Notions de logique

I. Proposition – fonction propositionnelle

1. Proposition

Activité

1) Cocher la case convenable :

Enoncé	*Vrai*	*Faux*
Tout nombre pair est divisible par 4		
La somme de deux nombres pairs est un nombre pair		
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire		
Le nombre 214 est un multiple de 3		

2) Y a-t-il des énoncés sont varis et faux au même temps.

➪ *Définition*

On appelle ***proposition***, tout énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguïté qu'il est vrai ou faux, et se note souvent P,Q,R,.....

Remarque

- L'adjectif « vrai » ou « faux » qui accompagne la proposition s'appelle « ***valeur de vérité »***
- Si P est une proposition vraie, on dit alors que la valeur de vérité de P est « Vrai » et se note « V » et Si P est une proposition fausse, on dit alors que la valeur de vérité de P est « faux » et se note « F ».

Table de vérité

P	
V	F

Ou

P	
1	0

Exemples

- $P : "3\times2=6"$: V ; • $Q :$ " -1 est une solution de l'équation $x^2-2x+3=0$" F

➪ *Opérations sur les propositions*

➪ *Négation d'une proposition*

Etant donné une proposition P .

La négation de la proposition P, est la proposition qui a une valeur de vérité « faux » si la proposition P est vraie, et une valeur de vérité « vrai » si la proposition P est fausse est se note $\overline{P}$ ou $\neg P$.

Table de vérité

p	$\overline{P}$
V	**F**
F	**V**

Pr. ZILLI MOUAD

Remarque

Symbole	Négation
$=$	$\neq$
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$\leq$	$>$
$\geq$	$<$
$\in$	$\notin$

Application ①

Donner la négation des propositions suivantes, en précisant la valeur de vérité :

- $P:"\sqrt{17} \leq \sqrt{8}+\sqrt{9}"$; • $Q:"\pi \in \mathbb{Q}"$; • $R:"\frac{4}{5} \neq \frac{16}{25}"$

➯ Conjonction de deux propositions

La conjonction de deux proposition P et Q est la proposition qui est vrai uniquement si les deux propositions Pet Q sont vraies en même temps et se note (P et Q) ou ($P \wedge Q$).

Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Application ②

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"3 \in \mathbb{Z}$ ***et*** $3 \times 5 = 14"$.
- $Q:"$ 5 divise 35 ***et*** 5 est un nombre premier"
- $R:"$ Le nombre $x=7$ ***et*** $4x-28=0"$.
- $S:"$ 12 est un nombre impair ***et*** $12 \succ 0"$.

➯ Disjonction de deux propositions

La disjonction de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si au moins l'un des deux propositions est vraie on la note (P ou Q) ou $P \vee Q$.

Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Pr. ZILLOUMOUAD

Application ③

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"\sqrt{2}\in\mathbb{N}$ **ou** $0\neq 5"$.
- $Q:"12\leq 7$ **ou** 5 est un nombre pair" .
- $R:"3+3=5$ **ou** $7^2>36"$.

➪ Implication de deux propositions

L'implication de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « faux » si la proposition P est vraie et la proposition Q est fausse et on la note $P\Rightarrow Q$.

$P\Rightarrow Q$: se lit P implique Q ou bien « si P alors Q ».

Table de vérité

P	Q	$P\Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Application ④

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"2<5\Rightarrow -1^2=1"$; • $S:"0>3\Rightarrow$ 3 est un nombre paire" .
- $Q:"2^2=-4\Rightarrow\sqrt{25}=5"$; • $T:"6=2\times 3\Rightarrow$ 37 est un nombre premier" .

Remarque

- L'implication $Q\Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P\Rightarrow Q$.
- $"P\Rightarrow Q"$ et $"Q\Rightarrow P"$ n'ont pas nécessairement même valeur de vérité.

Exemple

- $P:"$ 4 est un nombre pair" ; $Q:"-3>0"$.

La proposition $"P\Rightarrow Q"$ est fausse mais la proposition $"Q\Rightarrow P"$ est vraie.

- $P:"3=1.5"$; $Q:"$ 36 divise 8".

La proposition $"P\Rightarrow Q"$est vraie et aussi la proposition $"Q\Rightarrow P"$ est vraie.

➪ Equivalence de deux propositions

L'équivalence de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si P et Q ont même valeur de vérité on la note $P\Leftrightarrow Q$.

$P\Leftrightarrow Q$: se lit P équivalente la proposition Q .

Pr. ZELLOU MOUAD

Table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Application ⑤

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- P :" ABC un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$" .
- Q :"$x^2+1>0 \Leftrightarrow -4 \in \mathbb{N}$" .
- R :"$4\times3=20 \Leftrightarrow 5$ est un nombre paire" .
- S :"$1.25 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 25$ est un multiple de 5".

