Fourier Series

Transformasyon - değişim için

Periyodik bir fonksiyonun fourier açılımı sonsuz tane sinüs fonk. ifade edebilir.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{\text{genlik}} \sin\big(\underbrace{n\overset{\omega=\frac{2\pi}{T}}{\omega} t}_{\text{frekans}} + \underbrace{\phi_n}_{\text{faz}}\big)$$

Fourier serisi formülü

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

a_0, a_n ve b_n fourier serilerinin katsayısıdır

a_0, a_n ve b_n bulunup, formülde yerine konur

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)\cos n\omega t \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)\sin n\omega t \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Periyodu 2π olan Fonksiyon

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{d}^{d+2\pi} f(t)\cos nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{d}^{d+2\pi} f(t)\sin nt \, dt \quad (n = 1, 2, \dots$$

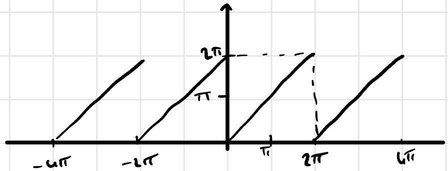
$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int u'\left[\int v\,dx\right]dx$$

$$\int \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n} \qquad \int \sin nx\,dx = \frac{-\cos x}{n}$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad \int e^{cx}dx = \frac{e^{cx}}{c}$$

Example: $f(t)=t \quad (0<t<2\pi)$

$f(t)=f(t+2\pi)$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt$$

$\cos 0 = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt = \frac{t^2}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{f(t)}_{u}\,\underbrace{\cos nt\,dt}_{v} = \frac{1}{\pi}\left[t\int \cos nt\,dt - \int \overset{1}{t'}\left[\int \cos nt\,dt\right]dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[t\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{2\pi} - \int\frac{\sin t}{n}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\sin nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{2\pi \sin n2\pi}{n}} + \frac{\cos n2\pi}{n^2} - \frac{\cos 0}{n^2}\right]$$

$0 \quad 1 \quad 1$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t\int \sin nt\,dt - \int\int \sin nt\,dt\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\cos nt}{-n} + \int\frac{\cos nt}{n}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt + \frac{\sin nt}{n^2}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n}\cos n2\pi\right] = \frac{-2}{n} = b_n$$

$a_n = 0$

$a_0 = 2\pi$

$b_n = \frac{-2}{n}$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nt$$

0

$$= \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nt$$

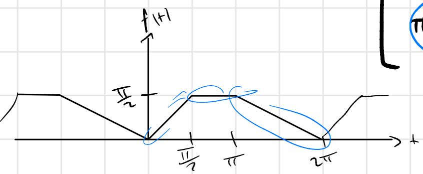
Frekans

$$f(t) = \pi - 2\left(\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots + \frac{\sin nt}{n} + \dots\right)$$

example: $f(t) = t^2 + t \quad (-\pi < t < \pi) \quad f(t) = f(t+2\pi)$
(Gözl)

Piecewise Function:

$$f(t)=f(t+2\pi) \qquad f(t) = \begin{cases} t & (0 \le t \le \frac{1}{2}\pi) \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi < t \le \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$



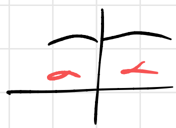
her biri için ayrı olarak bulunup toplanır

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \pi - \frac{1}{2}t\,dt\right) = \frac{5\pi}{8}$$

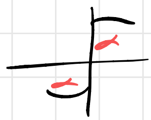
işlemler diğerleri (→ an, bn) için de böyle yapılır

Even and Odd Functions

f(t) çiftse $f(t) = f(-t)$ $\quad \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int f(t)\,dt$



f(t) tekse $f(t) = -f(-t)$ $\quad \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$



Çift x Çift = Çift

Tek x Çift = Tek

Tek x Tek = Çift

cos çift idir
sin tek

$f(t)$ çift bir periyodik fonksiyon ise

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{çift}}\, \underbrace{\cos n\omega t}_{\text{çift}}\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t$$

Tek fonksiyonun integrali "0" dır

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{çift}}\, \underbrace{\sin n\omega t}_{\text{tek}}\, dt = 0$$

$f(t)$ tek bir periyodik fonksiyon ise

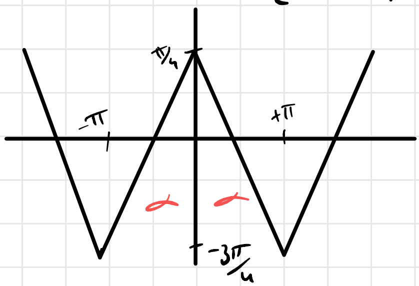
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{tek}}\, \underbrace{\cos n\omega t}_{\text{çift}}\, dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{tek}}\, \underbrace{\sin n\omega t}_{\text{tek}}\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

example: $f(t)\begin{cases} t + \frac{\pi}{4} & -\pi \leq t \leq 0 \\ -t + \frac{\pi}{4} & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$

