Fonctions numériques

I. Fonction numérique

Activité :

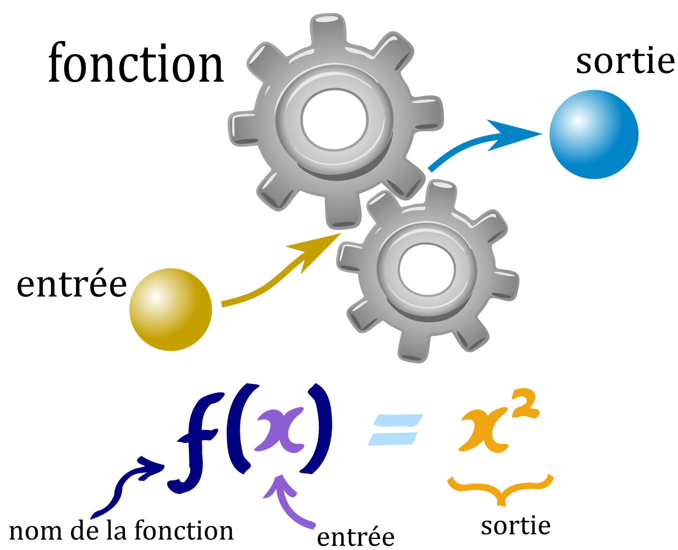
On considere un rectangle de longueur $(x—1)cm$ et de largeur $(x—2)cm$ tel que x un réel supérieur strictement a 2.

On désigne par $f(x)$ la **surface** de ce rectangle

1. Déterminer l'expression de $f(x)$ **2.** Déterminer la surface du rectangle si $x = 4$

3. Déterminer les valeurs possibles de x si $f(x) = 8$

Définition



Soit D une partie de $\mathbb{R}$

On appelle fonction numérique (noté f) : toute relation qui a associée chaque nombre réel x de D par un seul nombre réel y qu'on note $f(x)$ et on écrit

$f : D \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = y$

- $f(x) = y$: S'appelle 'image de x par la fonction f
- Le nombre x s'appelle antécédent de y par la fonction f

Application 1

On considère une fonction numérique définie par $f(x) = 3x^2 - 1$

1. Déterminer les images de 1 ; -2 et $\dfrac{3}{4}$ par la fonction f
2. Déterminer les antécédents, s'ils existent, des nombres suivants 0, 5 et -4 par la fonction f

II. Ensemble de définition

Activité :

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- Déterminer les images de 0 ;2 ;
- Peut on calculer les images de 1 et -1 par la fonction f ?

Définition

On appelle ensemble de définition d'une fonction numérique f , l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ est bien définie et se note souvent D_f, On écrit $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Remarque

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f ; il faut **éliminer** tous les nombres réels pour lesquels

- le dénominateur est nul
- le nombre sous la racine carrée est négatif.

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions polynômes.

>

Fonction	Ensemble de definition
$x \to P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$x \to \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/Q(x) \neq 0\}$
$x \to \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/P(x) \geq 0\}$
$x \to \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/Q(x) > 0\}$
$x \to \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}/\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \ \ et \ \ Q(x) \neq 0\right\}$
$x \to \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/P(x) \geq 0 \ \ et \ \ Q(x) > 0\}$

+Exemple

Soient $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ et $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

Application 2

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes:

$f_1 : x \mapsto x^2 + 3x - 5$	$f_2 : x \mapsto \dfrac{-2x+4}{3x+4}$	$f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x-2}$
$f_4 : x \mapsto \dfrac{4x^2-5}{\sqrt{2x^2+2x-4}}$	$f_5 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2-x}}{\lvert x+2\rvert - 3}$	$f_6 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-x}{4x+2}}$
$f_7 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4x+2}}$	$f_8 : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)-1}$	

III. égalité de deux fonctions

Activité

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x^2}$

1. M.q : $f(x) = g(x)$ **2.** calculer $f(0)$ et $g(0)$

> ### Definition

Soient f et g deux fonctions. D_f et D_g sont leurs ensembles de définition respectifs.

On dit que f et g sont égales , et on écrit $f = g$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $D_f = D_g$
- $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_f$

Exemple 1

Soit $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = |x|$

Exercices

Exercice 8 - page : 277

IV. représentation graphique

Activité

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x + 1$

Construire le graphe de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Définition :

- Dans un plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe représentative d'une fonction f, notée souvent (C_f), est l'ensemble des pointsdu plan $M(x; f(x))$ où $x \in D_f$

Remarque :

L'équation $y = f(x)$est appelée l'équation de la courbe (C_f).

