Généralités sur les fonctions numérique

I. Généralités

1. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée

☞Activité

Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2) Montrer que $(\forall x \in D_f);\ f(x) \leq 1$
3) Montrer que $(\forall x \in D_f);\ f(x) \geq 0$
4) Déduire que $(\forall x \in D_f); 0 \leq f(x) \leq 1$

Définition

Soit f une fonction définie un intervalle I $(I \subset \mathbb{R})$.
On dit que :
* f est ***majorée*** sur I s'il existe un nombre réel M tel que $(\forall x \in I);\ f(x) \leq M$
* f est ***minorée*** sur I s'il existe un nombre réel m tel que $(\forall x \in I);\ f(x) \geq M$
* f est ***bornée*** sur I s'elle est majorée et minorée sur I $\left((\forall x \in I); m \leq f(x) \leq M\right)$.

Remarque :

*Si f est majorée par M sur I alors (C_f) est au-dessous de la droite d'équation $y=M$ sur I.

*Si f est minorée par m sur I alors (C_f) est au-dessus de la droite d'équation $y=m$ sur I .

Exemple

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

Montrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+2} \leq \dfrac{1}{2}$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) \leq \dfrac{1}{2}$, par conséquent f est majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Application ①

Soient f, g et h trois fonctions numériques telles que

$f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$ et $g(x)=\cos(x)+\dfrac{1}{2}$

1) Déterminer D_f et D_g .
2) Montrer que pour tout $x\in[2;+\infty[$ f est majorée par 2.
3) Montrer que pour tout $x\in]-\infty;2]$ f est minorée par 1.
4) Montrer que g est bornée pour tout $x\in D_g$.

Propriété :

Soit f une fonction définie un intervalle I $(I\subset\mathbb{R})$.

f est dite ***bornée*** sur I ; si $\exists k\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $|f(x)|\leq k$

Application②

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin(x)+\cos(x)$.

Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R});|f(x)|\leq 3$

2. *Extremums d'une fonction numérique*

Définition

Soit f une fonction définie sur I et soit a un élément de I.

- On dit $f(a)$ est une **valeur minimale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x)\geq f(a)$.
- On dit $f(a)$ est une **valeur maximale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x)\geq f(a)$
- Si $f(a)$ est une valeur maximale ou une valeur minimale de f sur I alors le point $A(a;f(a))$ est un **extremum** de f sur I.

Application③

Soit f une fonction définie par $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2) Montrer que $f(2)$ est une valeur minimale de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
3) Montrer que $f(-2)$ est une valeur maximale de la fonction f sur $]-\infty;0[$.

3. *Fonction périodique*

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition et soit T un nombre réel.

On dit que f est une fonction périodique et T sa période si et seulement si :

$\forall x\in D_f$ on a $\begin{cases}(x+T)\in D_f\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$

Exemples

$f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \sin(x)$ sont des fonction périodique et 2π leur période.

$h : x \mapsto \tan(x)$ est une fonction périodique et π sa période.

Application ④

Soient f, g et h trois fonctions numériques telles que

$f(x) = \cos^2(x)$; $g(x) = \sin(2\pi x)$ et $h(x) = \tan(2x)$

Montrer que les fonctions f, g et h sont des fonctions périodiques et $\pi, 1$ et $\frac{\pi}{2}$ sont respectivement leurs périodes.

Remarque

Si f est une fonction périodique et T alors $(\forall x \in D_f), (\forall k \in \mathbb{Z})$ on a $f(x + kT) = f(x)$

4. Comparaison de deux fonctions

Egalité de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques et D_f et D_g ses ensembles de définitions respectives.

On dit que f et g sont ***égales*** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$\bullet D_f = D_g = D$

$\bullet (\forall x \in D); f(x) = g(x)$

Application ⑤

Etudier l'égalité de f et g dans les cas suivants :

$\bullet f(x) = \frac{x}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \bullet f(x) = \sqrt{(x+1)^2}$ et $g(x) = x + 1$ $\quad \bullet f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ et $g(x) = x - 1$

Définition

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur I .

On dit que f est inférieur ou égal à g si et seulement si $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$ et on écrit $f \leq g$

Interprétation graphique

Si $f \leq g$ alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur I .

Si $f \geq g$ alors (C_f) est au-dessus de (C_g) sur I .

Si $f \leq 0$ alors (C_f) est au-dessous d'axe des abscisses sur I .

