



Université Cadi Ayyad

Faculté des Sciences Semlalia

Laboratoire de Physique des Hautes Énergies et Astrophysique

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme de master en :

**Physique des Hautes Énergies, Astrophysique et Physique
computationnelle**

Physique des trous noirs : thermodynamique et transitions de phase

Auteur : Ismail EZZAKI

Encadrant : Mohamed CHABAB

Soutenu devant la commission d'examen :

- | | |
|---------------------------|--|
| - Professeur : A.ADHCHOUR | - P.E.S Université Cadi Ayyad de Marrakech |
| - Professeur : M.OULNE | - P.E.S Université Cadi Ayyad de Marrakech |
| - Professeur : M.CHABAB | - P.E.S Université Cadi Ayyad de Marrakech |

Année universitaire 2019/2020

Résumé

L'objectif de ce rapport est d'examiner la thermodynamique des trous noirs et ses transitions de phase. Nous commençons par discuter le côté théorique des trous noirs avec une courte introduction à la relativité générale. Dans le deuxième chapitre, nous discuterons des types de trous noirs astrophysiques et de quelques aperçus sur la formation et la détection d'un trou noir et Dans le troisième chapitre du rapport, nous dérivons les quatre lois de la thermodynamique des trous noirs dans le contexte de la relativité générale classique. Pour compléter cela, nous utilisons la limite semi-classique de la mécanique quantique pour montrer que les trous noirs rayonnent et ont une température thermodynamique non nulle, Enfin, nous discutons de les transitions de phase des trous noirs dans l'espace de phase étendu, où la constante cosmologique est interprétée comme une pression thermodynamique et traitée comme une variable thermodynamique. Pour des raisons de simplification, nous employons parfois le système d'unités géométrique donné par : $\hbar = k = c = G = 1$.

Abstract

The aim of this thesis is to provide a review of black hole thermodynamics and its phase transition. We start by discussing the theoretical side of black holes with a brief introduction to general relativity. In the second chapter, we will discuss the astrophysical black hole types and some insights about the formation and detection of a black hole and in the third chapter of the thesis, we derive the four laws of black hole thermodynamics in the context of classical general relativity. To supplement this, we use the semi-classical limit of quantum mechanics to show that black holes radiate and have a non-zero thermodynamic temperature, Lastly, we discuss the black hole phase transition in extended phase space, where the cosmological constant is interpreted as thermodynamic pressure and treated as a thermodynamic variable. For reasons of simplification, we sometimes use the system of geometric units given by : $\hbar = k = c = G = 1$.

Remerciement

Au terme de la rédaction de ce mémoire, je tiens tout d'abord à remercier sincèrement Mr **Mohamed Chabab**, professeur au département de Physique de la Faculté des Sciences Semlalia et directeur du laboratoire de physique des hautes énergies et astrophysique, pour son suivi et pour son énorme soutien, qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de la période du projet.

J'adresse toute ma gratitude à Monsieur Le Professeur **Mustapha Oulne** et à Monsieur Le Professeur **Abderrahim Adahchour** d'avoir immédiatement accepté d'être membres de ce jury.

Je tiens à remercier aussi toute l'équipe pédagogique de la faculté des Sciences Semlalia pour les efforts fournis pour préparer les conditions de travail optimales.

Je suis particulièrement sensible à la très bonne ambiance du Laboratoire de Physique des Hautes Énergies et Astrophysique.

Enfin, je dédie ce modeste travail à mes parents, mes frères, mes amis et Ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Les trous noirs dans la théorie	5
1.1 Les bases de la relativité générale	5
1.1.1 Introduction	5
1.1.2 Les dérivés covariants	6
1.1.3 Les équations d'Einstein	7
1.1.4 La limite newtonienne	8
1.1.5 Les trous noirs	10
1.2 Trous noirs dans la relativité générale	11
1.2.1 La métrique de Schwarzschild	11
1.2.2 La métrique de Reissner Nordstrom	16
1.2.3 La métrique de Kerr	20
1.2.4 La métrique de Kerr-Newman	25
2 Les trous noirs en pratique	27
2.1 Les types de trous noirs	27
2.1.1 Les trous noirs stellaires	27
2.1.2 Les trous noirs supermassifs	28
2.1.3 Les trous noirs intermédiaires	28
2.1.4 Les trous noirs primordiaux	29
2.2 La formation des trous noirs	29
2.3 La détection des trous noirs	31
2.3.1 Les systèmes binaires	31
2.3.2 Le décalage des ondes électromagnétiques	32
2.3.3 Les rayons gamma	33
2.3.4 La présence de jets	33
2.3.5 La détection des ondes gravitationnelles	35

3	La thermodynamique des trous noirs	36
3.1	Les lois de la thermodynamiques des trous noirs	36
3.1.1	Deuxième principe	36
3.1.2	Premier principe	41
3.1.3	Principe zéro	42
3.1.4	Troisième principe	42
3.2	Rayonnement du trou noir	43
3.2.1	Effet Hawking	43
3.2.2	Luminosité d'un trou noir	45
3.2.3	Durée de vie d'un trou noir	46
3.3	L'analogie entre la thermodynamique standard et la thermodynamique des trous noirs	47
3.4	Les transitions de phase et thermodynamique d'équilibre	49
3.5	La géométrie thermodynamique	49
4	Les transitions de phase des trous noirs	50
4.1	Les transitions de phase des trous noirs asymptotiquement plat	50
4.1.1	Trou noir de Schwarzschild	50
4.1.2	Trou noir de Reissner Nordstrom	51
4.1.3	Trou noir de Kerr et Kerr Newman	53
4.2	Les transitions de phase des trous noirs AdS	56
4.2.1	Trou noir de Schwarzschild AdS	56
4.2.2	Trou noir de Reissner Nordstrom AdS	58
4.2.3	Trou noir de Kerr AdS	62
	Conclusion	65
	Bibliographie	66
A	ANNEXE	69
A.1	Diagramme de penrose	69
A.1.1	Diagramme de Penrose pour trou noir statique chargé $GM^2 > q^2$	71
A.2	Les calculs avec SageMath	73
A.2.1	Exemple 1 : coordonnées de Kruskal-Szekeres dans l'espace-temps de Schwarzschild	73

A.2.2 Exemple 2 : calculer des quantités thermodynamiques de trou noir de Schwarzschild AdS	75
---	----

Introduction

La première description "scientifique" de la gravité a été donnée par Newton¹ dans son opus magnum, le *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, publié en 1687. À l'époque, il n'était pas clair si la lumière devait être décrite comme une particule dont la masse pouvait être influencée par la gravité, comme le pensait Newton, ou comme une onde sans masse, comme le proposait Huygens². On savait déjà que la vitesse de la lumière était finie et que les objets ont une vitesse de fuite. John Michell, dans une lettre adressée à la Royal Society en 1783, a été le premier à considérer un objet qui avait une densité si élevée que sa vitesse d'échappement était supérieure à la vitesse de la lumière. Cela signifiait que la lumière ne pouvait pas s'échapper, rendant ainsi l'objet invisible. Il alla même jusqu'à prédire que ces objets, qui ne pouvaient pas être observés directement, pourraient être détectables par leur influence sur une autre étoile en orbite autour d'eux. En 1796, Laplace³ a également eu l'idée de ces étoiles invisibles. Cependant, les astronomes de l'époque n'en sont pas convaincus, surtout après que les expériences de Thomas Young et plus tard d'Augustin-Jean Fresnel ont montré que la lumière se comporte comme une onde, et ne peut donc pas être affectée par la gravité. L'idée de ces étoiles invisibles s'est alors effacée dans l'obscurité.

En 1915, Einstein⁴ a publié sa nouvelle théorie de la gravité : la théorie de la relativité générale. C'est une façon radicalement nouvelle d'envisager la gravité : la gravitation n'est plus une force, mais elle doit plutôt être considérée comme une propriété géométrique de l'espace-temps. La métrique, une description de la forme de l'espace-temps, détermine les trajectoires des particules. Le contenu de tenseur d'énergie-impulsion est directement lié à la courbure de l'espace-temps, décrite par les équations du champ d'Einstein. Ou selon John Wheeler : "l'espace-temps dit comment se déplacer ; la matière dit à l'espace-temps

1. Isaac Newton, 1643-1727, Physicien, mathématicien, astronome, philosophe naturel, alchimiste et théologien anglais.

2. Christiaan Huygens, 1629-1695, mathématicien, astronome, physicien, inventeur et auteur de science-fiction néerlandais.

3. Pierre-Simon Laplace, 1749-1827, astronome et mathématicien français.

4. Albert Einstein, 1879-1955, physicien théoricien.

comment se courber". Einstein a utilisé sa nouvelle théorie pour expliquer la précession du périhélie de l'orbite de Mercure. Il a également fait une prédiction sur la déviation de la lumière des étoiles par le soleil, qui s'est avérée être en bon accord avec les mesures effectuées en 1919 par une expédition désormais célèbre dirigée par Arthur Eddington lors d'une éclipse solaire, lorsque la lune bloque la lumière du soleil, de manière que les étoiles proches du soleil puissent être observées.

Déjà en 1915, un mois seulement après la publication de la théorie d'Einstein, Karl Schwarzschild avait trouvé la solution exacte pour une masse statique (c'est-à-dire non rotative) et sphérique symétrique. Sa solution contient deux singularités, c'est-à-dire des points où les équations explosent et deviennent infinies : une au centre et une à ce qu'on appelle aujourd'hui le rayon de Schwarzschild à $r = 2GM/c^2$, où M est la masse de l'objet, G la constante gravitationnelle, et c la vitesse de la lumière. On s'est rendu compte plus tard que la singularité à la surface de Schwarzschild n'est pas physique, mais seulement une singularité de coordonnées : c'est un artefact des coordonnées choisies et il disparaît après avoir été transformé en un ensemble de coordonnées différent. Mais il a fallu attendre le début de ce qu'on appelle l'âge d'or de la relativité générale (vers 1960-1980) pour que les scientifiques découvrent la véritable signification du rayon de Schwarzschild. La surface à ce rayon fonctionne comme un horizon d'événements : rien, pas même la lumière, ne peut s'échapper de l'intérieur. Les objets dont toute la matière se trouve dans son propre horizon sont appelés trous noirs, un terme introduit par Wheeler.

Même si Hans Reissner et Gunnar Nordström ont résolu les équations pour une masse statique, sphérique et symétrique avec une charge électrique en 1918, ce n'est qu'en 1963 que Roy Kerr a trouvé les solutions exactes pour un trou noir stationnaire et rotatif. Ces objets ont des propriétés plus bizarres. Autour d'un trou noir de Kerr, il y a une région appelée ergosphère où il est impossible de rester immobile, car l'espace-temps lui-même est entraîné avec la rotation du trou noir dans un processus appelé " Effet Lense-Thirring ". Dans l'ergosphère, il peut y avoir des particules d'énergie négative. Si ces particules traversent l'horizon des événements, de l'énergie est extraite du trou noir ; ce processus désormais éponyme a été imaginé pour la première fois par Roger Penrose en 1969.

Au début, la singularité au centre d'un trou noir était traitée avec scepticisme, mais à la fin des années 60, Penrose et Stephen Hawking ont prouvé les théorèmes de singularité, qui montrent qu'une fois qu'une étoile s'est effondrée dans son propre horizon événementiel, elle se rétrécit inévitablement de plus en plus pour devenir une singularité. La conjecture de la censure cosmique affirme que dans un effondrement gravitationnel réaliste, la sin-

gularité au centre d'un trou noir sera toujours entourée d'un horizon événementiel. Les singularités nues, c'est-à-dire les singularités qui ne sont pas cachées derrière un horizon d'événements, ne devraient pas se produire dans la nature. Cela conduit à une limite supérieure pour la quantité de moment angulaire qu'un trou noir peut avoir. Il s'avère que dans la solution de Kerr, l'horizon des événements disparaît si $a > M$, où a est le moment angulaire du trou noir et M sa masse. Par conséquent, ces solutions sont généralement rejetées comme non physiques.

Il est intéressant de noter que les trous noirs sont en fait les objets les plus simples de notre univers. Ils ne sont décrits que par trois paramètres : leur masse, leur charge électrique et leur moment angulaire. Ou, comme l'a dit John Wheeler : "les trous noirs n'ont pas de cheveux". Les trous noirs peuvent également être traités comme des systèmes thermodynamiques. Ils possèdent une entropie, qui est difficile à concilier avec le théorème de l'absence de poils, car on a normalement tendance à considérer l'entropie comme le logarithme du nombre de micro états. Stephen Hawking a montré que les trous noirs rayonnent également, complétant ainsi l'identification des lois de la mécanique des trous noirs avec celles de la thermodynamique : les trous noirs ont une température et émettent donc un spectre thermique. Cela conduit au paradoxe dit de la perte d'information : il semble que toutes les informations qui entrent dans un trou noir sont perdues. Les trous noirs créés à partir de différentes choses (chaises ou livres, tables ou voitures) finissent tous par être le même trou noir. Ils s'évaporent ensuite lentement, émettant un rayonnement thermique qui ne contient aucune information. Il semble que l'information soit perdue, ce qui constitue une violation de l'unité, un principe fondamental de la physique.

Bien sûr, les trous noirs n'existent pas seulement en théorie, mais ils ont aussi été observés. Les trous noirs astrophysiques se divisent en deux classes dominantes : les trous noirs supermassifs au centre des galaxies et les trous noirs de masse stellaire. Les trous noirs supermassifs peuvent avoir un effet profond sur la formation et l'évolution de la galaxie dans laquelle ils vivent et sont étroitement liés à celles-ci. Ils produisent d'énormes quantités d'énergie, et leurs jets fonctionnent comme les plus puissants accélérateurs de particules de l'univers. Ils peuvent également arrêter ou démarrer la formation d'étoiles. Si ces trous noirs font partie d'un système binaire, la matière peut être transférée de l'étoile compagnon au trou noir. Cela libère de l'énergie potentielle gravitationnelle dans un processus appelé accréation. Comme la matière a un moment angulaire, elle ne peut pas tomber directement sur le trou noir. Au lieu de cela, un disque est formé, où la matière s'enroule lentement en spirale en perdant de l'énergie à cause de sa viscosité. Cette énergie est ensuite émise

sous forme de rayons X, ce qui nous permet de voir et d'étudier le trou noir, autrement invisible.

Plan de mémoire : Dans La première chapitre, nous rappellerons les notions de base de la relativité générale (les dérivés covariants, les équations d'Einstein...) puis on va voir les solutions trou noir et leurs propriétés. La deuxième Chapitre, sera axée sur les trou noir dans l'astrophysique : les types de trou noir Selon leurs masses, les étapes de la formation d'un trou noir et comment on peut détecter un trou noir Après dans le troisième chapitre, on sera étudié la thermodynamique de Trou Noir (la température de Hawking, l'entropie et la pression), les cartes loi de la thermodynamique de trou noir et l'analogie avec la thermodynamique standard Enfin, la quatrième Chapitre, sera axée sur la transition de phase des trous noirs dans l'espace de phase étendu, où la constante cosmologique est interprétée comme une pression thermodynamique et traitée comme une variable thermodynamique et la masse est interprétée comme l'enthalpie du trou noir,

Les trous noirs dans la théorie

OptLes bases de la relativité générale

Le contenu de cette section est tiré de "*spacetime and geometry*" de Carroll (2019) [1]

OptIntroduction

La théorie de la relativité générale est une théorie de la gravité. Elle se compose de deux parties. D'une part, il y a la description de la courbure de l'espace-temps, qui détermine le comportement des particules. D'autre part, il y a les équations du champ d'Einstein, qui décrivent comment l'énergie-impulsion courbe l'espace-temps. La relativité générale est construite sur la relativité restreinte, on y ajoutant le principe d'équivalence : "*En tout point de l'espace-temps ξ_μ , il est possible de choisir un système de coordonnées local ξ_α dans lequel les lois de la physique sont les mêmes que dans la relativité restreinte.*"

Notez qu'en relativité générale, il n'est pas possible d'étendre nos coordonnées sur l'ensemble de l'espace-temps. Dans un système de coordonnées locales, la gravité n'est pas notable et s'il n'y a pas d'autres forces, l'objet se déplace en ligne droite et on a :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1.1)$$

Dans un autre système de coordonnées l'équation devient :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.2)$$

Cette équation de mouvement est connue sous le nom d'équation de mouvement géométrique, où la connexion affine est définie comme :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.3)$$

Et le temps propre

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \quad (1.4)$$

avec $\eta_{\alpha\beta}$ est la matrice diagonale

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (1.5)$$

On peut également écrit en coordonnées générales :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.6)$$

où le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est :

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (1.7)$$

Les symboles de Christoffel $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$ sont les suivants :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right\} \quad (1.8)$$

Ce qui forme une relation entre $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

OptLes dérivés covariants

La dérivée normale d'un tenseur ne se transforme pas comme un tenseur. Par conséquent, nous définissons la dérivée covariante d'un vecteur contravariant V^ν comme suit

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (1.9)$$

Cette combinaison a les propriétés d'un tenseur. Alors pour obtenir des équations qui sont valides dans la relativité générale à partir de celles qui sont valides dans la relativité restreinte il faut :

- Écrivez une équation qui est valide dans la relativité restreinte sous forme de tenseur.
- Remplacer $\eta_{\mu\nu}$ par $g_{\mu\nu}$
- Remplacer les dérivés ordinaires par des dérivés covariants.

OptLes équations d'Einstein

L'équation d'Einstein ou équation du champ d'Einstein, publiée par Albert Einstein, pour la première fois le 25 novembre 1915, est l'équation aux dérivées partielles principales

de la relativité générale. C'est une équation dynamique qui décrit comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps. Cette courbure de la géométrie autour d'une source de matière est alors interprétée comme le champ gravitationnel de cette source. Le mouvement des objets dans ce champ est décrit très précisément par l'équation de sa géodésique.

On ne peut pas démontrer les équations d'Einstein. Toutefois on peut argumenter de la façon suivante :

- C'est l'équation la plus simple possible satisfaisant au principe précédent.
- Elle est mathématiquement cohérente et définit un problème de valeurs initiales.
- Elle redonne l'équation de Newton dans une limite appropriée (la limite non relativiste).

La forme mathématique de l'équation d'Einstein s'écrit :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

- $R_{\mu\nu}$: est le tenseur de Ricci, calculé à partir de la courbure de Riemann : $R_{\alpha\beta} = R_{\mu\alpha\mu\beta}$

- $g_{\mu\nu}$: la métrique de l'espace-temps.

- R : le scalaire de Ricci.

- Λ : constante cosmologique.

- G : constante gravitationnelle de Newton.

- $T_{\mu\nu}$: le tenseur d'énergie-impulsion.

où la courbure de Riemann et le symbole de Christoffel :

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\delta}^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\delta}^{\alpha} \quad (1.11)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) \quad (1.12)$$

Si on considère une configuration localement plate, jusqu'à l'échelle d'un amas de galaxies [2], On peut négliger la constante cosmologique ($\Lambda = 0$), dans ce cas les équations d'Einstein deviennent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

Il est aussi possible d'obtenir l'équation d'Einstein à partir du principe de moindre action, avec l'action d'Einstein-Hilbert définie par :

$$S = \int \left[\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (1.14)$$

Il existe trois solutions explicites avec degré maximal de symétrie des équations d'Einstein :

- Si $\Lambda = 0$, la métrique de Minkowski $g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.
- Si $\Lambda > 0$, la métrique de l'espace de-Sitter
- Si $\Lambda < 0$, la métrique de l'espace anti-de-Sitter.

