10.00 DH

الكلية متعددة التخصصات تارودانت

ⵜⴰⵖⵉⵎⴰⵙⵜ ⵜⴰⵎⵢⴰⵏⴰⵡⵜ ⵏ ⵜⵔⵓⴷⴰⵏⵜ

FACULTE POLYDISCIPLINAIRE TAROUDANT

Université Ibnou Zohr

Faculté polydisciplinaire de Taroudant

Cours de mathématiques

Filièrre :

Tronc commun : Mathématiques Informatique Physique (MIP)

Module :

Analyse 1

Responsable :

EL HOUCINE EL BOUCHIBTI

Professeur à la FP de Taroudant

Année universitaire : 2023/2024

Table des matières

Chapitre 1

Le corps des nombres réels

1.1 Propriétés algébriques

Pour les mathématiciens grecs de l'école de Pythagore (VIe siècle av. J.C.), les seuls nombres étaient les nombres rationnels. Bien qu'ils aient su que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, et que cette grandeur est la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1, l'existence de telles grandeurs "incommensurables" était pour eux un secret bien gardé. Il a fallu attendre la fin du XIXe siècle pour que les mathématiciens comme Peano, Dedekind et Cantor notamment aboutissent par une démarche rigoureuse à la première construction du corps des nombres réels. Dans la chaine d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

c'est l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ qui est la plus mystérieuse et la plus délicate.

Afin de rendre notre étude plus concrète, commençons par évoquer une autre approche possible des nombres réels, par leur écriture décimale. Ce point de vue permet une autre construction des nombres réels, qui bien qu'intuitive et naturelle, est techniquement délicate (voir par exemple l'ouvrage de référence Cours de Mathématiques L_1 tout en un).

Nous avons rappelé l'écriture décimale des nombres relatifs. Les nombres décimaux (qui sont le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10) se notent aussi facilement en base 10 : ils ont un nombre fini de chiffres après la virgule. Il n'en va pas de même pour tous les nombres rationnels : si l'on pose la division de 1 par 3, l'opération ne s'arrête pas et l'on note le résultat avec des pointillés $\frac{1}{3} = 0,33333....$ Plus généralement pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$(avec disons p, $q \in \mathbb{N}^*$ si l'on pose la division de p par q soit l'opération s'arrête et r est un nombre décimal, soit elle ne s'arrête pas mais dans ce cas les décimales qui apparraissent sont périodiques (il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles à chaque étape $\{1;2;....q-1\}$; comme il y a une infinité d'étapes un reste finit par se répéter et la suite du calcul aussi). Ainsi un nombre au développement décimal infini mais pas périodique comme

$$0,101001000100001000001...$$

ne peut pas correspondre à un rationnel. En fait, nous verrons que tout nombre réel admet un développement décimal illimité, mais pas forcément unique ! C'est ainsi que $1 = 0,999999999.....$ D'autres exemple célébres $\sqrt{2} = 1,414213562...$, $e = 2,718281828...$ et $\pi = 3,141592654...$

Peano

Dedeckind

Cantor

1.1.1 Le corps des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire des fractions $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ est muni de deux opérations, l'addition $+$ et la multiplication, notée $\times$ ou ., ainsi que d'un ordre $\leq$. Il possède les propriétés suivantes :

1) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Les opérations $+$ et $\times$, ainsi que la relation d'ordre $\leq$ prolongent celles de $\mathbb{Z}$.

2) L'addition $+$ sur $\mathbb{Q}$ vérifie les propriétés suivantes :

   a) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $\forall z \in \mathbb{Q}$; $x+(y+z) = (x+y)+z$ (associativité de l'addition).

   b) $\forall x \in \mathbb{Q}$; $x+0 = 0+x = x$ (0 est l'élément neutre pour l'addition)

   c) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe un nombre rationnel unique noté $-x$ appelé l'opposé de x tel que $x+(-x) = (-x)+x = 0$.

   d) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$; $x+y = y+x$ (commutativité de l'addition)

   Ces quatre propriétés se résument en disant que $(\mathbb{Q};+)$ est un "groupe abelien" (ou commutatif).

3) La multiplication (ou produit) notée . vérifie les propriétés suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $\forall z \in \mathbb{Q}$; $x.(y.z) = (x.y).z$ (associativité de multiplication).

b) $\forall x \in \mathbb{Q}$; $x.1 = 1.x = x$ (1 est l'élément neutre pour la multiplication)

c) Tout élément $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ admet un inverse unique $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tel que $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$.

d) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $\forall z \in \mathbb{Q}$; $x.(y+z) = x.y + x.z$ ("distributivité" de la multiplication par rapport à l'addition)

e) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $x.y = y.x$ (commutativité de la multiplication)

Les propriétés (2) à (3e) se résument en disant que $(\mathbb{Q}, +, .)$ est un "corps commutatif". Nous allons maintenant décrire les propriétés de la relation d'ordre $\leq$ sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et sa compatibilité avec les opérations algébriques.

4) La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{Q}$ vérifie les propriétés suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$ (la relation $\leq$ est une relation d'ordre total).

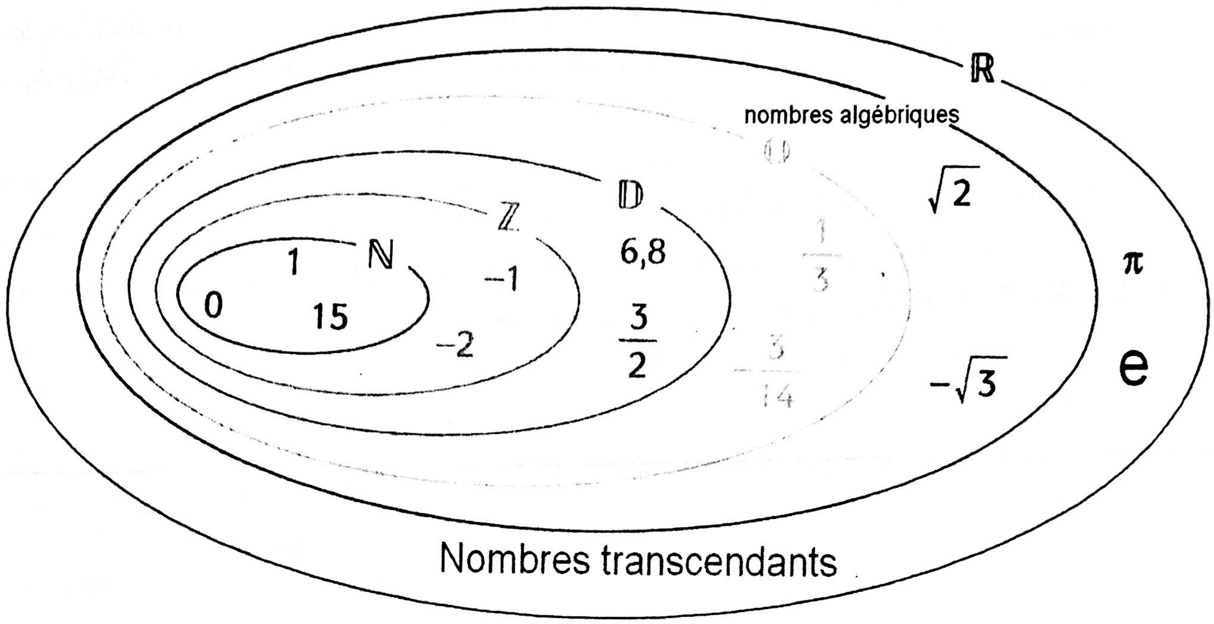
b) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$ et $\forall z \in \mathbb{Q}$, on a $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$.

c) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{Q}^+$, on a $x \leq y \Longrightarrow a.x \leq a.y$ (compatibilité de la multiplication avec la relation d'ordre).

d) $\forall x \in \mathbb{Q}$ et $\forall y \in \mathbb{Q}^*_+$, il existe un entier $N > 1$ tel que $N.y > x$ (Propriété d'Archimède).

Ces propriétés à elles seules ne suffisent pas à caractériser entièrement l'ensemble $\mathbb{Q}$. Nous verrons que le corps des nombres réels satisfait les mêmes propriétés, et aussi une propriété supplémentaire que $\mathbb{Q}$ n'a pas. Mais c'est le plus petit corps qui possède ces propriétés.

1.1.2 Insuffisance des nombres rationnels



Il existe des grandeurs "naturelles" qui ne sont pas rationnelles. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, la diagonale d'un carré de côté 1 a une longueur x telle que $x^2 = 1+1 = 2$. Mais il n'existe pas de nombre rationnels dont le carré est 2 :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Ainsi, on ne peut pas "tout mesurer" avec des nombres rationnels. C'est pourquoi nous sommes amenés à considérer un ensemble de nombres plus riches, qui est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Les nombres qui ne sont pas rationnels sont dits irrationnels.

