تمرين 1 . أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ نضع $z=1-2i$ و $z'=3-i$. أكتب على الشكل الجبري : $z+z'$ ؛ zz' ؛ $z^2-z'^2$ ؛ z^2z' ؛ $\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}$ ؛ $\frac{z}{z'}$.

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية: $(1-i)\overline{z}=1+i$ ؛ $2z-\overline{z}=2i$ ؛ $i\overline{z}+2z=-i$ ؛ $\frac{z-i}{z+i}=-2$ ؛ $\overline{z}+iz=i\overline{z}-z$ ؛ $2i\overline{z}^2-(1+i)\overline{z}=0$.

❸ نعتبر $f(z)=\frac{1+z+z^2+z^3}{1+z}$ أحسب $f(i)$ و $f(-i)$ و $f(i-1)$ و $f(i+1)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $f(z)=0$.

❹ نضع $z=x+iy$ حدد الشكل الجبري للعدد $3\overline{z}+iz$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $3\overline{z}+iz=2-2i$.

❺ حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $\frac{z+i}{i\overline{z}+3}$ تخيليا صرفا

❻ حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $\frac{z+i}{i\overline{z}+3}$ عددا حقيقيا.

❼ بين أن: $(\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}):\ \frac{1-iz}{1+iz}\in\mathbb{R}\Longrightarrow z\in i\mathbb{R}$

❽ نضع $Z=-1+i(2-\sqrt{3})$ أحسب Z^2 و Z^3 و Z^6 ؛ ثم بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}):\ Z^{12n}\in\mathbb{R}$.

❾ نضع $z=\frac{2+3i}{3-4i}$ و $z'=\frac{2-3i}{3+4i}$ تحقق بدون حساب أن $z+z'$ عدد حقيقي و أن $z-z'$ تخيلي صرف.

❿ نعتبر النقط $A(6-i)$ و $B(-2+i)$ و $C(-18+7i)$ بين أن A و B و C نقط مستقيمية.

تمرين 2 . أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ حدد و أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي بحيث:

$$(\sqrt{2}+i)\overline{z}=(i-\sqrt{2})z-1; 2z\overline{z}=3(z+\overline{z})$$

❷ أحسب معيار كل من الأعداد العقدية التالية: $(2-i\sqrt{3})^2$ و $(1+i\sqrt{6})(5-i\sqrt{3})$ و $(1+3i)^3$ و $\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$ و $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$.

❸ نعتبر النقط $A(1-i)$ و $B(3+2i)$ و $C(4-3i)$. أحسب المسافات AB و AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❹ بين هندسيا ثم جبريا أن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ بحيث: $\left|\frac{z+1}{z-i}\right|=2$ هي دائرة محددا شعاعها و لحق مركزها.

❺ حدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية: $2i$ و $-i\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ و $1+i$ و $1-i$ و $i-\sqrt{3}$ و $7i-7$ و $1+i\sqrt{3}$ و $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}\right)^{12}$ و $\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}$ و $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ و $-\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}$ و $\sin\theta+2i\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ و $\cos\theta+i(1+\sin\theta)$ حيث $\theta\in]0;\pi[$.

❻ أكتب $Z_o=\frac{5+3\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$ على الشكل الجبري ؛ ثم أحسب Z_o^2 و Z_o^3 و Z_o^{15}

❼ حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية: $3\overline{z}+|z|=6+2i$ و $z^2-4\overline{z}+4=0$ و $iz^2-2\overline{z}+2-i=0$.

❽ نعتبر العدد العقدي $A=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$. حدد معيار و عمدة A^2 ثم استنتج معيار و عمدة A .

❾ لكل z من $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$ نضع: $z'=\frac{z+2}{z-2i}$ حدد ثم أنشئ في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ المجموعات :

$$(\Gamma_1)=\{M(z)\in(P)\ /\ |z'|=1\}$$

$$(\Gamma_2)=\{M(z)\in(P)\ /\ z'\in\mathbb{R}\}$$

$$(\Gamma_3)=\{M(z)\in(P)\ /\ z'\in i\mathbb{R}^*\}$$

$$(\Gamma_4)=\{M(z)\in(P)\ /\ \arg(z')=\pi[2\pi]\}$$

❿ حدد ثم أنشئ في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ المجموعة

$$(\Sigma)=\{M(z)\in(P)\ /\ z+\overline{z}+z\overline{z}=0\}$$

تمرين 3 . أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ نعتبر النقطتين $A(i)$ و $B(\sqrt{3})$. حدد Z_C لحق النقطة C التي يكون من أجلها المثلث ABC مباشرا و متساوي الأضلاع.

