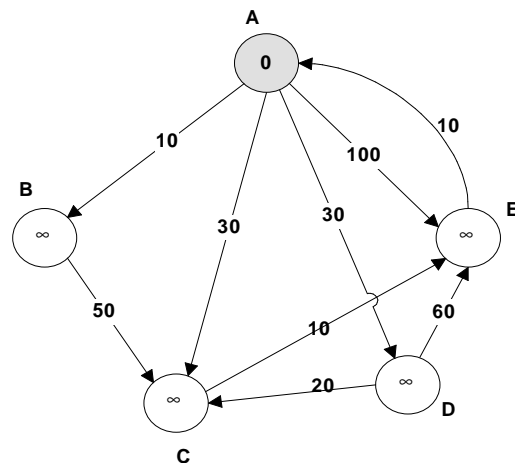


7.4. Cammini minimi: esercizio svolto

Esercizio 1

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:

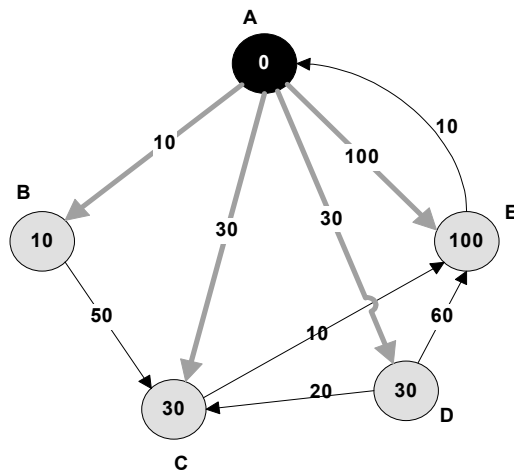


si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice A con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

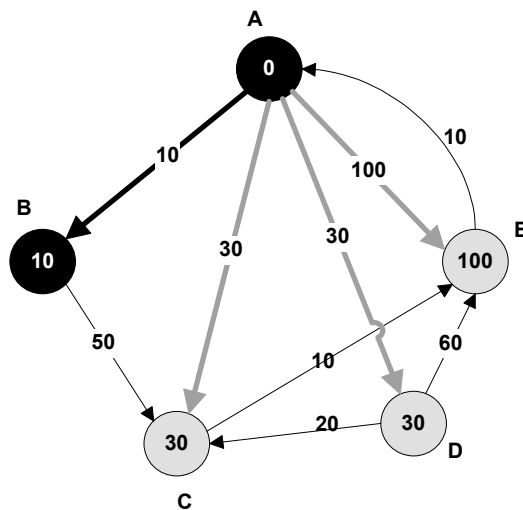
7.4. Cammini minimi: esercizio svolto

Soluzione esercizio 1

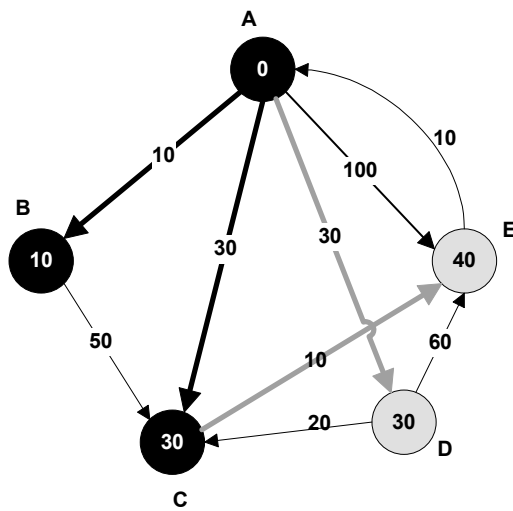
Partiamo dal nodo **A**, infatti come si vede abbiamo posto 0 in tale nodo e ∞ in tutti gli altri, coloriamo di nero il nodo **A** e rilassiamo tutti gli archi uscenti da esso.