OptLa limite newtonienne

Commençons par l'équation du mouvement

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.15)$$

et supposons que les particules se déplacent lentement

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}, \quad v \ll c. \quad (1.16)$$

Si la particule se déplace lentement, on peut ignorer les termes des vitesses spatiales

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1.17)$$

Supposons en outre que le champ gravitationnel soit stationnaire, alors tous les dérivés temporels de $g_{\mu\nu}$ sont nuls.

Et on a l'équation reliant la connexion affine au tenseur métrique,

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\kappa\mu} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\kappa} \right\}.$$

Ensuite, les composantes apparaissant dans l'équation (1.17) sont

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\kappa\mu} \left\{ \frac{\partial g_{0\kappa}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\kappa}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\kappa}} \right\} \\ &= -\frac{1}{2}g^{\kappa\mu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\kappa}}.\end{aligned}$$

Comme nous supposons que le champ gravitationnel est faible, la métrique doit être presque égale à la métrique de Minkowski :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

au premier ordre de $h_{\mu\nu}$ on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^{\mu} &= -\frac{1}{2}\eta^{\kappa\mu} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\kappa}}, \\ \Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} = 0, \\ \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i},\end{aligned}$$

En insérant ces composantes dans l'équation de mouvement (1.17), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\tau^2} &= 0, \quad \text{alors } \frac{dt}{d\tau} = \text{constant}, \\ \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} &= -c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{1}{2} \nabla h_{00}.\end{aligned}$$

Mais, puisque $dt/d\tau = \text{constante}$, nous pouvons combiner ces deux pour donner l'équation de mouvement suivante :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{2}c^2 \nabla h_{00}. \quad (1.19)$$

Maintenant, comparez cette équation avec l'équation Newtonien du mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad (1.20)$$

ils sont identiques, si on met

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}. \quad (1.21)$$

Notre théorie tend donc vers la limite newtonienne si :

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right). \quad (1.22)$$

Pour une naine blanche : $\phi/c^2 = 10^{-4}$ on voit que même à la surface d'un objet dense comme une naine blanche, la valeur de ϕ/c^2 est beaucoup plus petite que l'unité et donc la limite de champ faible est une excellente approximation.

OptLes trous noirs

La définition standard d'un trou noir : c'est une région dont la gravité est si forte que même la lumière ne peut pas s'échapper. Mais pourquoi la lumière ne peut-elle pas s'échapper d'un trou noir ? Une réponse standard est que la vitesse de libération est supérieure à la vitesse de la lumière. Mais cette réponse fait penser à une image newtonienne de la lumière qui monte, tourne et redescend, qui est tout à fait différente de ce que la relativité générale prédit réellement. Une meilleure définition d'un trou noir est qu'il s'agit d'une région où l'espace tombe plus vite que la lumière. Cette définition peut sembler contradictoire. Si l'espace n'a pas de substance, comment peut-il tomber plus vite que la lumière ? Cela signifie qu'à l'intérieur de l'horizon, tout référentiel inertiel local est contraint de tomber au centre de trou noir. Ce fait fondamental est vrai quel que soit le choix des coordonnées.

Le type le plus simple de trou noir, un trou noir idéal, est celui qui est stationnaire et électrovac en dehors de sa singularité. Electrovac signifie que le tenseur énergie-impulsion T est nul sauf pour la contribution d'un champ électromagnétique stationnaire. Les trous noirs idéaux les plus importants sont ceux qui s'étendent à un espace vide asymptotiquement plat (espace de Minkowski) à l'infini. Il existe des solutions idéales de trou noir qui n'asymptote pas à un espace vide plat, mais la plupart d'entre elles ont peu de rapport avec la réalité. Les solutions idéales de trou noir les plus importantes qui ne sont pas plates à l'infini sont celles contenant une constante cosmologique non nulle. Les prochaines sections traitent des trous noirs idéaux dans un espace asymptotiquement plat. L'importance des trous noirs idéaux découle du fait que les trous noirs n'ont pas de poils (The no-hair theorem),

Les trous noirs sont totalement définis par un maximum de 3 paramètres. La masse, la charge et le moment angulaire. Pour un trou noir de Schwarzschild, sans charge, ni moment angulaire, le seul paramètre est la masse. Les trous noirs sont des objets parfaits, toutes les irrégularités ont été évacuées ou rayonnées lors du processus de formation. Ceci a été démontré conjointement par Penrose, Israel [3], Carter et Robinson pour les trous noirs stationnaires sans charge. Il a été étendu par Robinson [4] au cas chargé.

OptTrous noirs dans la relativité générale

OptLa métrique de Schwarzschild

La "métrique de Schwarzschild" (1916) est une solution de l'équation d'Einstein dans le cas d'un champ gravitationnel isotrope. Elle fournit les trois preuves principales de la Relativité Générale : le décalage des horloges, la déviation de la lumière par le Soleil et l'avance du périhélie de Mercure. Ces trois preuves sont très importantes car l'équation d'Einstein n'était pas démontrée expérimentalement à l'époque.

Nous avons vu que la métrique est définie comme

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.23)$$

Pour un espace de Minkowski, cela se lit

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.24)$$

En changeant en coordonnées polaires,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.25)$$

Où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.26)$$

Nous sommes libres de multiplier tous les termes d'équation (1.25) par des préfacteurs séparés

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2 \quad (1.27)$$

Car la forme de la métrique reste la même ,Nous avons utilisé des exponentielles de sorte que le signe des termes reste le même

Nous définissons une nouvelle coordonnée \bar{r} comme

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r \quad (1.28)$$

Qui donne

$$d\bar{r} = e^{\gamma} dr + e^{\gamma} r d\gamma = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma} dr \quad (1.29)$$

En termes de nouvelle coordonnée radiale,l'équation (1.27) devient

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (1.30)$$

Maintenant, faites les changements suivants

$$\begin{aligned} \bar{r} &\rightarrow r \\ \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} &\rightarrow e^{2\beta(r)} \end{aligned} \quad (1.31)$$

La métrique (1.30) devient alors

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.32)$$

Nous pouvons maintenant passer à la métrique de Schwarzschild. On commence par la métrique de Minkowski dans le cas d'un espace statique et sphérique symétrique (1.32). et on calcule les symboles de Christoffel, le tenseur de Riemann et enfin le tenseur de Ricci. Les équations du champ d'Einstein (1.10) dans le vide se lisent

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.33)$$

Utilisez ceci pour déterminer α et β . On obtient la métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.34)$$

La constante R_S est rayon de Schwarzschild, peut être trouvée en comparant la métrique à la limite du champ faible, dans laquelle le composant tt lit (voir l'équation (1.10))

$$g_{00} = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad (1.35)$$

Les deux sont les mêmes si on identifie

$$R_S = 2GM \quad (1.36)$$

Nous interprétons M comme la masse. Notez que comme $M \rightarrow 0$, on récupère le Minkowski métrique. La même chose se produit pour $r \rightarrow \infty$, une propriété connue sous le nom de planéité asymptotique.

Opt Singularités de coordonnées, singularités vraies

De la forme de la métrique (1.34), on voit que les coefficients deviennent infinis pour $r = 0$ et $r = 2GM$.

En fait, la singularité en " r_s " qui apparaît dans les coordonnées de Schwarzschild, résulte d'une discontinuité de la coordonnée mais pas de la variété où elle s'applique.

Un critère simple qui caractérise un problème sérieux est une courbure qui devient infinie. Nous savons qu'elle est mesurée par le tenseur de Riemann et il n'est pas toujours simple de dire quand un tenseur diverge, car ses composantes dépendent des coordonnées. Mais nous pouvons construire des scalaires à partir du tenseur de courbure et comme les scalaires ne dépendent pas des coordonnées il est instructif de considérer leur comportement. Le plus simple est une vieille connaissance : le scalaire de Ricci " R ", on calcule le scalaire invariant à partir de tenseur de Riemann :

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12r_s^2}{r^6} \quad (1.37)$$

Le scalaire est infini en $r = 0$. Cela suffit à nous convaincre que $r = 0$ est une vraie singularité et la singularité à $r = r_s$ est une singularité de coordonnées. Celle à $r = r_s$ peut être effacée par un changement de coordonnées, et ne correspond pas une singularité géométrique de la variété représentant l'espace-temps associé à cette solution (elle n'a pas le caractère physique d'une singularité, les grandeurs physiques ne deviennent pas infinies en ce point).

En effet, si l'horizon n'est pas une singularité vraie telle que nous l'avons définie, il joue un rôle physique important. A l'extérieur de l'horizon, l'espace-temps est statique, sous l'horizon l'espace-temps n'est plus statique du tout.

OptLa solution de Schwarzschild dans les coordonnées de Kruskal-Szekeres :

En 1960, Martin Kruskal et George Szekeres construisent une nouvelle métrique permettant d'étudier tous les types de mouvements d'un corps à l'extérieur et sous le rayon de Schwarzschild.

Kruskal et Szekeres utilisent des coordonnées sans dimension, u pour la coordonnée radiale et v pour la coordonnée temporelle, définies dans le but d'éliminer le terme $(1 - \frac{r_s}{r})$ dans la nouvelle métrique. Elles reconstruisent $r(u, v), t(u, v)$ par des fonctions transcendentes. Les variables u et v sont définies par [5]

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)e^{\frac{r}{r_s}} \quad (1.38)$$

$$\frac{u + v}{u - v} = e^{\frac{ct}{r_s}} \quad (1.39)$$

On distingue deux cas pour le temps :

Si $r(u, v) > r_s$ alors

$$\tanh \frac{ct}{2r_s} = \frac{v}{u} \quad (1.40)$$

Si $r(u, v) < r_s$ alors

$$\tanh \frac{ct}{2r_s} = \frac{u}{v} \quad (1.41)$$

On obtient la métrique diagonale :

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} (du^2 - dv^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.42)$$

qui est définie pour tout $r(u, v) > 0$. Le temps t est par contre infini au rayon de Schwarzschild ($u = +v, u = -v$). La métrique en coordonnées u et v peut être prolongée à la région entre la singularité et l'horizon des événements, et par conséquent la condition $r = 0$ correspond à la parabole $v^2 - u^2 = 1$. On a donc maintenant deux singularités : $u = \sqrt{v^2 - 1}$ et $u = -\sqrt{v^2 - 1}$. Les droites $r = Cste$ en coordonnées de Schwarzschild sont les hyperboles.

$u^2 - v^2 = Cste$ en coordonnées de Kruskal. Leurs asymptotes sont les bissectrices $u = v$ et $u = -v$. Les droites $t = Cste$ en coordonnées de Schwarzschild sont les droites $\frac{v}{u} = Cste$ passant par l'origine en coordonnées de Kruskal. Les géodésiques de type lumière sont les lignes orientées à 45° . Il est facile de vérifier que pour $ds = 0$, on a $du^2 = dv^2$.

La métrique de Schwarzschild différencie deux régions de l'espace-temps délimitées par l'horizon des événements. La région $r > 2M$ est segmentée en deux avec la métrique de Kruskal-Szekeres. La condition $r > r_s$ correspond $u^2 > v^2$ à $u > |v|$ et $u < -|v|$. La totalité de la géométrie de Schwarzschild est donc représentée par quatre régions différentes en coordonnées de Kruskal (Figure 1.1).

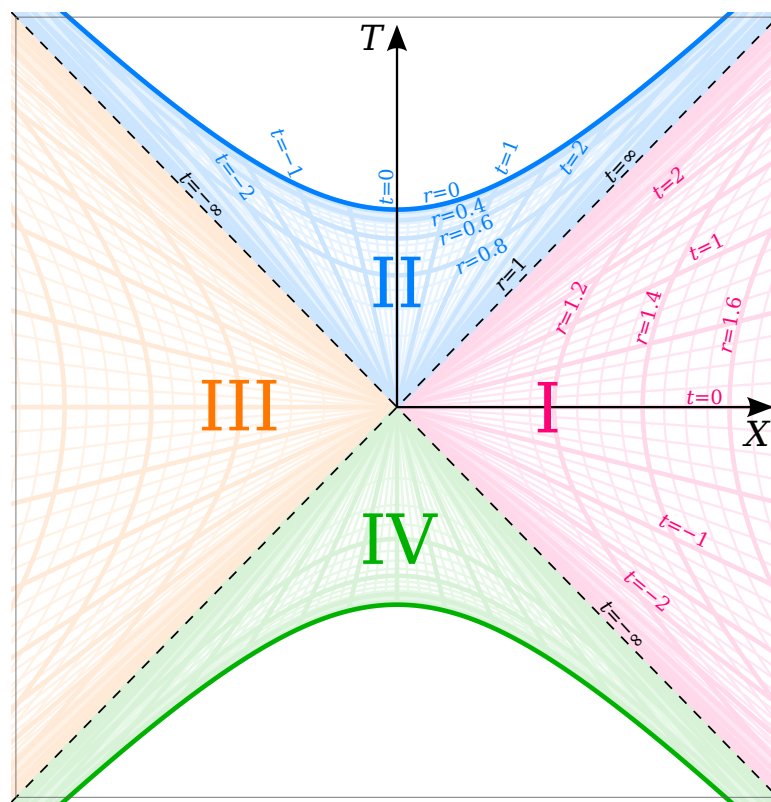


Figure. 1.1. : Diagramme de Kruskal Szekeres, illustré pour $2GM = 1$. Les quadrants sont l'intérieur du trou noir (II), l'intérieur du trou blanc (IV) et (I et III) sont les deux régions extérieures. Les lignes pointillées à 45° , qui séparent ces quatre régions, sont les horizons des événements. Les hyperboles plus sombres qui délimitent le haut et le bas du diagramme sont les singularités physiques. Les hyperboles plus pâles représentent les contours de la coordonnée r , et les lignes droites passant par l'origine représentent les contours de la coordonnée t

Le mathématicien Roger Penrose a imaginé un autre diagramme qui permet de représenter l'espace-temps autour d'un trou noir ainsi que les relations causales entre deux points de cet

espace-temps sous la forme d'un schéma à deux dimensions. Cette représentation, appelée diagramme de Penrose, [ANNEXE A.1]

OptLa métrique de Reissner Nordstrom

Le trou noir de Reissner Nordstrom est une solution de l'équation d'Einstein pour le cas d'une masse ponctuelle, chargée électriquement et sans rotation dans un espace vide,

Le tenseur énergie-impulsion s'écrit :

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \quad (1.43)$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur de l'intensité du champ électromagnétique. Comme nous considérons la symétrie sphérique, le cas le plus général est donné par

$$\begin{aligned} F_{tr} &= f(r, t) = -F_{rt} \\ F_{\theta\phi} &= g(r, t) \sin \theta = -F_{\phi\theta} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Dans ce cas, les équations de champ sont les équations de Maxwell

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}F_{\nu\sigma} = 0 \quad (1.45)$$

Et les équations du champ d'Einstein (1.13)

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) \quad (1.46)$$

L'ensemble des équations peut cependant être résolu pour obtenir la métrique de Reissner Nordstrom

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (1.47)$$

où

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \quad (1.48)$$

Ici, M est interprété comme la masse et Q la charge électrique. Il y a une véritable singularité à $r = 0$. Notez qu'il s'agit d'une ligne temporelle, et non d'une surface spatiale

comme chez Schwarzschild, comme on peut le voir en déterminant le signe de ds^2 . On peut trouver l'horizon des événements en mettant g^{rr} à zéro

$$g^{rr}(r) = f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} = 0 \quad (1.49)$$

avec solution

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - GQ^2} \quad (1.50)$$

Il est intéressant de noter que nous n'avons pas inclus de monopoles magnétiques dans cette dérivation. Il n'existe aucune preuve expérimentale de l'existence de monopoles magnétiques [6], il est donc tout à fait naturel de les laisser de côté. Il n'y a pas non plus d'arguments théoriques pour dire qu'ils ne devraient pas exister, il peut donc être agréable de supposer qu'ils existent et de voir à quoi ressemblerait la métrique s'ils existaient.

Nous pourrions transformer notre solution "sans charge magnétique" en une solution "avec charge magnétique" en remplaçant simplement Q^2 par $Q^2 + P^2$

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2} \quad (1.51)$$

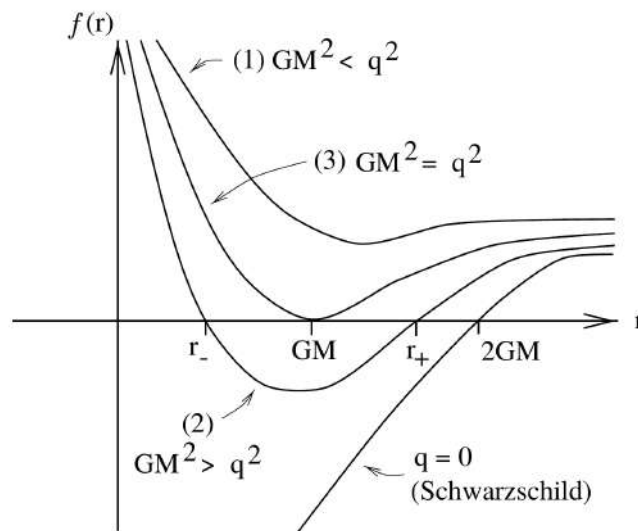


Figure. 1.2. : La fonction $f(r) = 1 - 2GM/r + GQ^2/r^2$ pour les solutions Reissner Nordstrom ; les zéros indiquent l'emplacement d'un horizon d'événement

Selon les zéros de la fonction $f(r)$ (Figure 1.2) on peut distinguer trois cas différents :

- Si $GM^2 < Q^2$, nous n'avons pas d'horizon de événement, mais nous avons une singularité à $r = 0$, qui viole la conjecture de la censure cosmique (voir la section suivante 1.2.3).
- Si $GM^2 > Q^2$, C'est une situation qui peut physiquement résulter d'un effondrement gravitationnel. L'énergie électromagnétique est inférieure à l'énergie totale. La métrique a des singularités de coordonnées à r_+ et r_- , dans les deux cas elles peuvent être éliminées par un changement de coordonnées comme dans le cas précédent de la métrique de Schwarzschild. Les surfaces définies par $r = r_{\pm}$ sont toutes deux nulles et sont en fait des horizons événementiels et La singularité à $r = 0$ est une ligne de type temps, pas une surface de type espace comme dans Schwarzschild
- Si $GM^2 = Q^2$, Ce cas est appelé la solution extrême de Reissner Nordstrom (ou simplement trou noir extrême). On peut dire que la masse est contrebalancée par la charge et on peut construire des solutions exactes constituées de trous noirs extrêmes qui restent stationnaires les uns vis-à-vis des autres. D'un côté, un trou noir extrême est un gadget théorique amusant, ses solutions sont souvent examinées dans le cadre du paradoxe de la perte d'information et dans le rôle des trous noirs en gravité quantique, par contre ces trous noirs sont hautement instables puisqu'une adjonction minime de matière les transforment en catégorie deux

Les électrons en tant que trous noirs

On peut se demander comment le rapport entre la charge et la masse d'un électron se compare à un trou noir. Tout d'abord, nous allons réintroduire les constantes numériques que nous avons laissées de côté au début. Si nous faisons cela, la solution extrême $GM^2 = Q^2$ (en ignorant les charges magnétiques) est donnée par

$$\frac{Q^2}{M^2} = 4\pi\epsilon_0 G = 7,4 \cdot 10^{-21} \text{s}^2 \text{A}^2 / \text{kg}^2 \quad (1.52)$$

Pour un électron, nous avons

$$\frac{Q_e^2}{M_e^2} = 3.1 \cdot 10^{22} \text{s}^2 \text{A}^2 / \text{kg}^2 \quad (1.53)$$

une différence de 43 ordres de grandeur. Bien sûr, nous ne pouvons pas appliquer la relativité dans ce régime, car les effets quantiques dominent à cette échelle. Néanmoins,

le calcul est intéressant, car il montre que nous pouvons, au moins théoriquement, créer un trou noir extrême en injectant suffisamment d'électrons dans un trou noir.