❷ حدد ثم أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ التي من أجلها النقط $M(z)$ و $N(i\overline{z})$ و $P(-3i)$ مستقيمية.

❸ ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ حيث: $|z|=|z'|=1$ و $1+zz'\neq 0$ بين أن $\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$

❹ ليكن $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. حدد معيار و عمدة حلي المعادلة : $z^2-2z+1+\cos(2\alpha)-i\sin(\alpha)=0$.

❺ نعتبر الأعداد $z=1+i$ و $z'=1+i\sqrt{3}$ و $Z=\frac{z}{z'}$.

(أ)- أكتب على الشكل المثلثي كل من z و z' و Z .

(ب)- أكتب Z على الشكل الجبري ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

❻ أكتب على الشكل الأسي الأعداد العقدية التالية: $5-5i$ و $-i(1+\sqrt{3}i)$ و $(-1+i\sqrt{3})^3$ و $(\sqrt{6}+i\sqrt{2})i$ و $\frac{i}{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})^2}$ و $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ و $(1+i)^3+(1-i)^3$ و

و $(\sqrt{3}-i)^{17}$ و $\frac{5\sqrt{2}}{1-i}$ و $1+i\tan\alpha\ ;\ \alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ و $\sin 2\alpha-2i\cos^2\alpha\ ;\ \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

❼ لكل z من $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ نضع: $f(z)=\dfrac{z+i}{1+iz}$ بين أن:

$$\mathrm{Re}\big(f(z)\big)=\frac{1}{2}\iff \mathrm{Re}(z)=\frac{|1+iz|^2}{4}$$

❽ حدد الجدور الرابعة للعدد العقدي: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ثم استنتج قيمتي $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\cos\dfrac{\pi}{24}$.

❾ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^5=1$ ثم أنشئ صور الحلول . و استنتج أن: $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}$.
أحسب $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ بدلالة $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ ثم استنتج قيمتي $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ و $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

❿ حدد التمثيل العقدي لكل من التحويلات التالية:
◄ الازاحة التي متجهتها $\vec{w}(2-i)$.
◄ التحاكي الذي مركزه $\mathcal{I}(i)$ و نسبته $\dfrac{-1}{3}$.
◄ التحاكي الذي مركزه $\mathcal{A}(i)$ و يحول $\mathcal{B}(5i)$ إلى $\mathcal{C}(2-i)$.
◄ الدوران الذي مركزه $\Omega(-1+i)$ و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

تمرين 4 . أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.

❶ أخطط التعابير التالية: ◄: $\sin^3(x)$ ◄: $\sin^3(x)\cos^3(x)$ ◄: $\cos^6(x)$ ◄: $\sin^3(x)\cos^4(x)$

❷ حدد ثم أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق المتساويات التالية: ◄: $|1+iz|=|z-2|$ ◄: $|2\overline{z}+2-i|=4$ ◄: $\arg(z)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ◄: $\arg(\overline{z})\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ◄: $\arg\left(\dfrac{z+2i}{z-1}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ ◄: $\arg\left(\dfrac{i}{z}\right)\equiv\pi[2\pi]$ ◄: $\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{z}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

❸ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية: ◄: $z^2+4=0$ ◄: $z^2-z+2=0$ ◄: $2z^2+\sqrt{2}z+1=0$ ◄: $4z^2-12z+25=0$.

❹ حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية: $z^4+z^2+1=0$
◄: $z^2-(3+2i)z+5+i=0$
◄: $(4+2i)z^2-(7-i)z-1-3i=0$
◄: $z^4+(3-6i)z^2+2(16-63i)=0$

❺ بين أنه لكل z و z' من $\mathbb{C}$ لدينا:

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\big(|z|^2+|z'|^2\big)$$

❻ بين أن:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{3n+2}=-2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$$

❼ في الحالات التالية حدد مركز و زاوية الدوران الذي تمثيله العقدي كالآتي: ◄: $z'-1=i(z-1)$ ◄: $z'=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z$ ◄: $z'-i=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-i)$.