Définition 1.1.1. *Les nombres réels algébriques sont les nombres réels qui sont solutions d'une certaine équation algébrique ou polynomiale à coéfficients relatifs de la forme :*

$$a_0 + a_1x + ::: + a_nx^n = 0; \quad \text{où } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}.$$

Un au moins des a_i est non nul.

Exemple 1. *Tout nombre réel rationnel est algébrique. En effet, si $x = \frac{p}{q}$; alors $xq = p$ et $xq - p = 0$: Donc $x = \frac{p}{q}$ est solution d'une équation algébrique $(n = 1; a_0 = -p; a_1 = q)$.*

Définition 1.1.2. *Les nombres réels transcendants sont les nombres réels qui ne sont pas algébriques, c'est à dire qu'ils ne sont solutions d'aucune équation algebrique ou polynomiale.*

Contrairement aux nombres rationnels qui jouissent une repressention de periodicité ; les nombres transcendants n'ont aucune periodicité dans leur représentation décimale, et s'écrivent de façon presque aléatoire. Ce qui rend leur étude trés difficile et compliquée.
En 1882, Ferdinand von Lindemann publia une démonstration de la trans- cendance de π. La transcendance de π a permis la démonstration de l'impossibilité de plusieurs constructions géométriques anciennes avec le compas et la règle, incluant le plus célèbre d'entre eux, la quadrature du cercle. En 1900, David Hilbert a posé une importante question à propos des nombres transcendants, connue sous le nom de septième problème de Hilbert : " Si a est un nombre algébrique non nul et différent de 1 et si b est un nombre algébrique irrationnel, alors le nombre a^b est-il nécessairement transcendant ?" La réponse, affirmative, fut donnée en 1934 par le théorème de Gelfond-Schneider. On peut obtenir facilement des nombres transcendants grâce à lui, par exemple $2^{\sqrt{2}}$.

Hilbert (1862-1943)

Définition 1.1.3. *L'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres rationnels et les nombres irrationnels.*

- *Les nombres rationnels sont :* $\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
- *Les nombres irrationnels c-à-d qui ne sont pas rationnels, par exemple* $\sqrt{2}$, π, e, ...

$\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ muni de deux opérations internes (l'addition notée $+$ et la multiplication notée . ou bien $\times$) et d'une relation d'ordre total notée $\leq$ qui étendent les opérations internes et la relation d'ordre correspondantes sur $\mathbb{Q}$ de telle sorte que $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ soit un "corps commutatif archimédien complet". Ces propriétés sont les mêmes que celles de $\mathbb{Q}$, à l'exception d'une seule, la propriété de la borne supérieure. Voici la liste détaillée de ces propriétés :

Propriétés 1.1.1. $\mathbb{R}$ *possède les propriétés suivantes :*

1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*. Les opérations* $+$ *et* $\times$*, ainsi que la relation d'ordre sur* $\mathbb{R}$*, prolongent celles de* $\mathbb{Q}$ *ce qui montre que* $(\mathbb{R},+,.)$ *est un corps commutatif.*

2) La relation d'ordre $\leq$ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$*,* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$*.*
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $y \in \mathbb{R}$ *et* $z \in \mathbb{R}$*,* $x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z$ *(compatibilité de l'addition avec la relation d'ordre).*
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}_+^*$*, il existe un entier* $N > 1$ *tel que* $N.y > x$ *(Propriété d'Archimède)*

3) Toue partie $A \subset \mathbb{R}$ *non vide et majorée admet une borne supérieure.*

Ces propriétés se résument en disant que $(\mathbb{R},+,.,\leq)$ *est un corps commutatif archimédien complet.*

Exercice :

Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non-vide et minorée, alors l'ensemble $-A = \{x \in \mathbb{R}; -x \in A\}$ est majoré. En déduire que A admet une borne inférieure donnée par $inf(A) = -sup(-A)$.
On retiendra de cet exercice que toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

1.1.3 Majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure

Nous allons procéder de manière axiomatique, c'est à dire que nous allons décrire l'ensemble des nombres réels par ses propriétés. Qu'un tel ensemble existe bien peut-être établi rigoureusement par une "construction", c'est à dire par un procédé qui décrit les nombres réels à partir des ensembles déjà connus (par exemple l'ensemble des nombres rationnels) et par les opérations licites de la théorie des ensembles. Il y a plusieurs façons de procéder.
Ce qui est important, c'est que les propriétés que nous décrivons permettent de définir uniquement l'ensemble des nombres réels. Plus exactement, si deux ensembles ont ces mêmes propriétés, ils sont en bijection l'un avec l'autre, et les opérations d'addition, de multiplication et la relation d'ordre se correspondent dans cette bijection, si bien qu'on aura décrit la même chose.

Définition 1.1.4. (Majorant, minorant). *Une partie non vide* $A \subset \mathbb{R}$ *est majorée s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in A; x \leq M$ *: On dit alors que* M *est un majorant de* A*.*
Une partie non vide $A \subset \mathbb{R}$ *est minorée s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in A; m \leq x$ *: On dit alors que* m *est un minorant de* A*.*

Définition 1.1.5. (Maximum, minimum) *On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément s'il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A; x \leq a$.*
Cet élément est forcément unique et on le note $a = max(A)$.
Une partie $A \subset \mathbb{R}$ admet un plus petit élément s'il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A; x \geq a$.
Cet élément est forcément unique et on le note $a = min(A)$.

Donc un plus grand élément est un majorant de A qui appartient à A. Nous avons vu que toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{Z}$ admet un plus grand élément. Ce n'est plus vrai dans $\mathbb{Q}$

Exemple 2. $\mathbb{Q}^*_- = \{x \in \mathbb{Q} / x < 0\}$ *est clairement une partie non vide de $\mathbb{Q}$ majorée par 0. Mais aucun de ces éléments n'est le plus grand. En effet si $x < 0$, on a aussi $x < \frac{x}{2} < 0$ (multiplier par $x < 0$ l'in ?galit ? $\frac{1}{2} < 1$). Donc étant donné $x \in \mathbb{Q}$ on peut toujours trouver un élément plus grand dans $\mathbb{Q}$.*
Dans cet exemple, on voit tout de même que 0 joue un rôle particulier : il n'est pas dans l'ensemble mais il en est en quelque sorte la frontière.

Définition 1.1.6. (Borne supérieure, borne inférieure) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. Soit M l'ensemble des majorants de A. Si l'ensemble M admet un plus petit élément alors on dit que A admet une borne supérieure, notée $sup(A)$ qui vaut par définition $min(M)$. Entre d'autres termes $sup(A)$ est le plus petit majorant de A.*
Si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide et minorée, et s'il existe un plus grand minorant de A, on l'appelle borne inférieure de A et on le note $inf(A)$.

Proposition 1.1.1. *Si $A \subset \mathbb{R}$ a un plus grand élément alors il admet aussi une borne supérieure et $sup(A) = max(A)$.*

Démonstration de la Proposition : Il suffit de noter que si M est un majorant de A il est plus grand que $max(A) \in A$. Par ailleurs $max(A)$ est par définition un majorant de A. C'est donc le plus petit majorant.
Cependant, des parties qui n'ont pas de plus grand élément peuvent admettre une borne supérieure. Dans ce cas, la borne supérieure de l'ensemble n'est pas dans l'ensemble.

Exemple 3. *Nous avons vu que $\mathbb{Q}^*_-$ n'a pas de plus grand élément. Nous allons maintenant établir que cet ensemble admet une borne supérieure et que $sup(\mathbb{Q}^*_-) = 0$. Premièrement il est évident que 0 est un majorant. Ensuite il faut montrer que tout majorant de $\mathbb{Q}^*_-$ est positif ou nul. En d'autres* *termes, nous devons prouver que*

$$(\forall x \in \mathbb{Q}_-^*, x \leq M) \Longrightarrow 0 \leq M.$$

Il est plus commode d'établir l'assertion contraposée :

$$M < 0 \Longrightarrow (\exists x \in \mathbb{Q}_-^*, x > M).$$

Cette assertion est facile à établir : si $M < 0$ alors nous avons déjà vu que $M < \frac{M}{2} < 0$. Donc il existe bien un élément $x \in \mathbb{Q}$ tel que $M < x$: on peut prendre $x = \frac{M}{2}$.

1.1.4 La propriété de la borne supérieure en pratique

Nous revenons un peu sur cette propriété, qui est la différence majeure entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ La propriété qui suit est souvent très utile pour vérifier qu'un réel est bien la borne supérieure d'un ensemble A donné.