OptLa singularité :

Tandis que les trous noirs chargés avec $|Q| < M$ (et surtout avec $|Q| \ll M$) sont similaires aux trous noirs de Schwarzschild, les trous noirs de Reissner Nordstrom ont deux horizons : l'horizon des événements et l'horizon interne de Cauchy . Comme pour les autres trous noirs, l'horizon des événements dans l'espace-temps peut être localisé en résolvant l'équation de la métrique : $g_{00} = 0$. Les solutions montrent que l'horizon des événements est situé à :

-L'horizon intérieur :

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (1.54)$$

-L'horizon extérieur :

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (1.55)$$

La solution dégénère en une singularité lorsque $|Q| = M$.

On pense que les trous noirs avec $|Q| > M$ n'existent pas dans la nature, puisqu'ils contiendraient une singularité nue. Leur existence serait en contradiction avec le principe de censure cosmique 1.2.3.

OptL'insignifiance de la charge

Le trou noir chargé est étudié comme un modèle, mais il apparaît peu probable qu'il existe réellement dans l'univers. En effet, les forces électromagnétiques sont bien plus importantes que les forces gravitationnelles. Le trou noir électrique va donc attirer exclusivement des particules de charge contraire à la sienne et dans un temps très bref, le trou noir va capturer toutes les particules de charge contraire disponibles et se neutraliser presque entièrement. Il existe une charge maximale pour un trou noir électrique, au-delà de laquelle l'horizon des événements est détruit par les forces de répulsion électrostatiques colossales

s'exerçant sur lui, mais en réalité elle ne peut normalement pas être plus grande que le milliardième du milliardième de cette charge maximale. C'est si peu que le rôle astrophysique de la charge électrique des trous noirs peut être ignorée.

OptLa métrique de Kerr

En général les trous noirs ne possèdent pas la symétrie sphérique, ils doivent être en rotation accélérés par l'accrétion de la matière. La solution exacte de la métrique est plus complexe, du fait que nous ne pouvons plus utiliser la symétrie sphérique qui permettait de bien simplifier le problème. Ici nous n'avons plus qu'une symétrie axiale (autour de l'axe de rotation), mais cela peut quand même donner des solutions stationnaires (Un vecteur de Killing de type temps). Alors que les solutions de Schwarzschild et Reissner-Nordstrøm ont été découvertes peu de temps après l'établissement de la Relativité générale, la solution pour un trou noir en rotation a été trouvée par Kerr seulement en 1963.

La métrique de Kerr qui décrit un trou noir en rotation s'écrit dans les coordonnées de Boyer-Lindquist comme

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] d\phi^2 \quad (1.56)$$

Avec

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \quad (1.57)$$

Et

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (1.58)$$

M est la masse et $a = J/M$ est le moment angulaire par unité de masse

quand $a \rightarrow 0$ nous récupérons la métrique de Schwarzschild. La singularité se produit lorsque $\rho = 0$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (1.59)$$

Nous constatons que le terme r et le terme cosinus doivent être tous deux égaux à zéro

$$r = 0, \quad \theta = \pi/2 \quad (1.60)$$

La singularité n'est donc pas un point, mais un anneau. (Dans ce cas, r n'est pas la coordonnée radiale d'un système de coordonnées polaires, mais une partie des coordonnées dites de Boyer-Lindquist).

Les horizons des événements se produisent aux valeurs de r pour lesquelles $g^{rr} = 0$. puisque $g^{rr} = \Delta/\rho^2$ et $\rho^2 \geq 0$ ceci se produit lorsque

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 = 0 \quad (1.61)$$

avec la solution

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2} \quad (1.62)$$

Tout comme dans le cas de Reissner Nordstrom, nous avons trois types de solutions : $GM < a$, $GM = a$ et $GM > a$. La première présente une singularité nue et la seconde (extrême) est instable, tout comme dans le cas de Reissner-Nordström : une particule infectante perturbera le délicat équilibre. Nous nous concentrons donc sur le troisième cas.

OptErgosphère

Une remarque très particulière sur les trous noirs rotatifs, c'est que g_{00} ne s'annule pas forcément en $r = r_+$ (l'horizon d'événement). On a :

$$g_{00} = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \geq 0 \quad (1.63)$$

On voit que g_{00} ne s'annule que pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, c'est à dire au pôle nord et sud du trou noir.

Une région importante, c'est la région extérieure à l'horizon des événements pour laquelle le vecteur de Killing $\xi_t = \partial_t$ est de type espace¹. Les surfaces Γ_{\pm} sur lesquelles ξ_t est de type nul sont données par $g_{00} = 0$. Soit deux solutions $r_{\Gamma\pm}$ telles que

$$r_{\Gamma\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2} \quad (1.64)$$

1. La métrique de Kerr possède les deux vecteurs de Killing ∂_t et ∂_{ϕ} . Donc toute combinaison est un champ de Killing [7]

La région délimitée par les deux surfaces r_+ et $r_{\Gamma+}$ est appelé l'ergosphère (Figure 1.3), elle est caractérisée par

$$r_+ < r < r_{\Gamma+} \quad (1.65)$$

Tout objet se désintègre dans l'ergosphère qui entoure le trou noir. Un fragment peut toutefois s'en échapper en suivant une trajectoire en 'spirale sortante'. Lorsque l'horizon externe du trou noir est franchi plus aucune information ne peut s'en échapper et la matière tombe vers la singularité où les lois actuelles de la physique ne sont plus valables.

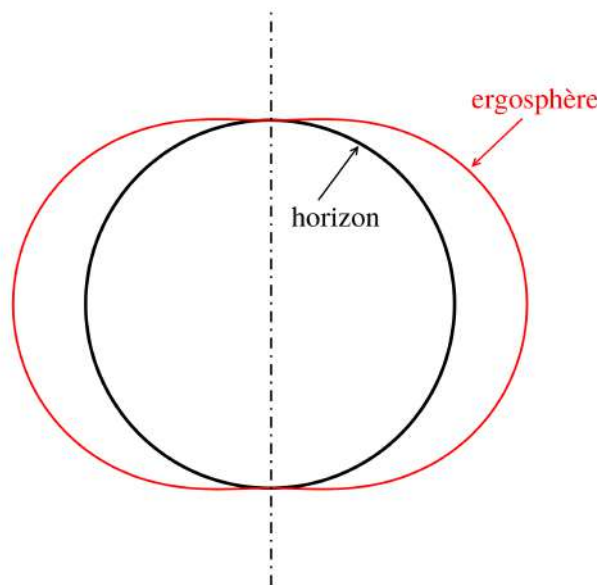


Figure. 1.3. : Une vue de côté d'un trou noir de Kerr. L'ergosphère est la région située entre la surface limite stationnaire et l'horizon des événements extérieurs.

OptLe principe de censure cosmique

Nous avons vu que plus la rotation du trou noir est rapide, plus les deux horizons se rapprochent. Si celui-ci tourne suffisamment vite, les deux horizons cessent simplement d'exister, et la singularité se retrouve "nue". Le principe de censure cosmique, énoncé par le physicien Roger Penrose [8], pourrait s'appliquer dans ce cas.

Les horizons du trou noir ayant comme rayons

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (1.66)$$

si a devient supérieur à M , cette formule n'a plus de sens. En effet, derrière un horizon des événements, la singularité est isolée de notre univers. Si elle est nue, cette région

qui enfreint les lois physiques connues, est libre d'interagir avec le reste de l'univers. Une singularité non entourée d'un horizon des événements devient alors le passé de certains points de l'espace-temps. La présence de courbes fermées du genre temps n'est plus impossible, situation qui autorise une violation de la causalité. En particulier, un observateur orbitant autour de celle-ci pourrait remonter le temps, et violer ainsi le principe de causalité.

OptProcessus d'extraction d'énergie de Penrose

Il est possible d'extraire de l'énergie de rotation d'un trou noir de Kerr, de la manière suivante : considérons une capsule qu'on lâche depuis l'infini vers un trou noir de Kerr en rotation. Lorsqu'elle est entrée dans l'ergosphère elle se scinde en deux et largue une partie de sa masse dans le trou noir (Figure 1.4) . Supposons que la trajectoire initiale ait été choisie de manière que la capsule puisse ensuite repartir vers l'infini, toujours en suivant une géodésique. Cela est possible car l'ergosphère est située en dehors de l'horizon.

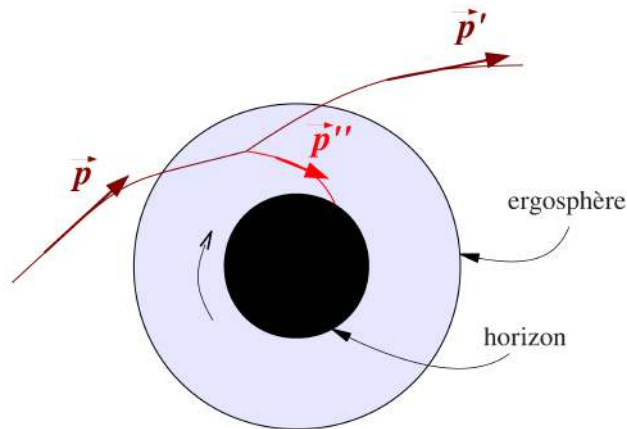


Figure. 1.4. : Processus de Penrose pour extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation.

En notant \vec{p} et \vec{p}' respectivement les 4-impulsion de la capsule le long de sa ligne d'univers, avant et après le largage et \vec{p}'' la 4-impulsion de la partie qui tombe dans le trou noir, la conservation de l'énergie-impulsion implique qu'au point de largage :

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}'' \quad (1.67)$$

L'énergie de la capsule mesurée à l'infini avant son départ est donnée par

$$E = -c\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} \quad (1.68)$$

et celle mesurée à son retour est

$$E' = -c\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}' \quad (1.69)$$

On a donc

$$\Delta E = E' - E = c\vec{\xi}_{(0)} \cdot (\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.70)$$

Les quantités E et E' étant conservées : évaluer $E' - E$ au point de largage :

$$\Delta E = c\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}'' \quad (1.71)$$

Si le largage avait eu lieu en dehors de l'ergosphère, $\vec{\xi}_{(0)}$ et \vec{p}'' seraient deux vecteurs de genre temps dirigés vers le futur et leur produit scalaire serait négatif, de sorte que $\Delta E < 0$: la capsule posséderait moins d'énergie en retour qu'à l'arrivée. Mais dans l'ergosphère, le vecteur de Killing $\vec{\xi}_{(0)}$ est du genre espace, de sorte que, pour certaines configurations, on peut avoir $\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}'' > 0$, et donc

$$\Delta E > 0 \quad (1.72)$$

Ce mécanisme de gain d'énergie est appelé processus de Penrose. On peut montrer que l'énergie acquise est prélevée sur l'énergie de rotation du trou noir.

OptLa métrique de Kerr-Newman

En astronomie, un trou noir de Kerr-Newman est un trou noir de masse M avec une charge électrique Q non nulle et un moment cinétique J également non nul. Il tient son nom du physicien Roy Kerr, découvreur de la solution de l'équation d'Einstein dans le cas d'un trou noir en rotation non chargé, et Ezra T. Newman, codécouvreur de la solution pour une charge non nulle, en 1965.

Le trou noir de Kerr-Newman est décrit par la métrique du même nom, qui s'écrit :

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (1.73)$$

où :

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (1.74)$$

et :

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (1.75)$$

et finalement :

$$a = \frac{J}{M} \quad (1.76)$$

Quand $Q = a = 0$, la métrique de Kerr-Newman se réduit à la métrique de Schwarzschild (cas non chargé et sans rotation). Lorsque $a = 0$, elle se réduit à la métrique de Reissner Nordstrom, et lorsque $Q = 0$ à la métrique de Kerr. Lorsque $M = Q = 0$, le cas se réduit à la métrique d'un espace de Minkowski vide, mais dans des coordonnées sphéroïdales peu habituelles.

De la même manière que la métrique de Kerr, celle de Kerr-Newman décrit un trou noir seulement lorsque $a^2 + Q^2 < M^2$.

Le résultat de Newman représente la solution la plus générale de l'équation d'Einstein pour le cas d'un espace-temps stationnaire, axisymétrique, et asymptotiquement plat en présence d'un champ électrique en quatre dimensions. Bien que la métrique de Kerr-Newman représente une généralisation de la métrique de Kerr, elle n'est pas considérée comme très importante en astrophysique puisque des trous noirs "*réalistes*" n'auraient généralement pas une charge électrique importante (L'insignifiance de la charge [1.2.2](#)).

Les trous noirs en pratique

OptLes types de trous noirs

OptLes trous noirs stellaires

La grande majorité des trous noirs seraient d'origine stellaire, c'est-à-dire de l'effondrement gravitationnel d'une vieille étoile massive sur elle-même. Ceux-ci ont une masse d'au moins quelques masses solaires. Ce type de trou noir ne fait que quelques kilomètres de diamètre. Leur formation peut engendrer des ondes gravitationnelles. Les principaux progéniteurs de trous noirs stellaires par effondrement sont les étoiles Wolf-Rayet qui est une étoile chaude, massive et évoluée présentant un taux de perte de masse très élevé.

Quelques exemples des candidats des trous noirs stellaires sont donnés par la tableau (2.1).

Nom	Constellation	Distance (en a.l.)	Masse (en M_{\odot})
Cygnus X-1	Cygnus	7,000	16
SS 433	Aquila	16,000	11
Nova Mon 1975	Monoceros	2,700	11
Nova Persi 1992	Perseus	6,500	5
IL Lupi	Lupus	13,000	9
Nova Oph 1977	Ophiuchus	33,000	7

Table. 2.1. : Des candidats des trous noirs stellaires [9]

Opt Les trous noirs supermassifs

En astrophysique, un trou noir supermassif est un trou noir dont la masse est d'environ un million à un milliard de masse solaires. La densité de ce genre de trou noir est très faible (parfois plus faible que celle de l'eau), des études montrent que plus un trou noir est grand, plus sa densité diminue, même si sa masse croît sans limite.

La formation des trous noirs supermassifs est encore fortement débattue car elle se fait sur de grandes échelles de temps (contrairement à la formation d'un trou noir stellaire). Comme il n'existe pas d'étoile de masse si grande, les trous noirs supermassifs ne peuvent pas directement être conçus d'un effondrement stellaire. Il pourrait s'agir d'une étoile massive qui s'effondre et qui donne naissance à un trou qui grandit peu à peu en se nourrissant d'autres étoiles ou bien d'un énorme nuage de gaz qui s'écroule directement sous sa propre gravité. Bien que l'origine des trous noirs supermassifs ne soit pas clairement définie, leur existence est en tout cas tout à fait possible.

Opt Les trous noirs intermédiaires

Les trous noirs intermédiaires sont des objets récemment découverts, de masse entre 100 et 10 000 masses solaires. On peut donc dire que les trous noirs intermédiaires ne peuvent pas se former par simple effondrement d'étoiles massives.

En Septembre 2020, La détection d'un nouveau signal, baptisé GW190521 [10], a été présentée. Ce signal a été enregistré en mai 2019, par les deux observatoires Ligo et Virgo : deux trous noirs, de 85 et 65 masses solaires, sont entrés en collision, formant ainsi un trou noir unique de 142 fois la masse du Soleil. Ce trou noir de 142 masses solaires, résultat de la fusion du système, est le tout premier spécimen de sa catégorie détecté de façon directe. Sa masse fait de lui un trou noir de masse intermédiaire.

Quelques exemples des candidats des trous noirs intermédiaire et supermassifs sont donnés par la tableau (2.2).

Nom	Constellation	Distance (en a.l)	Masse (en M_{\odot})
NGC-205	Andromeda	2,300,000	90,000
Messier-33	Triangulum	2,600,000	50,000
SgrA*	Sagittarius	27,000	4,600,000
Messier-31	Andromeda	2,300,000	45,000,000
NGC-1023	Canes Venatici	37,000,000	44,000,000
NGC-4261	Virgo	100,000,000	520,000,000
Messier-87	Virgo	52,000,000	3,000,000,000

Table. 2.2. : Les deux premiers sont des trous noirs de masse intermédiaire. Les autres sont des trous noirs supermassifs [9]

OptLes trous noirs primordiaux

Ce type de trou noir ne peut pas être expliqué de la même manière que les trois précédents puisque celui-ci n'a jamais été vraiment prouvé, ce n'est que une hypothèse. Leur existence, toujours hypothétique, remonterait au début de la création de notre univers, il y a de cela 13,7 milliards d'années, bien avant l'émission de la première lumière de l'Univers. Son Masses Solaires n'ont pas été totalement définies, elles sont juste bien plus faible que celle des autres trous noirs. Contrairement aux autres trous noirs, les trous noirs primordiaux perdent leur masse de plus en plus rapidement et finissent par disparaître. Ce phénomène a été baptisé "évaporation quantique" par Stephen Hawking en 1975 [11].

OptLa formation des trous noirs

Le mécanisme à l'origine de la formation d'un trou noir dépend du type de ce dernier. Les trous noirs stellaires se forment par effondrement gravitationnel d'étoiles massives généralement des étoiles de Wolf-Rayet (étoiles de plusieurs dizaines de masses solaires). À la fin de leur vie, ces étoiles ont épuisé leur source d'énergie, et les réactions thermonucléaires ne sont plus suffisantes pour contrecarrer l'effet de contraction gravitationnelle. Si la masse de l'étoile est située en dessous de la limite de Chandrasekhar (environ 1.4

masses solaires), elle s'effondre en naine blanche. Si sa masse est supérieure à la limite de Chandrasekhar mais inférieure à la limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (entre 1.5 et 3 M_{\odot} [12]), elle s'effondre en étoile. Et si la masse de l'étoile dépasse cette dernière limite, elle s'effondre en trou noir stellaire après avoir donné lieu à une supernova de Type II (supernova par effondrement de cœur).