❽ لكل x و y من $\mathbb{R}$ نضع: $A=e^{ix}+e^{iy}$
أ) حدد الصيغة المثلثية للعدد A $(A\neq 0)$.
ب) أحسب بطريقتين مختلفتين $\left(1+e^{ix}\right)^n$; $(n\in\mathbb{N})$
ج) استنتج أن:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(kx)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

و

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin(kx)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

تمرين 5 .

لكل z من $\mathbb{C}$ نضع:

$$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$$

❶ أحسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$.
❷ حدد a و b بحيث: $P(z)=(z^2+3)(z^2+az+b)$.
❸ بين أن النقط $A(i\sqrt{3})$ و $B(-i\sqrt{3})$ و $C(3+2i\sqrt{3})$ و $D(3-2i\sqrt{3})$ تنتمي إلى دائرة محددا شعاعها و لحق مركزها ؛ ثم أنشئ النقط A و B و C و D .
❹ لتكن E مماثلة D بالنسبة لـ O ، بين أن $\dfrac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و استنتج طبيعة المثلث EBC.

تمرين 6 .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ الحدودية:

$$P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$$

❶ بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_o ينبغي تحديده.
❷ حدد a و b بحيث: $P(z)=(z-z_o)(z^2+az+b)$.
❸ حدد العددين z_1 و z_2 حلي المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ حيث $\mathrm{Im}(z_2)<0$.
❹ نعتبر النقط $A(z_o)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$. أكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية: z_o و z_1 و z_2 و z_1-z_o و z_2-z_o ثم استنتج أن الرباعي $OABC$ معين.

تمرين 7 .

لكل m من $\mathbb{R}$ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E):\ z^3+2(1-i)z^2+(1+m^2-4i)z-2i(1+m^2)=0$$

❶ بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_o ينبغي تحديده ، ثم استنتج بدلالة m الحلين الآخرين.
❷ نعتبر النقط $A(2i)$ و $B(-2-2i)$ و $C(-1-im)$ و $D(-1+im)$. بين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع مهما يكن m من $\mathbb{R}$ ، ثم حدد m لكي يكون الرباعي $ABCD$ مستطيل.

تمرين 8

نعتبر العدد العقدي $w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

❶ بين أن: $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$ و أن $w^5-1=0$

ثم استنتج أن: $1+w+w^2+w^3+w^4=0$.

❷ نضع $x=w+\frac{1}{w}$ تحقق أن $x^2+x-1=0$. استنتج $\cos\frac{2\pi}{5}$

تمرين 9

نعتبر العدد العقدي $z_o=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$

نضع : $S=z_o+z_o^2+z_o^4$ و $T=z_o^3+z_o^5+z_o^6$

❶ بين أن: S و T عددين عقديين مترافقين و أن: $\text{Im}(S)>0$

❷ أحسب $S+T$ و ST ثم استنتج قيمتي S و T.

تمرين 10

نعتبر المعادلة : $(E):\ z^2-wz+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

حيث w عدد عقدي. ليكن z_o و z_1 حلي المعادلة (E).

❶ بين أن: $|z_o|.|z_1|=1$ و $\arg(z_o)+\arg(z_1)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

❷ نضع $z_o=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$ بين أن:

$$w=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$$

❸ استنتج أنه إذا كان $z_o=i$ فإن:

$$1+iw-w^2-iw^3+w^4+iw^5=0$$

❹ نفترض أن $z_o=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ أكتب z_1 على شكليه المثلثي و الجبري ، ثم استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

أكتب العدد w على شكليه المثلثي و الجبري .

❺ في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر التحويل $\mathscr{R}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)z$.

نعتبر النقط A و M_o و M_1 التي ألحاقها على التوالي w و z_o و z_1 حيث $z_o=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

ا) حدد طبيعة التحويل $\mathscr{R}$ و بين أن $\mathscr{R}(M_o)=M_1$.

ب) استنتج طبيعة الرباعي OM_oAM_1.

ج) استنتج معيار و عمدة العدد العقدي w .

