يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير قابلة للبرمجة

التمرين الأول

في الفضاء المنسوب إلى م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\,(1;0;0)$ و $B\,(0;1;0)$ و $C\,(0;0;1)$.

❶ أحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و استنتج أن معادلة المستوى (ABC) هي: $x+y+z-1=0$. (1,5 pt)

❷ نعتبر الفلكة (S) المحددة بالمعادلة الديكارتية: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+3=0$.

(أ) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega\,(1;2;1)$ و أن شعاعها يساوي $\sqrt{3}$. (0.5 pt)

(ب) بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S). (0,75 pt)

(ج) حدد نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S). (0,75 pt)

التمرين الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):\ z^2-4z+8=0$. (1 pt)

❷ نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$. النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=4$ و $b=2+2i$ و $c=2-2i$.

(أ) لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي و تخالف A و $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

بين أن: $z'=iz+4-4i$ ثم تحقق أن النقطة C هي صورة B بالدوران $\mathscr{R}$ (1,5 pt)

(ب) أنشئ النقط A و B و C ثم بين أن الرباعي $OBAC$ مربع. (1 pt)

التمرين الثالث

يحتوي كيس على أربع كرات تحمل الأرقام $1;1;1;0$ و ثلاث كرات سوداء تحمل الأرقام $1;1;0$ لا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الكيس.

❶ أحسب احتمال سحب كرتين بيضاوين. (1 pt)

❷ أحسب احتمال سحب كرتين تحملان نفس الرقم. (1 pt)

❸ بين أن $\frac{11}{21}$ هو احتمال سحب كرتين جداء رقميهما يساوي 0 . (1 pt)

التمرين الرابع

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x - (x^2+1)\,e^{-x}$.
و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ (أ) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (1 pt)

(ب) بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب. (0,75 pt)

(ج) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$. (0,75 pt)

(د) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ). (0,25 pt)

❷ (أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = 1 + (x-1)^2\,e^{-x}$. (0,5 pt)

(ب) أعط جدول تغيرات الدالة f. (0,25 pt)

❸ (أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f''(x) = -\,(x-1)\,(x-3)\,e^{-x}$. (0,5 pt)

(ب) استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطتي انعطاف ينبغي تحديدهما. (0,75 pt)

❹ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن $0 < \alpha < 1$. (0,5 pt)

❺ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. . (نأخذ $f(3) \simeq 1,6$) (1,5 pt)

الجزء الثاني : ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر التكامل: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

❶ بين أن الدالة $F : x \mapsto -(x+1)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ ثم أحسب I_1 . (0,75 pt)

❷ (أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :\ I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$. (0,75 pt)

(ب) أحسب I_2 . (0,25 pt)

❸ أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين
اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$. (1 pt)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير قابلة للبرمجة

التمرين الأول (4 نقط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o = 4 \\ 2u_{n+1} = u_n + 3\ ;\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

❶ (أ) بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_n > 3$. (0.5 pt)

(ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. (0,75 pt)

❷ نضع: $(\forall \in \mathbb{N}) :\ v_n = u_n - 3$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، أساسها $\frac{1}{2}$. (0,5 pt)

(ب) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim u_n$. (1,5 pt)

❸ نضع: $(\forall n \in \mathbb{N}) : T_n = u_0 + \cdots + u_n$. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : T_n = 3n + 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (0,75 pt)

التمرين الثاني (3 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ نعتبر الفلكة (S) التي مركزها $\Omega\,(-1;1;2)$ و تمر بالنقطة $A\,(1;2;0)$.

❶ حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S). (0,75 pt)

❷ نعتبر المستوى : $(P) :\ 2x + y - z + 3 = 0$.

(أ) تحقق من أن: $\Omega \in (P)$. (0.25 pt)

(ب) حدد تقاطع المستوى (P) و الفلكة (S). (0,75 pt)

❸ نعتبر المستقيم : $(D) : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t - 2 \end{cases}$.

(أ) بين أن: $A \in (D)$ و أن $(\Omega A)\perp(D)$. (0.75 pt)

(ب) استنتج أن المستقيم (D) مماس للفلكة (S) في النقطة A. (0,5 pt)

التمرين الثالث (4 نقط)

(1 pt) ❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):\ z^2-2z+2=0$.

(0,75 pt) ❷ أكتب الحلول على الشكل المثلثي.