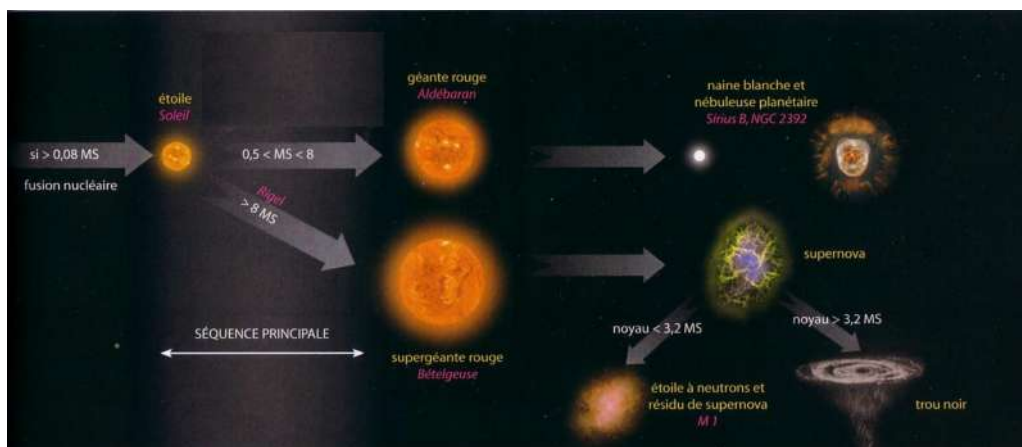


Figure. 2.1. : Les étapes de formation d'un trou noir.

La formation des trous noirs intermédiaires fait encore débat au sein de la communauté scientifique. Les étoiles de Wolf-Rayet ne sont pas suffisamment massives pour former de tels trous noirs. Une hypothèse propose une formation à partir d'étoiles de population III ; étoiles très massives et hypothétiques qui se seraient formées dans les débuts de l'Univers. L'autre hypothèse est une lente accréation de matière à partir d'un trou noir stellaire. Le mécanisme de formation des trous noirs supermassifs est également incertain. L'hypothèse initialement avancée propose un trou noir stellaire accréant de la matière pendant des milliards d'années jusqu'à atteindre la masse d'un trou noir supermassif. Mais la détection de tels trous noirs très tôt dans l'histoire de l'Univers remet en doute cette hypothèse. Une autre hypothèse est celle de la fusion de trous noirs stellaires ou intermédiaires. De manière générale, ces trous noirs sont présents au centre des galaxies.

Les trous noirs ultra massifs ne sont pas le produit d'effondrements gravitationnels car aucune étoile connue ne possède la masse nécessaire à la formation de trous noirs de cette masse. L'hypothèse généralement avancée est la fusion de trous noirs supermassifs ou l'accréation rapide de matière par les trous noirs supermassifs au sein d'amas galactiques. Cependant, les astrophysiciens ne possèdent encore que peu de données sur ces objets pour confirmer les différentes hypothèses proposées.

Les trous noirs primordiaux sont des trous noirs hypothétiques qui se seraient formés dans les premiers instants après le Big Bang sous l'effet des fluctuations de densité. Les fluctuations quantiques primordiales se seraient transformées, après l'époque de l'inflation, en fluctuation de densité à plus grande échelle et sous l'effet de ces contraintes de densité, certaines zones de l'espace-temps se seraient effondrées sur elle-même pour former ces trous noirs. Ils peuvent donc virtuellement posséder n'importe quelle masse.

La relativité générale autorise aussi la formation d'un autre type de trou noir appelé kugelblitz [13] (boule de lumière). Ce type de trou noir théorique pourrait se former suite à l'accumulation locale d'une très grande quantité de photons, provoquant leur effondrement gravitationnel. En effet, selon la relativité générale, toute source d'énergie déforme l'espace-temps. Si une concentration locale d'énergie est suffisamment dense pour remplir les critères de masse imposées par les équations d'Einstein, alors un trou noir identique à un trou noir stellaire peut théoriquement se former.

OptLa détection des trous noirs

L'un des objectifs de nombreux astrophysiciens est la mise en évidence des trous noirs. En effet, comme ces derniers sont invisibles, puisqu'ils empêchent la lumière de s'échapper, détecter un trou noir paraît donc impossible. Or, on peut les détecter indirectement, grâce à l'attraction gravitationnelle et les effets électriques qu'il exerce sur les astres environnants.

OptLes systèmes binaires

Une des premières méthodes est la détermination de la masse des deux composantes d'une étoile binaire, à partir des paramètres orbitaux. On a observé des étoiles possédant une faible masse et un mouvement orbital très prononcé (amplitude de plusieurs dizaines de km/s), mais dont le compagnon est invisible. Dans ce cas-là, il y a plusieurs interprétations possibles, dépendant surtout de la masse de cet astre invisible.

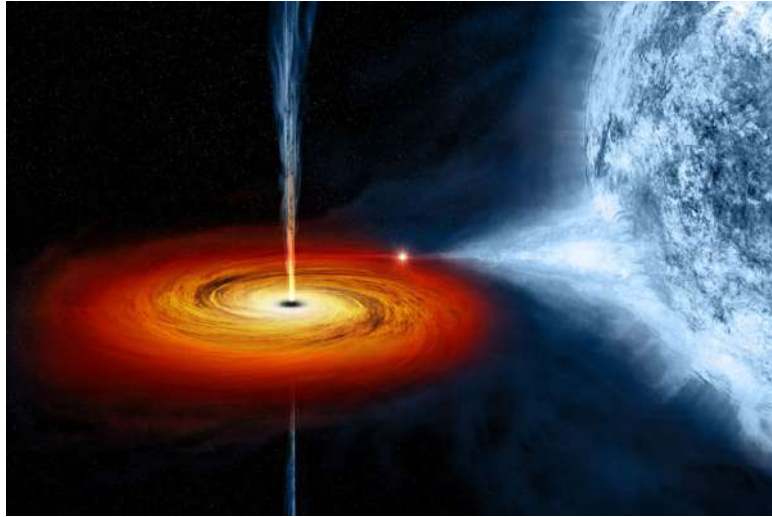


Figure. 2.2. : Un système binaire composé d'un trou noir et d'une étoile.

Il peut être une étoile à neutrons ou un trou noir puisqu'une étoile normale avec une telle masse se verrait très facilement. Donc, si la masse du compagnon est inférieure à environ 2.1 masses solaires, c'est une étoile à neutron ($2.16 M_{\odot}$ étant la masse limite de cette dernière [14]). Si elle dépasse cette limite, on considère que l'objet est un trou noir.

OptLe décalage des ondes électromagnétiques

Une autre méthode est le décalage des ondes électromagnétiques, grâce à l'effet Doppler, on peut ainsi calculer la vitesse des gaz et des objets stellaires proches du noyau d'une galaxie (soupçonnée d'abriter un trou noir). Les régions apparaissant rouges correspondant à un éloignement, et les régions bleues à un rapprochement. On en conclut donc qu'il existe, dans ces régions, des mouvements de rotations extrêmement rapides. D'une manière similaire, des calculs ont été faits sur les vitesses des étoiles centrales de notre galaxie, dont certaines ont été mesurées à plus de $5000 km.s^{-1}$; les dernières mesures (2000-2007) [15] donnent une masse de $4 \times 10^6 M_{\odot}$ dans une sphère de rayon $8 kpc$. Le centre de notre galaxie, serait donc un trou noir. C'est pourquoi, on pense que la plupart des noyaux des galaxies abritent d'énormes trous noirs, ceux des plus grandes galaxies contiendraient même des trous noirs dont la masse atteindrait dix milliards de fois celle du Soleil.

OptLes rayons gamma

Une autre méthode de détection reposerait sur le fait que certains trous noirs stellaires apparaissent lors des sursauts de rayons gamma, puisque ces derniers se formeraient à

travers l'explosion d'une étoile massive en supernova, et que dans certains cas, un flash de rayons gamma serait produit au moment où le trou noir se forme.

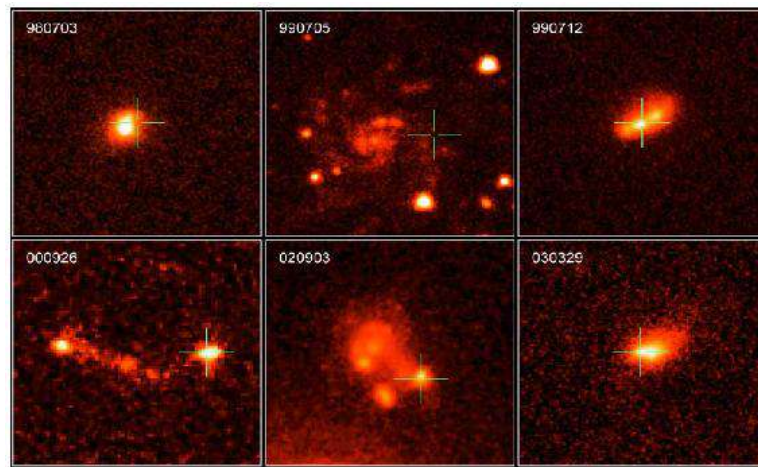


Figure. 2.3. : L'explosion d'une étoile massive en supernova et formation d'un trou noir.

Ainsi, le CGRO (mis en orbite en avril 1991 le Compton Gamma-Ray Observatory) était destinés à l'observation du rayonnement gamma provenant des corps célestes) utilisé jusqu'en juin 2000 a permis de cataloguer une multitude de sources de rayons gamma d'origines diverses (trous noirs, pulsars, quasars, étoiles binaires, etc.) et d'observer ces sursauts gamma.

OptLa présence de jets

Pour détecter les trous noirs, on peut aussi utiliser un phénomène directement relié à la présence d'un trou noir (qu'il soit stellaire ou supermassif). Il s'agit de la présence de jets observés se situant principalement dans le domaine des ondes radio. Ils résultent des changements de champ magnétique à grande échelle se produisant dans le disque d'accrétion du trou noir.

Le transfert de matière de la compagne vers le trou noir produit un disque d'accrétion. Or, l'énorme champ de gravitation entourant le trou noir entraîne la matière de façon si violente qu'elle s'échauffe considérablement assez pour émettre une quantité prodigieuse de lumière à haute énergie, en particulier des rayons X (Figure 2.4). En fait, la chute d'une certaine quantité de matière dans un trou noir libère l'énergie de manière beaucoup plus efficace que les réactions nucléaires qui alimentent les étoiles : alors que la fusion de

l'hydrogène en hélium transforme moins de 1% de la masse initiale en énergie, le disque d'accrétion d'un trou noir peut en transformer de 10% à 20% [16].

La température maximale du disque peut alors être estimée par l'équation suivante [17]

$$T_{eff} \sim 1.3 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\dot{M}_a}{10^{-9} M_{\odot}/an} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{R_{int}}{10km} \right)^{-\frac{3}{4}} \times 10^7 K \quad (2.1)$$

M est la masse du trou noir ; \dot{M}_a est le flux de masse aspirer par le trou noir par an (taux d'accrétion) R_{int} est le rayon interne du disque d'accrétion. Ainsi. Les régions centrales d'un disque d'accrétio autour d'un trou noir stellaire ($M > 3M_{\odot}$) vont émettre dans le domaine des X ($T \sim 10^7 K$), tand qu'autour d'un trou noir supermassif ($M \sim 10^8 M_{\odot}$) se sera dans le domaine visible ou ultraviole ($T \sim 10^5 K$)

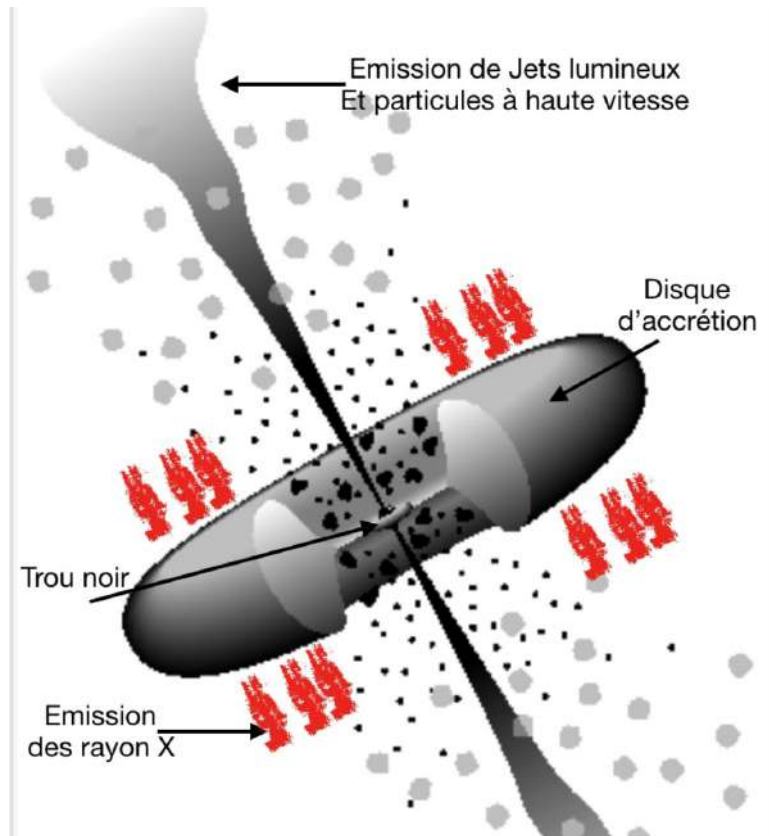


Figure. 2.4. : Schéma d'un disque d'accrétion formé autour d'un trou noir.

Le satellite Chandra X-Ray Observatory a pour mission d'étudier les sources de rayons X dans l'Univers. Depuis sa mise en service en août 1999, le satellite Chandra X-Ray Observatory a répertorié plus d'un millier de sources de rayons X (trous noirs, pulsars, quasars, supernovas, étoiles à neutrons, etc.)

OptLa détection des ondes gravitationnelles

Ces ondes ont été prédites par Einstein dès 1917 et, si l'on compare l'espace-temps à un fluide, des mouvements violents de la matière, comme l'explosion asymétrique d'une supernova ou des collisions d'astres compacts, devraient être suffisants pour l'agiter. Car, si les ondes gravitationnelles ne peuvent pas être stoppées, elles n'en sont pas moins très difficiles à produire avec une intensité détectable si on la compare aux ondes électromagnétiques.

Le 11 février 2016, les collaborations LIGO et Virgo ont annoncé la première observation d'ondes gravitationnelles, à partir d'un signal détecté le 14 septembre 2015 [18] de deux trous noirs avec des masses de 29 et 36 masses solaires fusionnant environ 1,3 milliard à des années-lumière. Pendant la dernière fraction de seconde de la fusion, il a libéré plus de 50 fois la puissance de toutes les étoiles de l'univers observable combiné.

La thermodynamique des trous noirs

Les lois de la thermodynamiques des trous noirs

La thermodynamique des trous noirs est un sujet de discussion intrigant depuis des décennies. L'analogie entre l'espace-temps avec l'horizon du trou noir et la thermodynamique a été largement étudiée. Les quatre lois de la thermodynamique des trous noirs ont été découvertes par Carter, Hawking et Bardeen [19].

Deuxième principe

Théorème des aires de Hawking

Une conséquence de la conjecture de censure cosmique est que les trous noirs classiques ne rétrécissent jamais, ils ne peuvent que devenir plus gros.

La taille d'un trou noir est mesurée par l'aire de l'horizon des événements, c'est-à-dire l'aire spatiale de l'intersection de l'horizon événementiel avec une tranche de type espace. Nous avons alors le théorème des aires de Hawking [19] :

En supposant que la condition d'énergie faible et la conjecture de censure sont satisfaites, l'aire de l'horizon événementiel du futur, dans un espace asymptotiquement plat, ne peut jamais décroître.

Pour un trou noir de Schwarzschild, l'aire est une fonction croissante de la masse, donc ce théorème implique que pour ce type de trous noirs, la masse ne peut pas décroître. Mais pour un trou noir en rotation par exemple, ce n'est plus le cas, l'aire dépend d'une combinaison de la masse et du moment angulaire qu'on peut faire décroître en extrayant de l'énergie de rotation. Le théorème reste cependant valide, l'aire de l'horizon ne décroît pas. Ce théorème est valide dans le contexte de la Relativité générale "classique" car, si on

sort de ces hypothèses, la masse peut décroître par le rayonnement quantique de Hawking, ceci peut être attesté par le fait qu'en QFT, en espace courbe, on peut violer la condition d'énergie faible.

0ptL'entropie de trou noir

L'aire de l'horizon des événements A d'un trou noir peut être exprimé en fonction de sa masse irréductible M_{ir} :

$$A = 16\pi M_{ir}^2 \quad (3.1)$$

Pour un système thermodynamique, l'énergie qui ne peut être transformée en travail est égale au produit de la température et de l'entropie. La masse irréductible peut également être comprise comme la partie de l'énergie totale du trou noir qui ne peut pas être transformée en travail. De plus, la masse irréductible d'un système de trous noirs est en fait plus petite que la somme de leurs masses irréductibles car ils peuvent émettre des ondes gravitationnelles en fusionnant, réduisant leur masse totale (mais jamais l'aire de l'horizon totale). Ainsi, même si la masse totale d'un trou noir de Schwarzschild est égale à sa masse irréductible (cela ressort de la relation entre la masse irréductible et l'aire de l'horizon) et qu'aucune énergie ne peut en être extraite, deux trous noirs de Schwarzschild peuvent encore émettre de l'énergie dans la forme d'ondes gravitationnelles lors de leur fusion. De même, en mettant en contact deux systèmes thermodynamiques qui sont séparément en équilibre thermique, En conclusion, il existe des similitudes entre la masse irréductible d'un trou noir et l'entropie d'un système thermodynamique et si l'on souhaite construire une expression pour l'entropie du trou noir, la masse irréductible est un point de départ logique.