$f(t)$ çift fonksiyondur

$f(t) = f(t + 2\pi)$



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt = 0$$

fonksiyon çift olduğundan b'yi hesaplamaya gerek yok,

a_n için sadece tek parçanın çözümü yeterli

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -t + \frac{\pi}{4}\ dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{4}t\Big|_0^{\pi} \right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-t + \frac{\pi}{4}\right)\cdot \cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} \underset{u}{t}\, \underbrace{\cos nt\, dt} + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4}\cos nt\, dt \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-t\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n}\,dt + \frac{\pi}{4}\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0 - \frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^{\pi} + 0 \right] = \frac{2}{n^2\pi}\left[-\cos n\pi + \cos 0 \right.$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n \right]$$

$$f(t) = \frac{-\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\cos t + 0 + \frac{4}{9\pi}\cos 3t$$

Fourier Transformation

→ Fonksiyon periyodik olmadığında

$e^{jwt} = \cos wt + j\sin wt$

$f = a + jb$

genlik ← $|f| = \sqrt{a^2+b^2}$

açı ← $\varnothing = \arctan b/a$

Fourier Transformation ←

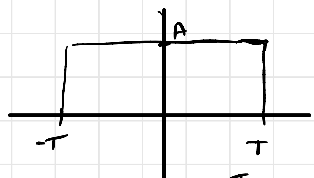
$$F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-jwt}\,dt \quad \rightarrow \text{Zamandan Frekansa}$$

Karmaşık sayı ←

reel sayı ←

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jw)\,e^{jwt}\,dw \quad \rightarrow \text{Frekanstan Zamana}$$

example: $f(t) = \begin{cases} A & |t| \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$



periyodik olmadığından dolayı f. transformasyonu uygulanır

$$F\{f(t)\} = \int_{-T}^{T} A e^{-jwt}\,dt = -\frac{A e^{-jwt}}{jw}\Big|_{-T}^{T} = \frac{-A}{jw}\left(e^{-jwT} - e^{jwT}\right)$$

$\cos wT - j\sin wT - (\cancel{\cos wt} + j\sin wT)$

$= -2j\sin wT$

$$\frac{T}{T}\,\frac{2A}{w}\sin wT$$

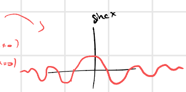
Tile çarpıp böldük ←

sinc x yapabilmek için ←

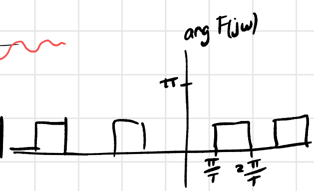
$$= 2AT\,\frac{\sin wT}{wT}$$

$\frac{\sin x}{x} = \operatorname{sinc} x$

$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \ne 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$

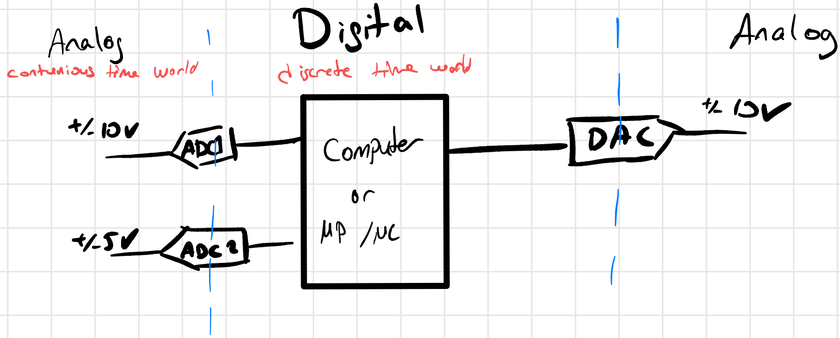


$$F(jw) = 2AT\,\operatorname{sinc} wT$$



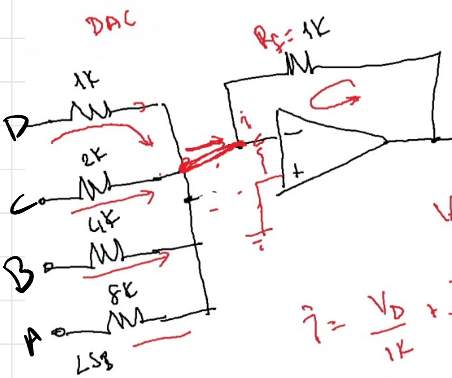
genlik ← $|F(jw)| = 2AT\,|\operatorname{sinc} wT|$

