Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Laboratoire de Physique des Hautes Énergies et Astrophysique

Sous le thème

Transition de phase dans les trous noirs au delà de la relativité génerale

Auteur :
Aicha EL HAMDAOUI

Sous la direction de :
Mohamed CHABAB

1. Les Trous Noirs En Astrophysique
   - Trous Noirs
   - Formation des Trous Noirs
   - Les differents types de Trous Noirs
   - Détection des Trous Noirs
   - Propriétés des trous noirs
2. les Trous Noirs En Relativité générale
   - Les équations d'Einstein
   - Le trou noir dans un espace asymptotiquement plat

Trou Noir

- un objet massif dont le champ gravitationnel est si intense quil empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper.
- Objet astronomique céleste mystérieu .

Les differents type de Trous Noirs

- Trous noirs stellaires.
- Trous noirs supermassifs.
- Trous noirs intermédiaires.
- Trous noirs primordiaux.

Détection des Trous Noirs

Trou noir dans un systéme binaire

- Repérage de l'accrétion du gaz de l'étoile compagnon :
  formantion d'un disque d'accrétion ⇒ émission des rayons X ⇒ détectable par les télescopes et satellites modernes .
- Repérage grâce au mouvement de l'étoile compagnon :
  émission des ondes gravitationnelles ⇒ détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles par LIGO (1er détection 2015) .

Trou noir célibataire

- l'effet de lentille gravitationnelle :
  déviation de la trajectoire des rayons lumineux ⇒ deux images identiques d'une même étoile située derrière le trou noir.
- formantion d'un disque d'accrétion ⇒ émission des rayons X ⇒ reste très théorique .

Propriétés des trous noirs

un trou noir est entièrement connu par trois caractéristiques : la masse, la charge électrique et le moment angulaire.

Les équations d'Einstein

- une équation dynamique qui décrit comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps .
- l'équation la plus simple possible satisfaisant au principe d'équivalence .
- Elle redonne l'équation de Newton dans une limite appropriée (la limite non relativiste).

La forme mathématique de l'équation d'Einstein s'écrit :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

la métrique de Schwarzschild

- solution de l'équation d'Einstein dans le cas d'un champ gravitationnel isotrope.
- Sa métrique est donnéé par :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2(\theta) d\phi^2$$

- La métrique montre deux singularitées pour deux valeurs de r différentes :
  - La coordonnée $r = 0$, où la composante g_{00} diverge.
  - La coordonnée $r = \frac{2GM}{c^2} = r_s$ (rayon de Schwarzschild), où g_{11} qui tend vers linfinie.
- La courbure scalaire donne lexpression suivante :

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12 r_s^2}{r^6}$$

la métrique de Reissner Nordstrom

- solution de l'équation d'Einstein en présence de charge Q.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = 8 G \pi T_{\mu\nu}$$

avec :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F_{\mu}^{\delta} F_{\nu\delta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

- Sa métrique est donnéé par :

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2(\theta) d\phi^2$$

- Sa métrique est singulière en :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

la métrique de Kerr

- une solution exacte des équations d'Einstein permettant de décrire le comportement de l'espace-temps autour d'un trou noir en rotation $J \neq 0$.
- Sa métrique est donnéé par :

$$ds^2 = -(1 - \frac{2Mr}{\Sigma})dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{Asin^2\theta}{\Sigma}d\phi^2 - \frac{4Marsin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi$$

avec :
$A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 sin^2\theta$
$\Sigma = r^2 + a^2 cos^2\theta$
$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$

- Sa métrique est singulière en :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

la métrique de Kerr-Newmann

- une solution de l'équation d'Einstein dans le cas d'un trou noir en rotation non chargé .
- Sa métrique est donnéé par :

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - asin^2\theta d\phi)^2 + \frac{sin^2}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\phi - adt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

où :
$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$
et :
$\rho^2 = r^2 + a^2 cos^2\theta$
et finalement :
$a = \dfrac{J}{M}$

violation du second principe de la thermodynamique $\Leftrightarrow$ qui postule que cette grandeur est une fonction toujours croissante pour un système fermé or l'univers est un système fermé puisque rien ne peut en sortir par définition.

$$\Downarrow$$

cette disparition de l'entropie peut être évité si on considère l'entropie généralisée :

$$S = S_{TN} + S_{ext}$$

$$\Updownarrow$$

Bekenstein suggéra donc que l'entropie généralisé ne peut que croître.

Principe Zéro

La gravité de surface k d'un trou noir stationnaire est constante sur toute la surface de l'horizon $\Leftrightarrow$ La température T d'un corps est la même partout dans celui-ci à l'équilibre thermique.