Nous pouvons essayer de définir l'entropie du trou noir comme une fonction monotone croissante de son aire d'horizon (ou, de manière équivalente, masse irréductible). Deux options sont probablement les plus raisonnables : une racine carrée, qui donnerait l'entropie comme une fonction linéaire de masse irréductible, et une fonction linéaire. Cependant, une racine carrée de l'aire d'horizon d'un trou noir de Schwarzschild formé par la fusion de deux autres trous noirs de Schwarzschild est inférieure à la somme des racines carrées de leurs aires d'horizon. Par conséquent, une entropie proportionnelle à une racine carrée

diminuerait dans un tel processus. Bekenstein a donc décidé de construire une expression d'entropie proportionnelle à l'aire de l'horizon du trou noir (on utilise le système d'unités standard) [20] :

$$S = \eta \frac{k_B c^3}{G \hbar} \alpha \quad (3.2)$$

Avec α est l'aire de l'horizon rationalisé ($\alpha = A/4\pi$) et η est une constante sans dimension. Le facteur c^3/G est juste une transformation des unités naturelles en unités standard. La constante de Planck a été incluse dans la formule principalement parce que sa présence garantit que l'entropie est exprimée dans les bonnes unités $[S] = J.K^{-1}$. Bekenstein a noté que la constante de Planck est en fait présente dans les formules d'entropie de nombreux systèmes, qui sont par ailleurs décrits par la physique classique, en raison du fait que l'entropie peut être comprise comme un compte d'états microscopiques possibles d'un système qui sont de nature quantique. Il a émis l'hypothèse que le même raisonnement peut s'appliquer à l'entropie des trous noirs et que l'apparition de la constante de Planck est donc tout à fait naturelle. La constante η peut être estimée approximativement (car il ne peut être calculé exactement sans tenir compte de la théorie microscopique) en laissant une particule tomber dans un trou noir et en comparant ensuite l'augmentation de l'aire rationalisée avec la perte d'informations sur l'existence de la particule (numériquement, cela équivaut à $\ln 2$). Bekenstein a montré que l'augmentation rationalisée de l'aire $d\alpha$ dans un tel cas est au moins égale à $2b\mu$, avec b est le rayon propre de la particule et μ sa masse au repos. Le rayon propre b doit clairement être supérieur ou égal à la longueur d'onde Compton de la particule \hbar/μ et son rayon de Schwarzschild 2μ [20]. Cela donne la limite inférieure $\Delta\alpha_{\min} = 2\hbar$, et alors :

$$\eta = \frac{\ln 2}{2} \quad (3.3)$$

L'estimation de Bekenstein de l'entropie du trou noir devient :

$$S = \frac{k_B c^3 \ln 2}{8\pi G \hbar} A \quad (3.4)$$

Hawking a déterminé une constante de proportionnalité différente de celle de Bekenstein. Sa formule pour l'entropie du trou noir est la suivante :

$$S = \frac{k_B c^3}{4G \hbar} A \quad (3.5)$$

Le facteur numérique est ici presque dix fois plus important que dans la formule originale de Bekenstein. Cela s'explique par les différentes définitions de la température du trou noir. Bekenstein travaillait dans le cadre de la relativité générale classique dans laquelle la température thermodynamique effective du trou noir est égale à zéro.

Il a utilisé l'expression $\hbar\kappa/2\pi k_B$ (ou κ est la gravité de surface du trou noir comme un analogue de la température du trou noir. En considérant les effets de la mécanique quantique, Hawking a montré plus tard que la température thermodynamique du trou noir est en fait $\hbar\kappa/2\pi k_B$. Ainsi, Bekenstein et Hawking sont tous deux arrivés à la même valeur du produit de la température et l'entropie, mais comme ils ont considéré différentes expressions pour la température, leurs formules pour l'entropie diffèrent.

si on exprimer l'entropie d'un trou noir de Schwarzschild d'une masse M en unités SI en termes de masse solaire M_\odot :

$$S \approx 1,45.10^{54} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 J.K^{-1} \quad (3.6)$$

L'entropie du Soleil est de l'ordre de $10^{35} J.K^{-1}$ Il est donc évident que l'entropie par unité de masse d'un trou noir est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle des étoiles.

Après le lavage des conditions initiales, un trou noir de Kerr-Newman est entièrement décrit par sa masse, sa charge et son moment angulaire [21]. Il existe de nombreuses façons possibles de former un trou noir avec une valeur donnée de ces trois quantités, par exemple par l'effondrement d'une étoile normale, l'effondrement d'une étoile à neutrons, la collision d'ondes gravitationnelles, la collision de deux trous noirs, etc. Cependant, une fois qu'un trou noir est formé et que les conditions initiales sont éliminées, ces cas deviennent impossibles à distinguer. L'entropie du trou noir peut alors être interprétée comme une mesure de l'inaccessibilité des informations sur sa configuration interne spécifique. Nous avons maintenant une expression pour l'entropie du trou noir qui, au moins dans le contexte de la relativité générale classique, ne décroît pas et tend à augmenter lorsque le trou noir absorbe de la matière. Elle est également indépendante de la configuration de la matière à l'intérieur de l'horizon des événements. Comme il est en principe possible de mesurer la masse, le moment angulaire et la charge du trou noir et de les utiliser pour calculer son aire d'horizon, l'entropie du trou noir peut être, au moins en principe, déterminée par

un observateur externe. Nous verrons bientôt qu'elle joue également le rôle de l'entropie commune dans la première loi de la thermodynamique du trou noir.

Mais une fois la mécanique quantique entre en jeu, on constate que par effet Hawking, le trou noir s'évapore (en perdant sa masse et en réduisant son aire), alors l'entropie diminuerait de nouveau par ce processus quantique. Toutefois, l'entropie emportée par les particules rayonnées par effet Hawking lors de l'évaporation correspond à une augmentation d'entropie nécessairement supérieure à la diminution d'entropie du trou noir. Ainsi, la variation globale de l'entropie généralisée $S = S_{TN} + S_{\text{ext}}$ va toujours dans le sens d'un accroissement [22]

$$\delta S \geq 0$$

Ce raisonnement a conduit Bekenstein à formuler la deuxième loi généralisée de la thermodynamique : L'entropie commune à l'extérieur du trou noir plus l'entropie du trou noir ne diminue jamais [20].

L'origine de l'entropie des trous noirs

Cette question n'a pas encore de réponse définitive. Cependant, comme l'entropie ordinaire est mesurée de la multiplicité des micro états correspondant à un seul macro-état, comme dans la formule de Boltzmann $S = \ln(W)$

Voici quelques interprétations possibles de l'entropie des trous noirs :

- L'entropie du trou noir compte le nombre d'états internes de matière et d'énergie [23]
- Pour un trou noir formé par un effondrement, il y a un enchevêtrement entre les degrés de liberté du champ quantique externe et interne à l'horizon. Pour les observateurs externes, les degrés de liberté internes à l'horizon ne sont (naturellement) pas accessibles. Par conséquent, dans un état significatif, les degrés de liberté internes sont déterminés.
- L'entropie du trou noir compte les états gravitationnels de l'horizon. Les microétats que nous recherchons sont donc les états des degrés de liberté gravitationnels qui se situent à l'horizon du trou noir.

OptPremier principe

Pour un trou noir de Kerr-Newman, il est possible de dériver une équation analogue à la première loi de la thermodynamique [20] Nous commençons par prendre l'aire rationalisée $\alpha = A/4\pi$ d'un tel trou noir de masse M , moment cinétique J et la charge Q . On peut constater que :

$$\alpha = r_+^2 + a^2 \quad (3.7)$$

et on a :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (3.8)$$

Donc :

$$\alpha = 2Mr_+ - Q^2 \quad (3.9)$$

On peut obtenir une formule pour la différence de masse δM entre deux trous noirs de Kerr-Newman légèrement différents en faisant varier l'équation (3.9)

$$\delta\alpha = 2(r_+\delta M + M\delta r_+ - Q\delta Q) \quad (3.10)$$

et pour obtenir δr_+ on varie l'équation (3.8)

$$\delta r_+ = \delta M + \frac{2}{r_+ - r_-} \left(M\delta M - a \left(\frac{\delta J}{M} + \frac{a}{M} \delta M - Q\delta Q \right) - Q\delta Q \right) \quad (3.11)$$

En substituant ce résultat à l'équation (3.10), nous obtenons :

$$\delta\alpha = 2 \left(r_+\delta M + M\delta M + \frac{2}{r_+ - r_-} (M^2\delta M - a\delta J + a^2\delta M - MQ\delta Q) - Q\delta Q \right) \quad (3.12)$$

Notre objectif est d'obtenir une formule pour le changement de masse. Pour y parvenir, nous mettrons tous les termes contenant δM sur le côté gauche :

$$\begin{aligned} & 2 \left(r_+ + M + \frac{2}{r_+ - r_-} (M^2 + a^2) \right) \delta M = \\ & = \delta\alpha + 2 \frac{2}{r_+ - r_-} (a\delta J + (M + \frac{r_+ - r_-}{2}) Q\delta Q) \\ & \frac{2}{r_+ - r_-} (r_+ (r_+ - r_-) + M (r_+ - r_-) + 2M^2 + 2a^2) \delta M = \\ & = \delta\alpha + \frac{4}{r_+ - r_-} (a\delta J + r_- Q\delta Q) \\ & \frac{2}{r_+ - r_+} (2M (r_+ - r_-) + 2M^2 - 2Q^2 - 2a^2 + 2M^2 + 2a^2) \delta M = \\ & = \delta\alpha + \frac{4}{r_+ - r_-} (a\delta J + r_+ Q\delta Q) \end{aligned} \quad (3.13)$$

En utilisant maintenant l'équation (3.9) pour exprimer M nous arriverons à la forme finale de la première loi :

$$\delta M = \frac{r_+ - r_-}{4\alpha} \delta \alpha + \frac{a}{\alpha} \delta J + \frac{r_+ Q}{\alpha} Q \delta Q \quad (3.14)$$

Si on remplace on trouve :

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_h + \Omega_H \delta I + \Phi_H \delta Q \quad (3.15)$$

Dans leur article [19] Bardeen, Carter et Hawking ont dérivé la première loi de la dynamique des trous noirs d'une manière plus générale qui s'applique à tout espace-temps stationnaire axisymétrique asymptotiquement plat qui comprend un trou noir.

OptPrincipe zéro

Dans le cadre de l'élaboration de la formule intégrale, nous avons démontré que La gravité de surface k est constante à l'horizon d'un trou noir stationnaire. Comme nous avons déjà vu que le rôle de k dans la première loi est analogue à celui de la température thermodynamique en thermodynamique standard, cela nous donne l'analogie de la loi de zéro de la thermodynamique qui stipule que pour un système en à l'équilibre thermique, la température est constante dans tout le système. En fait, la température physique réelle d'un trou noir (correspondant à la distribution de la radiation du corps noir qu'il émet) a été montré par Hawking comme étant [24] :

$$\frac{k}{2\pi} \quad (3.16)$$

et on a la principe zéro est énoncé : *La gravite de surface k d'un trou noir stationnaire est constante sur l'horizon du trou noir.*

OptTroisième principe

Le troisième principe de la thermodynamique ordinaire, proposé par Nernst en 1906. s'énonce de la manière suivante : *"Il est impossible de réduire la température de n'importe qu'il système à zéro absolue par un nombre fini d'opérations."*

Bardeen [19] a formulé l'analogie du troisième principe pour les trous noirs dans la forme suivante : *"Il est impossible par aucune procédure de réduire la gravite de surface d'un*

trou noir à $\kappa = 0$ par un nombre fini d'opérations"

Wald en 1974 a confirmé la formulation de Bardeen, et il a montré qu'il est difficile de se rapprocher d'un trou noir extrême de κ . Cependant, La version de Planck du troisième principe, indiquant que l'entropie d'un système tend vers zéro lorsque la température se rapproche de zéro absolue, est violée par un trou noir extrême κ l'aire de l'horizon d'un trou noir de Kerr-Newman ne s'annule pas lorsque $\kappa \rightarrow 0$. Le troisième principe correspond donc à l'impossibilité d'obtenir un trou noir extrême : $M^2 = a^2 + Q^2$ [25].

Opt Rayonnement du trou noir

OptEffet Hawking

Par analogie avec l'effet tunnel, on peut s'attendre à ce qu'une trajectoire classiquement interdite, comme traverser l'horizon du trou noir de l'intérieur vers l'extérieur, soit cependant autorisée au niveau quantique. Suivant cette idée, il a été montré par Hartle et Hawking que la probabilité quantique de sortir de l'intérieur d'un trou noir n'est pas nulle. De façon plus quantitative, il est possible d'établir que la distribution en énergie (i.e. la densité d'états quantiques) de particules traversant l'horizon par effet tunnel et s'échappant du trou noir sera une distribution presque thermique de corps noir. Par ailleurs, le vide ne fait sens qu'en moyenne.

Ainsi, le principe d'incertitude d'Heisenberg, $\Delta E \times \Delta t \geq \hbar$, oblige un tel état physique est perpétuellement animé de fluctuations quantiques sous la forme de création puis annihilation de paires particule-antiparticule. Ces paires s'annihilent généralement très rapidement. Au voisinage de l'horizon d'un petit trou noir, là où la courbure est gigantesque, l'effet de marée (en termes classiques) peut cependant permettre de séparer les deux particules de la paire, l'une entre dans le trou noir et l'autre est éjectée vers l'infini. L'observateur éloigné du trou noir observe donc un flux de particules issu de celui-ci ! c'est l'effet Hawking. La conservation de l'énergie impose naturellement que la masse du trou noir diminue. Le spectre émis par les trous noirs est caractérisé par une température de l'horizon T_h donnée par la formule de Bekenstein-Hawking :

$$T_h = \frac{\hbar}{2\pi k_b c} \kappa \quad (3.17)$$

Pour un trou noir de Schwarzschild ($\kappa = \frac{c^4}{4GM}$) sa température T_h peut être exprimée en terme de sa masse M par :

$$T_h = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k M} \approx 6 \times 10^8 \left(\frac{M_\odot}{M} \right) (K) \quad (3.18)$$

où nous avons utilisé les unités complètes pour souligner le caractère exceptionnel de cette formule : elle est l'une des seules à faire intervenir toutes les constantes fondamentales de la physique. Le fait que la constante de Planck \hbar , la constante de Boltzmann k_b , la vitesse de la lumière c et la constante de Newton G interviennent simultanément témoigne de ce qu'ici mécanique quantique, gravitation relativiste et thermodynamique sont simultanément à l'œuvre. Les trous noirs en évaporation sont donc des objets privilégiés pour mettre à l'épreuve des théories d'unification [22].

Contrairement à ce qui pouvait donc être intuitivement attendu, les petits trous noirs ne sont donc pas noirs du tout : ils rayonnent une quantité colossale d'énergie. Cet effet n'a jamais été observé car les trous noirs usuels de l'astrophysique sont beaucoup trop massifs pour qu'un tel rayonnement soit conséquent. On voit dans la formule (3.18) que plus le trou noir perd de l'énergie en rayonnant, plus sa masse diminue et plus sa température augmente ! L'évaporation de Hawking est donc un processus très explosif.

De manière plus quantitative, une paire créée avec une énergie E peut subsister pendant un temps $\tau = \frac{\hbar}{E}$. Si la paire est émise à la coordonnée $r = r_s + \varepsilon$, l'équation de mouvement pour la particule entrant s'écrit sous la forme :

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_s + \varepsilon} \quad (3.19)$$

Si on pose $r = r_s + \rho$ avec $\rho \ll r_s$, en développant l'expression précédente au premier ordre puis en intégrant sur ρ entre 0 et ε , on trouve le temps propre que met la particule pour atteindre l'horizon soit :

$$\tau = \frac{2\sqrt{r_s \varepsilon}}{c} \quad (3.20)$$

La particule pourra effectivement atteindre l'horizon si

$$E = \frac{\hbar}{\tau} \approx \frac{\hbar c}{2\sqrt{r_s \varepsilon}} \quad (3.21)$$

L'autre particule de la paire est émise vers l'extérieur, et pour un observateur lointain son énergie est décalée vers le rouge d'un facteur

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_s + \varepsilon}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{r_s}} \quad (3.22)$$

On la voit donc avec une énergie :

$$E' = E\sqrt{g_{00}} = \frac{hc}{2r_s} = \frac{\hbar c^3}{2GM} \quad (3.23)$$

Cette énergie E est indépendante de ε , toutes les particules sont émises avec une énergie de cet ordre.

OptLuminosité d'un trou noir

Comme déjà mentionné, Hawking donne l'expression suivante pour l'entropie.

$$S = \frac{k_b c^3 A}{4hG} \quad (3.24)$$

Et la temperature

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_b G M} \quad (3.25)$$

Avec \mathcal{A} est l'aire de l'horizon des événements, k_b est la constante de Boltzmann, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$,
Connaissant le rayon de Schwarzschild, on peut calculer l'air de l'horizon \mathcal{A} par

$$A = 4\pi a^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{e^4} \quad (3.26)$$

Comme conséquence de l'évaporation, la diminution de masse du trou noir. On peut donc parler de la luminosité et de la durée de vie de ce dernier.

Selon les résultats précédents, la luminosité du rayonnement de Hawking est donnée par

$$L = A\sigma T^4 = \frac{\hbar c^2}{3840\pi a^2} = \frac{\hbar c^6}{15639\pi G^2 M^2} \quad (3.27)$$

Avec $\sigma = \pi^2 k_b^2 / 60 \hbar^3 c^4$ [26] est la constante de Stefan-boltzman.

OptDurée de vie d'un trou noir

L'augmentation de la température avec la perte de masse indiquée dans l'équation (3.25) suggère qu'avec le temps, la vitesse à laquelle l'énergie est émise par le trou noir devrait également augmenter. Après plus de réarrangement, un taux de perte de masse donne

$$\frac{dm}{dt} = \frac{hc^4}{15360\pi G^2 M^2} \quad (3.28)$$

Pour trouver la durée de vie de trou noir τ en fonction de la masse initiale M du trou noir, on sépare les variables de l'équation (3.28) et on intègre entre un temps initial supposant égale 0 et un certain temps τ . On obtient

$$\tau = \int_0^\tau dt = -\frac{15360\pi G^2}{hc^4} \int_0^M M^2 dM \quad (3.29)$$

Finalement, la durée de vie de trou noir de masse initiale M est égale

$$\tau = \frac{5120\pi G^2}{hc^4} M^3 \quad (3.30)$$

Après les calculs des constantes, on obtient

$$\tau = 10^{-16} M^3 s \cdot kg^{-3} \quad (3.31)$$

est la durée de vie d'un trou noir une fois qu'il commence à s'évaporer. La température de Hawking d'un trou noir peut être approchée des valeurs des constantes

$$T \cong \frac{10^{23}}{M} \quad (3.32)$$

C'est seulement à propos de $10^{-17} K$ au-dessus du zéro absolu même pour les plus petits trous noirs stellaires (environ $3 M_\odot$).

OptL'analogie entre la thermodynamique standard et la thermodynamique des trous noirs

L'analogie mathématique entre les lois thermodynamiques des trous noirs et les lois de la thermodynamique ordinaire définies ci-dessus sont affichées dans (3.1)

Principe	Thermodynamique Standard	Thermodynamique des trous noirs
Principe zéro	La température T d'un corps est la même partout dans celui-ci à l'équilibre thermique.	La gravité de surface k d'un trou noir stationnaire est constante sur tout l'horizon des événements
Premier principe	$dE = T\delta S + \delta W$.	$dM = \frac{k}{8\pi}\delta A + \Omega_h\delta J + \Phi_h\delta Q$
Deuxième principe	L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter $\delta S \geq 0$.	L'aire A de l'horizon des événements de chaque trou noir ne peut pas décroître $\delta A \geq 0$.
Troisième principe	On ne peut atteindre $T = 0$ par aucun processus physique.	On ne peut pas atteindre $k = 0$ par aucun processus.

Table. 3.1. : L'analogie entre la thermodynamique standard et la thermodynamique des trous noirs.

Traditionnellement la masse d'un trou noir a été identifiée à son énergie. Mais récemment on commence à identifier la masse d'un trou noir avec l'enthalpie chimique, et la constante cosmologique comme pression thermodynamique. Cela permet de bien comprendre les trous noirs la pression thermodynamique est donnée par

$$P = -\frac{1}{8\pi}\Lambda = \frac{(d-1)(d-2)}{16\pi l^2}, \quad (3.33)$$

où d représente le nombre de dimensions de l'espace-temps et Λ est la constante cosmologique et l désigne le rayon AdS.