❸ في المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$. نعتبر النقطتين $A(1+i)$ و $B(1-i)$.

(0,75 pt) (أ) حدد طبيعة المثلث OAB .

(ب) حدد التمثيل العقدي للدوران r الذي زاويته π و مركزه I منتصف $[AB]$ ،

(1,5 pt) ثم استنتج أن $r(A)=B$.

التمرين الرابع (9 نقط)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=x-x\ln(x)\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(0,75 pt) ❶ بين أن الدالة f متصلة في 0 على اليمين.

(1 pt) ❷ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

(0,75 pt) ❸ (أ) أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ، ثم أول النتيجة هندسيا.

(0,5 pt) (ب) بين أن : $f'(x)=-\ln(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$.

(1 pt) (ج) بين أن الدالة f تزايدية قطعا على $[0;1]$ ، و تناقصية قطعا على $[1;+\infty[$.

(0,25 pt) (د) أعط جدول تغيرات الدالة f.

(0,75 pt) ❹ (أ) حدد معادلة المستقيم (T) المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الأفصول e .

(1,5 pt) (ب) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (T) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. (نأخذ $e\simeq 2,7$)

II) أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين

(1,5 pt) اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

III) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

(1 pt) ❶ بين أن g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

(0,5 pt) ❷ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير قابلة للبرمجة

التمرين الأول $(2,75\ pts)$

❶ أحسب التكامل: $I=\int_1^e \frac{1+\ln^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. (0,75 pt)

❷ (أ) تحقق أن : $\frac{1}{(1+e^{2x})^2}=1-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})}-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$. (0.25 pt)

(ب) استنتج حساب $J=\int_0^1 \frac{1}{(1+e^{2x})^2}\,\mathrm{d}x$. (0,75 pt)

❸ باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل $K=\int_2^3 \frac{\ln(x^2-1)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (1 pt)

التمرين الثاني $(3,25\ pts)$

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o=0 \\ u_{n+1}=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3 \ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

❶ (أ) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 0\leqslant u_n\leqslant 1$. (0.5 pt)

(ب) أدرس رتابة (u_n) و استنتج أنها متقاربة.(استعمل $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$) (0,75 pt)

❷ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $(\forall\in\mathbb{N}):\ v_n=\sqrt[3]{u_n}-1$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، محددا أساسها و حدها الأول. (0,5 pt)

(ب) أحسب v_n و u_n بدلالة n. ثم حدد $\lim u_n$. (0,75 pt)

(ج) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=\sqrt[3]{u_0}+\sqrt[3]{u_1}+\cdots+\sqrt[3]{u_{n-1}}$. ثم حدد $\lim S_n$. (0,75 pt)

التمرين الثالث $(4\ pts)$

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):\ z^2-z+4=0$. (0,75 pt)

❷ بين أن : $z_1^6+z_2^6=128$ حيث z_1 و z_2 هما حلي المعادلة (E) . (0,75 pt)

في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=1+i\sqrt{3}$ و $b=-\sqrt{3}+i$ و $c=\sqrt{3}-i$.

❸ بين أن النقط A و B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و شعاعها 2 ثم أنشئها . (0,75 pt)

❹ بين أن : $\frac{a-c}{a-b}=i$ و استنتج طبيعة المثلث ABC. (1 pt)

(0,5 pt) ❺ بين أن العدد $d=-1-i\sqrt{3}$ هو لحق D صورة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(0,25 pt) ❻ حدد طبيعة الرباعي $ABDC$ معللا جوابك.

التمرين الرابع ($10\ pts$)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $\mathrm{g}(x)=x-1+e^{2x}$.

(0,75 pt) ❶ أحسب $\mathrm{g}'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^+$ ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة g.

(0,5 pt) ❷ استنتج إشارة الدالة g على $\mathbb{R}^+$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=x^2-2x+e^{2x}\ ;\ x\geqslant 0 \\ f(x)=1+x-\ln(1-x)\ ;\ x<0 \end{cases}$.

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(0,75 pt) ❶ بين أن f متصلة في 0 ثم أحسب نهايتي f عند $+\infty$ و $-\infty$.

(0,5 pt) ❷ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

(0,5 pt) ❸ (أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 على اليمين و على اليسار.

(0,5 pt) (ب) بين أن الدالة f تزايدية قطعا على $]-\infty;0[$.