Exemple 2

Tracer le courbe de $f : x \to |x|$

Application 3

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Déterminer les points appartenant à (C_f) parmi les points suivants :
   $O(0;0); B\left(3; \dfrac{9}{4}\right); C(1;1)$

Application 4

Soit la figure suivante :

>

1. est ce cette courbe est une fonction

2. Donner l'ensemble de définition

3. Donner les images de : $-3; -1; 4$

4. Donner les antécédents de : $1; 2$

5. est que la fonction paire ou impaire

Exercices

Exercice $10, 28$ - page : 277

V. Fonction paire - Fonction impaire

Activité

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x| - 1$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2. Soit$x \in \mathbb{R}$, montrer que $f(-x) = f(x)$

3. Vérifiez que $f(x) = x - 1 \ \ si \ \ x \geq 0 \ \ et \ \ f(x) = -x - 1 \ \ si \ \ x < 0$

4. En déduire la nature de la courbe (C_f) , puis tracer C_f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5. En déduire que la courbe C_f admet un axe de symétrie à déterminer.

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que D est symétrique par rapport à zéro si pour tout $x \in D$ on a $—x \in D$.

Exemple 3

Déterminer les parties symétriques par rapport à zéro parmi les parties suivantes :

- $[-2 : 2]$
- $[-2 : 1]$
- $[-3 : -2] \cup [2 : 4]$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^*$
- $[0; +\infty[$
- $\mathbb{R} - \{2\}$

Définition : fonction paire

On dit que f est une fonction paire si :

- Si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$ (D_f est symétrique par rapport à zéro)
- Pour tout $x \in D_f$ on a : $f(-x) = f(x)$

La courbe d’une fonction paire est **symétrique par rapport à l’axe des ordonnées**.

Exemple 4

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Application 5

Déterminer si f est une fonction paire dans les cas suivants :

- $f(x) = x^6 + 3$
- $f(x) = \sqrt{x} + 1$

Definition : fonction impaire

On dit que f est une fonction impaire si :

- Si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$
- Pour tout $x \in D_f$ on a : $f(-x) = -f(x)$

La courbe d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Application 6

1. étudier la parité des fonctions :

- $f(x) = \dfrac{2}{x}$
- $fx) = x^3 - x$
- $f(x) = |x| - \dfrac{1}{x^2}$
- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = \cos(x)$
- $f(a) = \tan(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$
- $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

2. tracer une fonction paire et un fonction impaire

Exercices

Exercice $9, 11$ - page : 277

VI. Variations d'une fonction تغيرات الدالة

Activité

Soit f la fonction numérique représentée ci-contre :

1. Déterminer puis comparer $f(-2)$ et $f - 1)$

2. Comment les valeurs de $f(x)$ change lorsque les valeurs de x augmentes sur $[—2; 0]$?

3. Déterminer puis comparer $f(2)$ et $f(1)$.

4. Comment les valeurs de $f(x)$ change lorsque les valeurs de x augmentes sur $[0; 2]$?

Definition

>

Soit la fonction f et $a, b \in D_f$

- Si $a > b$ et $f(a) \geq f(b)$ alors f est **croissante(تزايدية)**
- Si $a > b$ et $f(a) > f(b)$ alors f est **strictement croissante**
- Si $a > b$ et $f(a) \leq f(b)$ alors f est **décroissante(تناقصية)**
- Si $a > b$ et $f(a) < f(b)$ alors f est **strictement décroissante**
- Si $a > b$ et $f(a) = f(b)$ alors f est **constante(ثابتة)**

Exemple 5

Soit $f(x) = -x + 3$

Exemple 6

Soit la fonction f

Donner les variations de f

Propriété : Taux de variation

Soit f une fonction définie sur D et $a, b \in D$

Le Taux de variation est $T = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$

- Si $T \geq 0$ alors f est croissante sur I
- Si $T \leq 0$ alors f est décroissante sur I
- Si $T = 0$ alors f est constante sur I

Exemple 7

Soit $f(x) = 2x + 1$

Application 7

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. monter que le taux le variation est : $T = a + b - 4$