Premier Principe

$$dM = \frac{k}{8\pi}\delta A + \Omega_h \delta J + \Phi_h \delta Q$$

$$\Updownarrow$$

$$dE = T\delta S + \delta W$$

la variation de la masse entraîne une variation de l'énergie cinétique angulaire $\Omega_h \delta J$, une variation de l'énergie potentielle électrique $\Phi_h \delta Q$ et une variation d'énergie de rayonnement $\frac{k}{8\pi}\delta A$.

Dexième Principe

L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter $\delta S \geq 0$.

$$\Updownarrow$$

L'air A de l'horizon des événements de chaque trou noir ne peut pas décroître $\delta A \geq 0$.

Troisième Principe

On ne peut atteindre $T = 0$ par aucun processus physique.

$$\Updownarrow$$

On ne peut pas atteindre $k = 0$ par aucun processus.

Effet de Hawking

un pair de particules crée prés de l'horizon d'un trou noir $\Rightarrow$ sous l'effet des forces de marées $\Rightarrow$ la particule d'énergie négative, tombe derrière l'horizon, et la particule d'énergie positive restante peut s'éloigner à une grande distance du trou noir $\Rightarrow$ la particule ne pouvant plus se recombiner avec son antiparticule, elle va devenir réelle et apparaître à un observateur distant comme ayant été émise par le trou noir $\Rightarrow$ un apparaître d'un rayonnement d'évaporation en provenance du trou noir.

Température et Luminosité du trou noir

la température de Hawking en unités standard :

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_b GM}$$

Avec k_b est la constante de Boltzmann, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h est la constante de Plank).

la luminosité de rayonnement d'Hawking est donnée par :

$$L = A\sigma T^4 = \frac{\hbar c^2}{3840\pi r_s^2} = \frac{\hbar c^6}{15639\pi G^2 M^2}$$

Avec $\sigma = \frac{\pi^2 k_b^4}{60\hbar^3 c^4}$ est la constante de Stefan-boltzman.

Durée de vie d'un trou noir

la durée de vie de trou noir de masse initiale M est égale :

$$\tau = \frac{5120\pi G^2}{\hbar c^4} M^3$$

Après les calculs des constantes, on obtien

$$\tau = 10^{-16} M^3 s.kg^{-3}$$

est la durée de vie d'un trou noir une fois qu'il commence à s'évaporer.

Absence du terme $P\delta V$ dans la première loi

$$\Downarrow$$

la pression peut être associée à une constante cosmologique négativeΛ . pour les trous noirs asymptotiquement AdS en quatre dimensions,on identifie la pression avec

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2}$$

Danc la première loi de la thermodynamique des trous noirs rotatifs chargés dans un espace AdS s'écrit

$$dM = T\delta S + V\delta P + \Omega_h \delta J + \Phi_h \delta Q$$

A partire de

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}$$

On obtient :

La masse

$$M = \frac{r_h}{2}(1 + \frac{r_h^2}{l^2})$$

Premier principe de la thermodynamique

$dM = TdS + VdP$

Temperature

$$T = (\frac{\partial M}{\partial S})_P = \frac{1}{4\pi}(1 + \frac{3r_h^2}{l^2})$$

vérification de la relation de Smarr

$$M = 2TS - 2PV$$

l'énergie libre de Gibbs G

G $\Rightarrow$ informations sur la stabilité thermodynamique

$$G = M - TS = \frac{r_h}{4}(1 - \frac{r_h^2}{l^2}),$$

avec

$$M \equiv H$$

L'énergie libre de Gibbs en fonction de T , l = 1

On peut résumée ces phases selon les conditions suivantes :

- Pour $T < T_m$, seulement la phase rayonnement thermique pure qui existe.
- Pour $T_m < T < T_{HP}$, on a $G_{rayonement} < G_{trounoir}$, la phase rayonnement thermique est plus stable et donc plus dominante.
- Pour $T > T_{HP}$, on a $G_{rayonement} > G_{trounoir}$, la phase large trou noir c'est la plus stable et la pus dominante.
  avec :
  $$\frac{\partial T}{\partial r_h} = 0 \Leftrightarrow T_m = \frac{\sqrt{3}}{2\pi l},$$
  et
  $$G = 0 \Leftrightarrow T_{HP} = \frac{1}{\pi l}.$$

Chaleur spécifique à pression constante Cp

$$C_p = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_p = -\frac{2\pi r_h^2(1+8\pi P r_h^2)}{-1+8\pi P r_h^2}$$

La stabilité et la chaleur spécifique

- C_p a une asymptote verticale au point $r_h = \dfrac{l}{\sqrt{3}} = r_{hm} \Leftrightarrow T = T_m$
- $r_h < r_{hm} \Leftrightarrow T < T_m$ la chaleur spécifique est négative, dans ce cas le système thermodynamique est instable .
- $r_h > r_{hm} \Leftrightarrow T > T_m$ la chaleur spécifique est positive, donc cest la région stable.