(0,75 pt) (ج) بين أن : $f'(x)=2\mathrm{g}(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج رتابة f على $]0;+\infty[$.

(0,25 pt) (د) أعط جدول تغيرات الدالة f.

(1 pt) ❹ حدد $f''(x)$ على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ ، ثم أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

(0,5 pt) ❺ (أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1;0]$.

(0,25 pt) (ب) حدد تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم $(\Delta):y=x$ في المجال $]-\infty;0[$.

(1 pt) (ج) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❻ ليكن h قصور الدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

(0,5 pt) (أ) بين أن h تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

(0,5 pt) (ب) بين أن h^{-1} قابلة للاشتقاق في العدد $1-e$ ثم أحسب $(\mathrm{h}^{-1})'(1-e)$.

(0,25 pt) (ج) أنشئ في نفس المعلم $(\mathscr{C}_{\mathrm{h}^{-1}})$ منحنى الدالة h^{-1} .

الجزء الثالث :

(0,25 pt) ❶ تحقق أن : $\frac{-x}{1-x}=1-\frac{1}{1-x}$: $(\forall x\leqslant 0)$.

(0,75 pt) ❷ باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_{1-e}^{0}\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

(0,5 pt) ❸ أحسب مساحة الحيز المحصور بين $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيمات $y=0$ و $x=1-e$ و $x=0$.

الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين	**الامتحان التجريبي الموحد**	عدد الصفحات: 2
جهة الدار البيضاء الكبرى	**السنة الثانية سلك البكالوريا**	المعامل: 7
نيابة النواصر	**شعبة العلوم التجريبية**	مدة الإنجاز : 3 ساعات
ثانوية أبي حيان التوحيدي	**نمـــــــوذج رقـــم** 4	

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير قابلة للبرمجة

التمرين الأول ($3\ pts$)

في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $z_A = 2+i$ و $z_B = 1+3i$ و $z_C = -3+i$.

(1,5 pt) ❶ أحسب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. استنتج أن A و B و C غير مستقيمية. و أن ABC قائم الزاوية في B.

(0,5 pt) ❷ حدد لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ مستطيل .

(1 pt) ❸ أكتب على الشكل الأسي $\frac{z_B - z_A}{z_B}$. و بين أن : $BC = 2BA$.

التمرين الثاني ($2,25\ pts$)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر الفلكة (S) ذات المعادلة : $x^2+y^2+z^2-2x-2y=0$ و المستوى (P) ذو المعادلة: $x-2y+z-1=0$

(0,75 pt) ❶ حدد مركز و شعاع الفلكة (S).

(0.25 pt) ❷ (أ) حدد متجهة منظمية على المستوى (P).

(0,75 pt) (ب) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) العمودي على (P) و المار من $A\,(1;1;0)$.

(0,5 pt) ❸ أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و الفلكة (S).

التمرين الثالث ($4\ pts$)

(I

(1 pt) ❶ حل المعادلة التفاضلية: $(E):\ y''-2y'+5y=0$.

(0,5 pt) ❷ استنتج الحل f للمعادلة (E) الذي يحقق $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ و $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

(II

(0.5 pt) ❶ تحقق أن : $\frac{2x^2}{x^2-1} = 2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$ لكل x من $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

(1 pt) ❷ أحسب التكامل: $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

❸ باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل: $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1 - x^2\right) \mathrm{d}x$. (1 pt)

التمرين الرابع $(9,75\ pts)$

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = e^x - x$.

❶ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. (0,75 pt)

❷ أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

❸ استنتج أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ g(x) > 0$. (0,25 pt)

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1\ ;\ x \leqslant 0 \\ f(x) = \ln\left(e^x - x\right)\ ;\ x > 0 \end{cases}$.

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

❶ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (0,75 pt)

❷ (أ) تحقق أن $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) :\ f(x) = x + \ln\left(1 - xe^{-x}\right)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة. (0,75 pt)

(ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة . (0,5 pt)

❸ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$. ماذا تستنتج ؟ (0,75 pt)

(أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 على اليسار. ثم أول هندسيا النتيجة. (0,75 pt)

(ب) تحقق أن $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) :\ \dfrac{f(x)}{x} = 1 - e^{-x} \dfrac{\ln\left(1 - xe^{-x}\right)}{-xe^{-x}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة . (0,75 pt)

❹ أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ ثم ضع جدول تغيرات f. (1,5 pt)

❺ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. (نقبل أن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف أفصولها أكبر من 2) (0,5 pt)

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

❶ بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$. (0,5 pt)

❷ بين أن (u_n) تناقصية . (لاحظ أن $(\mathscr{C}_f)$ يوجد تحت المستقيم $y = x$) (0,5 pt)

❸ استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (0,75 pt)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير قابلة للبرمجة

التمرين الأول ($5\ pts$)

I) نعتبر الحدودية: $P(z)=z^3-6z^2+12z-16$.