تمرين 11

المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي:

$a=1+i\sqrt{3}$ و $b=1-i\sqrt{3}$

❶ حدد c' لحق النقطة C' منتصف القطعة $[AB]$.

❷ حدد c لحق النقطة C صورة A بالدوران $\mathscr{R}\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$.

❸ حدد m لحق النقطة M صورة C' بالتحاكي $\mathscr{H}\left(C;\frac{2}{3}\right)$.

❹ ماذا تمثل M بالنسبة للمثلث ABC ، أنشئ C' و C و M .

❺ حدد n لحق النقطة N صورة C بالازاحة $\mathscr{T}_{2\vec{u}}$

❻ أحسب $\frac{c-b}{n-a}$ ، استنتاج ؟ بين أن $(AB)\perp(CN)$.

❼ ماذا تمثل N بالنسبة للمثلث ABC ، أنشئ النقطة N

❽ حدد p لحق النقطة P صورة N بالتماثل المحوري $S_{(AB)}$

❾ بين أن النقط A و B و C و P متداورة . أنشئ النقطة P .

تمرين 12

المستوى منسوب م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$ لتكن A و B نقطتين لحقيهما على التوالي: a و b بحيث $a\neq b$. لتكن (E) مجموعة النقط M بحيث $\frac{MA}{MB}=k$ و $k\in\mathbb{R}_+^*$

❶ حدد المجموعة (E) في حالة $k=1$.

❷ نفترض أن $k\neq 1$ و ليكن w لحق النقطة Ω مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(B;-k^2)\}$

بين أن: $M(z)\in(E)\iff|z-w|=k.\frac{|a-b|}{|1-k^2|}$.

تمرين 13

المستوى منسوب لمعلم م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر المعادلة $(E):\ z^2-2z+\frac{1}{\cos^2(\theta)}=0$ حيث $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: (E) .

❷ ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة: (E) حيث $\text{Im}(z_1)=\tan\theta$

أكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2.

❸ نعتبر النقط $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$. بين أن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين في O.

❹ ليكن n من $\mathbb{N}^*$. أكتب على الشكل المثلثي حلول المعادلة التالية: $z^{2n}-2z^n+\frac{1}{\cos^2(\theta)}=0$.

تمرين 14

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2iz-2=0$.

ثم أكتب الحلول على الشكل المثلثي.

❷ ليكن θ من $]0;\pi[$ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2-2ze^{i\theta}+e^{2i\theta}-1=0$$

❸ نعتبر النقط A و B و C . التي ألحاقها على التوالي $Z_A=1+e^{i\theta}$ و $Z_B=2e^{i\theta}$ و $Z_C=-1+e^{i\theta}$.

أ) أكتب Z_A و Z_C على الشكل الأسي ، بين أن $OABC$ مستطيل

ب) حدد العدد الحقيقي θ من $]0;\pi[$ لكي يكون $OABC$ مربعا

تمرين 15

ليكن z من $\mathbb{C}^*$ نضع : $f(z)=z+\frac{4}{z}$.

❶ حدد Z_1 و Z_2 حلي المعادلة: $f(z)=-2$ بحيث $\text{Im}(Z_1)>\text{Im}(Z_2)$. أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي .

❷ بين أن $Z_1^{2002}+Z_2^{2002}=2^{2002}$

❸ نعتبر النقط A و B و C . التي ألحاقها على التوالي α و Z_1 و Z_2 حيث α عدد حقيقي موجب.

ا) حدد α لكي يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع.

ب) بين أنه لكل z من $\mathbb{C}^*$ لدينا:

$$(z \in \mathbb{C}^*) : f(z) = \overline{f(z)} \Longleftrightarrow (z - \overline{z})(z\overline{z} - 4) = 0$$

ج) استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $f(z)$ عددا حقيقيا.

د) تحقق أن النقط A و B و C تنتمي إلى (Γ).

تمرين 16

❶ ليكن z عدد عقدي معياره r و عمدته θ حدد جميع الأعداد العقدية z التي تحقق $z^4 = 1$.

❷ حلي في $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$.

❸ ليكن α من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$. حلي في $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n = e^{i\alpha}$. الحل العام يتم كتابته على الشكل الجبري.

تمرين 17

نعتبر $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

❶ بين أنه إذا كانت المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا عقديا z_o فإن العدد $\overline{z_o}$ هو أيضا حل لها.