Proposition 1.1.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$; alors le nombre réel $supA$ est caractérisé par les conditions suivantes : $S = supA$ si et seulement si*

(i) pour tout $x \in A$, $x \leq S$

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $S - \varepsilon < a \leq S$

Démonstration de la Proposition : La propriété (i) traduit le fait que S est un majorant de A et la propriété (ii) traduit le fait que tout nombre réel $S' = S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A autrement dit : S est un majorant de A et tous les majorants de A sont $\geq S$ donc S est le plus petit des majorants de A.

Corollaire 1.1.1. *Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors $sup]-\infty; b[= b$.*

Démonstration du Corollaire : On vérifie les deux points de la caractérisation. Premièrement, il est évident que b est un majorant de $B =]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}$. Deuxièmement : pour tout $\varepsilon > 0$, $b - \varepsilon < b - \frac{\varepsilon}{2} < b$. Ainsi $a = b - \frac{\varepsilon}{2}$ vérifie $b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$. Il faut bien retenir que $supA$ n'appartient pas forcément à A comme le montre l'exemple précédent. Lorsque $supA \in A$, nous avons vu que c'est aussi le plus grand élément de A. Nous donnons ci-dessous des résultats utiles pour les estimations (majoration, minoration). Nous commençons par un résultats simple :

Proposition 1.1.3. *Soit $A \subset \mathbf{R}$ un ensemble qui a un plus grand élément et $M \in \mathbb{R}$. Alors :*
$max(A) \leq M \Longleftrightarrow \forall x \in A;\ x \leq M$;
$max(A) < M \Longleftrightarrow \forall x \in A;\ x < M$.
On a des résultats analogues si A admet un plus petit élément pour $min(A)$.

Démonstration de la Proposition : Pour les implication $\Longrightarrow$ il suffit d'utiliser que pour tout $x \in A$, $x \leq max(A)$.
Pour le sens $\Longleftarrow$, on applique la propriété pour le choix particulier $x = max(A) \in A$. Les bornes supérieures se manipulent presque de la même manière :

Proposition 1.1.4. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide et majoré et $M \in \mathbb{R}$. Alors*

$$sup(A) \leq M \Longleftrightarrow \forall x \in A; x \leq M;$$

$$sup(A) < M \Longleftrightarrow \forall x \in A; x < M;$$

$$sup(A) \leq M \Longleftarrow \forall x \in A; x < M.$$

On a des résultats analogues pour $inf(A)$ si A est non-vide et minoré.

Démonstration de la Proposition : Pour les implications $\Longrightarrow$ il suffit d'utiliser que pour tout$x \in A$, $x \leq sup(A)$, qui vient du fait que $sup(A)$ est un majorant de A.
Réciproquement, si $\forall x \in A$; $x \leq M$ alors M est un majorant de A et donc $M \geq sup(A)$ qui est le plus petit majorant de A. La dernière implication s'en déduit immédiatement puisque $x < M \Longrightarrow x \leq M$.

1.1.5 Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$

Une topologie c'est l'étude des propriétés des objets qui sont conservées par déformation continue. Belle phrase, mais qui nécessite d'être précisée.

Définition 1.1.7. *Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite ouverte si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$. Une partie $F \subset \mathbb{R}$ est dite fermée si son complémentaire $U = \mathbb{R} \setminus F$ est ouvert.*

Exemple 4. *Les intervalles, comme $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-1,1[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Les intervalles , comme $\{a\}$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.*
Exemples extrêmes : $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 1.1.5. *La réunion d'un nombre quelconque d'ouverts, l'intersection d'un nombre fini d'ouverts, sont ouvertes.*
La réunion d'un nombre fini de fermés, l'intersection d'un nombre quelconque de fermés, sont fermées.

Proposition 1.1.6. *Une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si pour toute suite convergente de points $(x_n) \subset F$, la limite $\lim_{n\to+\infty}$ appartient à F.*

1.1.6 Partie entière d'un nombre réel

Définition 1.1.8. *Soit $x \in \mathbb{R}$; l'entier $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \leq x < \alpha + 1$ s'appelle partie entière de x et on le note par $E(x)$ ou encore $[x]$.*

Exemple 5. *Trouvons les parties entières de $1,5$ et de $-3,5$; c'est à dire : $E(1,5)$ et $E(-3,5)$*

(a) Puisque $1 \leq 1,5 < 2 \Longrightarrow E(1,5) = 1$.

(b) Puisque $-4 \leq -3,5 < -3 \Longrightarrow E(-3,5) = -4$.

1.1.7 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 1.1.9. *A tout nombre réel x ; on peut lui associer un nombre positif noté $|x|$ appelé valeur absolue de x et défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad \text{si } x=0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

On résume les propriétés de la valeur absolue dans le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. *Soient x et y deux nombres réels et $a \in \mathbb{R}_*^+$*

(i) $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$.

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

Démonstration du Théorème :

(i) D'après la définition de la valeur absolue nous avons

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

On a

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq |x|,$$

d'où

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a.$$

(ii) Nous avons quatre cas :

Cas 1 : $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Il est clair que $|xy| = xy = |x||y|$.

Cas 2 : $x \geq 0$ et $y \leq 0$. Dans ce cas $|x| = x$ et $|y| = -y$, de plus $xy \leq 0$ et $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.

Cas 3 : $x \leq 0$ et $y \geq 0$. Dans ce cas $|x| = -x$ et $|y| = y$, de plus $xy \leq 0$, ce qui montre que $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.

Cas 4 : $x \leq 0$ et $y \leq 0$. Dans ce cas $|x| = -x$ et $|y| = -y$, de plus $xy \geq 0$, ce qui montre que $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

(iii) nous avons :

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

et

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

ce qui implique que

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

et d'après la propriété (i), nous déduisons que :

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

1.1.8 Approximation décimale d'un nombre réel

Définition 1.1.10. *un nombre réel x est dit décimal s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{m}{10^n}$.*

Nous n'avons pas encore décrit mathématiquement ce qu'est l'écriture décimale d'un nombre réel ou même rationnel, mais le lecteur (la lectrice) comprend bien ce qu'est un nombre décimal : c'est un nombre dont l'écriture décimale s'arrète au bout d'un certain rang. Tous les nombres décimaux sont rationnels, mais il y a des nombres rationnels qui ne sont pas décimaux, comme par exemple $\frac{1}{3}$.

Nous allons présenter un procédé assez simple permettant par exemple de construire des nombres rationnels (décimaux) dont le carré est arbitrairement voisin de 2 par défaut et des nombres rationnels décimaux) dont le carré est arbitrairement voisin de 2 par excès. Ces nombres décimaux seront appelés respectivement des approximants décimaux par défaut et des approximants décimaux par excès de la grandeur réelle . C'est dans ce sens là qu'on peut dire que le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ existe! Nous allons appliquer le "procédé de dichotomie" pour démontrer cette propriété.

En effet observons d'abord que si $a, b \in \mathbb{Q}$ sont des nombres décimaux, leur moyenne arithmétique $m = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ est un nombre décimal vérifiant $a < m < b$: Si l'on représente les nombres rationnels par des points situés sur une droite orientée, le nombre rationnel m correspond au milieu du segment qui joint les points représentant les nombres a et b respectivement. Ce qui coupe en deux ce segment, d'où le nom de "procédé de dichotomie" utilisé pour qualifier cette méthode.

Choisissons deux nombres décimaux a_0, $b_0 \in \mathbb{Q}^+$ tels que $a_0^2 < 2 < b_0^2$: par exemple $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$. Le nombre a_0 (resp b_0) peut être considéré comme un premier approximant décimal par défaut (resp par excès) de la grandeur géométrique ℓ solution de l'équation $x^2 = 2$.

Considérons ensuite le nombre décimal $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Alors, puisque l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, il n'y a que deux cas possibles.

$$\begin{cases} \text{Ou bien } m_0^2 < 2 \text{ dans ce cas on pose } a_1 = m_0 \text{ et } b_1 = b_0. \\ \text{Ou bien } m_0^2 > 2 \text{ dans ce cas on pose } a_1 = a_0 \text{ et } b_1 = m_0. \end{cases}$$

Dans tous les cas on obtient un nouveau couple (a_1, b_1) de nombres décimaux positifs vérifiant $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$, $a_1^2 < 2 < b_1^2$ et tels que $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$.