2. étudier la monotonie de f sur $]-\infty; 2]$ et $[2; +\infty[$

3. dresser le tableau de variation de f

Exercices

Exercice 14 - page : 277

>

Exercice

Soit $f(x) = \dfrac{-x+2}{x-1}$

1. Soit $x, y \in D_f$ Montrer que $f(x) - f(y) = \dfrac{-(x-y)}{(x-1)(y-1)}$
2. déduire que le taux le variation est : $T = \dfrac{-1}{(x-1)(y-1)}$
3. étudier la monotonie de f sur $]-\infty;1]$ et $[1;+\infty[$
4. dresser le tableau de variation de f

VII. Maximum et minimum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur I

1. On dit m est un minimum (une valeur minimale) de f sur I si pour tout $x \in I$ on

   $f(x) \geq m$
2. On dit M est un maximum (une valeur maximale) sur I si pour tout $x \in I$ on

   $f(x) \leq M$
3. un extremum = minimum **ou** maximum

Exemple 8

Soit f une fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1. Montrer que 2 est le minimum de f sur $\mathbb{R}_*^+$
2. Montrer que -2 est le maximum de f sur $\mathbb{R}_*^-$

Physique

>

VIII. Parabole et Hyperbole

8.1. Fonction $x \to ax^2$

Activité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Etudier la parité de la fonction f . **2.** Déduire la propriété géométrique de C_f

3. Etudier la monotonie sur $\mathbb{R}^+$ puis déduire la monotonie sur $\mathbb{R}^-$.

4. Dresser le tableau de variation

5. Construire C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

6. Refaire les mêmes questions pour la fonction g qui est définie par $g(x) = —2x^2$

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

La courbe de la fonction $f(x) = ax^2$ s'appelle une parabole ,

- **le sommet** l'origine du repère
- **l`axe de symétrie** est l'axe des ordonnés (x=0) .

Les variations de f :

- **Si** $a \prec 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

- **Si** $a \succ 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

Exemple 9

$f(x) = 2x^2$

Application 8

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

1. Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
2. Donner la nature de C_f en précisant ses éléments caractéristiques.
3. Construire C_f .

8.2. Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$

Activité

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. monter que $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$
2. trouver X et Y tel que : $f(x) = aX^2 + Y$
3. donner les propriétés de C_f

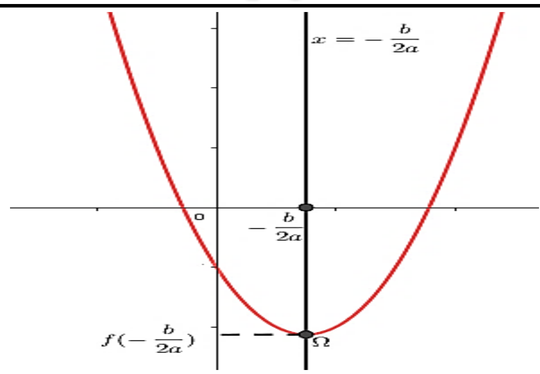
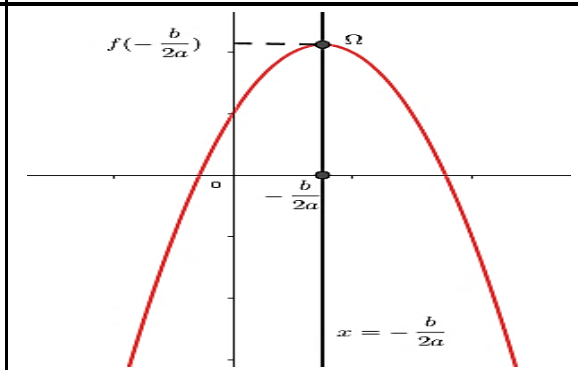
Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$

La forme canonique de f est : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

La courbe de f est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe de symétrie $x = -\frac{b}{2a}$

>

	$a>0$	$a<0$
La courbe (C_f)		
Tableau de variations de f	x : $+\infty$ $\quad -\frac{b}{2a} \quad$ $-\infty$; $f(x)$: $\searrow$ $f(-\frac{b}{2a})$ $\nearrow$	x : $+\infty$ $\quad -\frac{b}{2a} \quad$ $-\infty$; $f(x)$: $\nearrow$ $f(-\frac{b}{2a})$ $\searrow$
Extremums	$f(-\frac{b}{2a})$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$	$f(-\frac{b}{2a})$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