$\varnothing$ açı ← $\arg F(jw) = \begin{cases} 0 & \operatorname{sinc} wT > 0 \\ \pi & \operatorname{sinc} wT < 0 \end{cases}$



bir bilgiyi sayısala dönüştürecekseniz ondan alacağınız minimum örnek sayısı, o bilginin en yüksek frekansının çift katında olmalıdır (min)

DAC



$V_0 = -i R_f \to 1K$

$i = \frac{V_D}{1K} + \frac{V_C}{2K} + \frac{V_B}{4K} + \frac{V_A}{8K}$

$V_0 = -\left(V_D + \frac{V_C}{2} + \frac{V_B}{4} + \frac{V_A}{8}\right)$

1 → 5V

0 → 0V

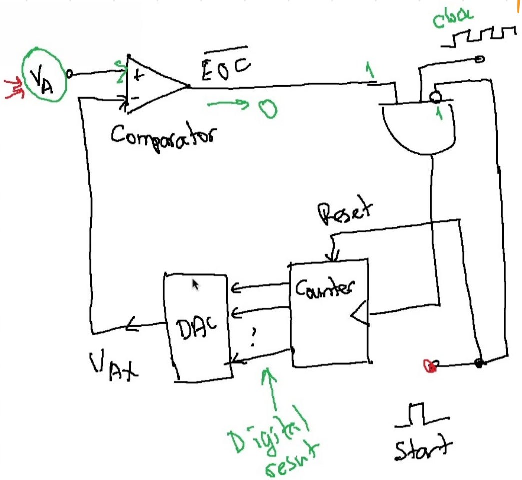
D	C	B	A		V [Volt]
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	-0.625
0	0	1	0	2	-1.250
0	0	1	1	3	-1.875
⋮					⋮
1	1	1	0	14	
1	1	1	1	15	-9.375

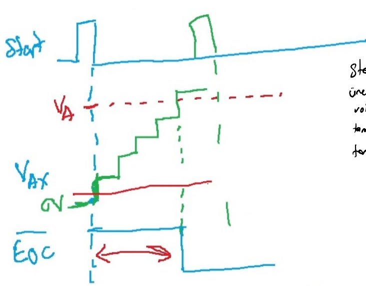
0011 → -1.875

ADC

Analog Digital Converter

Digital-ramp ADC





Start verildikten sonra DAC voltaj üretmeye başlar, voltaj değeri V_A'nın voltaj değerini geçtiğinde dönüşüm tamamlanmıştır

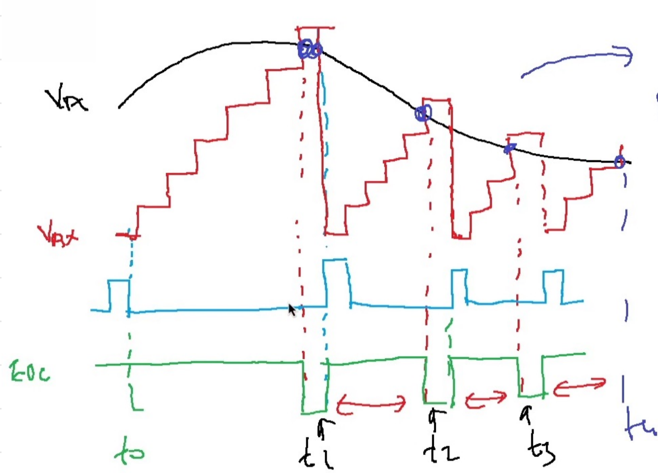
tamamlanınca EOC 0'a iner

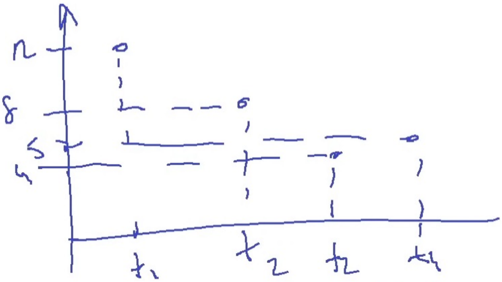
time tc: ?

Conversion Time t_c?