➯ Lois de Morgan

Soit P, Q et R trois propositions on a

$$(1).P \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$$

$$(2).(PetQ) \Leftrightarrow (QetP)$$

$$(3).(PouQ) \Leftrightarrow (QouP)$$

$$(4).\overline{(PetQ)} \Leftrightarrow (\overline{p})ou(\overline{Q})$$

$$(5).\overline{(PouQ)} \Leftrightarrow (\overline{p})et(\overline{Q})$$

$$(6).(Pet(QouR)) \Leftrightarrow (PetQ)ou(PetR)$$

$$(7).(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

2. Fonction propositionnelle

Activité

On considère l'expression suivante :"$x \in \mathbb{R} / x^2 - x \geq 0$"

1) L'expression précédente s'agit-il d'une proposition ?
2) Donner la valeur de vérité de l'expression précédente si $x=2$ et si $x=\frac{1}{2}$

Définition

On appelle ***fonction propositionnelle***, tout énoncé mathématique contient une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble bien définie, et qui est susceptible d'être une proposition si on attribue à ses variables certaines valeurs particulier dans l'ensemble et se note $P(x), P(x,y)$.....

Exemple

- $P(x)$:"$x \in \mathbb{Z}; x+2>0$" est une fonction propositionnelle

$P(-1)$ est vraie et $P(-5)$ est fausse.

Pr. ZILLOU MOUAD

- $Q(x,y):"(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2=4"$ est une fonction propositionnelle

$Q(0;2)$ est vraie et $Q(-1;1)$ est fausse.

II. Quantificateurs

Activité

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes

P :" Il existe au moins un nombre réel x tel que $|3x-2|=4$"

Q :" Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $x^2+1\geq 0$"

S :" Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $x^2>0$"

➯ Définition

Soit $"(x\in E);P(x)"$ une fonction propositionnelle telle que E est un ensemble bien défini.

○ La proposition $"(\exists x\in E);P(x)"$ est une proposition vraie lorsque on trouve au moins un x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie.

On dit dans ce cas « il existe un x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie »

Le symbole $\exists$ s'appelle ***le quantificateur existentiel.***

○ La proposition $"(\forall x\in E);P(x)"$ est une proposition vraie lorsque les propositions $P(x)$ soient vraies pour tout x dans E.

On dit dans ce cas « pour tout x appartenant à E, $P(x)$ soit vraie »

Le symbole $\forall$ s'appelle ***le quantificateur universel.***

En particulier : S'il existe un seul élément x dans E vérifier $P(x)$, alors dans ce cas on écrit $"(\exists! x\in E),P(x)"$.

Le symbole $\exists!$ s'appelle ***quantificateur d'existence et d'unicité***.

Exemple

⊗ On considère la fonction propositionnelle suivante : $"(x\in\mathbb{Z});x^2-1=0"$

- $"(\forall x\in\mathbb{Z});x^2-1=0"$ F
- $"(\exists x\in\mathbb{Z});x^2-1=0"$ V
- $"(\exists! x\in\mathbb{Z});x^2-1=0"$ F

Question : donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P:"(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R});y=2x-1"$; $Q:"(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});y=2x-1"$

$S:"(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});y=2x-1"$

Pr. OUAD

Remarque :

•L'ordre des quantificateurs de même nature n'a aucune importance pour déterminer le sens du terme quantifié.
•L'ordre des quantificateurs de nature différents est important pour déterminer le sens du terme quantifié.

⇨ *Négation d'une proposition quantifiée*

Propriété

Soit "$(x \in E); P(x)$" une fonction propositionnelle

⊗ La négation de la proposition "$(\exists x \in E); P(x)$" est la proposition "$(\forall x \in E); \overline{P(x)}$".

⊗ La négation de la proposition "$(\forall x \in E); P(x)$" est la proposition "$(\exists x \in E); \overline{P(x)}$".

Exemple

- La négation de la proposition P : "$(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0$" est la proposition $\overline{P}$: "$(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 < 0$".
- La négation de la proposition P : "$(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 = 0$" est la proposition $\overline{P}$: "$(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 \neq 0$".

Application ⑥

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes, puis donner leur négation.

•"$(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 3x + 4 > 0$" ; •"$(\exists x \in \mathbb{Q}); 2x^2 + 3x = 0$" ; •"$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{N})\, x^2 + y^2 \geq 1$" .

•"$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y > 0$" ; •"$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y > 0$" ; •"$(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{N}^*); x + y = 0$".

III. Raisonnements mathématiques

1. *Raisonnement par la contraposition*

Définition

Etant donné deux propositions P et Q

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie.

Ce raisonnement est basé sur la loi logique suivant $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

Exemple

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; $x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$

Pour montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; $x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$ il suffit de montrer que

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$; $3\sqrt{x}+1=3\sqrt{y}+1\Rightarrow x=y$

On a $3\sqrt{x}+1=3\sqrt{y}+1\Rightarrow 3\sqrt{x}=3\sqrt{y}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y}\Rightarrow x=y$

Donc d'après le raisonnement par le contraposé on a $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$; $x\neq y\Rightarrow 3\sqrt{x}+1\neq 3\sqrt{y}+1$.