Application 9

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2x^2-5x+3$

1. Déterminer D_f lensemble de définition de la fonction f
2. monter que $f(x)=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{49}{8}$
3. Dresser le tableau de variations de f
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe C_f
5. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

8.3. Fonction $x \to \dfrac{a}{x}$

Activité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $a \in \mathbb{R}$

1. Déterminer D_f **2.** Etudier la parité de la fonction f .

3. Déduire la propriété géométrique de C_f

4. Etudier la monotonie sur $\mathbb{R}_*^+$, puis déduire la monotonie sur $\mathbb{R}_*^-$.

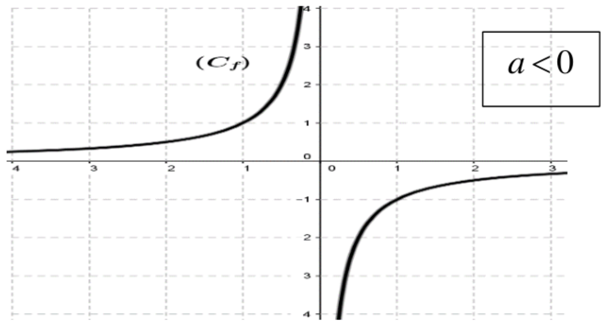
5. Dresser le tableau de variation

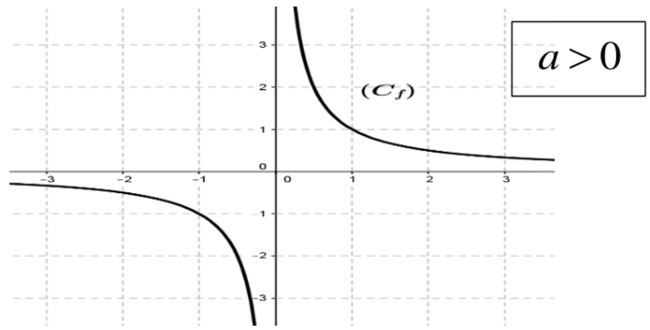
6. Construire C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

>

Définition

La courbe de la fonction $f = \dfrac{a}{x}$ s'appelle une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$





Application 10

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{3}{x}$

1. Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Donner la nature de C_f en précisant ses éléments caractéristiques.

3. Construire C_f .

Propriété : fonction périodique

On dit que f est une fonction périodique de période T si pour tout $x \in D_f$:

- $(x+T) \in D_f$
- $f(x+T) = f(x)$

Exemple 10

On a $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ alors $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont des fonctions périodiques de période :$T = 2\pi$

Propriété : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

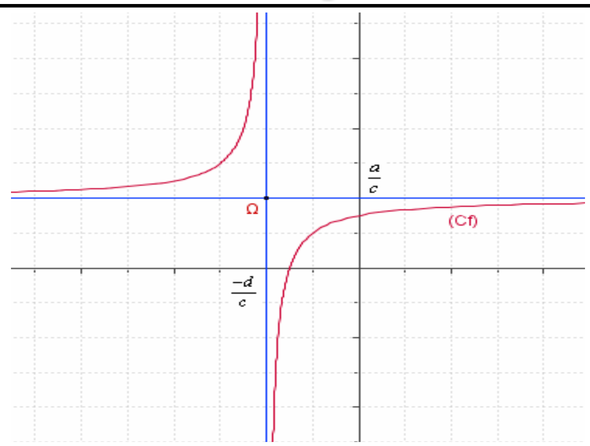
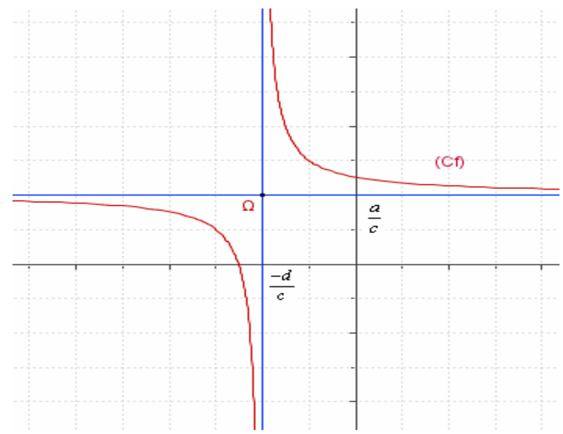
Soit la fonction $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