Digital-ramp ADC

$2^{N-1} * $ clock cycle



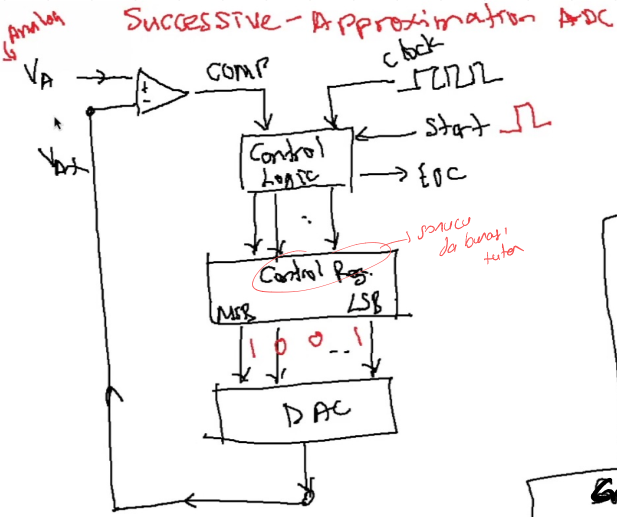


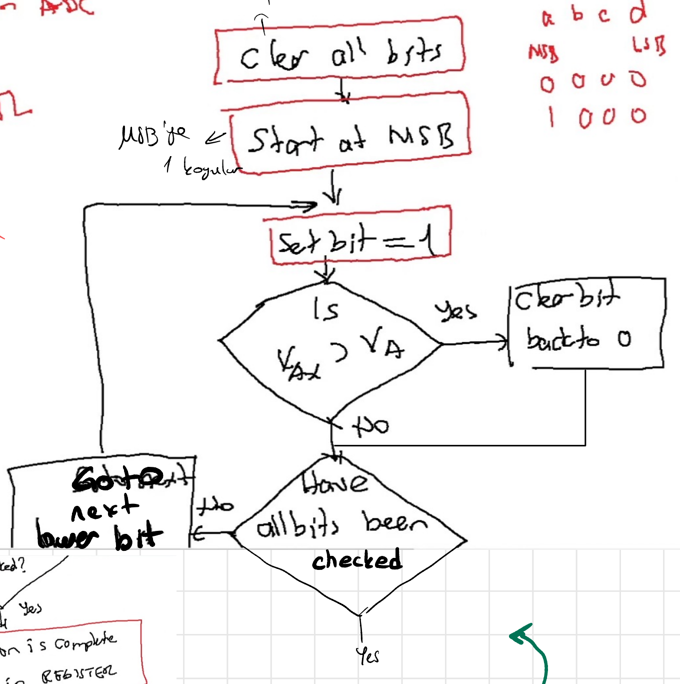
4 bit

12, 8, 4, 5

1100 1000 0100 0101

Successive-Approximation ADC



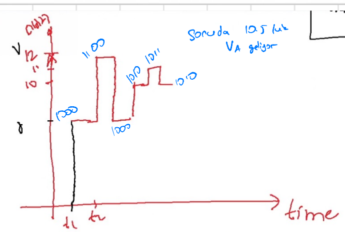


a b c d

MSB LSB

0 0 0 0

1 0 0 0



Step Size (1V)

10.4V → 1010

Conversion time $t_c = N \times$ clock cycle

3. ders 30. dk soruya bak

→ ilk önce grafikte volt olarak yazılır sonra ct bulunur sonra ona göre değerleri söylenir

Discrete Fourier Transform (DFT)

$f(t) \rightarrow X(t) \rightarrow x(n) : n = 0 \ldots N-1$

N = örnekleme sayısı

For $N \geq 1$

$$\Omega = \frac{2\pi}{(N-1).T} \approx \frac{2\pi}{NT}$$

$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \ldots t_{N-1}$

$X(n) = [x_0 \quad x_1 \quad x_2 \ldots x_{n-1}]$

$X(k) = [X(0), X(1) \ldots X(N-1)]$

The DFT values

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\Omega nT}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$X(k) = \underbrace{R(k)}_{\text{Reel bileşen}} + j\underbrace{I(k)}_{\text{imajinel bileşen}}$$

Genlik

$$|X(k)| = \sqrt{R^2(k) + I^2(k)}$$

Faz açısı

$$\phi(k) = \tan^{-1}\left[\frac{I(k)}{R(k)}\right]$$

Zamanda N tane gerçek sayı vardır

Frekansta N tane karmaşık sayı vardır

example: $x(n) : \{1, 0, 0, 1\} \rightarrow X(k)$ → frekans değerleri

$$X(k) = [2, 1+j, 0, 1-j]$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\Omega nT} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi n}{N}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

→ dizi dört elemanlı olduğundan

$$k=0 \rightarrow X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-j.0} = \underset{n=0}{1} + \underset{n=1}{0} + \underset{n=2}{0} + \underset{n=3}{1} = 2$$

$$k=1 \rightarrow X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi n}{4}} = \underset{n=0}{1e^{-j.0}} + \underset{n=1}{0} + \underset{n=2}{0} + \underset{n=3}{1e^{-j3\pi/2}}$$

$$= 1 + \Big(\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0} - \underbrace{j\sin\frac{3\pi}{2}}_{j}\Big) = 1+j$$