On obtient ainsi un nouvel approximant décimal par défaut a_1 de la grandeur ℓ tel que a_1^2 soit une valeur approchée par défaut de 2 et un nouvel approximant rationnel par excés b_1 de la grandeur ℓ tel que b_1^2 soit une valeur approchée par excès de 2 vérifiant $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$; ce qui implique que l'une au moins des deux valeurs décimales approchées ainsi obtenues est plus précise que chacune des deux valeurs approchées précédentes.

En itérant ce procédé de dichotomie n fois, on construit successivement des approximants décimaux par défaut $a_0 < a_1 < ... < a_n$ et des approximants décimaux par excès $b_0 > b_1 > ... > b_n$ de la même grandeur ℓ tels qu'au rang n on ait $a_n^2 < 2 < b_n^2$ et l'écart entre les deux approximants est donné par : $e_n = b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Grâce à la propriété d'Archimède de $\mathbb{Q}$, étant donné $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$; on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b_0 - a_0}{2^N} < \varepsilon$; il suffit pour cela de prendre $N > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$ puisque $2^N > N$ Ainsi a_N et b_N sont des approximants décimaux qui donnent des valeurs décimales approchées à ε près par défaut et par excès respectivement de la grandeur ℓ i.e. pour tout $a_N < \ell < b_N$ et $0 < b_N - a_N < \varepsilon$.

Exemple 6. *Mettons en pratique cette méthode en considérant par exemple comme premières valeurs approchés décimales par défaut et par excès de $\sqrt{2}$; les deux nombres réels suivants : $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$. On a vu qu'au bout de n itérations, l'erreur par défaut ou par excès est dominée par $\frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.*
Si l'on souhaite déterminer une valeur approchée décimale de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par exemple (i.e. avec deux décimales exactes), il nous suffit de faire cette opération 10 fois : en effet, $2^{10} = 1024 > 10^3$, et $a_{10} < \sqrt{2} < b_{10}$, avec une différence entre les deux qui sera au plus de 10^{-3}.
On obtient successivement pour $(a_n ; b_n)$:
$(1;2)$; $(1;1,5)$; $(1,25;1,5)$; $(1,375;1,5)$; $(1,375;1,4375)$; $(1,40625;1,4375)$; $(1,40625;1,421875)$; $(1,4140625;1,421875)$; $(1,4140625;1,417968750)$; $(1,4140625;1,416015625)$; $(1,4140625;1,41503900$
On voit clairement que ce n'est qu'après 10 itérations que l'on obtient des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ avec trois décimales exactes et une erreur au plus égale à $0,001$. Il nous faudrait encore une itération pour avoir la garantie que $\sqrt{2}$ est inférieur à $1,415$.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. *Une suite est une application* $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui à tout* $n \in \mathbb{N}$ *fait correspondre* $u(n)$ *qu'on la note par* u_n *et s'appelle le terme général de la suite.*

Exemple 7.

- $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ *est la suite de termes :* $0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ldots$
- $((-1)^n)_{n\geq 0}$ *est la suite de termes :* $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ldots$
- $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ *est la suite de termes :* $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ldots$

2.1.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2.1.2. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite.*

- $(u_n)_{n\geq 0}$ **est majorée** *si* $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq M.$
- $(u_n)_{n\geq 0}$ **est minorée** *si* $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \geq m.$
- $(u_n)_{n\geq 0}$ **est bornée** *si elle est majorée et minorée ce qui revient à dire ;* $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} :$ $\mid u_n \mid \leq M.$

2.1.2 Suite croissante, décroissante

Définition 2.1.3. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite.*

- $(u_n)_{n\geq 0}$ **est croissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} \leq u_n.$

- $(u_n)_{n\geq 0}$ **est décroissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n\geq 0}$ **est monotone** *si elle est croissante ou bien décroissante.*

2.2 Convergence d'une suite

Définition 2.2.1. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite convergente si elle admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ ce qui est équivalent à dire que :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ n \geq N \Longrightarrow | u_n - l | < \varepsilon$$

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite divergente si elle n'admet pas de limite ou si sa limite est $\pm\infty$.

Proposition 2.2.1. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente. Alors sa limite est unique.*

Démonstration de la Proposition :

On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente ayant deux limites l et l' telles que $l \neq l'$.
Choisissons $\varepsilon < \frac{|l-l'|}{2}$.
Comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$, alors il existe N_1 tel que $n \geq N_1 \Longrightarrow | u_n - l | < \varepsilon$.
Comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l'$, alors il existe N_2 tel que $n \geq N_2 \Longrightarrow | u_n - l' | < \varepsilon$.
Pour $N = max(N_1, N_2)$ et pour tout $n \geq N$ nous avons

$$| l - l' | = | l - u_n + u_n - l' | < | u_n - l | + | u_n - l' | < 2\varepsilon < | l - l' |$$

.

On vient d'aboutir à l'inégalité $| l - l' | < | l - l' |$ qui est impossible.
Bilan : notre hypothèse de départ est fausse et donc $l = l'$.

Théorème 2.2.1.

- *Toute suite croissante majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante minorée est convergente.*
- *Toute suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.*
- *Toute suite décroissante qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.*

Exemple 8. *On considère la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *est croissante car :* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.
Montrons par récurrence que $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
Pour $n = 1$ *nous avons* $u_n = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$.
Supposons maintenant que $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ *et montrons que* $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.
Nous avons $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ *et par suite* $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$.
Comme $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *alors* $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.
Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *est majorée par* 2 *et finalement elle est convergente.*

2.3 Suites particulières

2.3.1 Suite géométrique

Définition 2.3.1. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite géométrique s'il existe un réel* λ *tel que :*

$$u_{n+1} = \lambda . u_n \text{ pour tout } n \geq n_0$$

Le nombre λ *s'appelle la raison de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Proposition 2.3.1. *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite géométrique de raison* λ. *Alors :*

- $u_n = \lambda^{n-n_0}.u_{n_0}$ *pour tout* $n \geq n_0$
- $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{1-\lambda^{n-p+1}}{1-\lambda}.u_p$, *pour tour* $n \geq p \geq n_0$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est convergente si et seulement si* $-1 < \lambda \leq 1$.
- *Si* $-1 < \lambda < 1$. *Alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2.3.2 Suites adjacentes

Définition 2.3.2. *Les suites* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *sont dites* **adjacentes** *si :*

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est décroissante.*
- $u_n \leq v_n \quad \forall n \geq n_0$.
- $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Exemple 9. *On considère les deux suites suivantes :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad et \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes.

$(u_n)_{n\geq 1}$ *est croissante car :* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$

$(v_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante car :* $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{-n}{(n+2)(n+1)^2} < 0.$

pour tout $n \geq 1$, *nous avons* $v_n - u_n = \frac{2}{n+1} > 0$ *ce qui implique que* $u_n \leq v_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{n+1} = 0.$

Donc les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(u_n)_{n\geq 1}$ *sont adjacentes.*

2.4 Valeurs d'adhérence et théorème de Bolzano Weierstrass

Définition 2.4.1. *On appelle extraction ou extractrice toute application (injective) strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Exemple 10. *Les fonctions suivantes sont des exctractions :*

$n \longrightarrow 2n,$

$n \longrightarrow 2n+1,$

$n \longrightarrow 2^n,$

$n \longrightarrow 4^n,$

$n \longrightarrow (n+1)!.$

Définition 2.4.2. *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite. On dit que* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite extraite de* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *s'il existe une extraction* φ *telle que pour tout* $n \geq n_0$, $v_n = u_{\varphi(n)}$. *On notera* $Ext(u_n)$ *l'ensemble des suites extraites de* $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 11. *Pour toute suite* (u_n), *les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont des suites extraites de* (u_n).

Proposition 2.4.1. *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite et* $a \in \mathbb{C}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$, $|u_n - a| < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0$, *l'ensemble* $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbf{N}, |u_n - l| < \varepsilon\}$ *est infini*
3. *Il existe une extraction* φ *telle que* $u_{\varphi(n)} \longrightarrow a$

Si ces propositions sont vérifiées, on dit que a *est* <u>*une valeur d'adhérence*</u> *de* (u_n) *et on note* $Adh(u_n)$ *l'ensemble des valeurs d'adérences de* (u_n).

Démonstration de la Proposition : (1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$tel que $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}, |u_n - l| < \varepsilon\}$ est fini. En posant $N = maxA$, on voit que pour tout $n > N$, $n \notin A$. On en déduit que $\exists \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - a| \geq \varepsilon$, ce qui est absurde.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Construisons par récurrence une extraction φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - a| \leq \frac{1}{n+1}$.