❷ استنتج أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل على الأقل حلا حقيقيا

❸ حدد λ لكي تقبل المعادلة $P(z) = 0$ حلا حقيقيا معياره 2 ثم حل المعادلة لأجل القيمة التي تم تحديدها

❹ حدد λ لكي تقبل المعادلة $P(z) = 0$ حلا عقديا غير حقيقي معياره 2 ثم حل المعادلة لأجل القيمة التي تم إيجادها . ثم حدد معيار و عمدة كل من الحلول.

تمرين 18

❶ بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا:

$$\left(\forall z \in \mathbb{C}\right) : (z - e^{ix})(z - e^{-ix}) = z^2 - 2z\cos(x) + 1$$

❷ بين أنه لكل عدد عقدي z لدينا:

$$z^5 - 1 = (z-1)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right)$$

❸ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^5 = 1$ ، حدد قيمتي $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ و $\cos\dfrac{4\pi}{5}$

تمرين 19

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن A و B و C ثلاث نقط ألحاقها على التوالي a و b و c بحيث $a + bj + cj^2 = 0$ و $j = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

❶ تحقق أن: $j^3 = 1$ و $j^2 = \overline{j}$ و $1 + j + j^2 = 0$

❷ بين أنه المثلث ABC متساوي الأضلاع.

❸ لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z . نعتبر الدورانين $\mathscr{R}_1\left(M; -\dfrac{\pi}{3}\right)$ و $\mathscr{R}_2\left(M; \dfrac{\pi}{3}\right)$. نضع $\mathscr{R}_1(A) = A'$ و $\mathscr{R}_2(B) = B'$. و ليكن a' لحق A' و b' لحق B' .

ا) حدد a' بدلالة a و z ثم حدد b' بدلالة b و z.

ب) بين أن $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MC}$.

ج) نفترض أن $a = 1$ و $b = j$ و $c = j^2$ حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A' و B' و M مستقيمية .

تمرين 20

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E) : \ mz^2 - 2z + \overline{m} = 0$ حيث m عدد عقدي معياره $\sqrt{2}$.

❷ نضع $m = \sqrt{2}e^{i\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ، بين أن حلي المعادلة (E) يكتبان على الشكل $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ و $z_2 = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

❸ نعتبر النقط $M(z_1 + z_2)$ و $M'(z_1)$ و $M''(z_2)$. بين أن: $\overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{OM''}$ و أن الرباعي $OM'MM''$ مربع.

تمرين 21

نعتبر $(O;\vec{u};\vec{v})$ المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى م م م م النقط $A(2+3i)$ و $B(4-i)$ و $C(10+2i)$ ، و التحويلين

$$\mathscr{R} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P} \qquad \mathscr{R}' : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$
$$M(z) \longmapsto M'(jz) \quad \text{و} \quad M(z) \longmapsto M''\left((1+j)z\right)$$

❶ بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في B و أن $\mathscr{R}$ و $\mathscr{R}'$ دورانين ينبغي تحديد مركزيهما و زاويتيهما.

❷ لتكن $(\mathscr{C})$ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، حدد ثم أنشئ في المستوى العقدي الدائرتين $\mathscr{C}_1 = \mathscr{R}(\mathscr{C})$ و $\mathscr{C}_2 = \mathscr{R}'(\mathscr{C})$

❸ ليكن (Δ) مستقيم أولير، أكتب معادلة ديكارتية لـ (Δ) على شكل $a(z + \overline{z}) + bi(z - \overline{z}) + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية يتم تحديدها. ثم استنتج معادلتي المستقيمين: $(\Delta_1) = \mathscr{R}(\Delta)$ و $(\Delta_2) = \mathscr{R}'(\Delta)$.

تذكير:

مستقيم أولير هو المستقيم المار من H و Ω و G حيث
H هي مركز تعامد المثلث ABC
Ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC
G هي مركز ثقل المثلث ABC.