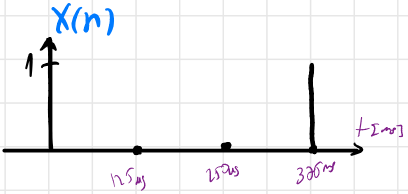
$$k=2 \rightarrow X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-j\pi n} = 1 + 0 + 0 + 1.e^{-j3\pi} = 1 + (\cos 3\pi - j\sin 3\pi) = 0$$

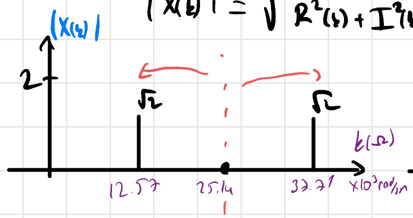
$$k=3 \rightarrow X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-\frac{3\pi}{2}.n} = 1 + 0 + 0 + 1e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 1 + \Big(\cos\frac{9\pi}{2} - j\overbrace{\sin\frac{9\pi}{2}}^{1}\Big) = 1-j$$

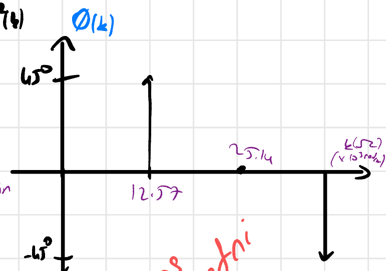
$x(n)=[1,0,0,1] \rightarrow X(k)=[2,\ 1+j,\ 0,\ 1-j]$

$\emptyset(k) = \arctan\left[\frac{I(k)}{R(k)}\right]$

$|X(k)| = \sqrt{R^2(k)+I^2(k)}$







ters simetri

dönüştürülürken 8 kHz ile örneklensin $= f_s$

$$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{8\times 10^{3}} = 125\mu s = 125.10^{-6}$$

kHz

Frekans ← $\Omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{4.125.10^{-6}} = 12.57\times 10^{-3}$ rad/sn

Zamanda N tane reel sayı varsa frekansta N tane karmaşık sayı vardır

sayısal veri

frekans

$$x(t) \rightarrow x(n) = \{1,0,0,1\} \xrightarrow{DFT} X(k)\{2,\ 1+j+,\ 0,\ 1-j\}$$

time domain — spatial domain — reel — spectral domain — kompleks

reel — Imaginal

$X(k) = R(k) + j\,I(k)$

$|X(k)| = \sqrt{R(k)^2 + I(k)^2}$

$\emptyset = \tan^{-1} I(k)/R(k)$

frekans hesap ederken
genlikte N/2 de simetriktir
faz'da N/2 de ters simetriktir

böylece N tane sayının frekansını hesaplarken N frekansın N/2 tanesini hesap etmek yeterlidir.

zaman domainında iş yaparken frekans domainine göre bakarsan, iş yükü vb. azaltılabiliyor
bu yüzden çevrim yapılabilir.

Inverse Discrete Transform

$$\Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

$$x(n) = F_D^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\Omega nT}, \quad n = 0,1,2,3,\dots,N-1$$

örnek sayısı

$$\boxed{= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$x(n) \longrightarrow X(k)$$

?

$$(1,0,0,1) \rightarrow (2, 1+j, 0, 1-j)$$

$$n=0 \rightarrow x(0) = \frac{1}{N}\cdot(2, 1+j, 0, 1-j) = 1$$

$N = 4$

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$

$$n=1 \rightarrow x(1) = \frac{1}{4}\left(2 + (1+j)e^{j\pi/2} + 0 + (1-j)e^{j\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 + (1+j)j + (1-j)(-j)\right] = 0$$

$j + j^2 \rightarrow -1$, $j^2 = -1$ $\qquad$ $-j + j^2$, $j^2 = -1$

$$n=2 \rightarrow x(2) = \frac{1}{4}\left(2 + (1+j).e^{j\pi} + 0 + (1-j)^{j3\pi}\right) = 0$$

$$n=3 \rightarrow x(3) = \frac{1}{4}\left(2 + (1+j).\underset{-j}{e^{j\frac{3\pi}{2}}} + 0 + (1-j).\underset{+j}{e^{j\frac{9\pi}{2}}}\right) = 1$$

$-j - j2 \qquad j - j2$

öylesine işlemler

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\overset{0}{\frac{\pi}{2}} + j\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{jk\frac{2\pi}{NT}\cancel{nT}}$$

$$e^{\frac{j.k\pi\cancel{2}}{\cancel{4}}} = e^{\frac{jk\pi}{2}}$$

$$e^{jk\frac{2\pi}{4T}.\cancel{3T}}$$

$$e^{jk\frac{3\pi}{2}}$$

$$e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

$$\cancel{\cos\frac{3\pi}{2}} + j\,\overset{-1}{1}$$

0

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$x(n) = \{1, 0, 0, 1\} \rightarrow FFT$$

