1 حدد الشكل الجبري للعدد العقدي $5\bar{z} + 3iz$.
- 2 حل في المجموعة C المعادلة: $5\bar{z} + 3iz = 2 + i$.

تمرين 8

لكل عنصر z من C نضع $f(z) = z^2 + 2z - 4$.

- 1 بين أن لكل z من C لدينا: $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.
- 2 أحسب $f(2-i)$ ثم $f(2+i)$.

تمرين 9

حدد في المستوى العقدي مجموعة النقط M ذات اللحن z الذي يخفف.

$3z = 4 + \bar{z}$ [1]	
$z + 5\bar{z} = 6 + 8i$ [2]	
$z\bar{z} = z + \bar{z}$ [3]	

تمرين 10

أحسب معيار العدد العقدي z في كل حالة:

$z = (3-2i)^3$ [7]	$z = -2-2i$ [4]	$z = -5$ [1]
$z = (1+i\sqrt{3})(4-i)$ [8]	$z = \frac{3-\sqrt{3}i}{5+5i}$ [5]	$z = \frac{1}{2}i$ [2]
$z = \left(\frac{1+i}{2i}\right)^6$ [9]	$z = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2$ [6]	$z = 3+4i$ [3]

تمرين 11

تعبر في المستوى العقدي النقطتين B و C لحقيهما على التوالي $Z_C = 2 - 2i\sqrt{3}$ و $Z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$.

- 1 نحقق من أن B و C نتميزان إلى الدائرة $\mathcal{C}(O; 4)$.
- 2 تعبر النقط A ذات اللحن $Z_A = \frac{Z_C - Z_B}{2}$.
- 3 أحسب $|Z_B - Z_A|$ و $|Z_C - Z_A|$ و $|Z_B - Z_C|$.
- 3 استنتج طبيعة المثلث ABC .

تمرين 12

ليكن Z عددا عقديا بخالف 1 بحيث $|Z| = 1$.
بين أن $i \times \frac{1+Z}{1-Z} \in \mathbb{R}$.

تمرين 13

ليكن Z عددا عقديا بخالف i .
بين أن $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left| \frac{Z+i}{Z-i} \right| = 1$.

تمرين 14

حدد عمدة للعدد العقدي z في كل حالة:

$z = (-\sqrt{3}-i)(1-i)$ [7]	$z = -2+2i$ [4]	$z = 1-i$ [1]
	$z = \frac{\sqrt{3}-i}{2i}$ [5]	$z = -1-i\sqrt{3}$ [2]
$z = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$ [8]	$z = (3-3i)^2$ [6]	$z = -\sqrt{3}+i$ [3]

تمرين 15

أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي z في كل حالة:

$z = \tan \frac{\pi}{9} + i$ [5]	$z = -2(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7})$ [1]
$z = 1 - i \tan \frac{\pi}{9}$ [6]	$z = \cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}$ [2]
	$z = \sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}$ [3]
$z = 1 + \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ [7]	$z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ [4]