تمرين 22

المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$. لكل $z \neq -i$ نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي:

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{iz+3}{z+i}$$

و لتكن $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالتطبيق f

❶ حدد ثم أنشئ في المستوى $(\mathscr{P})$ المجموعات التالية:

$$(\Delta) = \{M(z) \in (\mathscr{P}) / |f(z)| = 1\}$$

$$(\Gamma) = \{M(z) \in (\mathscr{P}) / f(z) \in \mathbb{R}\}$$

$$(\Gamma_+) = \left\{M(z) \in (\mathscr{P}) / f(z) \in \mathbb{R}^{+*}\right\}$$

$(\Gamma_-) = \left\{M(z) \in (\mathscr{P}) / f(z) \in \mathbb{R}^{-*}\right\}$

❷ بين أن $(\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}) : (f(z)-i)(z+i) = 4$

❸ استنتج أن $AM.BM' = 4$ و $\overline{(\vec{u};\overrightarrow{BM'})} \equiv -\overline{(\vec{u};\overrightarrow{AM})}[2\pi]$

حيث A و B لحقاهما على التوالي $z_A=-i$ و $z_B=i$.

❹ حدد ثم أنشئ في المستوى $(\mathscr{P})$ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها A و شعاعها r بالتطبيق f.

❺ حدد ثم أنشئ في المستوى $(\mathscr{P})$ صورتي نصفا الدائرتين $(\mathscr{C}_+) = \{M(z)\in(\mathscr{C})/\mathrm{Im}(z)\geqslant -1\}$ و $(\mathscr{C}_-) = \{M(z)\in(\mathscr{C})/\mathrm{Im}(z)\leqslant -1\}$ بالتطبيق f.

❻ نعتبر المعادلة: $(E) : (z-a)^n-(z-b)^n=0$ حيث a و b عددين عقديين $a\neq b$ و n عدد صحيح طبيعي $(n\geqslant 2)$.

ا) بين أن صور حلول المعادلة (E) نقط مستقيمية.

ب) بين أن حلول المعادلة (E) تكتب على شكل:

$$z_k = \frac{a+b}{2} + i\frac{a-b}{2}\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

حيث $k\in\{1;2;\cdots;n-1\}$.

تمرين 23 . بكالوريا ع. رياضية يوليوز 2005

لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ نضع: $f(z)=\frac{iz-1}{(z+1)^2}$

❶ حدد العدد الحقيقي y بحيث $f(iy)=iy$.

❷ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E) : f(z)=z$.

نرمز بـ z_o و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث: $\mathrm{Re}(z_o)=0$ و $\mathrm{Re}(z_1)>\mathrm{Re}(z_2)$.

ا) تحقق أن $1+z_1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $1+z_2=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

ب) استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2

❸ نفترض أن $z=e^{i\alpha}$ حيث $0<\alpha<\pi$.

ا) بين أن: $\overline{f(z)} = izf(z)$.

ب) حدد α إذا علمت أن $f(z)+\overline{f(z)}=0$.

ج) أكتب $f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ حيث $(r;\varphi)\in]0;+\infty[\times\mathbb{R}$.

تمرين 24

نعتبر التطبيق:

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C}\setminus\{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\{i\} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{iz}{z-i} \end{array}$$

في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطة $B(i)$ و نربط كل نقطة M بلحقها z.

❶ حدد المجموعتين: $(E_1)=\{M(z)\in(\mathscr{P})/f(z)\in\mathbb{R}\}$ و $(E_2)=\{M(z)\in(\mathscr{P})/f(z)\in i\mathbb{R}\}$

❷ حل في المجموعة $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ المعادلة $f(z)=-2z+1$.

❸ لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ نضع $z-i=re^{i\alpha}$.

ا) أكتب $f(z)-i$ على الشكل المثلثي.

ب) حدد: $(\mathscr{C})=\left\{M(z)\in(\mathscr{P})/|f(z)-i|=\sqrt{2}\right\}$ و $(\mathscr{D})=\left\{M(z)\in(\mathscr{P})/\arg(f(z)-i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$

ج) حدد z_o بحيث $f(z_o)=1+2i$.

د) لتكن A لحقها z_o . تحقق أن A تنتمي إلى $(\mathscr{C})\cap(\mathscr{D})$ ثم أنشئ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{D})$.