à 4 dimensions pour un espace asymptotiquement plat on a :

$$P = 0 \quad (3.34)$$

et pour un espace ADS

$$P = \frac{3}{8\pi l^2} = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad (3.35)$$

Où l est le rayon cosmologique qui représente la courbure de l'espace AdS avec

$$\Lambda = \frac{-3}{l^2} \quad (3.36)$$

et la volume thermodynamique

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_S \quad (3.37)$$

Nous avons maintenant la correspondance thermodynamique complète :

Thermodynamique		Thermodynamique des trous noirs	
Enthalpie	H	Masse	M
Température	T	Gravité de surface	$\frac{\kappa}{2\pi}$
Entropie	S	l'aire de l'horizon	$\frac{A}{4}$
Pression	P	Constante cosmologique	$-\frac{\Lambda}{8\pi}$

(3.38)

Une fois le volume thermodynamique connu et la constante cosmologique identifiée avec la pression thermodynamique, on peut, pour un trou noir donné, noter l'équation d'état du "fluide" correspondant en relation avec la pression, la température, le volume et les autres paramètres externes caractérisant le trou noir,

$$P = P(V, T, J_i, Q) \quad (3.39)$$

OptLes transitions de phase et thermodynamique d'équilibre

La thermodynamique d'équilibre est régie par l'énergie libre de Gibbs $G = G(T, P, J, Q)$, dont le minimum global donne l'état d'un système, Puisque la masse du trou noir est interprétée comme l'enthalpie, nous avons la relation thermodynamique suivante :

$$G = M - TS = G(P, T, J, Q) . \quad (3.40)$$

Ici, T et S représentent la température de l'horizon et l'entropie du trou noir.

On obtient ainsi des diagrammes $G - T$ qui intègrent les informations sur les éventuelles transitions de phase

La stabilité thermodynamique locale d'un ensemble canonique est caractérisée par la positivité de la chaleur spécifique à pression constante

$$C_P \equiv C_{P,J,Q} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,J,Q} \quad (3.41)$$

Nous prenons la négativité de C_P comme un signe d'instabilité thermodynamique locale.

OptLa géométrie thermodynamique

Une autre approche pour étudier le comportement thermodynamique du système est la géométrie thermodynamique. Cette méthode nécessite une métrique appropriée en utilisant des grandeurs thermodynamiques. Pour construire une métrique appropriée, on peut utiliser un potentiel thermodynamique avec un ensemble spécifique de paramètres étendus. Ensuite, en calculant le scalaire de Ricci de la métrique introduite et en déterminant les points de divergence, Il a été démontré que le résultat obtenu est similaire au résultat de la capacité thermique. Cela signifie que les points de divergence du scalaire de Ricci et de divergence / point zéro de la capacité thermique coïncident. Il existe plusieurs méthodes pour construire la géométrie espace-temps telles que Weinhold, Ruppeiner, Quevedo et HPEM métrique [27].

Les transitions de phase des trous noirs

les calculs et les figures dans ce chapitre sont effectués à l'aide du logiciel **sagemath** [28]
Des exemples d'utilisation de sagemath sont présentés dans [ANNEXE A.2]

OptLes transitions de phase des trous noirs asymptotiquement plat

OptTrou noir de Schwarzschild

On a la métrique de Schwarzschild dans un espace-temps asymptotiquement plat est

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

Avec

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (4.2)$$

Pour un trou noir de Schwarzschild on a la gravité de surface

$$\kappa = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} f(r) = \frac{1}{4M} \quad (4.3)$$

Et l'aire de l'horizon :

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} = 4\pi r_s^2. \quad (4.4)$$

avec $r_s = 2M$ est le rayon de Schwarzschild défini par $f(r_s) = 0$

D'après les relations (3.38) on obtient les expressions suivantes pour les quantités thermodynamiques de le trou noir de Schwarzschild :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4\pi r_s}, \quad S = \frac{A}{4} = \pi r_s^2, \quad H = \frac{r_s}{2}, \\ G &= \frac{r_s}{4} = \frac{1}{16\pi T}, \quad C_P = -2\pi r_s^2 < 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Avec T est la température de Hawking, S est L'entropie du faucon Bekenstein, $H = M$ est l'enthalpie , G est L'énergie libre de Gibbs et C_p est la chaleur spécifique à pression constante

Et on a C_p est négative ce qui correspond au fait bien connu que le trou noir de Schwarzschild est localement instable thermodynamiquement L'énergie libre de Gibbs, représentée sur (Figure 4.1) n'a pas de caractéristiques intéressantes et n'indique aucune transition de phase.

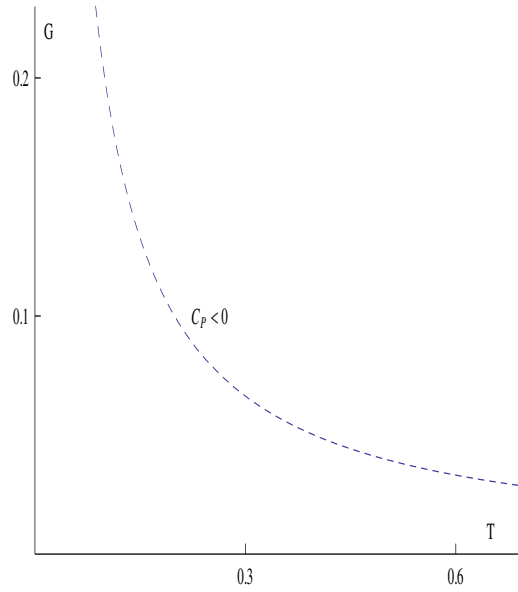


Figure. 4.1. : l'énergie libre de Gibbs $G(T)$ pour le trou noir de Schwarzschild.

OptTrou noir de Reissner Nordstrom

La solution qui décrit ce type de trou noir est donnée par la métrique suivante

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (4.6)$$

Avec

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (4.7)$$

En utilisant les équations (1.54) et (1.55) on peut écrire

$$f(r) = \frac{1}{r^2}(r - r_+)(r - r_-) \quad (4.8)$$

D'après (4.3) et (4.4) on a la gravité de surface κ et l'aire de l'horizon A sont :

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad A = 4\pi r_+^2. \quad (4.9)$$

Selon les relations (3.38), nous obtenons les quantités thermodynamiques ci-dessous :

$$\begin{aligned} S &= \pi r_+^2, \quad T = \frac{r_+^2 - Q^2}{4\pi r_+^3}, \quad H = \frac{r_+^2 + Q^2}{2r_+}, \\ G &= \frac{r_+^2 + 3Q^2}{4r_+}, \quad C_P = 2\pi r_+^2 \frac{r_+^2 - Q^2}{3Q^2 - r_+^2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Et le potentiel électrique Φ mesuré à l'infini prend la forme suivante

$$\Phi = \left. \frac{\partial M}{\partial Q} \right|_{S,P} = \frac{Q}{r_+} \quad (4.11)$$

La capacité thermique C_p est positive pour les petits trous noirs fortement chargés,

$$\sqrt{3}|Q| > r_+ > |Q|, \quad (4.12)$$

ou, de manière équivalente, $\sqrt{3}M/2 < |Q| < M$.

Pour une température fixe, il y a deux branches de trous noirs Reissner-Nordstrom. La branche inférieure thermodynamiquement préférée correspond à de petits trous noirs presque extrémaux fortement chargés avec C_P positif ($c_p > 0$ dans (Figure 4.2)). La branche supérieure des trous noirs Reissner-Nordstrom faiblement chargés (presque de type Schwarzschild) a une énergie libre de Gibbs plus élevée et une chaleur spécifique négative et est donc thermodynamiquement instable ($c_p < 0$ dans (Figure 4.2)).

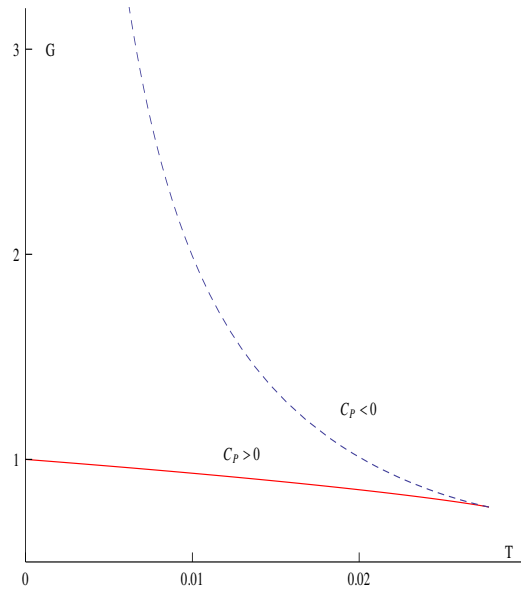


Figure. 4.2. : L'énergie libre de Gibbs $G(T)$ pour un trou noir Reissner-Nordstrom avec Q fixe ($Q = 1$): La ligne bleue correspond à $c_p < 0$ et la ligne rouge à $c_p > 0$

OptTrou noir de Kerr et Kerr Newman

La métrique du trou noir rotatif décrite par la solution de Kerr s'écrit :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.13)$$

avec

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr. \quad (4.14)$$

La gravité de surface k est définie comme la constante de proportionnalité entre les vecteurs $\xi^a \nabla_a \xi^b$ et ξ^b [21] La valeur de k est définie par

$$\xi^a \nabla_a \xi^b = \kappa \xi^b, \quad (4.15)$$

alors :

$$\kappa = \frac{r_+^2 - a^2}{2r_+(r_+^2 + a^2)}, \quad (4.16)$$

et l'aire de l'horizon (4.4) pour un trou noir de kerr est

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2), \quad (4.17)$$

Les grandeurs thermodynamiques sont :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_+}{a^2 + r_+^2} - \frac{1}{2r_+} \right], \quad S = \frac{A}{4} = \pi(a^2 + r_+^2), \\ H &= \frac{r_+^2 + a^2}{2r_+}, \quad G = \frac{3a^2 + r_+^2}{4r_+}, \\ C_P &= \frac{2\pi(r_+^2 - a^2)(r_+^2 + a^2)^2}{3a^4 + 6r_+^2 a^2 - r_+^4} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Le moment angulaire du trou noir est

$$J = \frac{a}{2r_+} (r_+^2 + a^2), \quad (4.19)$$

La vitesse angulaire de l'horizon est

$$\Omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (4.20)$$

Et la masse peut aussi être écrite comme

$$H = M = \frac{r_+^2 + a^2}{2r_+}. \quad (4.21)$$

et la capacité thermique est (avec $J = cte$)

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = \frac{2\pi(r_+^2 - a^2)(r_+^2 + a^2)^2}{3a^4 + 6r_+^2 a^2 - r_+^4}. \quad (4.22)$$

cette expression peut être écrite sous une forme plus simple si nous les normalisons par r_+^2

$$\frac{C_P}{r_+^2} = \frac{2\pi(1 - h^2)(h^2 + 1)^2}{3h^4 + 6h^2 - 1}, \quad (4.23)$$

Nous avons aussi introduit le paramètre de rotation normalisé h [29] comme

$$h \equiv \frac{|a|}{r_+}.$$

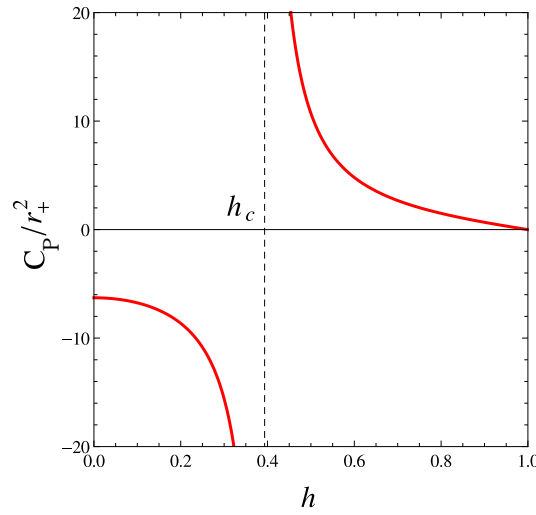


Figure. 4.3. : Tracés de la capacité thermique C_P par rapport à h . C_P diverge à h_c à l'endroit où se trouve un pôle.

Le rayon de l'horizon r_+ n'existe que pour $|a| \leq M$, ce qui correspond à $0 \leq h \leq 1$. La valeur $h = 0$ décrit un trou noir de Schwarzschild, tandis que la valeur limite $h = 1$ appartient au cas extrême du trou noir de Kerr. Les capacités thermiques en fonction de h sont tracées sur (Figure 4.3). On peut voir que C_P diverge à $h_c = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1}$, où se trouve un pôle. C_P est négatif pour les valeurs $h < h_c$ et positif pour les valeurs $h > h_c$.

Alors comme pour le trou noir Reissner Nordstrom, nous observons deux branches de l'énergie libre de Gibbs. Le plus bas se produit pour

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}|a| > r_+ > |a|, \quad (4.24)$$

ou, de manière équivalente, $M > |a| > M\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$. Il est thermodynamiquement préféré et correspond à de petits trous noirs à rotation rapide presque extrêmes avec C_P positif. La branche supérieure des trous noirs à rotation lente (presque de type Schwarzschild) a une énergie libre de Gibbs plus élevée et une chaleur spécifique négative et est thermodynamiquement instable. Nous concluons que dans l'ensemble canonique de J fixe, les trous noirs à rotation rapide presque extrêmes sont thermodynamiquement préférés aux trous à rotation lente.

Le comportement de l'énergie libre de Gibbs est qualitativement très similaire à celui du trou noir chargé [30], donné par (Figure 4.2), avec J fixe remplaçant Q fixe. En fait, le comportement thermodynamique reste qualitativement le même, même dans le cas Kerr Newman rotatif chargé [31].

OptLes transitions de phase des trous noirs AdS

OptTrou noir de Schwarzschild AdS

Le plus simple (sphérique) trou noir asymptotiquement AdS est décrit par l'espace-temps Schwarzschild-AdS. La métrique prend la forme de l'équation (4.1) avec :

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (4.25)$$

L'horizon du trou noir (rayon de Schwarzschild) est déterminé par la condition $f(r_s) = 0$. D'après l'équation (4.25) on obtient

$$M = \frac{r_s}{2} \left(1 + \frac{r_s^2}{l^2} \right) \quad (4.26)$$

Et les grandeurs thermodynamiques sont :

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2}, \quad T = \frac{1}{4\pi r_s l^2} (l^2 + 3r_s^2), \\ S &= \pi r_s^2, \quad H = \frac{r_s}{2} \left(1 + \frac{r_s^2}{l^2} \right), \\ G &= \frac{r_s}{4} \left(1 - \frac{r_s^2}{l^2} \right), \quad C_P = 2\pi r_s^2 \frac{3r_s^2 + l^2}{3r_s^2 - l^2}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

La variable conjuguée à la pression (ou constante cosmologique) est donnée par

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_S = \frac{4}{3} \pi r_s^3 \quad (4.28)$$

Nous observons un comportement thermodynamique qualitativement différent par rapport au cas de Schwarzschild asymptotiquement plat. Concrètement C_P n'est plus toujours négatif : il devient positif pour les grands trous noirs

$$r_s > r_{\min} = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad (4.29)$$

tandis qu'il est négatif pour $r_s < r_{\min}$ et indéfini pour $r_s = r_{\min}$.

Le comportement de l'énergie libre de Gibbs G est affiché sur (Figure 4.4)

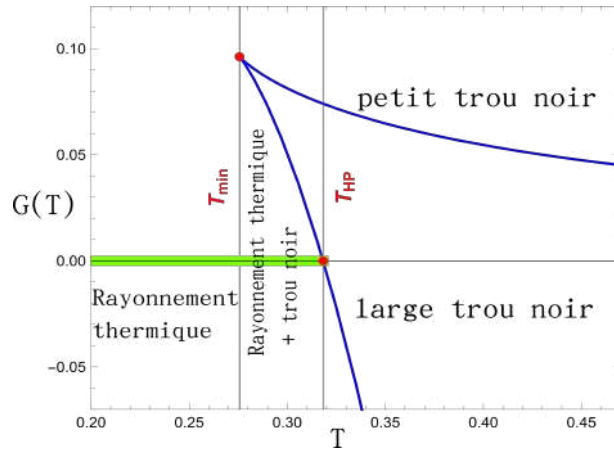


Figure. 4.4. : Énergie libre de Gibbs $G(T)$ pour le trou noir de Schwarzschild-AdS.

On observe une température minimale $T_{\min} = 2\sqrt{3}/(4\pi l)$, correspondant à r_{\min} , en dessous de laquelle aucun trou noir ne peut exister. Au-dessus de cette température, nous avons deux branches de trous noirs. La branche supérieure décrit de petits trous noirs à chaleur spécifique négative; ceux-ci sont thermodynamiquement instables et ne peuvent pas être en équilibre thermique. Les grands ($r_s > r_{\min}$) trous noirs de la branche inférieure ont une chaleur spécifique positive et sont donc localement thermodynamiquement stables. Cependant, juste au-dessus de T_{\min} , l'énergie libre de Gibbs de ces trous noirs est positive et l'espace thermique AdS avec une énergie libre de Gibbs approximativement nulle représente un état thermodynamique globalement préféré. Cela continue jusqu'à la température $T_{\text{HP}} \approx 1/(\pi l)$ pour laquelle l'énergie libre de Gibbs du trou noir devient négative, le rayon du trou noir correspondant étant donné par

$$r_{\text{HP}} = l. \quad (4.30)$$

Les trous noirs avec $r_s > r_{\text{HP}}$ ont une énergie libre de Gibbs négative et représentent l'état globalement préféré.

Cela signifie qu'à $T = T_{\text{HP}}$ il y a une transition de phase *Hawking-Page* [32] de premier ordre entre le rayonnement thermique et les grands trous noirs.

En résumant le scénario de Hawking-Page, les trous noirs de Schwarzschild dans l'espace anti-de Sitter présente une transition de phase thermodynamique. Ce scénario est décrit par le signe de l'énergie libre de Gibbs du trou noir selon les conditions suivantes :

- Pour $T < T_{\min}$, seulement la phase "rayonnement thermique pure" qui existe.

- Pour $T_{min} < T < T_{HP}$, on a $G_{rayonnement} < G_{trou noir}$, la phase "rayonnement thermique" est plus stable et donc plus dominante.
- Pour $T > T_{HP}$, on a $G_{large trou noir} < G_{rayonnement}$, la phase "large trou noir" c'est la plus stable et la plus dominante.

La ligne de coexistence des deux phases : rayonnement thermique/large trou noir s'écrit comme suit :

$$P_{HP} = \frac{3\pi}{8} T_{HP}^2 \quad (4.31)$$

La (Figure 4.5) montre la courbe de coexistence qui représente P_{HP} en fonction de T_{HP} .