A partir de

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}$$

On obtient :

La masse

$$M = \frac{1}{2}\left(r_h + \frac{Q^2}{r_h} + \frac{8\pi}{3} r_h^3 P\right)$$

Temperature

$$T = (\frac{\partial M}{\partial S})_{Q,P} = T = \frac{1}{4 r_h \pi}(1 - \frac{Q^2}{r_h^2} + 8\pi P r_h^2)$$

Pression

$$P = \frac{T}{2r_h} - \frac{1}{8\pi r_h^2} + \frac{Q^2}{4\pi r_h^4}$$

l'equation de l'état

$$\nu = 2l_p^2 r_h$$

$$\Downarrow$$

$$P = \frac{T}{\nu} - \frac{1}{2\pi\nu^2} + \frac{2Q^2}{\pi\nu^4}$$

cette équation présente un comportement critique et une point d'inflexion qui se produit lorsque

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \nu^2} = 0$$

On obtient alors les coordonnées du point critique

Points Critiques

$$P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}$$

$$\nu_c = 2\sqrt{6}Q$$

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P_c \nu_c}{T_c} = \frac{3}{8}$$

C'est un nombre universel pour tout les trou noir de RN-AdS.

$$G = \frac{1}{4}\left(\frac{\nu}{2} - \frac{\pi}{3}P\nu^3 + \frac{6Q^2}{\nu}\right)$$

$G - T$

- $P < P_c$ l'allure de G montre une transition de phase du premier ordre. $\Rightarrow$ l'équation détat produit trois racines réelles .
- $P = P_c$ la transition de phase est de deuxième ordre, l'équation détat produit une seule racine réelle "double" .
- $P > P_c$ l'équation d'état ne produit qu'une seule racine réelle, le système n'est stable que sous une seule phase, c'est une phase supercritique.

la chaleur spécifique :

$$C_p = \frac{2\pi^2\nu^6 P - 4\pi\nu^2 Q^2 + \pi\nu^2}{4\pi\nu^4 P - 2\nu^2 + 24Q^2}$$

la chaleur spécifique :

$$C_p = \frac{2\pi^2\nu^6 P - 4\pi\nu^2 Q^2 + \pi\nu^2}{4\pi\nu^4 P - 2\nu^2 + 24Q^2}$$

la chaleur spécifique :

$$C_p = \frac{2\pi^2\nu^6 P - 4\pi\nu^2 Q^2 + \pi\nu^2}{4\pi\nu^4 P - 2\nu^2 + 24Q^2}$$

- $P < P_c \Rightarrow C_p$ est toujours positive pour les petits trous noirs $\nu < \nu_{max}$ et larges trous noirs $\nu > \nu_{min}$.

- $P > P_c \Rightarrow C_p$ ne diverge pas et elle est toujours positive $\Rightarrow$ une seule phase qui est la phase "large trou noir" .

- $P = P_c \Rightarrow C_p$ admet une seule asymptote verticale en ν_c.

Géométrie thermodynamique :

Est une autre approche pour étudier le comportement thermodynamique du systéme .

- Métrique de Ruppeiner.
- Métrique de Quevedo .
- Métrique de HPEM .

Métrique de Ruppeiner

Nous pouvons remarquer que le point de divergence nest pas identique à celui de la capacité thermique (S_{min}, S_{max}) pour $P < P_c$ et Sc pour $P = P_c$. Par conséquent, c'est à dire que le point de divergence n'est pas identique à la divergence / point zéro de la capacité calorifique, c'est pourquoi Métrique n'est pas en mesure de décrire la transition de phase de cette solution de trou noir.

Métrique de Quevedo

Il est clair que cette métrique présente des points de divergence qui coïncident avec ceux de la capacité thermique. On peut dire que cette géométrie est capable de décrire la transition de phase 1er/2ème ordre pour les trous noirs de RN-AdS.

Métrique de HPEM

On peut voir que les points de divergence coïncident exactement avec les points de divergence de la capacité calorifique ainsi que son point zéro. Alors on peut dire que cette métrique peut décrire la transition de phase et déterminer le trou noir extrémal donné par $C_p = 0$ ou $\mathrm{T} = 0$.

Conclusion

- La physique de Newton ne donne pas toujours des résultats satisfaisants. Pour étudier les trous noirs, il faut penser au relativité générale.
- Un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est plud grand que la vitesse de la lumière de sorte que rien ne se que échappé.
- le scénario de Hawking-Page , les trous noirs de Schwarzschild dans lespace anti-de Sitter présente une transition de phase thermodynamique .
- Le trou noir RN-AdS présente un comportement thermodynamique similaire à celui dun fluide de Van-der-Wals .
- La capacité thermique C_p permette d'étudier la stabilité et les points critiques .
- la géométrie thermodynamique est Une autre approche pour étudier le comportement thermodynamique des trous noirs.