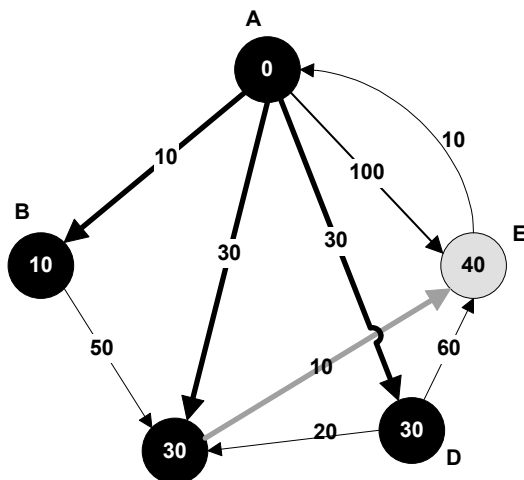
A questo punto prendiamo il vertice con peso minore e lo coloriamo di nero, come si può notare tale nodo risulta **B**, rilassando tutti gli archi uscenti da esso otteniamo il seguente grafo:



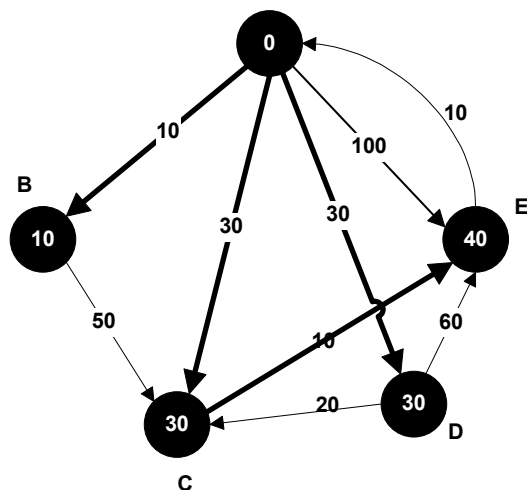
Come si può notare non è cambiato nulla, estraiamo il nuovo nodo, che potrebbe essere sia **C** che **D**, ma come dice il testo li prendiamo in ordine alfabetico crescente, dunque la scelta cade su **C**.



Rilassando gli archi di **C** possiamo notare come il vertice **E** si stato raggiunto con un cammino a peso minore (tecnica del rilassamento degli archi), il nuovo nodo adesso è **D**.



Ed infine consideriamo il nodo **E**.

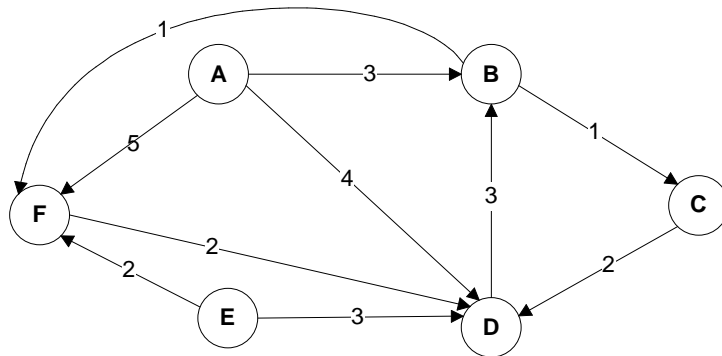


Questo risulta il grafo finale, il numero interno ad ogni nodo rappresenta il valore del cammino per arrivare ad esso dal vertice di partenza, gli archi in nero evidenziano il percorso fatto.

7.4. Cammini minimi: esercizio svolto

Esercizio 2

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **A** con ogni altro vertice mediante l'algoritmo di Bellman-Ford. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

7.4. Cammini minimi: esercizio svolto

Soluzione esercizio 2

Costruiamo due tabelle, una in cui riportiamo in ordine lessicografico crescente tutti gli archi, e una in cui evidenziamo i passi dell'algoritmo.