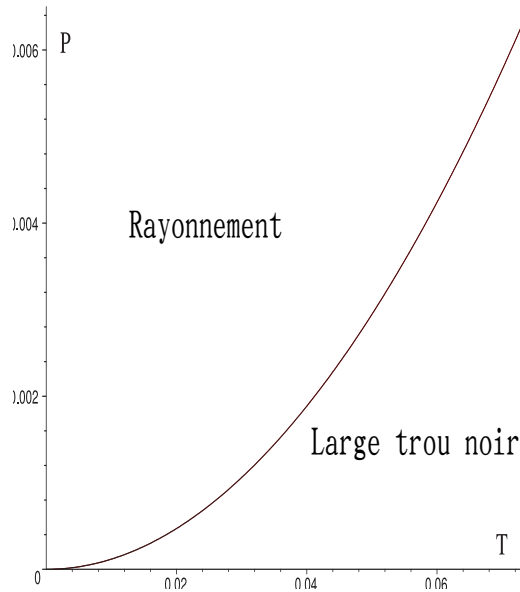


Figure. 4.5. : Diagramme de coexistence Radiation/Large trou noir

OptTrou noir de Reissner Nordstrom AdS

La solution qui décrit un trou noir chargé dans un espace AdS (RN-AdS) est donnée par la métrique suivante :

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.32)$$

ou

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}$$

Les paramètres M et Q représentent la masse et la charge électrique du trou noir respectivement. On interprète la constante cosmologique Λ comme une pression thermodynamique

et on résout la condition sur l'horizon des évènements r_+ défini par $f(r_+) = 0$, la masse s'écrit

$$M = \frac{1}{2} \left(r_+ - \frac{Q^2}{r_+} + \frac{8\pi}{3} r_+^3 P \right) \quad (4.33)$$

Les grandeurs thermodynamiques sont :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4\pi r_+^3 l^2} \left(l^2(r_+^2 - Q^2) + 3r_+^4 \right), \quad S = \pi r_+^2, \\ V &= \frac{4}{3} \pi r_+^3, \quad \Phi = \frac{Q}{r_+}, \quad G = \frac{l^2 r_+^2 - r_+^4 + 3Q^2 l^2}{4l^2 r_+}, \\ C_P &= 2\pi r_+^2 \frac{3r_+^4 + l^2 r_+^2 - Q^2 l^2}{3r_+^4 - l^2 r_+^2 + 3Q^2 l^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

ou Φ est la difference de potentiel entre l'horizon et l'infini.

La chaleur spécifique est négative pour :

$$\frac{l\sqrt{1 - \sqrt{1 - 36Q^2/l^2}}}{\sqrt{6}} < r_+ < \frac{l\sqrt{1 + \sqrt{1 - 36Q^2/l^2}}}{\sqrt{6}}, \quad (4.35)$$

et positif autrement.

Pour une charge fixe, l'équation (4.34) est équivalent à l'équation d'état d'un trou noir de RN-AdS, $P = P(r_+, T)$

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{4\pi r_+^4} \quad (4.36)$$

On peut cette équation comme

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} \quad (4.37)$$

avec $v = 2r_+ l_p^2$ le volume spécifique et $l_p = \hbar G/c^4 = 1$

Il a été remarqué pour la première fois dans [33, 34] que dans un ensemble canonique (à charge fixe), les trous noirs chargés d'AdS permettent une transition de phase du premier ordre *small-black-hole/large-black-hole* (SBH/LBH) qui rappelle à la transition liquide/gaz d'un fluide de Van der Waals.

L'équation d'état (4.37) reproduit qualitativement le comportement de l'équation de Van der Waals, illustrée dans (Figure 4.6)

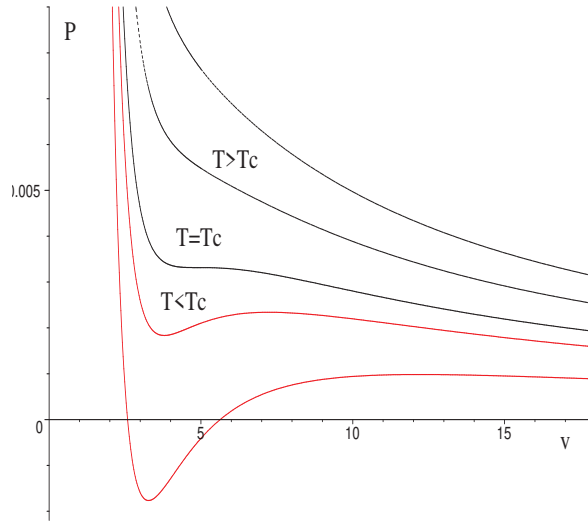


Figure. 4.6. : Equation d'état d'un trou noir chargé AdS.

Comme dans le cas de fluide de Van der Waals, cette équation présente un comportement critique (P_c, T_c) et une point d'inflexion qui se produit lorsque

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0 \quad (4.38)$$

En dessous de P_c , l'énergie libre de Gibbs présente un comportement caractéristique de queue d'aronde, illustré dans (Figure 4.7), indiquant une transition de phase SBH/LBH de premier ordre.

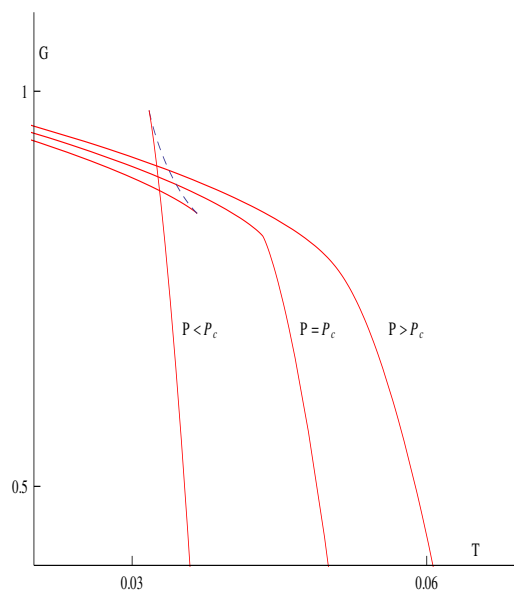


Figure. 4.7. : L'énergie libre de Gibbs $G(T)$ d'un trou noir de RN-AdS.

La ligne de coexistence correspondante est affichée dans (Figure 4.8). Elle se termine à un point critique, caractérisé par

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad v_c = 2\sqrt{6}Q, \quad P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}, \quad (4.39)$$

où la transition de phase devient du second ordre [35], la relation $\rho_c = P_c v_c / T_c = 3/8$ est identique au cas de Van der Waals.

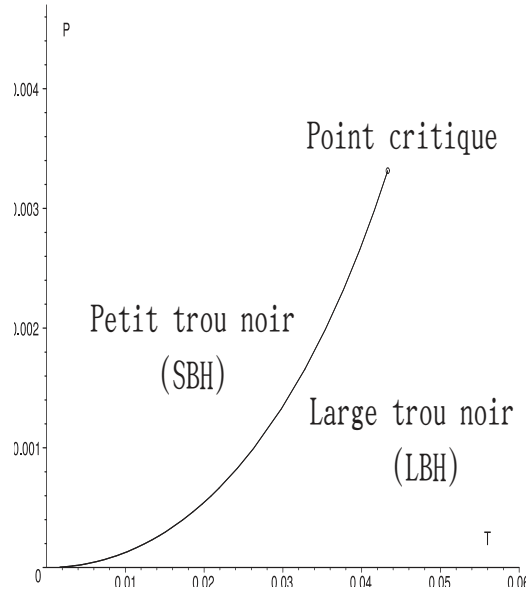


Figure. 4.8. : La ligne de coexistence de la transition de phase SBH / LBH du trous noirs AdS chargé dans le plan (P, T)

OptTrou noir de Kerr AdS

La métrique du trou noir rotatif dans un espace AdS s'écrit :

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(dt - \frac{a}{\Xi} \sin^2 \theta d\varphi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Sigma} d\theta^2 + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} \left[a dt - \frac{(r^2 + a^2)}{\Xi} d\varphi \right]^2, \quad (4.40)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= (r^2 + a^2) \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) - 2mr, \quad \Sigma = 1 - \frac{a^2}{l^2} \cos^2 \theta, \\ \Xi &= 1 - \frac{a^2}{l^2}, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

où r_+ est le rayon du trou noir. La masse M et le moment angulaire J sont liés aux paramètres m et a par

Les quantités thermodynamiques sont

$$T = \frac{r_+}{4\pi(r_+^2 + a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{l^2} + 3\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{a^2}{r_+^2} \right), \quad (4.41)$$

$$S = \frac{\pi(r_+^2 + a^2)}{\Xi}, \quad (4.42)$$

$$G = \frac{a^4 (r_+^2 - l^2) + a^2 (3l^4 + 2l^2 r_+^2 + 3r_+^4) + l^2 r_+^2 (l^2 - r_+^2)}{4r_+ (a^2 - l^2)^2}. \quad (4.43)$$

Le moment angulaire d'un trou noir de Kerr-AdS est

$$J = \frac{(r_+^2 + a^2)(1 + r_+^2/l^2)}{2r_+} \frac{a}{(1 - a^2/l^2)^2}, \quad (4.44)$$

la vitesse angulaire de l'horizon est

$$\Omega = \frac{a}{l^2} \frac{r_+^2 + l^2}{r_+^2 + a^2}, \quad (4.45)$$

Et la masse peut aussi être écrite comme

$$H = M = \frac{(r_+^2 + a^2)(1 + r_+^2/l^2)}{2r_+} \frac{1}{(1 - a^2/l^2)^2}. \quad (4.46)$$

et la capacité thermique est (avec $J = cte$)

$$C_P = \frac{2\pi l^4 (a^2 + r_+^2)^2 (-a^2 l^2 + (a^2 + l^2) r_+^2 + 3r_+^4)}{(l^2 - a^2)X}, \quad (4.47)$$

Avec

$$X = -l^4 r_+^4 + 3l^2 r_+^6 + a^6 (l^2 + r_+^2) + a^4 (3l^4 + 13l^2 r_+^2 + 6r_+^4) + a^2 (6l^4 r_+^2 + 23l^2 r_+^4 + 9r_+^6).$$

Nous avons introduit ici les paramètres normalisés

$$p \equiv \frac{|a|}{r_+}, \text{ and } s \equiv \frac{l}{r_+}. \quad (4.48)$$

Les capacités thermiques C_P change de signe en fonction des valeurs de p et s . L'espace de paramètres de (p, s) peut être divisé en 4 régions en fonction du signe C_P , comme le montre la (Figure 4.9).

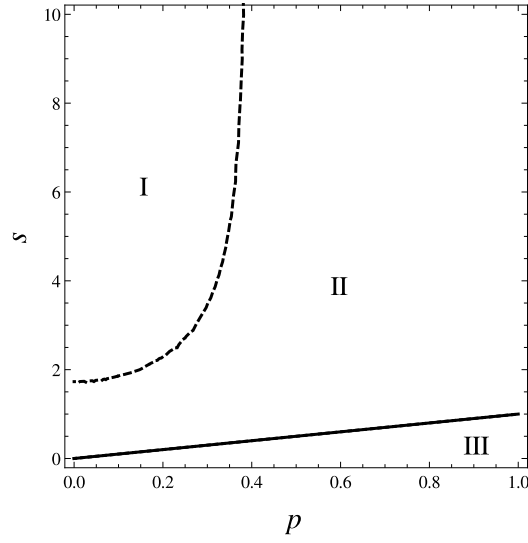


Figure. 4.9. : Diagramme de phase des trous noirs de Kerr-AdS.

Le diagramme de phase des trous noirs de Kerr-AdS est représentée sur (Figure 4.9)

Dans la région I, $C_P < 0$, dans la région II, $C_P > 0$, et dans la région III, il n'y a pas de solution physique parce que $|a| > l$.

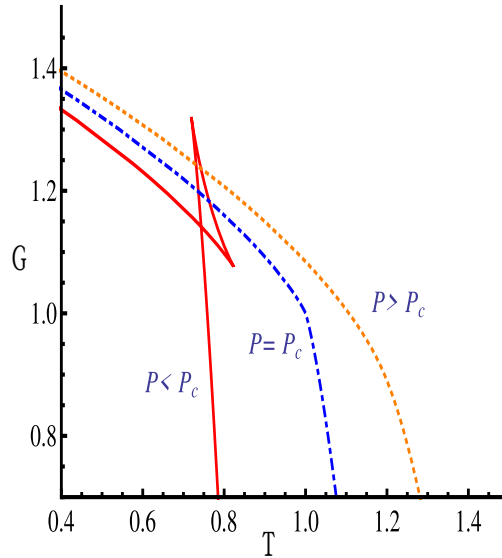


Figure. 4.10. : L'énergie libre de Gibbs $G(T)$ d'un trou noir de Kerr-AdS.

Les résultats sont les mêmes que ceux du trou noir RN-AdS : la transition de phase a lieu pour $P < P_c$ et disparaît pour $P > P_c$.

Dans la référence [36] nous trouvons analytiquement la solution du point critique pour le trou noir de Kerr AdS par l'analyse dimensionnelle :

$$P_c \simeq 0.002857 \cdot J^{-1}, \quad V_c \simeq 6.047357 \cdot J^{1/2}, \quad T_c \simeq 115.796503 \sqrt[3]{J}, \quad (4.49)$$

La courbe de coexistence réduite est également représentée sur (Figure 4.11).

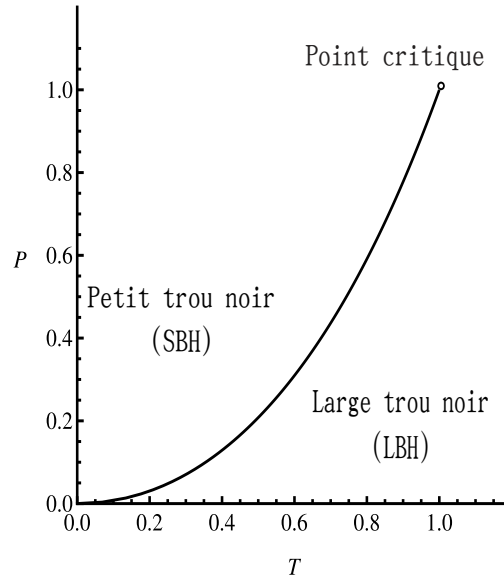


Figure. 4.11. : La ligne de coexistence de la transition de phase SBH / LBH du trou noir Kerr-Ads dans le plan (P, T)

Conclusion

Dans ce modeste mémoire, nous avons essayé d'approcher de la notion du trou noir. Nous avons vu une description des trous noirs en astrophysique comme des objets massifs dont le champ gravitationnel est si intense qu'il empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper, ce sont des objets célestes mystérieux, invisibles qui ne peuvent pas être observés directement. Ainsi, nous avons traité les trous noirs dans la théorie la plus compatible à décrire ce genre d'objets, c'est la relativité générale, en se basant sur la notion de l'espace-temps.

Les trous noirs peuvent être complètement décrits à l'aide de seulement trois paramètres : la masse, la charge électrique et le moment angulaire. On a choisi seulement ces trois paramètres pour la raison suivante : lorsque l'étoile massive s'écroule sur elle-même, toute l'information est donc perdue pour le monde extérieur et le trou noir apparaît alors comme une simple déformation de l'espace-temps. Ainsi il serait intéressant de s'interroger sur la forme de la matière à l'intérieur d'un trou noir et de trouver une explication physique de la singularité où la courbure est infinie.

Par la suite et à cause d'une analogie profonde entre certaines propriétés des trous noirs et les lois de la thermodynamique, on a traité les trous noirs dans sa branche d'étude thermodynamique des trous noirs . On a ainsi vu que l'affirmation "*rien ne peut sortir d'un trou noir*" est en fait n'est pas juste, car Hawking a mis en évidence la présence d'un rayonnement de particules qui ressemble à celui d'un rayonnement thermique.

Finalement on a étudié la thermodynamique des trous noir dans un espace asymptotiquement plat et des trous noir AdS dans un espace de phase étendu, en traitant la constante cosmologique et sa quantité conjuguée, comme des variables thermodynamiques associées à la pression et au volume, respectivement. Pour un trou noir avec Q fixe ou J fixe, cette identification nous a permis d'écrire l'équation d'état comme suit $P = P(V, T)$ et d'étudier son comportement en utilisant les techniques thermodynamiques standard. La stabilité thermodynamique a été bien étudié en utilisant la capacité thermique et l'énergie libre de Gibbs $G(T)$

Bibliographie

- [1] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 2019 (cf. p. 5).
- [2] Kirill A Bronnikov et Sergey G Rubin. *Black Holes, Cosmology and Extra Dimensions*. WORLD SCIENTIFIC, 2012. eprint : <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/8302> (cf. p. 8).
- [3] Werner Israel. "Event Horizons in Static Vacuum Space-Times". In : *Phys. Rev.* 164 (5 déc. 1967), p. 1776-1779 (cf. p. 11).
- [4] D.C. Robinson. "Classification of black holes with electromagnetic fields". In : *Phys. Rev. D* 10 (1974), p. 458-460 (cf. p. 11).
- [5] A. Ashtekar. *100 Years of Relativity : Space-time Structure : Einstein and Beyond*. World Scientific, 2005 (cf. p. 14).
- [6] Markus Heusler. "On the uniqueness of the Reissner-Nordström solution with electric and magnetic charge". In : *Classical and Quantum Gravity* 11.3 (mar. 1994), p. L49-L53 (cf. p. 17).
- [7] Nicolas Vasset. "Quelques aspects des horizons de trous noirs en relativité numérique". 2009PA077064. Thèse de doct. 2009, 1 vol. (171 p.) (Cf. p. 22).
- [8] Roger Penrose. "The Question of Cosmic Censorship". In : *Journal of Astrophysics and Astronomy* 20 (sept. 1999), p. 233 (cf. p. 23).
- [9] NASA. *National Aeronautics and Space Administration : black hole math*. 2019 (cf. p. 27, 29).
- [10] R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham et al. "GW190521 : A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of $150 M_{\odot}$ ". In : *Phys. Rev. Lett.* 125 (10 sept. 2020), p. 101102 (cf. p. 28).
- [11] S. W. Hawking. "Gravitational Radiation from Colliding Black Holes". In : *Phys. Rev. Lett.* 26 (21 mai 1971), p. 1344-1346 (cf. p. 29).
- [12] I. Bombaci. "The maximum mass of a neutron star." In : *aap* 305 (jan. 1996), p. 871 (cf. p. 30).
- [13] José M M Senovilla. "Black hole formation by incoming electromagnetic radiation". In : *Classical and Quantum Gravity* 32.1 (déc. 2014), p. 017001 (cf. p. 31).
- [14] Luciano Rezzolla, Elias R. Most et Lukas R. Weih. "Using Gravitational-wave Observations and Quasi-universal Relations to Constrain the Maximum Mass of Neutron Stars". In : *The Astrophysical Journal* 852.2 (jan. 2018), p. L25 (cf. p. 32).

