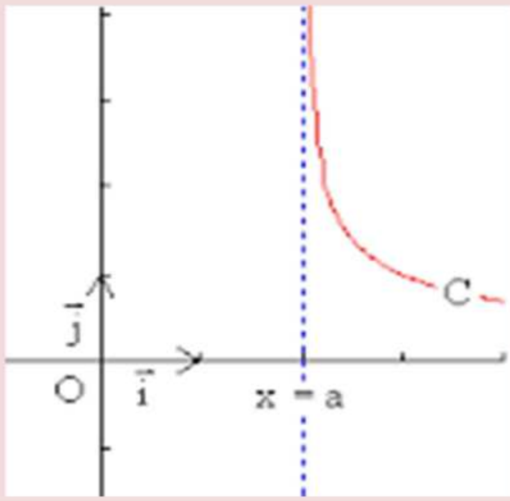
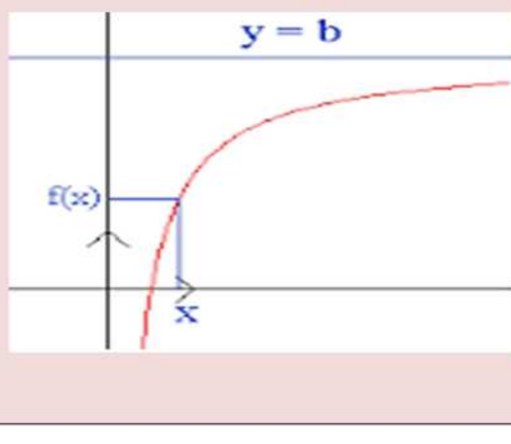
دراسة الدوال وتمثيلها المبياني

الفروع اللانهائية

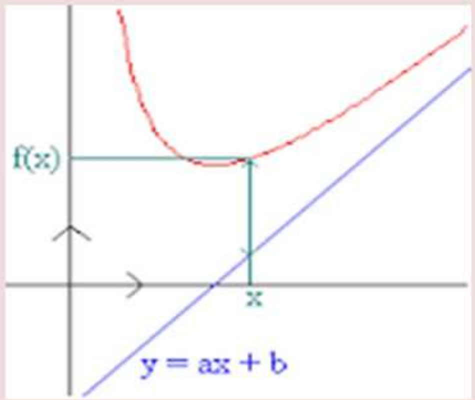
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftarrow (C_f)$ **يقبل مقارب عمودي معادلته** $x = a$



$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Leftarrow (C_f)$ **يقبل مقارب أفقي معادلته** $y = b$ **بجوار** $+\infty$ **(أو بجوار** $-\infty$ **)**



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0 \Leftarrow$ **يقبل مقاربا مائلا معادلته** $y=ax+b$ **بجوار** $+\infty$ **(أو بجوار** $-\infty$ **)** (C_f)

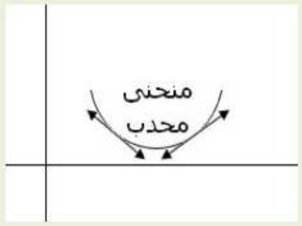


$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$$

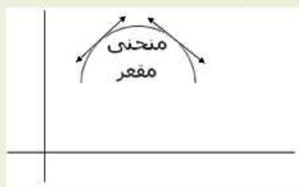
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ ← C_f **يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل**
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ← C_f **يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب**
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=+\infty$ ← C_f **يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة** $y=ax$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b$ ← C_f **يقبل مقارب مائل معادلته** $y=ax+b$

تقعر منحنى ونقط الإنعطاف

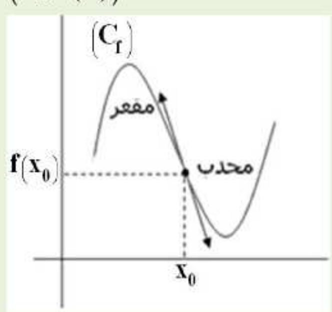
- ✓ **إذا كان** $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ **فإن** (C_f) **محدب**