Fast Fourie Transform

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_{N/2}^{nk}, \quad k = 0,1,2,\dots N-1}$$

$$\boxed{W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$k=0 \rightarrow X(0) = \sum_{n=0}^{1} x_{2n} W_2^{n0} + W_4^0 \sum_{n=0}^{1} x_{2n+1} W_2^{n0}$$

$$= x_0 + x_2 + 1(x_1 + x_3) = 2$$

$$k=1 \rightarrow X(1) = \sum_{n=0}^{1} x_{2n} W_2^n + W_4^1 \sum_{n=0}^{1} x_{2n+1} W_2^n$$

aynılar

$$= x_0 + x_2 W_2^1 + W_4^1(x_0 + x_3 W_2^1) = 2+0 + (-j)[0+1(-1)] = 1+(+j) = 1+j$$

$$W_2^1 = e^{\frac{-j2\pi}{2}\cdot 1} = e^{-j\pi}$$

$$W_4^1 = e^{\frac{-j2\pi}{4}\cdot 1} = -j$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{1} x_{2n} W_2^{2n} + W_4^{2} \sum_{n=0}^{1} x_{2n+1} W_2^{2n}$$

$$= x_0 + x_2 W_2^{2} + W_4^{2} [x_1 + x_3 W_2^{2}]$$

$$= 1 + 0 + (-1) \quad [0 + 1] = 0$$

$W_2^2 = e^{-j\frac{2\pi 2}{2}}$
$= e^{2\pi} = 1$

$W_4^2 = e^{-j\frac{2\pi 2}{4}}$
$= e^{-j\pi}$

N real number $\Rightarrow$ N complex number $\quad N = 8$

$N/2$:

$N/2 = 4$

orta değer

sağı, solu

$X_0 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5 \quad X_6 \quad X_7$

genlik: $X_1 = a + jb \qquad X_7 = a + jb$

faz: $X_1 = a + jb \qquad X_7 = a - jb$

faz kayması bilgiyi değiştirmiyor (frekansı)

Korelasyon ve Konvolusyon

Korelasyon, iki vektör arasındaki benzerliği ölçer

$\vec{X}_1(n)$, $\vec{X}_2(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$

$$r_{12} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\, x_2(n)$$

Örn: n: 1 2 3 4 5

n:	1	2	3	4	5
x_1:	4	2	-1	3	-2
x_2	-4	1	3	7	4

$$r_{12} = \frac{1}{5}\left(4 \cdot (-4) + 2.1 + -1.3 + 3.7 + (-2).4 \right)$$

Not: $r_{12} = \frac{1}{N}\left(\dots \right) = 0$ benzerlik olmadığını ifade eder.

Cross Corelation

Çaprazlama yaparak iki sinyal arasındaki benzerliği bulur

$$r_{12}(j) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)^* \, x_2(n+j)$$

$$r_{12}(j) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)^* \, x_2(n-j)$$

Örn:

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	4	2	-1	3	-2	-6	-5	4	5
	7	4	-1	-8	-2	1	0	0	0

$$r_{12}(0) = \frac{1}{9}\left(4 \times 7 + 2 \times 4 + -1 \times -1 + 3 \times -8 + -2 \times -2 + -6 \times 1 \right)$$

15 işlemden bir tanesi

Not: kaç tane karşılaştırma yapacağımız sayısı

$n_1 + n_2 - 1$ $\quad 7 + 4 - 1 = 10$

Normalized cross-correlation

$$\rho_{12}(j) = \frac{r_{12}(j)}{\frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n)\, x_2^2(n)\right]^{1/2}}$$

Birden büyük olamaz. 1 ise benziyor 0 ise hiç benzemiyor

Not: Kendisi ile karşılaştırılan sinyale auto-correlation denir.

$$r_{11} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\, x_1(n+j)$$

örnek: $x_1(n) = \{4, 3, 1, 6\}$, $x_2(n) = \{5, 2, 3\}$

		4	3	1	6				
					5	2	3	1	
				5	2	3		2	
			5	2	3			3	Lineer
		5	2	3				4	cross-correlation
	5	2	3					5	
5	2	3						6	
~~5~~	~~2~~	~~3~~							

bunu yapmanın bir anlamı yok

örnek: [cyclic-cross-correlation]

				j	$r_{ab}(j)$	
4	3	1	6			
3	5	2	3	0	47	$(3\cdot6 + 2\cdot1 + 3\cdot5 + 4\cdot3)$
5	2	3	5	1	59	
2	3	5	2	2	34	
3	5	2	3	3	47	$r_{ab}(j)$ repeats
5	2	3	5	4	59	