تمرين 25

في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$. نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ و المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بحيث $\mathrm{Aff}(\vec{u})=z$ و $\mathrm{Aff}(\vec{v})=z'$

❶ بين أن: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان $\iff z\overline{z'}-\overline{z}z'=0$

❷ بين أن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(z\overline{z'}+\overline{z}z'\right)$

❸ بين أن: $\vec{u}\perp\vec{v} \iff z\overline{z'}+\overline{z}z'=0$

❹ ليكن : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و Ω نقطة لحقها w.

أ) نعتبر الدوران $\mathscr{R}\left(\Omega;\frac{\pi}{3}\right)$ بين أنه إذا كانت $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالدوران $\mathscr{R}$ فإن: $z'=-j^2z-jw$.

ب) استنتج أن : ABC متساوي الأضلاع

$\iff a+bj+cj^2=0$ ou $a+bj^2+cj=0$

$\iff a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$

$\iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

ج) حدد الأعداد العقدية z التي من أجلها يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع ، حيث $a=i$ و $b=z$ و $c=iz$

❺ بين أن

A و B و C مستقيمية $\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{vmatrix}=0$.

تمرين 26

❶ بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}) : e^{2ix}-1=2i\sin(x)e^{ix}$.

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z+1)^n=e^{2ina}$ و$a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*$.

❸ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.

تمرين 27

في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي $a=8$ و $b=6j$ و $c=8j^2$.

لتكن A' صورة B بالدوران $\mathscr{R}\left(C;\frac{\pi}{3}\right)$ و B' صورة C بالدوران $\mathscr{R}'\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$ و C' صورة A بالدوران $\mathscr{R}''\left(B;\frac{\pi}{3}\right)$

❶ أنشئ النقط A و B و C و A' و B' و C'.

❷ لتكن a' و b' و c' على التوالي ألحاق النقط A' و B' و C'.

ا) أحسب a' . و تحقق أن: $a'\in\mathbb{R}$.

ب) بين أن: $b'=16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و استنتج أن : $O\in(BB')$.

ج) بين أن: $c' = 7+7i\sqrt{3}$.

د) بين أن المستقيمات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في النقطة O.

❸ فيما يلي نود أن نبين أن المسافة $MA+MB+MC$ تكون دنوية إذا كان $M\equiv O$.

أ) أحسب $OA+OB+OC$. بين أن: $j^3=1$ و أن $1+j+j^2=0$.

ب) لتكن M نقطة لحقها z. تحقق مما سبق أن:

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right| = \left|a+bj+cj^2\right| = 22$$

ج) نقبل أن $|z+z'+z''| \leqslant |z|+|z'|+|z''|$

بين أن المسافة $MA+MB+MC$ تكون دنوية إذا كان $M\equiv O$.

تمرين 28

لكل z من $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ نضع $f(z)=\frac{z+i}{iz+1}$.

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين: $f(z)=2$ و $f(z)=-\frac{1}{z}$.

❷ أثبت أن: $(\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}) : f(z)=1 \iff |z|=1$

❸ حدد المجموعة: $(\Delta)=\{M(z)\in(\mathscr{P})/|f(z)|=1\}$

❹ بين أن: $\arg\left(f(z)\right) \equiv -\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\ [2\pi]$

❺ حدد المجموعة: $(E)=\left\{M(z)\in(\mathscr{P})/f(z)\in\mathbb{R}^+\right\}$

تمرين 29

المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.
نعتبر التطبيق F الذي يربط كل نقطة $M(Z)$ بالنقطة $M'(Z')$ بحيث $Z'=2\left(\frac{Z-1}{Z}\right)$.

❶ حل المعادلة $(\star) : Z'=Z$ و استنتج النقط الصامدة بـ F.

❷ أكتب الحلول على الشكل المثلثي.

❸ ليكن Z_1 و Z_2 حلي المعادلة $(\star)$.

بين أن: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right) : Z_1^{8n}+Z_2^{8n}=2^{4n+1}$.

❹ لتكن A و B لحقاهما $Z_A=1+i$ و $Z_B=1-i$.

أ) أثبت أن:

$$\left(\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{Z_A;Z_B\}\right) : \frac{Z'-Z_B}{Z'-Z_A}=i\frac{Z-Z_B}{Z-Z_A}$$

ب) استنتج أن: $\frac{M'B}{M'A}=\frac{MB}{MA}$ و أعط قياسا للزاوية $\left(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}\right)$ بدلالة أحد قياسات الزاوية $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$.