(0,75 pt) ❶ أحسب $P(4)$ و تحقق أن: $P(z)=(z-4)\left(z^2-2z+4\right)$.

(0,75 pt) ❷ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

II) المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=4$ و $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=1-i\sqrt{3}$.

(1,5 pt) ❶ أكتب العددين b و c على الشكل المثلثي. ثم أنشئ النقط A و B و C.

(0,75 pt) ❷ بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

III) لتكن K النقطة التي لحقها $k=-\sqrt{3}+i$ و G صورة النقطة K بالإزاحة التي متجهتها $\vec{u}(i)$ ، و F صورة النقطة K بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

(0,25 pt) ❶ حدد لحق النقطة G على شكله الجبري.

(1 pt) ❷ أكتب لحق النقطة F على شكله الأسي. ثم بين أن : $(OF)\perp(OC)$.

التمرين الثاني ($4\ pts$)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\,(1;1;1)$ و $B\,(0;1;2)$ و $C\,(-3;2;5)$ و ليكن (P) المستوى ذو المعادلة: $x-y-z+2=0$

(0.75 pt) ❶ (أ) بين أن: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-\vec{k}$.

(0,5 pt) (ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

(0,5 pt) (ج) بين أن : $(P)\perp(ABC)$.

❷ ليكن (Δ) المستقيم المار من A و العمودي على الستوى (P).

(0.25 pt) (أ) أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) .

(0,75 pt) (ب) حدد تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (P) .

❸ لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2y-2z+1=0$

(0.5 pt) (أ) بين أن (S) فلكة مركزها $\Omega\,(0;1;1)$ و شعاعها $R=1$.

(ب) أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) . (0,5 pt)

(ج) حدد تقاطع الفلكة (S) و المستوى (P) . (0,25 pt)

مسألة (11 pts)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x) = x - \ln(x)$.

❶ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$. (0,75 pt)

❷ أدرس تغيرات الدالة g على $]0;+\infty[$. (0,75 pt)

❸ استنتج أن: $(\forall x > 0):\ \ln(x) \leqslant x - 1$ و أن: $(\forall x > 0):\ \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x} - 2$. (0,75 pt)

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x}\ln(x)\ ;\ x > 0 \\ f(x) = e^x - x - 1\ ;\ x \leqslant 0 \end{cases}$.

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ (أ) بين أن f متصلة في 0 . (0,75 pt)

(ب) بين أن: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة. (0,5 pt)

(ج) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 0 . ثم أول هندسيا النتيجة. (0,5 pt)

❷ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (0,75 pt)

❸ (أ) بين أن: $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)}{2\sqrt{x}}\ ;\ x > 0 \\ f(x) = e^x - 1\ ;\ x < 0 \end{cases}$. (0,75 pt)

(ب) بين أن f تزايدية على المجال $]0;+\infty[$ و تناقصية على المجال $]-\infty;0]$. (0,75 pt)

❹ (أ) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$. (0,75 pt)

(ب) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = -x - 1$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$. (0,5 pt)

❺ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. (نقبل أن $A(1;1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$) (0,75 pt)

❻ (أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل : $I = \int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln(x)\,dx$. (0,5 pt)

(ب) أحسب مساحة الحيز المحصور بين $(\mathscr{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين $x = 1$ و $x = e^2$. (0,5 pt)

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_o = 2 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{u_n}\ln(u_n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

❶ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}):\ u_n > 1$. (0,5 pt)

❷ بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . (يمكنك استعمال رتابة f) (0,5 pt)

❸ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (0,75 pt)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير قابلة للبرمجة

التمرين الأول $(3,5\ pts)$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(-2;8;2\right)$ و $B\left(0;4;2\right)$ و $C\left(4;-4;2\right)$ و الفلكة (S) التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2-4x+8y+12=0$

(1 pt) ❶ بين أن: $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=8\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k}$. و استنتج مساحة المثلث OAB.