- L'ensemble $A(1)$ est non vide, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $|u_k - a| \leq 1$. On pose alors $\varphi(0) = k$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $0 \leq \ell \leq n$, $\varphi(\ell)$ est défini tel que $|u_{\varphi(\ell)} - a| \leq \frac{1}{\ell+1}$. L'ensemble $A\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est un ensemble infini donc non borné, il existe donc $k \in A\left(\frac{1}{n+1}\right)$ tel que $k > \varphi(n)$, on pose $k = \varphi(n+1)$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - a| < \frac{1}{n+1}$, ce qui montre que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow a$.

(3) $\Longrightarrow$ (1)Le point (3) est équivalent à

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précéde, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $|u_{\varphi(n)-a}| < \varepsilon$. En posant $n = \varphi(max(M,N))$, on voit que $n \geq \varphi(N) \geq N$ et $|u_n - a| < \varepsilon$, ce qui est bien le résultat voulu.

Exemple 12. *Les valeurs d'adhérence de la suite* $(u_n) = ((-1)^n)$ *sont* 1 *et* -1. *En effet,* $1 \in Adh(u_n)$ *et* $-1 \in Adh(u_n)$ *car* $u_{2n} \longrightarrow 1$ *et* $u_{2n+1} \longrightarrow -1$. *De plus, si* $a \notin \{-1, 1\}$, *alors l'ensemble* $\{n \in \mathbb{N}, |u_n - a| < \varepsilon\}$ *avec* $\varepsilon = \frac{1}{2}min(|a-1|, |a+1|)$ *est fini (vide), donc* a *ne peut pas être une valeur d'adhérence de* (u_n).

Proposition 2.4.2. *Soit* (u_n) *et* ℓ *un scalaire. Si* (u_n) *converge vers* ℓ, *alors* $Adh(u_n) = \{\ell\}$.

Démonstration de la Proposition : Soit φ une extraction et $\varepsilon > 0$. On dipose de $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$; $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et donc, étant donné que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) \geq k$, on peut affirmer que pour tout $n \geq N$, $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$, et donc $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$. On en déduit donc que $Adh(u_n) = \{\ell\}$.

Théorème 2.4.1. **[Théorème de Bolzano Weierstrass]** *Soit* (u_n) *une suite réelle. Si* (u_n) *est bornée, alors elle admet une valeur d'adhérence.*

Démonstration du Théorème : Montrons tout d'abord que la suite (u_n) admet une sous-suite monotone.

Posons $A = \{n \in \mathbb{N}; \forall k \geq n : u_n \geq u_k\}$. Deux cas qui sont possibles.

<u>Cas 1 :</u> A est infini, alors d'après le point 2 de la proposition 2.4.1, on peut considérer une extraction φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) = A$ et de remarquer que par définition de A, $(u_{\varphi(n)})$ est décroissante.

Cas 2 : Si A est fini (ou vide), alors étant donné que A est une partie finie de $\mathbb{N}$, elle est bornée posons donc $N = 1 + maxA$. Construisons alors une extraction φ par récurrence telle que $(u_{\varphi(n)})$ est strictement croissante.

- On pose $\varphi(0) = N$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que pour tout $0 \leq \ell \leq n$, $\varphi(\ell)$ est bien définie et que $u_{\varphi(0)} \leq u_{\varphi(1)} \leq \dots u_{\varphi(n)}$ et $\varphi(n) > \varphi(0) = N$ donc par construction $\varphi(n) \notin A$ c'est-à-dire il existe $k > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} < u_k$. On pose alors $\varphi(n+1) = k$. On a alors bien que $u_{\varphi(0)} \leq u_{\varphi(1)} \leq \dots \leq u_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n+1)}$.

On en déduit donc que (u_n) admet forcément une suite extraite croissante ou décroissante.

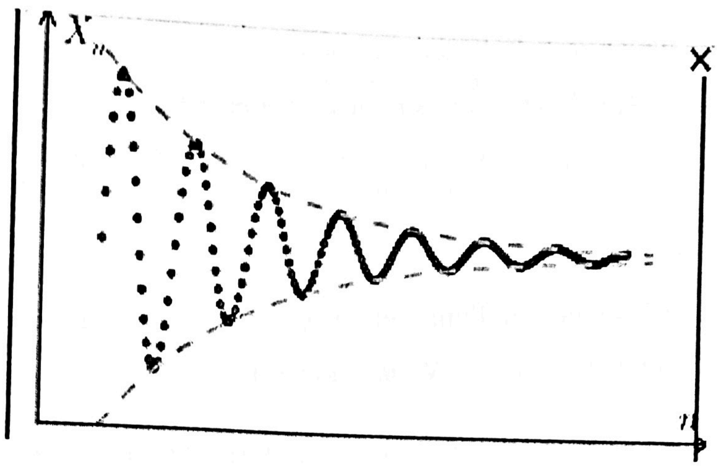
La suite (u_n) admet une suite extraite monotone. (u_n) est réelle bornée donc cette suite extraite est également bornée, donc convergente. (u_n) admet donc bien une valeur d'adhérence.

2.5 Suites de Cauchy

Cauchy

Définition 2.5.1. *Une suite (u_n) est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon; \quad n, m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$$



Proposition 2.5.1. *Soit (u_n) une suite.*

1. *Si (u_n) est de Cauchy, alors $\forall p \geq 1$; $u_{n+p} - u_p \longrightarrow 0$.*
2. *Si la limite de la suite $v_n = \sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|$ est finie, alors (u_n) est de Cauchy.*
3. *Si (u_n) converge , alors elle est de Cauchy.*
4. *Si (u_n) est de Cauchy, alors elle bornée.*
5. *Si (u_n) est de Cauchy et possède une valeur d'adhérence, alors elle converge.*

Démonstration de la Proposition :

1. Si $p \geq 1$, il suffit d'appliquer la définition en prenant $m = n + p$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon; \quad n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Il est clair que $u_{n+p} - u_n$ tend vers 0.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $\sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1} - u_k|$ la limite de la suite $\left(\sum_{k=N}^{n} |u_{k+1} - u_k|\right)_{n \geq N}$. On remarque alors que

$$\sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| - \sum_{k=0}^{N-1} |u_{k+1} - u_k| \longrightarrow 0$$

Prenons $N \geq 0$ tel que $\sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| < \varepsilon$. On a alors pour tout $n, m \geq N$, en supposant sans perte de généralité que $m \geq n$,

$$|u_n - u_m| = |\sum_{k=n}^{m-1} u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| \leq \varepsilon,$$

donc (u_n) est bien une suite de Cauchy.

3. Soit ℓ la limite de (u_n). Soit $\varepsilon > 0$. (u_n) converge vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ et tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors pour tout $n,m \geq N$,
$$|u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
ce qui montre que (u_n) est de Cauchy.

4. Appliquons la définition d'une suite de Cauchy pour $\varepsilon = 1$. (u_n) est de Cauchy, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - u_N| < 1$. En particulier pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$|u_n| \leq max(|u_0|, |u_1|, \ldots |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$$

5. Soit a une valeur d'adhérence de (u_n) et φ une extraction telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_{\varphi(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque (u_n) est de Cauchy, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $n,m \geq N'$, $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. En posant $M = max(N,N')$, on voit que pour tout $n \geq M$,
$$|u_n - a| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$
ce qui impique que (u_n) converge vers a.

Corollaire 2.5.1. *Si (u_n) est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors (u_n) est de Cauchy si et seulement si elle convergente.*

Démonstration du Corollaire : La démonstration se découle facilement de la proposition précédente.

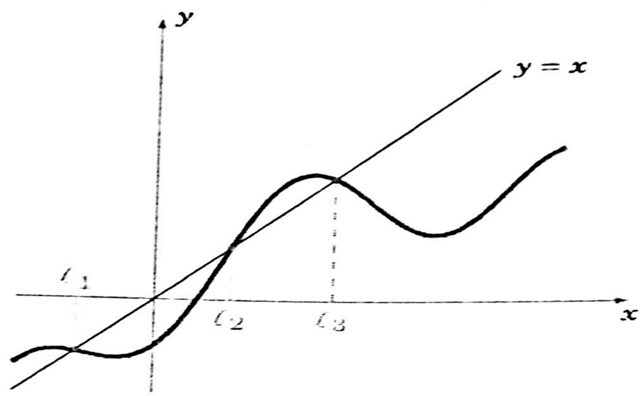
2.6 Suite récurrente définie par une fonction

Définition 2.6.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une suite récurrente est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche :*
$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et } u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0$$
Une suite récurrente est donc définie par deux données : un terme initial u_0, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite s'écrit ainsi :
u_0, $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1) = f(f(u_0))$, $u_3 = f(u_2) = f(f(f(u_0)))$,...