>

La formule réduite de f est : $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$

La courbe de la fonction f est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

Soit $\Delta=a\times d-c\times b$

<table>
<tr><th></th><th>$\Delta>0$</th><th>$\Delta<0$</th></tr>
<tr><td>La courbe (C_f)</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tableau de variations de f</td><td>x: $-\infty$ | $\frac{-d}{c}$ | $+\infty$
$f(x)$: ↗ || ↗</td><td>x: $-\infty$ | $\frac{-d}{c}$ | $+\infty$
$f(x)$: ↘ || ↘</td></tr>
</table>

Application 11

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1. Déterminer D_f lensemble de définition de la fonction f

2. monter que $f(x)=-1+\dfrac{1}{x-1}$ **3.** Dresser le tableau de variations de f

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe C_f

5. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

IX. Résolution graphique des équations et des inéquations

Propriété

L'équation	$f(x)=m$	$f(x)=g(x)$
Les abscisses des points d'intersection de	$(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ avec $(\mathcal{C}_g)$

L'inéquation	$f(x)>m$	$f(x)>g(x)$
Sont les intervalles dont	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$

Exemple 11

Soit $f(x) = -x^2 + 3$ et $g(x) = -x + 1$

1. Résoudre algébriquement et graphiquement :

- $f(x) = g(x)$
- $f(x) \geq g(x)$
- $f(x) \leq g(x)$

`![Alt text](./images/equation and inequation.ggb)`

Application 12

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x-3$ et $g(x)=\dfrac{-x-7}{x+1}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$

1) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $f(x)=0$

2) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 0$ et $f(x)\leq 0$

3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=5$

4) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 5$ et $f(x)\leq 5$

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

6) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq g(x)$ et $f(x)\leq g(x)$

>

Application 8

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{3}{x}$

1. Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Donner la nature de C_f en précisant ses éléments caractéristiques.

3. Construire C_f .

1) on a $f(x) = \dfrac{3}{x}$ a alors $a > 0$

Donc

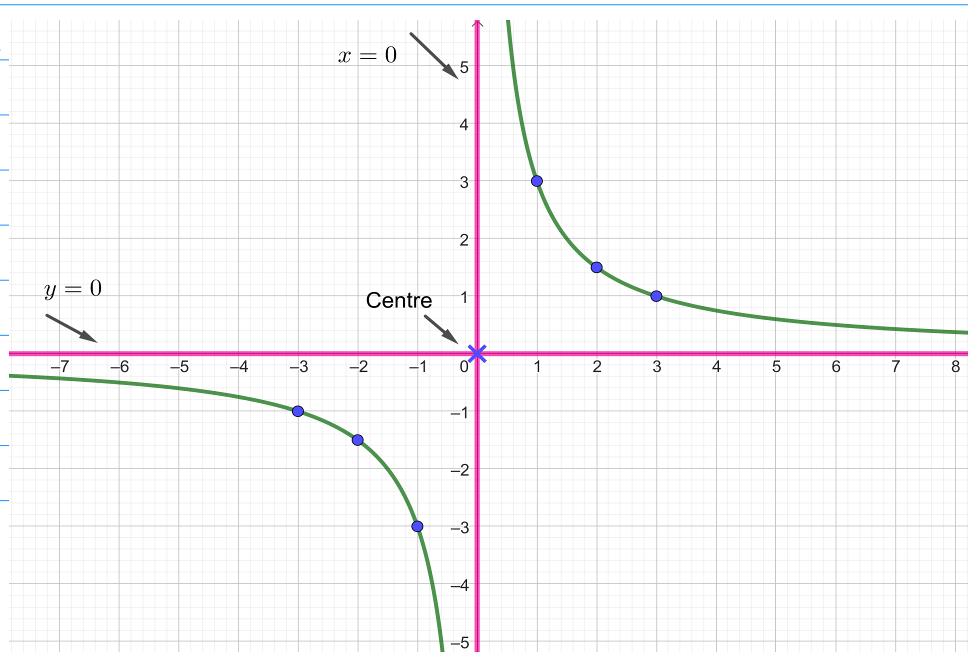
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

2) on a (C_f) est un hyperbole de centre $(0;0)$ et d'asymptotes : $x = 0$ et $y = 0$

3) on a :

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	-1	$-1,5$	-3	3	$1,5$	1

alors :



>