AB		P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅		P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
AD	A	0						A	Nil					
AF	B	∞						B	Nil					
BC	C	∞						C	Nil					
BF	D	∞						D	Nil					
CD	E	∞						E	Nil					
DB	F	∞						F	Nil					
ED														
EF														
FD														

Come si vede nella tabella centrale abbiamo posto 0 nel nodo di partenza e infinito in tutti gli altri, invece nella tabella di destra, che rappresenta la tabella dei link tra i vari nodi, abbiamo posto Nil in tutti. Iniziamo con il rilassamento dell'arco AB, A contiene 0 dunque raggiungiamo B con un peso pari a 3 che risulta inferiore del valore attuale (∞). Rilassando pure gli archi AD e AF otteniamo la seguente tabella

AB		P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅		P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
AD	A	0	0					A	Nil					
AF	B	∞	3					B	AB					
BC	C	∞						C	Nil					
BF	D	∞	4					D	AD					
CD	E	∞						E	Nil					
DB	F	∞	5					F	AF					
ED														
EF														
FD														

Continuiamo rilassando pure gli altri archi che partono dal nodo B, ottenendo:

AB
AD
AF
BC
BF
CD
DB
ED
EF
FD

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
A	0	0				
B	∞	3				
C	∞	4				
D	∞	4				
E	∞					
F	∞	4				

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
A	Nil					
B	AB					
C	BC					
D	AD					
E	Nil					
F	BF					

F ha cambiato il suo valore da 5 a 4, visto che è stato raggiunto passando da B, come indica la tabella dei link opportunamente modificata. Tutti gli altri archi non portano ad alcun miglioramento della stima.

AB
AD
AF
BC
BF
CD
DB
ED
EF
FD

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
A	0	0				
B	∞	3				
C	∞	4				
D	∞	4				
E	∞	∞				
F	∞	4				

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
A	Nil					
B	AB					
C	BC					
D	AD					
E	Nil					
F	BF					

A questo punto l'algoritmo continua per gli ulteriori 5 passi, rilassando nuovamente tutti gli archi per ogni passo.

AB
AD
AF
BC
BF
CD
DB
ED
EF
FD

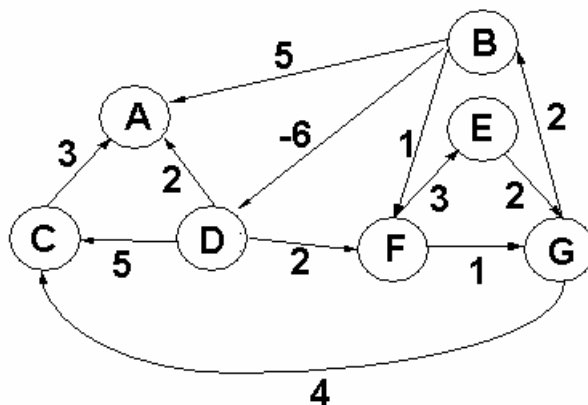
	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
A	0	0	0	0	0	0
B	∞	3	3	3	3	3
C	∞	4	4	4	4	4
D	∞	4	4	4	4	4
E	∞	∞	∞	∞	∞	∞
F	∞	4	4	4	4	4

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
A	Nil	Nil	Nil	Nil	Nil	Nil
B	AB	AB	AB	AB	AB	AB
C	BC	BC	BC	BC	BC	BC
D	AD	AD	AD	AD	AD	AD
E	Nil	Nil	Nil	Nil	Nil	Nil
F	BF	BF	BF	BF	BF	BF

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 1

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **F** con ogni altro vertice mediante l'algoritmo di Bellman-Ford. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Soluzione esercizio 1

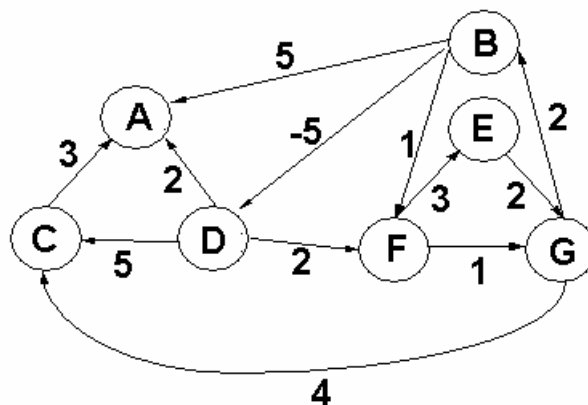
	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
A	∞	∞	-1	-2	-3	-4	-5	-6
B	∞	3	2	1	0	-1	-2	-3
C	∞	5	2	1	0	-1	-2	-3
D	∞	∞	-3	-4	-5	-6	-7	-8
E	∞	3	2	1	0	-1	-2	-3
F	0	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
G	∞	1	0	-1	-2	-3	-4	-4

Si è verificata l'esistenza di un ciclo negativo (passo 7).