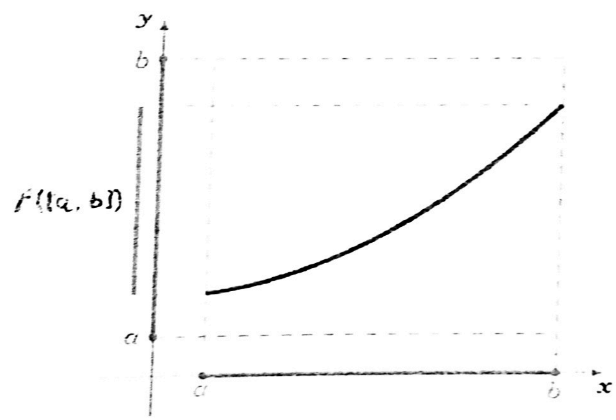
Exemple 13. *Soit la fonction définie par $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Fixons $u_0 = 2$ et définissons pour tout $n \geq 0$ la suite $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est à dire $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$. Alors les premiers termes de la suite sont :*

$u_0 = 2,\ u_1 = 1+\sqrt{2},\ u_2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{2}},\ u_3 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}},\ u_4 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}},\ \ldots$

Proposition 2.6.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par une fonction f.*
Si f est continue et $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers une limite ℓ. Alors $f(\ell) = \ell$.
La valeur ℓ est un point fixe de la fonction f.



Proposition 2.6.2. *Si $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ est une fonction continue et* **croissante**, *alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_0 \in [a;b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite monotone est converge vers une valeur ℓ qui satisfait l'égalité $f(\ell) = \ell$.*



Exercice

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x} + 2)$$

On consid ?re la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \geq 0$$

1. Montrer que $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \geq 0$
2. Monter que $f([1;4]) \subset [1;4]$
3. Montrer que la fonction f est continue et croissante sur l'intervalle $[1;4]$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente.
5. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Chapitre 3

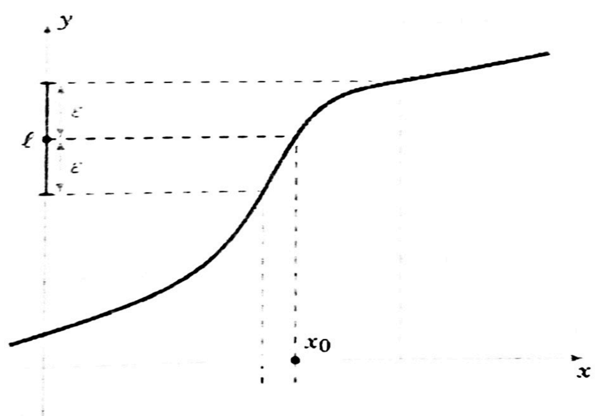
Fonctions réelles et continuité

3.1 Limite d'une fonction

Définition 3.1.1. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f a pour limite ℓ en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tels que } \quad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.



Exemple 14. *Soit la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = 2.$

Définition 3.1.2. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tels que } \quad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) > A.$$

On note alors $lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tels que } \quad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow -f(x) > A.$$

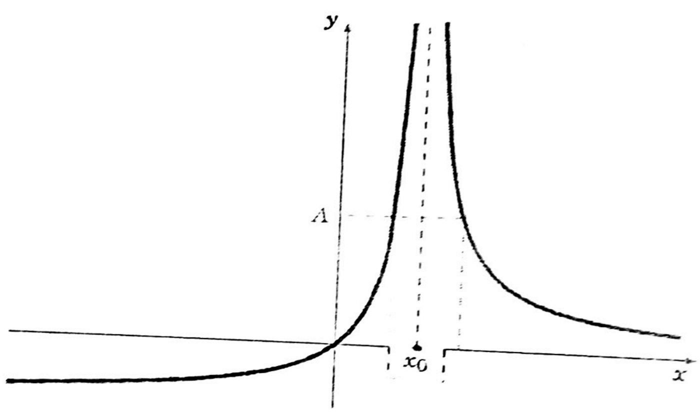
On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Définition 3.1.3. *Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I = [a; +\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.*

On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \text{ tels que } \quad \forall x \in I \quad x > B \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

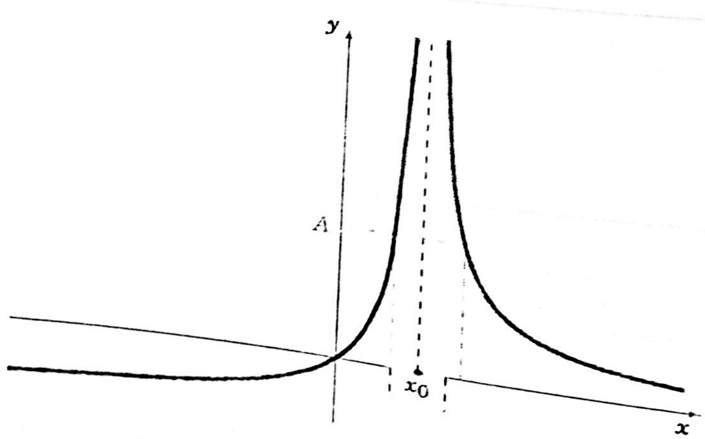


Définition 3.1.4. *Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]-\infty; b]$ et $\ell \in \mathbb{R}$.*

On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \text{ tels que } \quad \forall x \in I \quad -x > B \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$



Exemple 15. *Nous avons les limites classiques suivantes :*

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si \quad n \text{ est pair} \\ -\infty & si \quad n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0.$
- *Soient* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *avec et* $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ *sont deux polynômes tels que* $a_n > 0$ *et* $b_m > 0$ *. Alors* $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & si \quad n > 0 \\ \frac{a_n}{b_m} & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n < m \end{cases}$

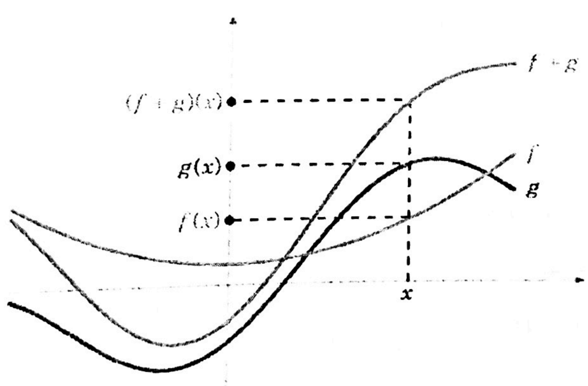
3.2 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions et x_0 un réel ou $x_0 = \pm\infty$.

Définition 3.2.1. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$*. alors :*

- $\lim_{x\to x_0} \lambda.f(x) = \lambda.\ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$.
- $\lim_{x\to x_0} (f \times g)(x) = \ell \times \ell'$.
- *Si* $l \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.

De plus, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *ou* $(-\infty)$ *alors* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.



Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de $f+g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée.
Voici une liste de formes indéterminées :$+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^∞; ∞^0; 0^0. Voici une proposition très importante qui lie le comportement d'une limite avec les inégalités.

Proposition 3.2.1.

- *Si $f \leq g$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$. Alors $\ell \leq \ell'$.*
- *Si $f \leq g$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*
- **(Théorème des gendarmes)** *Si $f \leq g \leq h$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$. Alors g a une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.*

3.3 Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 3.3.1.

- *On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Exemple 16. *Les fonctions suivantes sont continues :*

- *Une fonction constante sur un intervalle,*
- *La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,*
- *Les fonctions* sin *et* cos *sur $\mathbb{R}$,*
- *La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,*
- *La fonction* exp *sur $\mathbb{R}$,*
- *La fonction* ln *sur $]0, +\infty[$.*

Par contre, la fonction partie enti ?re E n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est continue en x_0.

Proposition 3.3.1. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors*

- *La fonction λf est continue au point x_0,*
- *$f + g$ est continue au point x_0,*
- *$f \times g$ est continue au point x_0,*
- *Si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue au point x_0.*

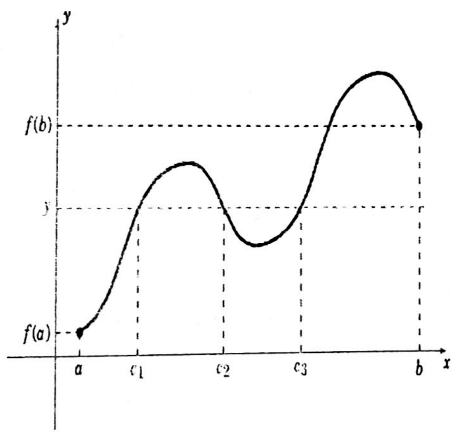
Exemple 17. *La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :*

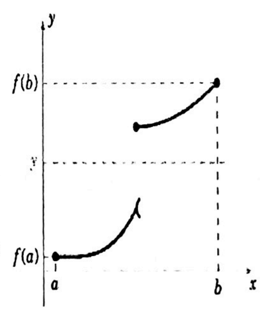
- *Les fonctions puissance* $x \mapsto x^n$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
- *Les polynômes (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes) sont continues sur* $\mathbb{R}$.
- *Les fractions rationnelles* $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ *sont continues sur tout intervalle où* $Q(x)$ *ne s'annule pas.*

Proposition 3.3.2. *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $f(I) \subset J$. *Si* f *est continue en un point* $x_0 \in I$ *et* g *est continue au point* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est continue au point* x_0.