ج) حدد صورة المستقيم (AB) بالتطبيق F.

❺ نضع $Z=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in[0;\pi]$. أكتب Z' على الشكل المثلثي، ثم حدد مجموعة النقط $M'(Z')$ التي من أجلها يتغير θ في المجال $[0;\pi]$.

تمرين 30

ليكن $(A_o;A_1;A_2;A_3;A_4;)$ مضلعا منتظما و O مركزه. نعتبر م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$ بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{OA_o}$.

❶ حدد w_o و w_1 و w_2 و w_3 و w_4 على التوالي ألحاق النقط A_o و A_1 و A_2 و A_3 و A_4.

❷ بين أن: $w_k=w_1^k\ :\ \left(\forall k\in\{0;1;2;3;4\}\right)$.

❸ بين أن: $1+w_1+w_1^2+w_1^3+w_1^4=0$.

❹ استنتج أن $\cos\frac{2\pi}{5}$ هو أحد حلي المعادلة: $4z^2+2z-1=0$. ثم استنتج قيمة $\cos\frac{2\pi}{5}$.

❺ لتكن $B(-1)$. أحسب BA_2 بدلالة $\sin\frac{\pi}{10}$ ثم بدلالة $\sqrt{5}$.

❻ لتكن $I\left(\frac{i}{2}\right)$. نعتبر الدائرة $\mathscr{C}\left(I;\frac{1}{2}\right)$ و لتكن J نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و نصف المستقيم $[BI)$. أحسب BI و BJ.

❼ باستعمال المسطرة و المزواة فقط، أنشئ خماسيا منتظما.

تمرين 31

في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$.
نعتبر النقطتين $A(i)$ و $A'(-i)$ و التحويل:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{F} : \mathscr{P}\backslash\{A\} & \longrightarrow & \mathscr{P}\backslash\{A\} \\ M(z) & \longmapsto & M'\left(f(z)\right) \end{array} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} (\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}) \\ f(z)=\frac{iz}{z-i} \end{cases}$$

❶ حدد النقط الصامدة بالتطبيق F.

❷ بين أن F تقابل من $\mathscr{P}\backslash\{A\}$ نحو $\mathscr{P}\backslash\{A\}$ ثم حدد F^{-1}

❸ أ) بين أن: $f(z)\in\mathbb{R} \iff |z|^2=Im(z)$

و أن $\overline{z}=-z \iff f(z)\in i\mathbb{R}$.

ب) استنتج طبيعة المجموعتين:

$(\mathscr{D})=\{M(z)\in\mathscr{P}/f(z)\in i\mathbb{R}\}$

و $(\mathscr{C})=\{M(z)\in\mathscr{P}/f(z)\in\mathbb{R}\}$.

❹ أ) تحقق أن: $\left(\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\right) : f(z)-i=\frac{-1}{z-i}$.

ب) استنتج صورة الدائرة $\Gamma(A;r)$ بالتطبيق F.

ج) نعتبر النقط $M(z)$ و $M'\left(f(z)\right)$ و $N(\overline{z})$

بين أن: $(AM')//(A'N)$.

❺ نضع $Z=e^{i\theta}$ حيث $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. حدد الشكل المثلثي لـ $f(z)$، ثم استنتج أنه عندما يتغير θ على $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$، فإن $M'\left(f(z)\right)$ يتغير على منحنى يتم تحديده.

❻ ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر المعادلة: $(E_n) : (z-i)^n=(iz)^n$

أ) بين أن صور حلول المعادلة (E_n) نقط مستقيمية.

ب) بين أن حلول المعادلة (E_n) تكتب على الشكل $z_k=\frac{1}{2}\left(i-\tan\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ حيث $k\in\{0;1;\cdots;n-1\}$

❼ من أجل $p\in\mathbb{N}$، نضع: $P(z)=(z-i)^{4p+1}-(iz)^{4p+1}$.

أ) بين أن P حدودية محددة درجتها و معامل حدها الأكبر درجة.

ب) بين أن: $P(z)=(1-i)\prod_{k=0}^{4p}(z-z_k)$. استنتج أن: $\prod_{k=0}^{4p} z_k=\frac{i-1}{2}$. ثم حدد قيمة $\prod_{k=0}^{4p}\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)$