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 2

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **B** con ogni altro vertice mediante l'algoritmo di Bellman-Ford. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

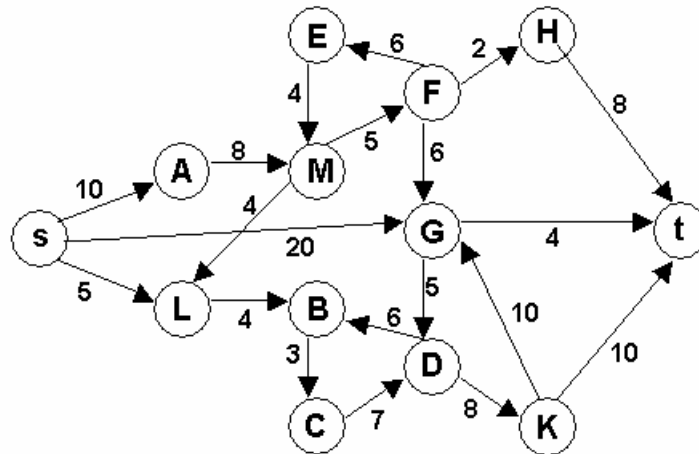
Soluzione esercizio 2

	P_6
A	-3
B	0
C	0
D	-5
E	0
F	-3
G	-2

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 3

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice s con ogni altro vertice mediante l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

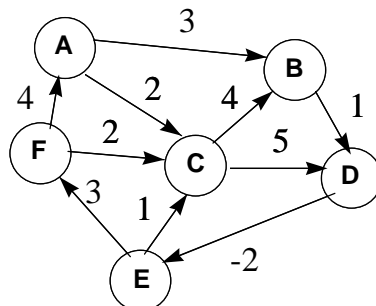
Soluzione esercizio 3

	Valori finali
s	0
A	10
B	9
C	12
D	19
E	29
F	23
G	20
H	25
N	27
L	5
M	18
t	24

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 4

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **A** con ogni altro vertice mediante l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

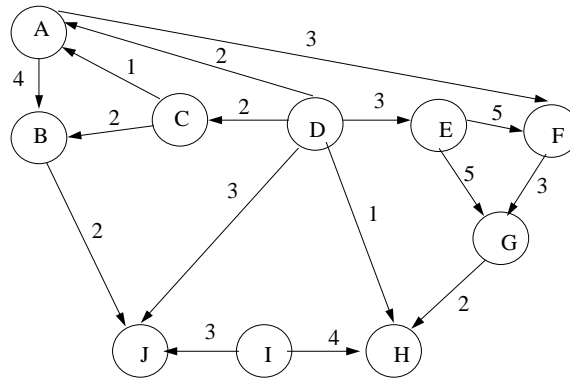
Soluzione esercizio 4

	Valori finali
A	0
B	3
C	2
D	4
E	2
F	5

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 5

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **D** con ogni altro vertice mediante l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

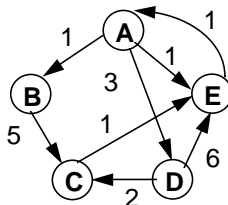
Soluzione esercizio 5

	Valori finali
A	2
B	4
C	2
D	0
E	3
F	5
G	8
H	1
I	∞
J	3

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 6

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice A con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi. Si riportino i passaggi.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

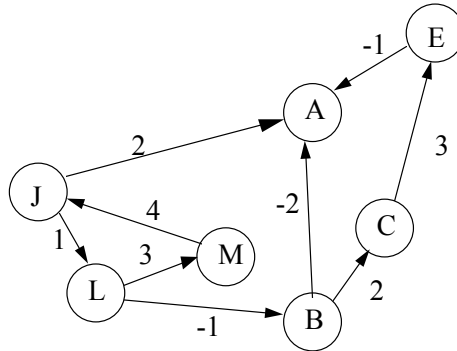
Soluzione esercizio 6

	Valori finali
A	0
B	1
C	5
D	3
E	1

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 7

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **J** con ogni altro vertice:

- mediante l'algoritmo di Dijkstra;
- mediante l'algoritmo di Bellman-Ford.

Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Soluzione esercizio 7

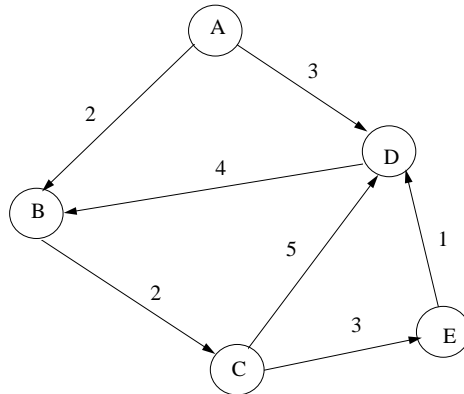
Dijkstra	Valori finali
A	1
B	8
C	9
E	11
J	0
L	3
M	6

Bellman-Ford	P_2
A	1
B	8
C	9
E	11
J	0
L	3
M	6

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 8

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **A** con ogni altro vertice mediante l'algoritmo di Bellman-Ford. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Soluzione esercizio 8

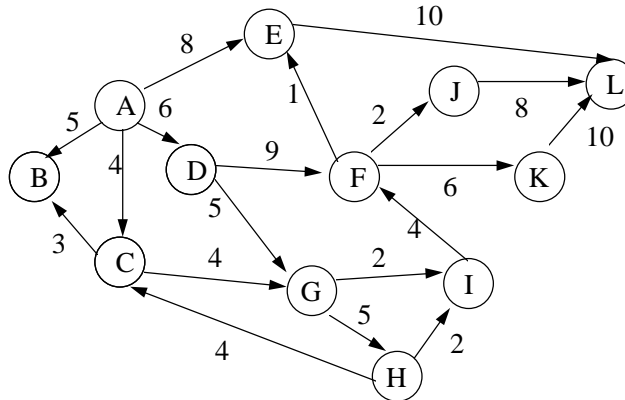
	P_1
A	0
B	2
C	4
D	3
E	7

Al primo passo l'algoritmo si può fermare visto che non ci sono più cambiamenti.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

Esercizio 9

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **A** con ogni altro vertice mediante l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

7.4. Cammini minimi: esercizi con risultato

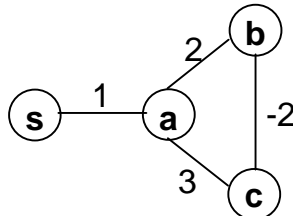
Soluzione esercizio 9

	Valori finali
A	0
B	5
C	4
D	6
E	8
F	14
G	8
H	13
I	10
J	16
K	20
L	18

7.4. Cammini minimi: esercizi proposti

Esercizio 1

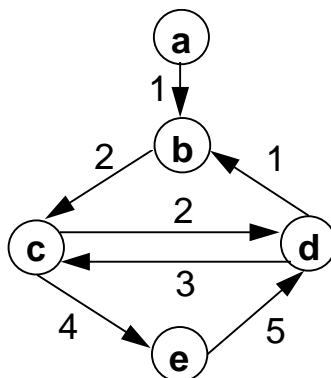
Sia dato il seguente grafo non orientato pesato:



- si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **s** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi. Si dimostri che, a causa dell'arco **b-c** di costo negativo, tale algoritmo non calcola una soluzione ottima. Si riportino i passaggi.
- si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **s** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Bellman-Ford. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi. Si riportino i passaggi.