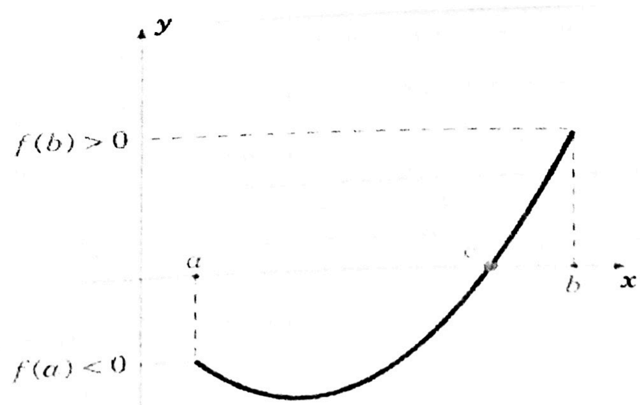
Théorème 3.3.1. (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur le segment* $[a;b]$. *Alors pour tout* y *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe* $c \in [a;b]$ *tel que* $f(c) = y$.





Corollaire 3.3.1. *Soit* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur le segment* $[a;b]$. *Si* $f(a)f(b) < 0$ *alors il existe* $c \in [a;b]$ *tel que* $f(c) = 0$.



3.4 Prolongement par continuit ?

Définition 3.4.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction*

- *On dit que f est prolongeable par continuité au point x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$.*
- *On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ \ell & si \quad x = x_0. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est continue au point x_0 et s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 18. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Est ce que f est prolongeable par continuité au point 0 ?*
Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mid f(x) \mid \leq \mid x \mid$ ce qui implique que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et par suite f admet un prolongement par continuité au point 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

3.5 Continuité uniforme et théorème de Heine

Définition 3.5.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*
On dit que f est uniformément continue (f est u-continue) sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \forall (x,y) \in I^2 : \ |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

La notion de continuité uniforme est globale (la valeur de δ ne dépend pas de ε).
Il est clair que la continuité uniforme sur I entraine la continuité, par contre la réciproque est fausse : la fonction $x \longrightarrow x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue. En effet, pour $\varepsilon = 1$ et pour tout $\delta > 0$. On choisit $x > \frac{1}{\delta}$ et $y = x + \frac{\delta}{2}$:
$y - x = \frac{\delta}{2}$ et $y^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} \geq x\delta > 1$.
Nous avons $|x - y| \leq \delta$, mais $|x^2 - y^2| > \varepsilon$, ce qui montre que la fonction $x \longrightarrow x^2$ n'est pas unifrmément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.5.2. **(Application lipschitzienne)** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite lipschitzienne sur I s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ pour tout $(x,y) \in I^2$.*

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit uniformément continue.

Théorème 3.5.1. **[Théorème de Heine]** *Toute fonction lipschitizienne sur un intervalle I est uniformément continue sur I.*

Démonstration du Théorème : Soit f une fonction liptschiptizienne sur I. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Soient x et y dans I tels que $|x-y| \leq \delta$. On a alors :

$$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y| \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que f est uniformément continue sur I.

Exemple 19. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

La fonction f est impaire et lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, car

$$|f(x)-f(y)| = |\frac{y}{1+|y|} - \frac{x}{1+|x|}| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leq |x-y|.$$

Donc f est $1-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est aussi sur $\mathbb{R}$ (puisque f est impaire).

Remarque 3.5.1. *Il existe des fonctions qui sont uniformément continues mais qui ne sont pas lipschitzienne, par exemple la fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est unifomément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais non lipschitzienne.*

3.6 Fonctions trigonométriques inverses

Définition 3.6.1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.*

- *f est injective si $\forall x,\ x' \in E$ $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.*
- *f est surjective si $\forall y \in F$ $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$.*
- *f est bijective si f à la fois injective et bijective c-à-d $\forall y \in F$ $\exists! x \in E$ tel que $f(x) = y$.*

Proposition 3.6.1. *Si $f : E \longrightarrow F$ est fonction bijective, alors il existe une unique fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$. La fonction g s'appelle la bijection réciproque de f et se note par f^{-1}.*

Théorème 3.6.1. **(Théorème de la bijection)**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $J = f(I)$.*
2. *La fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation de f.*

Les fonctions trigonométriques $x \longrightarrow \cos x$, $x \longrightarrow \sin x$ et $x \longrightarrow \tan x$ ne sont pas monotones sur $\mathbb{R}$ tout entier, pour construire des fonctions inverses, on est obligé à se restreindre à des intervalles de monotonie de ces fonctions (on prend on général des intervalles de monotonie maximaux).

Définition 3.6.2. **(La fonction** arccos)
La fonction $x \longrightarrow \cos x$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;\pi]$. On définit son inverse par :

$$\begin{aligned} \arccos : [-1;1] &\longrightarrow [0;\pi] \\ x &\longrightarrow \arccos x \end{aligned}$$

1. *Le domaine de définition de* arccos *est l'intervalle $[-1;1]$.*
2. $y = \arccos x \Longleftrightarrow \cos y = x$ *et* $0 \leq y \leq \pi$.

Définition 3.6.3. **(La fonction** arcsin)
La fonction $x \longrightarrow \sin x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. On définit son inverse par :

$$\begin{aligned} \arcsin [-1;1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longrightarrow \arcsin x \end{aligned}$$

1. *Le domaine de définition de* arccos *est l'intervalle $[-1;1]$.*
2. $y = \arcsin x \Longleftrightarrow \sin y = x$ *et* $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Définition 3.6.4. **(La fonction arctan)**

La fonction $x \longrightarrow \tan x$ *est continue et strictement croissante sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. *On définit son inverse par :*

$$\begin{array}{rcl} \arctan \mathbb{R} & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longrightarrow & \arctan x \end{array}$$

1. *Le domaine de définition de* arctan *est* $\mathbb{R}$.
2. $y = \arctan x \Longleftrightarrow \tan y = x$ *et* $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Remarque 3.6.1. *Pour tout* $x \in [-1;1]$ *nous avons :*

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

En effet pour tout $x \in [-1;1]$, *on pose* $y = \arcsin x$ *avec* $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ *ce qui implique que* $\sin y = x$ *c- ?-d* $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = x$ *et* $0 \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \pi$. *Donc*

$$\arccos x + \arcsin x = y + \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - y)) = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 4

Fonctions dérivables

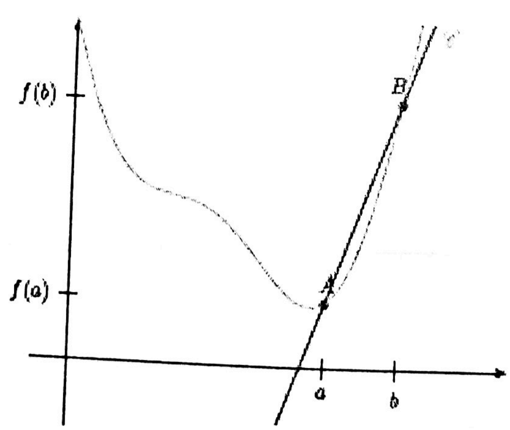
4.1 Dérivée en un point

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

Définition 4.1.1. *f est dérivable au point x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. Cette limite s'appelle alors la dérivée de f en x_0 et se note par $f'(x_0)$. Ainsi :*

$$f'(x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Définition 4.1.2. *f est dérivable sur I si elle dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction définie sur I par $x \longrightarrow f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f sur I et se note par f' ou $\frac{df}{dx}$.*



Exemple 20.

La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} (x+x_0) = 2x_0.$$

On a même démontré que de la dérivée de f en x_0 est $2x_0$ c'est-à-dire $f'(x) = 2x$.

Exemple 21.