(0,25 pt) ❷ استنتج أن $2x+y-2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

(0.5 pt) ❸ بين أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega\left(2;-4;0\right)$ و شعاعها $R=2\sqrt{2}$.

(0.75 pt) ❹ بين الفلكة (S) و المستوى (OAB) يتقاطعان وفق دائرة $(\mathscr{C})$ محددا مركزها و شعاعها.

❺ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستوى (OAB) و المار من النقطة C .

(0.25 pt) (أ) تحقق أن المتجهة $\vec{u}\left(2;1;-2\right)$ موجهة للمستقيم (Δ).

(0.5 pt) (ب) أحسب $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega C}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ ثم استنتج أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S).

(0.25 pt) (ج) تحقق أن C هي نقطة تماس الفلكة (S) و المستقيم (Δ).

التمرين الثاني $(3,5\ pts)$

(0,75 pt) ❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-4z+13=0$.

❷ المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=2+3i$ و $b=2-3i$ و $c=1$.

(0.25 pt) (أ) بين أن : $AC=BC$.

(0.25 pt) (ب) ليكن d لحق D صورة A بالإزاحة التي لحق متجهتها هو $-4-2i$. بين أن: $d=i-2$

(0.75 pt) (ج) أحسب $\dfrac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن المثلث ADC قائم الزاوية و متساوي الساقين.

❸ ليكن $\mathscr{R}$ الدوران الذي مركزه النقطة C و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

(0.25 pt) (أ) بين أن A هي صورة النقطة D بالدوران $\mathscr{R}$

(0.5 pt) (ب) بين أن لحق النقطة E صورة النقطة B بالدوران $\mathscr{R}$ هو $e=\overline{d}$.

(0.75 pt) (ج) أنشئ النقط A و B و C و D و E و استنتج أن النقط A و B و D و E متداورة.

التمرين الثالث $(3\ pts)$

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الأرقام $2;1;1;0;0;0$ و كرتين سوداوين تحملان الرقمين $1;0$ ، لا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الكيس.

نعتبر الحدثين: A : " الكرتان لهما نفس اللون " و B : " الكرتان تحملان رقمين زوجيين "

(0,5 pt) ❶ أحسب احتمال الحدث A و بين أن احتمال الحدث B هو $\frac{5}{14}$.

(0,5 pt) ❷ بين أن احتمال الحدث $A \cap B$ هو $\frac{3}{14}$. هل الحدثان A و B مستقلان ؟

(0,5 pt) ❸ نعتبر الحدث: C : " الكرتان لهما نفس اللون أو تحملان رقمين زوجيين ". بين أن: $p(C) = \frac{5}{7}$.

❹ ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الرقمين المسجلين على الكرتين.

(0.75 pt) (أ) تحقق أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{0;1;2\}$. ثم بين أن $p(X=0) = \frac{11}{14}$

(0.75 pt) (ب) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و استنتج أمله الرياضي $E(X)$.

مسألـــة ($10\ pts$)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

(1 pt) ❶ تحقق أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ g'(x) = -xe^x$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

(0,5 pt) ❷ استنتج أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ g(x) \leqslant 0$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x) = 2 + \dfrac{x}{e^x - 1} \ ;\ x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$.

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(0,5 pt) ❶ بين أن f متصلة في 0 .

(0,75 pt) ❷ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

(0,5 pt) ❸ (أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(0,25 pt) (ب) بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :\ f(x) - (2-x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$

(0,5 pt) (ج) استنتج ان المستقيم $(\Delta) : y = 2 - x$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

(0,75 pt) (د) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ).

(0,75 pt) ❹ (أ) بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$. (نقبل أن $f'(0) = -\frac{1}{2}$)

(0,25 pt) (ب) ضع جدول تغيرات الدالة f .

(0,25 pt) (ج) أعط معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة $(0;3)$.

(1 pt) (د) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (T) .

(0,5 pt) ❺ (أ) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

(1 pt) (ب) أحسب $(f^{-1})'(3)$ ، ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

(0,5 pt) ❻ بين أن الدالة $G(x) = (2-x)e^x - x$ هي دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

(1 pt) ❼ أحسب مساحة الحيز المحصور بين $(\mathscr{C}_g)$ و المستقيمات $y = 0$ و $x = 0$ و $x = \ln 2$.