Application ⑦

En utilisant le raisonnement par le contraposé montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)(\forall y\in\mathbb{R}^*)$

- $(x\neq -y)$; $y\neq\frac{-3}{4}x\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}\neq 7$
- $x\neq 1$ ou $y\neq 1$ $\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2}\neq x+y-1$

2. ***Raisonnement par équivalences successives***

Propriété

Soient P,Q et R trois propositions

Raisonnement par l'équivalence est basé sur la loi logique suivant :

« Si $P\Leftrightarrow Q$ et $Q\Leftrightarrow R$ alors $P\Leftrightarrow R$ ».

Exemple

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$; montrer que $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow(x-1)^2$

On a $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow x^2+1-2x\geq 0\Leftrightarrow(x-1)^2$

Application ⑧

1) Soit $x\in\mathbb{R}$ montrer que

- $\sqrt{x^2+3}\geq 2\Leftrightarrow x\geq 1$
- $|x-1|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}<\frac{1}{x+1}<\frac{2}{3}$

2) Soient x et y deux nombres réels tels $x\geq 1$ et $y\geq 4$ montrer que

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow x=2$ et $y=8$

3. ***Raisonnement par disjonction des cas***

Propriété

Etant donné deux propositions P et Q

Il faut que les deux propositions $P\Rightarrow Q$ et $\overline{P}\Rightarrow Q$ soient vraies.

Pr. ZILLOU FOUAD

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E): 2|x-1|+x=0$

Premier cas : si $x-1\geq 0$ alors $|x-1|=x-1$

Donc l'équation (E) devient $2(x-1)+x=0$

c.-à-d. $2x-2+x=0$ par conséquent $x=\frac{2}{3}$

Deuxième cas : si $x-1\leq 0$ alors $|x-1|=-x+1$

Donc l'équation (E) devient $2(-x+1)+x=0$

c.-à-d. $-2x+2+x=0$ par conséquent $x=2$

D'où $S=\left\{\frac{2}{3},2\right\}$

Application ⑨

1) Montrer $(\forall n\in\mathbb{N})$; $n(n+1)$ est un nombre pair.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-|x-2|+5=0$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante $|2x-1|+|2x+1|\geq 4$

---

4. *Résonnement par contre-exemple*

Exemple

Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}); x^2>0$ est fausse

Si $x=0$ alors $0^2>0$ ce qui est impossible par conséquent $(\forall x\in\mathbb{R}); x^2>0$ est fausse.

Application ⑩

Montrer que les propositions suivantes sont fausses

- $(\forall x\in\mathbb{N})$ le nombre x^2 est un nombre impair
- $(\forall n\in\mathbb{N})$ le nombre n^2+n+1 est un nombre premier.

---

5. *Raisonnement par l'absurde*

Activité

Soient P et Q deux propositions telles que "$\overline{Q}\Rightarrow P$ et $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$" est une proposition vraie

Si Q est fausse, que peut-on dire pour la valeur de vérité de P.

Règle

Soit P une proposition. Pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose que P est fausse puis trouver la contradiction avec les données d'exercices et le prérequis.

Pr. ZILLOU MOUAD

Exemple

Montrer $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$

On suppose que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$ alors $(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = x-1$

On a $x^2 = x-1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

On a $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$

Donc l'équation n'a pas de solutions ; donc il y a une contradiction

Par conséquent $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$.

Application ①①

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n-1 \neq n-2$
2) ABC un triangle de côtés $AB = 4, AC = 3$ et $BC = 6$. Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A .
3) Soient $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$ tels que $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Montrer que $x \neq 1$, $y \neq 1$ et $z \neq 1$

6. Résonnement par récurrence

Propriété

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$

Pour montrer que "$(\forall n \geq n_0); P(n)$" est vraie, on suit les étapes suivantes :

- Vérifier que $P(n_0)$ est vraie

"$(\forall n \geq n_0)$;

- Supposer que "$P(n)$" est vraie.
- Montrer que $P(n+1)$ est vraie
- Conclure que "$(\forall n \geq n_0); P(n)$" est vraie
- D'après le principe de récurrence on a "$(\forall n \geq n_0); P(n)$".

Remarque

En utilisant le principe de récurrence si n est un nombre entier naturel.

Exemple

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n+1$

Pour $n = 0$ on a $3^0 = 1 \geq 2\times0+1$ est une proposition vraie

$(\forall n\in\mathbb{N})$:

Supposons que $3^n \geq 2n+1$ est vraie

Montrer $(\forall n\in\mathbb{N});3^{n+1} \geq 2(n+1)+1$ c.-à-d. $(\forall n\in\mathbb{N});3^{n+1} \geq 2n+3$ est aussi vraie

On a $3^n \geq 2n+1$ $3^n \geq 2n+1 \Rightarrow 3\times 3^n \geq 3(2n+1) \Rightarrow 3^{n+1} \geq 6n+3$

Or on a $(\forall n\in\mathbb{N})$; $6n+3 \geq 2n+3$

Alors $(\forall n\in\mathbb{N})$; $3^{n+1} \geq 2n+3$

Donc d'après le principe de récurrence on a $(\forall n\in\mathbb{N});3^n \geq 2n+1$.

<u>Application ①②</u>

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que

- $2^n \geq n+1$
- $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$
- Le nombre 4^n-1 est un multiple de 3.

Pr: ZILLOU MOUAD