Montrons que la fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \cos(x)$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ et } \sin(p) - \sin(q) = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2}).$$

Pour x_0 quelconque nous avons :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(\frac{(x-x_0)}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}\cos(\frac{x+x_0}{2}).$$

Comme $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(\frac{(x-x_0)}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} = 1$, nous déduisons que $f'(x_0) = \cos(x_0)$.

Proposition 4.1.1. *Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

- *Si f est dérivable au point x_0 alors elle est continue au point x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors elle continue sur I.*

Démonstration de la Proposition : Si f est dérivable en a, il existe une fonction ε tel que $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.
Donc $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui montre que f est continue au point a.

Remarque 4.1.1. *La réciproque est fausse. En effet la fonction $x \longrightarrow |x|$ est une fonction qui est continue au point 0 mais n'est plus dérivable en ce point.*

4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 4.2.1. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$.*

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, *où λ est un réel fixé.*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *(si $f(x) \neq 0$).*
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(si $g(x) \neq 0$).*

Remarque 4.2.1. *Il est plus facile de mémoriser les égalités suivantes :*
$(f+g)' = f'+g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Le tableau suivant est un résumé des principales dérivées des fonctions usuelles.

Fonction	D ?riv ?e
x^n	nx^{n-1} $(n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$(x>0)
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

4.3 Dérivée d'une composée

Proposition 4.3.1. *Si f est dérivable au point x et g est dérivable au point $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable au point x et nous avons :*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

Exemple 22.

Calculons la dérivée de la fonction $\ln(1+x^2)$. *Nous avons* $g(x) = \ln x$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *et* $f(x) = 1+x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$ *ce qui montre que*

$$\left(\ln(1+x^2)\right)' = (g \circ f)'(x) = g'(1+x^2).f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Le tableau suivant est un résumé des principales dérivées des fonctions composées.

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'.u^{\alpha-1}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

4.4 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 4.4.1. *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective dérivable dont on note $f^{-1} : J \longrightarrow I$ sa bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a pour tout $x \in J$:*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple 23.

On considère la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \left]0; \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow &]0; +\infty[\\ x & \longrightarrow & \tan x \end{array}$$

La fonction f est continue strictement croissante et par suite elle est bijective et sa bijection est $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. De plus $f'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ce qui implique que :

$$(\arctan(x))'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.5 Dérivées successives et formule de Leibniz

Définition 4.5.1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si f est dérivable au voisinage du point a et si f' est dérivable qu point a, on dit que f est deux

fois dérivable au point a *et on note* $f''(a)$ *la valeur de* $(f')'(a)$.

Si f *est deux fois dérivable en tout point de* I, *on dit que* f *est deux fois dérivable (sur* I*), et on note* f'' *ou* $f^{(2)}$ *l'application :*

$$\begin{aligned} f^{(2)} : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f''(x) \end{aligned}$$

Plus généralement, on a la définition récurrente suivante : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $a \in I$.

1. $f^{(0)} = f$
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $f^{(n)}$ *est définie au voisinage de* a *et si* $f^{(n)}$ *est dérivable en* a, *on dit que* f *est* $n+1$ *dérivable en* a *et on note* $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a)$ *; si* f *est* $n+1$ *dérivable en tout point de* I, *on dit que* f *est* $n+1$ *dérivable sur* I, *et on note*

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

Autres notations pour $f^{(n)}$: $\frac{d^n f}{dx^n}$ *ou* $D^n(f)$ (*pour* $n \geq 1$).

Théorème 4.5.1. *Soient* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $a \in I$. *On suppose que* f *et* g *sont* n *fois dérivables en* a. *Alors :*

- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, λf *est* n *fois dérivable en* a *et* $(\lambda f)^{(n)}(a) = \lambda f^{(n)}(a)$.
- $f+g$ *est* n *fois dérivable en* a *et* $(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$.
- fg *est* n *fois dérivable en* a *et* $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$ (*Formule de Leibniz*)

Démonstration du Théorème : Les deux premiers points sont immédiats par récurrence. Pour le troisième. Faisons une démonstration par récurrence.

Pour $n = 0$, il est évident que la relation est vraie.

Supposons que $(fg)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$ et montrons que $(fg)^{(n+1)}(a)=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a$

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(a) &= \left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[f^{(k)}g^{(n-k)}\right]'(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a)+f^{(k)}(a)g^{(n-k+1)}(a)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a)+\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n-k+1)}(a) \\
&= C_n^n f^{(n+1)}(a)g^{(0)}(a)+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a)+C_n^0 f^{(0)}(a)g^{(n+1)}(a)+\sum_{k=1}^{n}C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n-k+1)}(a) \\
&= C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)}(a)g^{(0)}(a)+\sum_{k=1}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)+1}(a)+\sum_{k=1}^{n}C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n-k+1)}(a)+C_{n+1}^0 f^{(0)}(a)g^{(n+1)}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a),\ \text{car } C_n^n=C_{n+1}^{n+1} \text{ et } C_n^0=C_{n+1}^0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

4.6 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Définition 4.6.1. *Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.*

- *On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0)=0$.*
- *On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp un minimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que $f(x)\leq f(x_0)$ (resp $f(x)\geq f(x_0)$) pour tout $x\in I\cap J$.*
- *On dit que f admet un extremum local en un point x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.*

Théorème 4.6.1. (**Théorème de Rolle**)
Soit $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction telle que :

- *f est continue sur $[a;b]$,*
- *f est dérivable sur $]a;b[$,*
- *$f(a)=f(b)$.*

Alors il existe $c\in\,]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration du Théorème : Si f est constante sur $[a,b]$ ce résultat est trivial, $\forall x \in [a,b]$; $f'(x) = 0$.

Supposons que f n'est pas constante. f étant continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée. Soit $M = sup\{f(x); x \in [a,b]\}$ et $m = inf\{f(x); x \in [a,b]\}$. On peut supposer que l'une au moins des constantes M ou m est distincte de $f(a) = f(b)$. Sinon on aura

$$M = m = f(a) = f(b),$$

ce qui implique que

$$\forall x \in [a,b], f(x) \leq M = f(a) = f(b) \text{ et } \forall x \in [a,b], f(x) \geq m = f(a) = f(b),$$

ce qui montre que f est constante.

On peut supposer que f atteint M en un point c différent de a et de b. Il existe alors un point $c \in]a,b[$ tell que $f(c) = M$. La valeur $f(c)$ est un maximum ce qui montre que $f'(c) = 0$.

Théorème 4.6.2. (Théorème des accroissements finis)

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- *f est continue sur $[a;b]$,*
- *f est dérivable sur $]a;b[$.*

Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration du Théorème : Considérons la fonction $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

ϕ est continue sur $[a,b]$, elle dérivable sur $]a,b[$ et $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Le théorème de Rolle implique l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Ce qui écrit

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Exemple 24.

Montrons que pour tout x, $y \in \mathbb{R}$ nous avons $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$. En effet :
Si $x = y$ l'inégalité est évidente.

Si $x \neq y$ *nous pouvons considérer que* $x < y$ *car dans le cas contraire la démarche sera similaire. La fonction* $f : a \longrightarrow \sin a$ *est continue sur l'intervalle* $[x;y]$ *et dérivable sur l'intervalle* $]x;y[$. *D'après le Théorème des accroissements finis il existe* $c \in]x;y[$ *tel que* $f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *c'est-à-dire que* $\frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \cos c$.

Puisque $|\cos c| \leq 1$, *alors* $\left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y}\right| \leq 1$. *D' où* $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$.

Exercice :

Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et g' ne s'annulle pas sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ vérifiant :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Royaume du Maroc
Université Ibnou Zohr
Faculté polydisciplinaire de Taroudant

TD$_1$: Analyse 1

Exercice 1

Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 2

Soient x et a deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $|x-a| < |a|$. Démontrer que $a - |a| < x < a + |a|$ et en déduire que x est du signe de a.

Exercice 3

Montrer que $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ est algébrique.

Exercice 4

On considère l'ensemble suivant :

$$A = \left\{3 - \frac{1}{2^n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

1. Montrer que A n'admet pas un plus grand élément.
2. Montrer que $Sup(A) = 3$.

Exercice 4

Trouver la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble suivant :

$$A = \left\{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } m < 2n\right\}$$

Exercice 5

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ sont des nombres réels.

1. Montrer que :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

2. Déduire que si $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, alors $|\sum_{k=1}^{n} a_kb_k| \leq 1$.

Exercice 6

Prouver le résultat suivant par récurrence : si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs tels que $a_1a_2...a_n = 1$, alors

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$$

Exercice 7

On note respectivement A_n, G_n et H_n les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$, soit

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times ... \times a_n} \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \end{aligned}$$

Montrer que $A_n \geq G_n \geq H_n$.