Esercizio 2

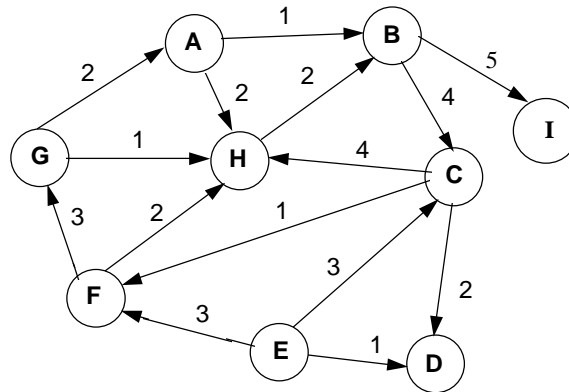
Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



- si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **a** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.
- si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **a** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Bellman-Ford. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

Esercizio 3

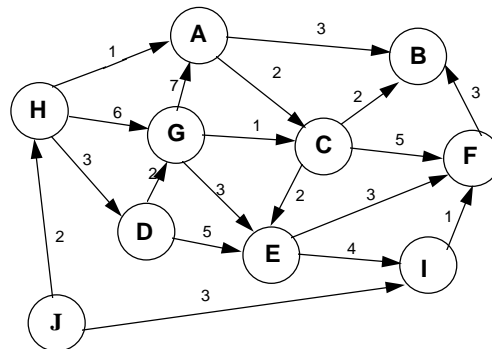
Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



- si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **E** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.
- si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **E** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Bellman-Ford. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

Esercizio 4

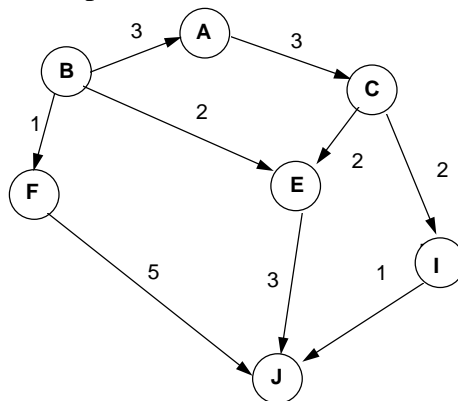
Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **A** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

Esercizio 5

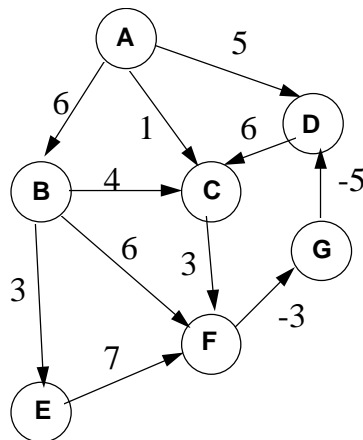
Sia dato il seguente grafo orientato pesato:



- si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **A** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Dijkstra. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.
- si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **A** con ogni altro vertice. Si applichi l'algoritmo di Bellman-Ford. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

Esercizio 6

Sia dato il seguente grafo orientato pesato:

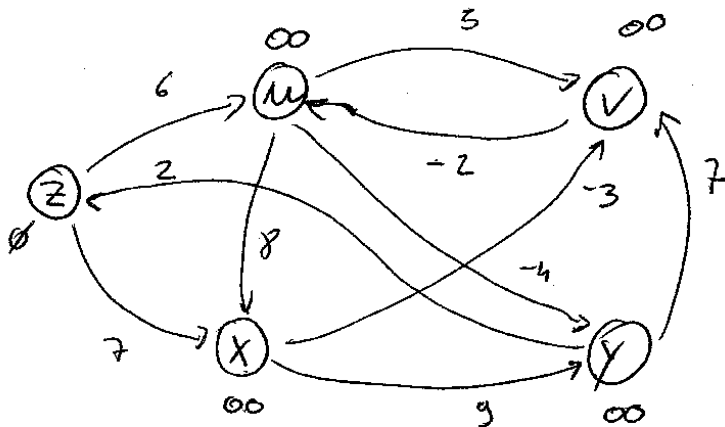


si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano il vertice **A** con ogni altro vertice:

- mediante l'algoritmo di Dijkstra;
- mediante l'algoritmo di Bellman-Ford.

Si indichi se i risultati sono ottimi. Si assuma, qualora necessario, un ordine alfabetico per i vertici e gli archi.

BELLMAN-FORD



- 1° RELAX Z =
- 2° RELAX W X
- 3° RELAX V Y
- 4° RELAX W
- 5° RELAX Y