Fast Correlation

$$r_{12}(j) = F_D^{-1}\left[X_1^*(k)\, X_2(k) \right]$$

conjugate — imaginal değerin önündeki işaretin ters hali

$y = a + jb$

$y^* = a - jb$

$$X_1(n) \xrightarrow{FFT} X_1(k) \rightarrow X_1^*(k)$$

$$X_1(n) \xrightarrow{FFT} X_2(k)$$

örn:

örnek:

$x_1(n) = \{1, 0, 0, 1\} \rightarrow X_1(k) = \{2, 1+j, 0, 1-j\}$

$x_2(n) = \{0.5, 1, 1, 0.5\} \rightarrow X_2(k) = \{3, 0.5 - j0.5, 0, -0.5 + j0.5\}$

$X_1^*(k) = \{2, 1-j, 0, 1+j\}$

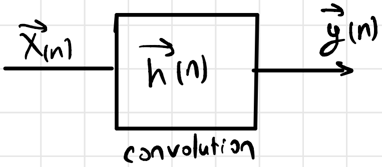
$X_1^*(k)X_2(k) = \{2\times 3, (1-j)(-0.5 - j0.5), (0\times 0), (0.5(1+j)(-1+j))\}$

$= \{6, 1, 0, -1\}$

$F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)] = 1, 1.5, 2, 1.5$

$r_{12}(j) = \frac{1}{4} F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)] = \{0.25, 0.375, 0.5, 0.375\}$

Convolution Description



$$\vec{y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, h(n-m) = x(n) \circledast h(n)$$

$$\vec{y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{h}(m)\, x(n-m) = h(n) \circledast x(n)$$

örnek: $h(m) = \{\overset{0}{4}, \overset{1}{3}, \overset{2}{2}, \overset{3}{1}\}$ (below: $-3\ -2\ -1$) $\qquad x(m) = \{\overset{0}{6}, \overset{1}{8}, \overset{2}{5}, \overset{3}{7}\}$ (below: $-3\ -2\ -1$)

$$\vec{y}(n) = \sum_{m=0} h(n-m)\, x(m)$$

$n=0 \rightarrow y(0) = h(0)\,x(0) + h(-1)\,x(1) + h(-2)\,x(2) + h(-3)\,x(3)$

$4 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 63$

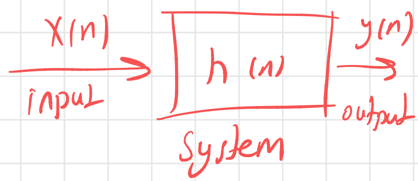
$n=1 \rightarrow y(1) = h(1)\,x(0) + h(0)\,x(1) + h(-1)\,x(2) + h(-2)\,x(3)$

$3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 65$

$y(n) = x(n) \circledast h(n)$

$n=2 \rightarrow y(2) = \ldots\ldots = 63$

$n=3 \rightarrow y(3) = \ldots\ldots = 65$



Gauss Jordan Elimination

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Pivot 1

$R_3 + (-4).R_1$

$$\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

reduced echelon form

$$x_1 + x_2 = 17$$
$$x_3 = -5$$
$$x_4 = -6$$

alt uzay olabilmesi için

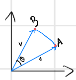
- iki vektörün toplamı yine o vektör uzayında olmalıdır. $(a, b, (a \text{ ve } b\text{'ye bağlı olmalı}))$
- skaler çarpımın mod'unu sağlamalı $ku = k(2r, 5r, r) = (2kr, 5kr, kr)$

dot product : $u.v = u_1.v_1 + \ldots\ldots + u_n.v_n$

Norm : $\|u\| = \sqrt{(u_1)^2 + \ldots (u_n)^2} = \sqrt{u.u}$ → dot product mantığında yazımı

→ genliktir aradır

Angle Between Vectors: $\cos\theta = \dfrac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$



(açı sıfırsa)

= sonuç 1 gelirse birbirlerine % 100 benziyordur

= Vektörler birbirlerine dikseler benzerlik 0

Benzerlik ölçüsü olarak kullanılır

↳ İki vektörün dot product'ı sıfırsa diktir ve bağımsızlardır

Distance Between Points : $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

uzaklık

$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots\ldots + (x_n - y_n)^2}$

$d(x,y) = \|x - y\|$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$m \times n$ $n \times k$ $m \times k$

2×2 2×3 2×3 $2 \times 2 \times 3 = 12$ ç. işlemi

$A.B = m.n.k$ tane carpma işlemi olur

82. sf
83 bak

93 güzel sorular var sondakilere bak

$A \quad B \quad C \quad D = E$

$5 \times 14 \quad 14 \times 87 \quad 87 \times 3 \quad 3 \times 42 \qquad 5 \times 42$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$3 \times 3 \qquad 3 \times 1 \qquad 3 \times 1$

$3 \times 3 \times 1 = 9$ carpım işlemi gerçekleşir.

bu kısımlar eşit ise carpım yapılabilir

yeni matrisin boyutu

Simetrik matris = Transpose'una eşit olan matrisler

Kare matrisin köşegenlerinin toplamına trace denir $\begin{bmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ 6 & 7i \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} 2-3i & 1+4i \\ 6 & -7i \end{bmatrix}$$

conjugate matrix

bir matrisin conjugate transpose'u kendisine eşitse buna hermition matrisi denir.