- [15] A. M. Ghez, S. Salim, N. N. Weinberg et al. "Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits". In : *The Astrophysical Journal* 689.2 (déc. 2008), p. 1044-1062 (cf. p. 32).
- [16] M. Séguin et B. Villeneuve. *Astronomie & astrophysique : cinq grandes idées pour explorer et comprendre l'Univers*. Masson, 1995 (cf. p. 34).
- [17] Maïca Clavel. "Activité du trou noir supermassif au centre de la Galaxie". 2014PA112170. Thèse de doct. 2014 (cf. p. 34).
- [18] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et al. "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger". In : *Physical Review Letters* 116.6 (fév. 2016) (cf. p. 35).
- [19] James M. Bardeen, B. Carter et S.W. Hawking. "The Four laws of black hole mechanics". In : *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), p. 161-170 (cf. p. 36, 42).
- [20] Jacob D. Bekenstein. "Black Holes and Entropy". In : *Phys. Rev. D* 7 (8 avr. 1973), p. 2333-2346 (cf. p. 38, 40, 41).
- [21] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler et D.I. Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017 (cf. p. 39, 53).
- [22] J. Grain et A. Barrau. *Relativité générale : Cours et exercices corrigés*. Sciences Sup. Dunod, 2011 (cf. p. 40, 44).
- [23] Valery Frolov et Igor Novikov. "Dynamical origin of the entropy of a black hole". In : *Physical Review D* 48.10 (nov. 1993), p. 4545-4551 (cf. p. 40).
- [24] Robert M. Wald. "The Thermodynamics of Black Holes". In : *Living Reviews in Relativity* 4.1 (juil. 2001) (cf. p. 42).
- [25] D.J. Raine et E.G. Thomas. *Black Holes : An Introduction*. Black Holes : An Introduction. Imperial College Press, 2005 (cf. p. 43).
- [26] Michael C. LoPresto. "Some Simple Black Hole Thermodynamics". In : *The Physics Teacher* 41.5 (2003), p. 299-301. eprint : <https://doi.org/10.1119/1.1571268> (cf. p. 46).
- [27] Kh. Jafarzade et J. Sadeghi. *Thermodynamic geometry and phase transition of charged accelerating AdS black hole*. 2017. arXiv : 1711.04522 [hep-th] (cf. p. 49).
- [28] William Stein, Frédéric Chapoton, Jeroen Demeyer et al. *sagemath/sage : 9.1*. Version 9.1. Juin 2020 (cf. p. 50).
- [29] Isao Okamoto et Osamu Kaburaki. "The third law of thermodynamics for Kerr black holes". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 250.2 (mai 1991), p. 300-309. eprint : <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/250/2/300/32218568/mnras250-0300.pdf> (cf. p. 54).
- [30] David Kubizák et Robert B. Mann. "P-V criticality of charged AdS black holes". In : *Journal of High Energy Physics* 2012.7 (juil. 2012) (cf. p. 55).
- [31] Natacha Altamirano, David Kubiznak, Robert B. Mann et Zeinab Sherkatghanad. *Thermodynamics of rotating black holes and black rings : phase transitions and thermodynamic volume*. 2014. arXiv : 1401.2586 [hep-th] (cf. p. 55).
- [32] S.W. Hawking et Don N. Page. "Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space". In : *Commun. Math. Phys.* 87 (1983), p. 577 (cf. p. 57).

- [33] Andrew Chamblin, Roberto Emparan, Clifford V. Johnson et Robert C. Myers. "Charged AdS black holes and catastrophic holography". In : *Physical Review D* 60.6 (août 1999) (cf. p. 59).
- [34] Andrew Chamblin, Roberto Emparan, Clifford V. Johnson et Robert C. Myers. "Holography, thermodynamics, and fluctuations of charged AdS black holes". In : *Physical Review D* 60.10 (oct. 1999) (cf. p. 59).
- [35] Rabin Banerjee, Sujoy Kumar Modak et Saurav Samanta. "Second order phase transition and thermodynamic geometry in Kerr-AdS black holes". In : *Physical Review D* 84.6 (sept. 2011) (cf. p. 61).
- [36] Shao-Wen Wei, Peng Cheng et Yu-Xiao Liu. "Analytical and exact critical phenomena of d-dimensional singly spinning Kerr-AdS black holes". In : *Physical Review D* 93.8 (avr. 2016) (cf. p. 64).

ANNEXE

OptDiagramme de penrose

Les diagrammes conformes constituent un bon moyen de faire correspondre des espace-temps complexes à un diagramme relativement simple.

Tout d'abord, nous avons besoin du concept de transformations conformes. Une transformation conforme est un changement d'échelle local. Comme les distances sont mesurées par la métrique, on peut écrire cela comme

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2(x)g_{\mu\nu} \quad \text{Et} \quad d\tilde{s}^2 = \omega^2(x)ds^2$$

où $\omega(x)$ est une fonction qui ne disparaît pas et le tilde indique la nouvelle métrique.

Il s'avère que les courbes nulles restent invariantes par des transformations conformes.

Cela signifie que si une certaine $x^\mu(\lambda)$ est nulle dans $g_{\mu\nu}$, il sera également nul dans $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Preuve : une courbe est nulle si et seulement si son vecteur tangent $dx^\mu/d\lambda$ est nul, c'est-à-dire si

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda} = 0$$

Alors elle est également nulle dans la métrique conforme

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda} = \omega^2(x)g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda} = 0$$

Cette caractéristique des transformations conformes les rend idéales pour notre objectif. Si, dans notre système métrique original, les cônes de lumière font un angle de 45° , il en sera de même dans notre nouveau système métrique. Nous voulons également que l'infini soit à une valeur de coordonnées finies (sinon nous manquerions rapidement de papier!).

Maintenant, à titre d'exemple, trouvons une transformation conforme qui répond à nos besoins pour la métrique de Minkowski, qui en coordonnées polaires se lit comme suit

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

D'abord, passez aux coordonnées nulles

$$u = t - r \quad v = t + r$$

Utilisez ensuite l'arctangente pour ramener l'infini à une valeur de coordonnées finies

$$U = \arctan(u) \quad V = \arctan(v)$$

Puis retransformer en coordonnée temporelle T et en coordonnée radiale R

$$T = V + U \quad R = V - U$$

avec

$$0 \leq R < \pi, \quad |T| + R < \pi$$

La nouvelle métrique est la suivante

$$\tilde{ds}^2 = \omega^2(T, R) ds^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2$$

où

$$\omega = \cos T + \cos R$$

Nous voyons que l'ancienne et la nouvelle métrique sont en effet liées de manière conforme. Puisque l'infini est également à présent à une valeur finie, la nouvelle métrique peut être réduite en diagramme conforme (voir Figure A.1) Chaque point représente une double sphère. Notez que les cônes de lumière sont en effet à $\pm 45^\circ$ dans tout le diagramme. Les limites, appelées l'infini conforme, peuvent être divisé en plusieurs régions :

- i^+ = l'infini temporel du futur ($T = \pi, R = 0$)
- i^0 = l'infini spatial ($T = 0, R = \pi$)
- i^- = l'infini temporel du passé ($T = -\pi, R = 0$)

- J^+ = surface nulle de l'infini du futur ($T = \pi - R, 0 < R < \pi$)
- J^- = surface nulle de l'infini du passé ($T = -\pi + R, 0 < R < \pi$)

En utilisant des diagrammes conformes, nous pouvons rapidement avoir une idée de la structure causale de l'espace-temps.

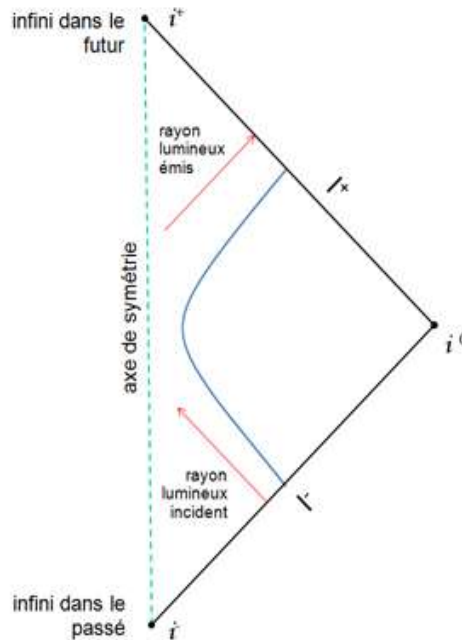


Figure. A.1. : Diagramme conforme de l'espace-temps de Minkowski.

OptDiagramme de Penrose pour trou noir statique chargé $GM^2 > q^2$

La métrique a des singularités de coordonnées à r_+ et r_- dans les deux cas elles peuvent être éliminées par un changement de coordonnées.

Les surfaces définies par $r = r_{\pm}$ sont toutes deux nulles et sont en fait des horizons des événements

La singularité à $r = 0$ est une ligne de type temps, pas une surface de type espace comme dans Schwarzschild.

Pour un observateur tombant de loin dans le trou noir r_+ joue le rôle de $r_s = 2GM$ dans la métrique de Schwarzschild : à ce rayon r devient une coordonnée de type temps, et on est aspiré dans la direction des r décroissants. Des témoins à l'extérieur du trou noir vont observer le même phénomène que dans le cas d'un trou noir non chargé, l'observateur se meut de moins en moins vite et rougit à vue d'œil.

Mais la chute inexorable vers la singularité s'arrête quand on atteint la surface nulle $r = r_-$, où r redevient une coordonnée d'espace et où le mouvement vers les r décroissants peut être arrêté. Donc nous pouvons éviter la chute fatale vers la singularité $r = 0$, ce qui était prévisible, car $r = 0$ est une ligne de type temps et est donc nécessairement dans notre futur. En fait, on a le choix de continuer vers $r = 0$, ou de continuer son chemin dans la direction des r croissants, traverser la surface nulle à $r = r_-$. Alors r va de nouveau être une coordonnée de type temps mais avec une orientation inverse ce qui fait que vous allez être propulsé vers les r croissants.

Vous allez être recraché au-delà de $r = r_+$ émergeant de nulle part, dans le reste de l'univers. De là vous pouvez décider de retourner dans le trou noir (on y prend goût!), un trou noir différent de celui dans lequel vous êtes entré la première fois et répéter le voyage autant de fois que vous voulez. Cette histoire est illustrée par le diagramme de Penrose correspondant, construit en utilisant les coordonnées appropriées et en étendant analytiquement la métrique de Reissner Nordstrom aussi loin que possible.

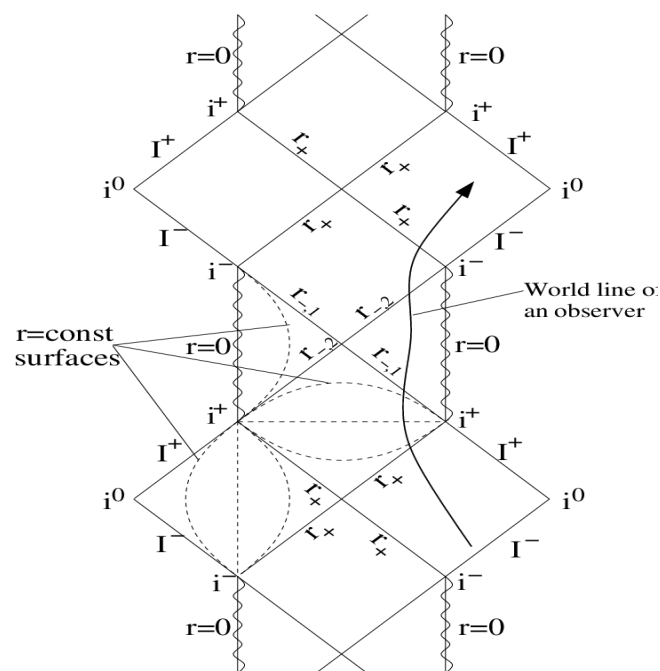


Figure. A.2. : Diagramme de Penrose pour un trou noir chargé

OptLes calculs avec SageMath

SageMath (<https://www.sagemath.org/>) est un logiciel de mathématiques moderne, gratuit et à code source ouvert qui est basé sur le langage de programmation Python. Il utilise plus de 90 logiciels libres, parmi lesquels Maxima et Pynac (calculs symboliques), GAP

(théorie des groupes), PARI/GP (théorie des nombres), Singular (calculs polynomiaux), et matplotlib (figures 2D de haute qualité). SageMath fournit une interface Python uniforme pour tous ces paquets ; cependant, SageMath est bien plus qu'une simple interface : il contient une part importante et croissante du code original (plus de 750 000 lignes de Python et Cython, impliquant 5344 classes).

OptExemple 1 : coordonnées de Kruskal-Szekeres dans l'espace-temps de Schwarzschild

Nous déclarons le "manifold" espace-temps M avec les coordonnées (t, r, θ, ϕ) :

```
1 M = Manifold(4, 'M')
2 X.<t,r,th,ph> = M.chart(r't r:(0,+oo) th:(0,pi):\theta ph:(0,2*pi):\phi')
```

Nous déclarons coordonnées de Kruskal-Szekeres

```
1 X_KS.<T,X,th,ph> = M.chart(r'T X th:(0,pi):\theta ph:(0,2*pi):\phi')
2 X_KS.add_restrictions(T^2 < 1 + X^2)
3 X_KS
```

la relation entre les coordonnées

```
1 SD_I_to_KS = X_SD_I.transition_map(X_KS_I, [sqrt(r/(2*m)-1)*exp(r/(4*m))*
                                                sinh(t/(4*m)),
2 sqrt(r/(2*m)-1)*exp(r/(4*m))*cosh(t/(4*m)),
3 th, ph])
4 SD_I_to_KS.display()
```

$$\begin{cases} T &= \sqrt{\frac{r}{2m}-1} e^{\left(\frac{r}{4m}\right)} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ X &= \sqrt{\frac{r}{2m}-1} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) e^{\left(\frac{r}{4m}\right)} \\ \theta &= \theta \\ \phi &= \phi \end{cases}$$

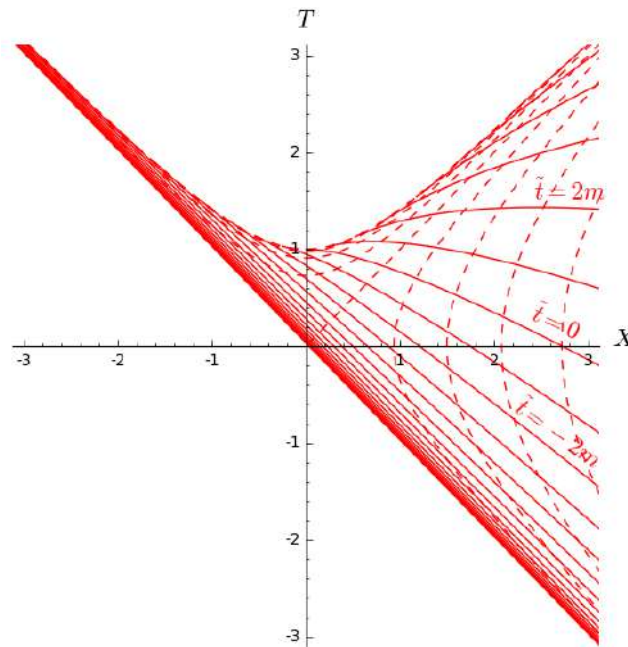
Tracé la grille de diagramme en termes de coordonnées de Kruskal-Szekeres :

```
1 graph = X_EF.plot(X_KS, ambient_coords=(X,T), fixed_coords={th:pi/2,ph:pi},
2 ranges={te:(-16,6), r:(1e-6,5)}, steps={te:1, r:0.5},
3 style={te:'--', r:'-'}, parameters={m:1})
4
5 graph += text(r'\tilde{t}=0$', (2.65, 0.25), fontsize=16, color='red',
6 rotation=-24)
```

```

6 graph += text(r'\tilde{t}=2m$', (2.8, 1.6), fontsize=16, color='red')
7 graph += text(r'\tilde{t}=-2m$', (2.68, -0.9), fontsize=16, color='red',
               rotation=-35)
8 show(graph, xmin=-3, xmax=3, ymin=-3, ymax=3)

```



Nous ajoutons l'horizon de Schwarzschild à l'intrigue :

```

1 hor = line([(0,0), (4,4)], color='black', thickness=2) \
2 + text(r'\mathscr{H}$', (3, 2.7), fontsize=20, color='black')
3 graph += hor

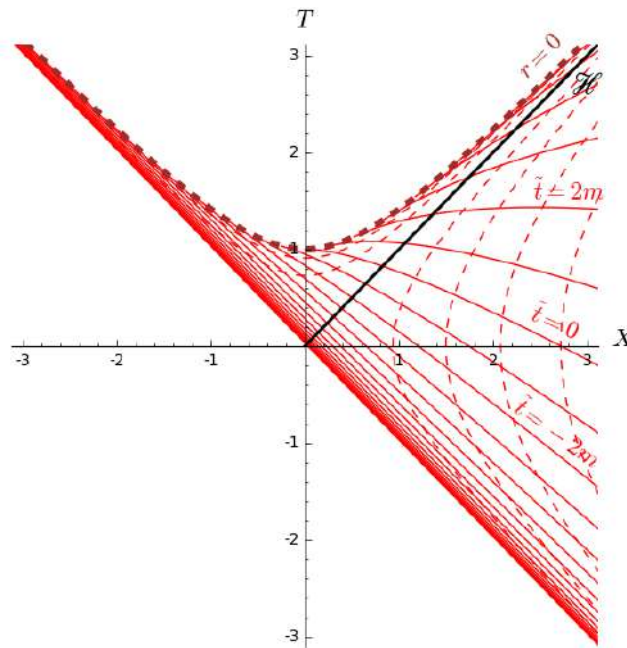
```

Nous ajoutons la singularité de la courbure $r = 0$ à l'intrigue :

```

1 sing = X_SD_II.plot(X_KS, fixed_coords={r:0, th:pi/2, ph:pi},
                    ambient_coords=(X,T),
2 color='brown', thickness=4, style='--', parameters={m:1}) \
3 + text(r'$r=0$', (2.5, 3), rotation=45, fontsize=16, color='brown')
4 graph += sing
5 show(graph, xmin=-3, xmax=3, ymin=-3, ymax=3)

```



OptExemple 2 : calculer des quantités thermodynamiques de trou noir de Schwarzschild AdS

Nous déclarons coordonnées en forme des symbols et les composantes de la métrique

```

1  r, theta ,t, phi= symbols('r theta t phi ', real = True)
2  g00= 1- (2* m )/r +q**2/r**2
3  g22=r**2
4  g33=r**2 * sin(theta)**2

```

calculons l'intégrale d'aire de l'horizon 4.4

```

1  integr1= integrate(sqrt(g22*g33), (phi, 0, 2*pi))
2  A = integrate(integr1, (theta, 0, pi))

```

Pour calculer les dérivées partielles complexes comme $C_P(T)$ ou $G(T)$ on a

$$t = f^{-1}(x) \quad (\text{A.1})$$

$$f(t) = x \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dx}x \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{df}{dt} \frac{dt}{dx} = 1 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{df}{dt}} \quad (\text{A.5})$$

Et on utilise la règle de la chaîne :

$$C_P = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial r} \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial r}}$$

il est facile à calculer car $S = S(r)$ et $T = T(r)$

```
1 cp = t*diff(s, r) *1/diff(t, r)
```

Finalement on remplace r par T on utilise

$$T = f(r) \Rightarrow r = f^{-1}(T)$$

alors $C_P(r) = C_P(f^{-1}(T))$, La fonction *inv_exp* est pour calculer l'inverse d'un fonction

```
1 def invr_exp(t, r):
2     y = symbols('y', positive=True, real=True)
3     n = sp.Eq(y, t)
4     eq = sp.solve(n, r)
5     return simplify(eq[0]).subs(y, r)
6
7 cp=cp.subs(r, invr_exp(t,r))
```