- ✓ **إذا كان** $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ **فإن** (C_f) **مقعر**

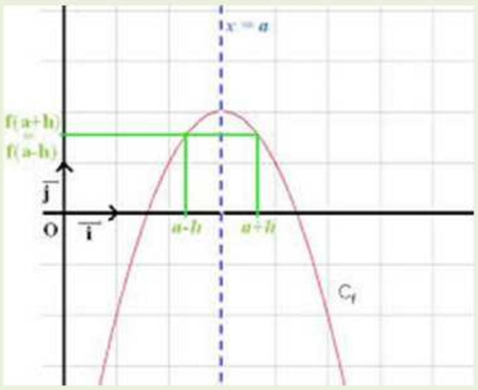


- ✓ **إذا كانت** f'' **تنعدم و تغير إشارتها عند** a **فإن النقطة** $I\left(a, f(a)\right)$ **هي نقطة انعطاف**
- ✓ **إذا كانت** f' **تنعدم و لا تغير إشارتها عند** a **فإن النقطة** $I\left(a, f(a)\right)$ **هي نقطة انعطاف**

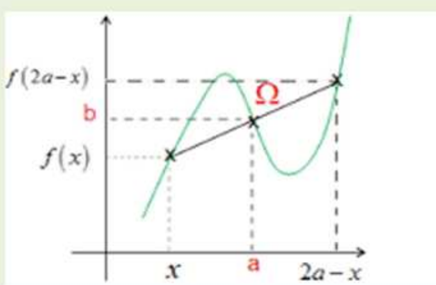


محور تماثل و مركز تماثل منحنى

❖ **المستقيم ذي المعادلة** $x=a$ **محور تماثل ل** (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a-x)=f(x) \end{cases}$



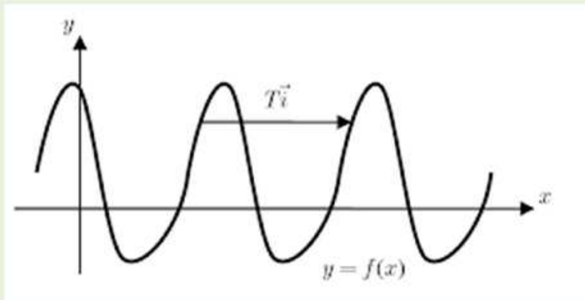
❖ **النقطة** $\Omega(a,b)$ **مركز تماثل ل** (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a-x)=2b-f(x) \end{cases}$



الدالة الدورية

نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f): x+T \in D_f \\ (\forall x \in D_f): f(x+T)=f(x) \end{cases}$$



العدد T يسمى دور للدالة f
أصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالة f

إذا كان T دورا لدالة عددية f فإنه لكل k من $\mathbb{Z}$: $(\forall x \in D_f) \quad f(x+kT)=f(x)$

تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة عددية f غالبا ما نتبع المراحل التالية :

1) **تحديد مجموعة تعريف الدالة f**
2) **دراسة زوجية و دورية الدالة f ثم تحديد مجموعة الدراسة D_E**
3) **حساب نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها**
4) **دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على D_E**
5) **دراسة تغيرات الدالة f (حساب f' ، دراسة إشارة f' ، استنتاج منحى تغيرات f ثم وضع جدول تغيرات f)**
6) **دراسة الفروع للانهائية**
7) **دراسة الوضع النسبي ل C_f بالنسبة لمقارباته الأفقية و المائلة (إن وجدت)**
8) **تحديد تقاطع C_f مع محوري المعلم**
9) **تحديد معادلة المماسات في بعض النقط**
10) **دراسة تقعر C_f و تحديد نقط انعطاف C_f (إن وجدت)**
11) **إنشاء C_f في معلم متعامد ممنظم**