Bir matrisin kendisi ile inverse'inin çarpımı birim matrise eşittir.

$A \times A^{-1} = I_n$ $\quad [A \,\vdots\, I] \Rightarrow$ Gauss Jordan $\Rightarrow [I \,\vdots\, A^{-1}]$

Matrix Transformation

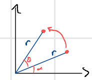
118. sf

Dilation → Vektörün yönü değişmeden genliğinin artması olayına denir. $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$

Contraction → Vektörün yönü değişmeden genliğinin azalmasına denir.

Reflection → Vektörün yansıması $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gibi...

Rotation about the Origin → Vektörü orjin noktasına göre döndürme işlemidir.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Q & \sin Q \\ -\sin Q & \cos Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

→ saat yönü

Orthagonal matrix → Bir matrisin tersi ile transpozu eşit ise orthagonal matrisdir.

$A^{-1} = A^T \qquad A^T . A = I \qquad A . A^T = I$

Translation → Bir vektörün uzaydaki konumunu öteleme

Affine Transformation → Bir vektöre değişim + öteleme yapılması → $T(u) \rightarrow Au + v$

(A: matrisi; v: öteleme)

Linear Transformation → $T(u+v) = T(u) + T(v)$ (preserves addition)
$T(cu) = cT(u)$ (preserves scaler multiplication) koşulları sağlanıyor ise dönüşüm Lineerdir.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos Q & -\sin Q & 0 \\ \sin Q & \cos Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

point — rotation — reflection — dilation / contraction — translation

(x düzleminde öteleme sayısı; y düzleminde öteleme sayısı)

↑ saat yönü tersi

Markov Zinciri → İşlemi etkileyen tek unsur ondan bir önce gelendir $X_{i+n} = P^n X_1$

$X_4 = P^4 X_0$

$P^2 . P^2$

$P.P$

Determinant

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $a.d - b.c$ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ $(a.e.i)+(b.f.g)+(c.d.h)-\big((g.e.c)+(h.f.a)+(i.d.b)\big)$

The **determinant of a square matrix** is the sum of the products of the elements of the first row and their cofactors.

If A is 3×3, $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

If A is 4×4, $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$

$\vdots$

If A is $n \times n$, $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$

properties of determinants

- eğer B matrisi, A matrisinin c skaler değeri ile çarpılmasından ortaya çıkmışsa:

determinant ifadesi

$$|B| = c|A|$$

- eğer B matrisi, A matrisindeki iki satır veya sütunun yer değiştirmesinden oluşmuşsa

$$|B| = -|A|$$

Eğer bir kare matrisin determinantı "0" ise o matris Singular'dır

determinant 0 ise matrisin tersi alınamaz

det = 0

Eğer matris Singulardır eğer..:

- tüm elemanları 0 ise
- İki satır veya sütunu eşitse
- İki satır veya sütunu orantılı ise

nxn boyutlu matrisin n'i

- $|cA| = c^n|A|$
- $|AB| = |A||B|$
- $|A^t| = |A|$
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

üçgen matrisin determinantı :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A| = 2 \cdot 3 \cdot -5 \cdot 1 = -30$$

Gauss Jordan ile bir matris üçgen hale getirilebilir (iki satırın yerini değiştirirsek determinant değerini -1 ile çarpmalıyız)

Cramer's Rule

$$A \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1. kolona B gelmiş

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. kolona B gelmiş

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

3. kolona B gelmiş

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -3 \qquad |A_1| = -3 \qquad |A_2| = 6 \qquad |A_3| = -9$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{6}{-3} = -2 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Eigen value and Eigen vector

$$\underline{Ax = \lambda x} \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_n)x = 0$$

$\Rightarrow$ x, 0 olamayacağına göre içeriği 0'lamaya çalışıyoruz

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix} \qquad |A - \lambda I_2| = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ or } -1$$

yerine 2 koy

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -r \end{matrix} \quad x = r \qquad r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1 koyulursa

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2x_2 \\ x_1 = -2s \quad x_2 = s \end{matrix} \qquad s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11. ders son soru?

Quadratic Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 \Rightarrow [x\ y] \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$5x^2 + 6xy - 4y^2 \Rightarrow [x\ y] \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$4x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 10x_1 \cdot x_3 - 4x_2x_3 \Rightarrow [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

en küçük kareler yönteminde eşitliğin iki tarafının solunu bilinmeyen denklemin transpozu ile çarp