Si $f \geq 0$ alors (C_f) est au-dessus d'axe des abscisses sur I .

Application ⑥

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que : $f(x)=x^2-2x+1$ et $g(x)=-2x^2+4x+1$.

1) Comparer f et g pour tout x dans ces intervalles suivants $]-\infty;0]$; $]2;+\infty[$ et $[0;2]$.
2) Déduire la position relative (C_f) et (C_g) dans les intervalles $]-\infty;0]$; $]2;+\infty[$ et $[0;2]$.

5. *Image d'un intervalle par une fonction*

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I $(I \subset D_f)$.

L'ensemble des éléments $f(x)$, tel que $x \in I$, s'appelle l'image de l'intervalle I par la fonction f et se note $f(I)$ telle que $f(I)=\{f(x) / x \in I\}$.

◎Technique

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit $[a;b]$ un intervalle de I

- Si f est croissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b])=[f(a);f(b)]$.
- Si f est décroissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b])=[f(b);f(a)]$.
- Si f change la monotonie sur $[a;b]$ alors $f([a;b])=[V_{\min};V_{\max}]$ où $V_{\min}$ et $V_{\max}$ sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de f sur I .

Application ⑦

Soit f une fonction numérique dont le tableau de variations est le suivant :

x	-7		-2		4		8
$f(x)$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3

1) Déterminer $f([-2;4])$ et $f([4;8[)$
2) Déterminer $f([-7;8[)$

6. *Monotonie d'une fonction numérique*

a. *Définition*

Soit f une fonction définie sur I et soient a et b deux nombres réels dans I

- Si $a<b$ et $f(a)<f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur I
- Si $a<b$ et $f(a)>f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

- Si $a<b$ et $f(a)=f(b)$ alors on dit que la fonction f est **constante** sur I.

b. ***Monotonie et parité***

Propriété

Soit une fonction numérique et D_f son ensemble de définition symétrique par rapport à 0 et soit I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et J son symétrique par rapport à 0

- **Si f est paire :**

∗ Si f est croissante sur I alors f est décroissante sur J

∗ Si f est décroissante sur I alors f est croissante sur J.

- **Si f est impaire.**

∗ La fonction f garde le même sens de variations sur I et sur J.

Application⑧

Le tableau présente les variations d'une fonction f

x	-4		-3		1 ‖	3	4
$f(x)$	5	↘	-1	↗	‖		

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
2) Compléter le tableau si f est **paire**.
3) Compléter le tableau si f est **impaire**.

c. ***Monotonie de $f+k$ et $k.f$***

Propriété

Soit f une fonction numérique et $k \in \mathbb{R}^*$

- La fonction $f+k$ et la fonction f ont même sens de variations.
- Si $k>0$ alors la fonction $k.f$ et la fonction f ont même sens de variations
- Si $k<0$ alors la fonction $k.f$ et la fonction f ont des sens de variations contraires

Application

Soit f une fonction numérique dont le tableau de variations est comme suit

x	-3		0	1		$\frac{5}{2}$		4
$f(x)$	5	↘	1	↗ 3	↘	-2	↗	7

1) Dresser le tableau de variations de $f-3$
2) Dresser le tableau de variations de $2f$ et $-2f$

II. Composée de deux fonctions

Activité

On considère les fonctions f et g telles que : $f(x)=\sqrt{x-2}$ et $g(x)=x-1$

1)
a) Calculer $g(5)$ puis déduire $f\left(g(5)\right)$
b) Calculer $g(4)$ puis déduire $f\left(g(4)\right)$
c) Peut-on calculer $f\left(g(1)\right)$?
2) Déterminer un intervalle I tel que $(\forall x\in I); f\left(g(x)\right)\in\mathbb{R}$, puis déduire l'expression de $f\left(g(x)\right)$ pour tout $x\in I$

1. Définition

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit g une fonction numérique définie sur J telle que $(\forall x\in I); f(x)\in J$.

La composée de la fonction f et g ,dans cet ordre, est la fonction qu'on note gof telle que $(\forall x\in I); gof(x)=g\left(f(x)\right)$.

Remarque

- Ensemble de définition de gof est : $D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\right\}$
- $x\in D_{gof}\Leftrightarrow x\in D_f$ et $f(x)\in D_g$.