النهايات – الإشتقاق
تأويلات هندسية – دراسة الدوال

النهايات

1. **لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فردي} \end{cases}$

2. **نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة**

3. **نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام**

4. **جداول النهايات:**

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**شكل غير محدد**

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f\times g$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**شكل غير محدد**

$\lim f$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l'\neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	**شكل غير محدد**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

الفروع اللانهائية

$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow$ C_f **يقبل مقارب عمودي معادلته** $x=a$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b \Leftrightarrow$ C_f **يقبل مقارب أفقي معادلته** $y=b$ **بجوار** $+\infty$ **أو بجوار** $-\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0 \Leftrightarrow$ C_f **يقبل مقارب مائل معادلته** $y=ax+b$ **بجوار** $+\infty$ **أو بجوار** $-\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$$

- $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$
  - C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل
- $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$
  - C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب
- $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$
  - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$
    - C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$
  - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b$
    - C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y=ax+b$

الإشتقاق و تأويلاته الهندسية

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f_d'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f_d'(a)$ و معادلته : $y = f_d'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليسار		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f_g'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f_g'(a)$ و معادلته : $y = f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a		✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a) = f_g'(a) = f'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a).(x-a)+f(a)$

- إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a) \neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت $f'(a) = 0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

- **مشتقات الدوال الاعتيادية**

الدالة f	الدالة المشتقة f'	المجال I
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$I =]-\infty,0[$ أو $I =]0,+\infty[$
$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$I =]0,+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0,+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$I =]-\infty,0[$ أو $I =]0,+\infty[$

- ✓ **إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على I و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha.f$ و $f+g$ و $f \times g$ قابلة للاشتقاق على I**
- ✓ **بالإضافة إذا كانت $g \neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I**
- ✓ **إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I**
- ✓ **إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I و $f \geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I**
- ✓ **إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f^n $(n \in \mathbb{N})$ قابلة للاشتقاق على I**

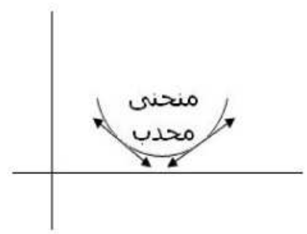
الدالة	الدالة المشتقة
$\alpha.f$	$\alpha.f'$
$f+g$	$f'+g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

$nf'f^{n-1}$	f^n

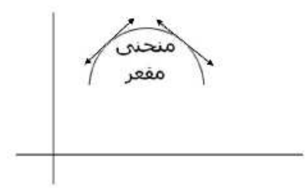
- ✓ إذا كانت $f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in I$ فإن f تزايدية على I
- ✓ إذا كانت $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in I$ فإن f تناقصية على I
- ✓ إذا كانت $f'(x)>0 \quad \forall x\in I$ فإن f تزايدية قطعا على I
- ✓ إذا كانت $f'(x)<0 \quad \forall x\in I$ فإن f تناقصية قطعا على I

تقعر منحنى و نقط الانعطاف:

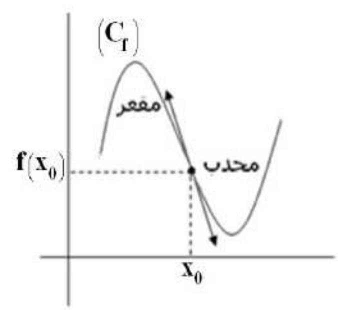
- ✓ إذا كان $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in I$ فإن (C_f) محدب



- ✓ إذا كان $f''(x)\leq 0 \quad \forall x\in I$ فإن (C_f) مقعر



- ✓ إذا كانت f'' تنعدم و تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف
- ✓ إذا كانت f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف



مركز و محور تماثل (C_f) :

- المستقيم ذي المعادلة $x=a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a-x)=f(x) \end{cases}$

- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a-x)=2b-f(x) \end{cases}$