التمرين الأول: (6ن)

1 الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3y + 6$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $y(x) = Ae^{3x} - \frac{6}{3} = Ae^{3x} - 2$ حيث $A \in \mathbb{R}$.
إذن

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = A - 2 \Leftrightarrow A = 3$$

إذن حل النظمة هو الدالة : $y(x) = 3e^{3x} - 2$

2

⋆ حل (E_1) :
المعادلة المميزة ل (E_1) هي $r^2 + r + 1 = 0$ و $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$ و $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
الحل العام ل (E_1) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$ حيث $A, B \in \mathbb{R}$

⋆ حل (E_2) :
المعادلة المميزة ل (E_2) هي $r^2 - 4r + 4 = 0$ و $\Delta = 0$ و $r = 2$.
الحل العام ل (E_2) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $y(x) = (Ax + B)e^{2x}$ حيث $A, B \in \mathbb{R}$

⋆ حل (E_3) :
المعادلة المميزة ل (E_3) هي $r^2 - 3r + 2 = 0$ و $\Delta = 1$ و $r_1 = 1$ و $r_2 = 2$.
الحل العام ل (E_3) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $y(x) = Ae^{x} + Be^{3x}$ حيث $A, B \in \mathbb{R}$

3 حسب ما سبق $y(x) = (Ax + B)e^{2x}$ حيث $A, B \in \mathbb{R}$.

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = B$$

و لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}) : y'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x}$ إذن

$$y'(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = A + 2B \Leftrightarrow A = 1 - 2B = -1$$

إذن حل النظمة هو الدالة : $y(x) = (1 - x)e^{2x}$

التمرين الثاني: (6ن)

1 لكل x من $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ لدينا :

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{x - 1 - x + 2}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

إذن :

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= [\ln|x-2| - \ln|x-1|]_3^4 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

2 لدينا $V = \left(\pi\int_0^1 (f(x))^2 dx\right) v$ حيث v وحدة قياس الحجم .
و $\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2e^{x} + 1)dx = \frac{e^2 - 4e + 5}{2}$
إذن

$$V = \pi\left(\frac{e^2 - 4e + 5}{2}\right) v$$

3

أ- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $-1 \leqslant \cos(nx) \leqslant 1$ إذن :

$$-\int_0^{\frac{\pi}{n}} dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} \cos(nx)dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} dx$$

و منه

$$-\frac{\pi}{n} \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi}{n}$$

و بماأن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\pi}{n} = 0$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$$

ب- لدينا $I_n = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

التمرين الثالث: (8ن)

نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

1 نبين أن (S) فلكة مركزها $\Omega(1, 1, 1)$ و نحدد شعاعها .

$$\begin{aligned} M \in (S) \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 + 3 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

نضع $\Omega(1, 1, 1)$ إذن $\Omega M^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$
و منه $M \in (S) \Leftrightarrow \Omega M^2 = 3^2 \Leftrightarrow \Omega M = 3$
وبالتالي (S) هي فلكة مركزها $\Omega(1, 1, 1)$ و شعاعها $R = 3$.

2 لدينا $A(2, 3, 3)$ إذن :
$A\Omega = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$
و منه $A\Omega = R$ أي $A \in (S)$.

3 (P) مماس للفلكة (S) في A إذن (P) يمر من A و $\overrightarrow{A\Omega}(1, 2, 2)$ منظمية له . إذن معادلة ديكارتية ل (P) تكتب على الشكل $x + 2y + 2z + d = 0$. و لدينا :

$$A \in (P) \Leftrightarrow 2 + 2\times3 + 2\times3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -14$$

إذن $(P) \quad : \quad x + 2y + 2z - 14 = 0$

4 لدينا (Δ) يمر من $O(0, 0, 0)$ وعمودي على (P) إذن فهو يمر من $O(0, 0, 0)$ و $\overrightarrow{A\Omega}(1, 2, 2)$ موجهة له . و منه :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

تمثيل بارامتري ل (Δ) .

5 نعوض التمثيل البارامتري ل (Δ) في معادلة (S) فنحصل على :

$$9t^2 - 10t - 6 = 0$$

لدينا $\Delta = 316 = 2^2\times79$ و $t_1 = \frac{5 + \sqrt{79}}{9}$ و $t_2 = \frac{5 - \sqrt{79}}{9}$.
و منه نقطتا تقاطع (Δ) و (S) هما $E(t_1, 2t_1, 2t_1)$ و $F(t_2, 2t_2, 2t_2)$.

6 $(Q) : z - 2 = 0$

أ- لدينا $d(\Omega, (Q)) = \frac{|z_\Omega - 2|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 2|}{\sqrt{1}} = 1 < R$
إذن (Q) يقطع (S) وفق دائرة (C) شعاعها :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$

ب- نعتبر (D) المستقيم المار من Ω و العمودي على (Q) إذن H مركز الدائرة (C) هو تقاطع (D) و (Q) .
المتجهة $\vec{n}(0, 0, 1)$ منظمية ل (Q) إذن فهي موجهة ل (D) و منه :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

تمثيل بارامتري ل (D)
نعوض في معادلة (Q) فنجد $1 + t - 2 = 0$ أي $t = 1$ إذن

$$H(1, 1, 2)$$