Application ⑨

On considère les fonctions f et g telles que : $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ et $g(x)=2x^2+1$

1) Déterminer D_f, D_g, D_{gof} et D_{fog}
2) Déterminer l'expression de $gof(x)$ pour tout $x\in D_{gof}$ et l'expression de $fog(x)$ pour tout $x\in D_{fog}$
3) Ecrire la fonction h se forme d'une composée de deux fonctions telle que $(\forall x\in\mathbb{R}); h(x)=\dfrac{x^2}{|x|+1}$

2. La monotonie de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit g une fonction numérique définie sur J telle que $(\forall x\in I); f(x)\in J$.

- Si f et g ont même sens de variations alors la fonction gof est croissante sur I .
- Si f et g ont des sens de variations contraires alors la fonction gof est décroissante sur I .

Application ⑩

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x)=x+1$ et $g(x)=\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f et D_g
2) Déterminer D_h telle que $h=gof$.
3) Etudier la monotonie de la fonction h sur D_h

Remarque

Pour étudier la monotonie de gof sur un intervalle I , on étudier la monotonie de f sur I puis on étudie la monotonie de g sur $J=f(I)$.

III. Représentation graphique des fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$

1. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^3\ (a \neq 0)$

On considère f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3$ $(a \neq 0)$ et (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

*Parité de la fonction f

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x)=a(-x)^3=-ax^3=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

*Variations de f

Or f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

* **Si** $a>0$

Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x<y$

$x<y \Rightarrow x^3<y^3 \Rightarrow ax^3<ay^3 \Rightarrow f(x)<f(y)$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

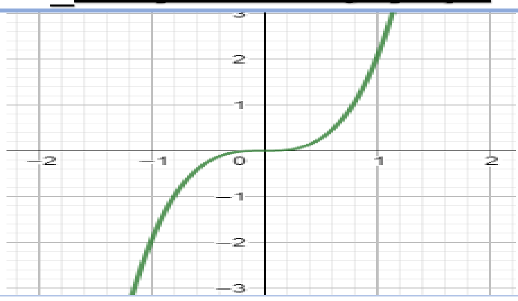
Or f est une fonction impaire, alors f est croissante aussi sur $\mathbb{R}^-$

Par conséquent f est croissante sur $\mathbb{R}$

* **Tableau de variations**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

* **La représentation graphique**



* ***Si*** $a<0$

Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x<y$

$x<y \Rightarrow x^3<y^3 \Rightarrow ax^3>ay^3 \Rightarrow f(x)>f(y)$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

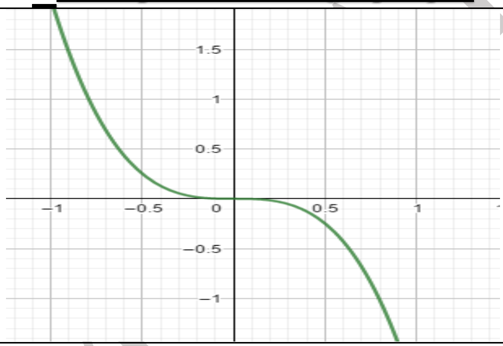
Or f est une fonction impaire, alors f est décroissante aussi sur $\mathbb{R}^-$

Par conséquent f est décroissante sur $\mathbb{R}$

* ***Tableau de variations***

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

* ***La représentation graphique***



2. ***Représentation graphique de la fonction*** $x \mapsto \sqrt{x+a}$

On considère f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x+a}$ et (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

****Domaine de définition*** $D_f=[-a;+\infty[$

****Variations de*** f

Soient x et y dans D_f tels que $x<y$

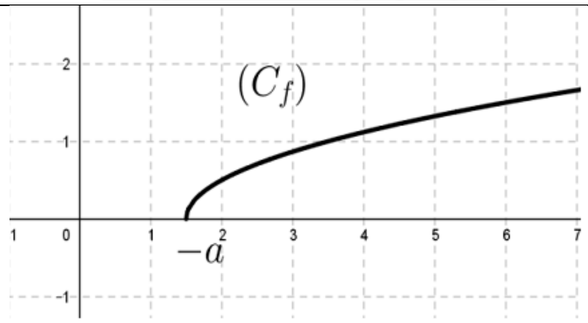
$x<y \Rightarrow x+a<y+a \Rightarrow \sqrt{x+a}<\sqrt{y+a} \Rightarrow f(x)<f(y)$

Donc f est croissante sur $[-a;+\infty[$

**** Tableau de variations***

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

**** Représentation graphique***



Remarque

On peut construire la courbe de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$ à partir de la courbe d'une fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en utilisant une translation de vecteur $-a\vec{i}$.