椭圆曲线加密体制破译

第七届（2022 年）全国高校密码数学挑战赛

2022 年 4 月 16 日

主要内容

有限域上的椭圆曲线有理点群

- 设 $\mathbb{F}_p$ 表示具有 p 个元素的有限域，其中 $p > 3$ 是一个素数. 椭圆曲线上的有理点集合 $E(\mathbb{F}_p)$ 定义为

$$E(\mathbb{F}_p) = \left\{(x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \mid y^2 = x^3 + ax + b,\ a, b \in \mathbb{F}_p\right\} \cup \{\infty\},$$

其中 ∞ 表示无穷远点，且 $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \pmod{p}$. $E(\mathbb{F}_p)$ 按照“切割线”法则形成群.

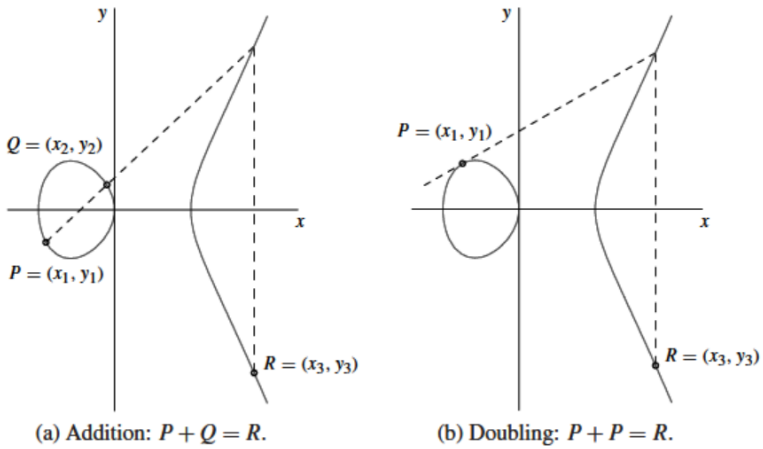
- 视频参考资料:

https://www.bilibili.com/video/BV1ks41127LS?spm_id_from=333.337.search-card.all.click

https://www.bilibili.com/video/BV1PP4y1M7Vk?spm_id_from=333.337.search-card.all.click

椭圆曲线群律规则

设 $P=(x_1,y_1)$，$Q=(x_2,y_2)\in E(\mathbb{F}_p)$, 在 E 上定义“+”运算 $P+Q=R\in E(\mathbb{F}_p)$ 是过 P,Q 的直线与曲线的另一交点关于 x 轴的对称点 (当 $P=Q$ 时，R 是 P 点的切线与曲线的另一交点关于 x 轴的对称点). 为了方便理解, 我们在图 1中给出了实数域上椭圆曲线有理点的加法情形.



(a) Addition: $P+Q=R$. (b) Doubling: $P+P=R$.

Figure: 椭圆曲线有理点的加法规则

椭圆曲线群律规则

上述计算可用公式表示如下:

- 当 $P \neq Q$ 时 (Addition) ,

$$R = (x_3, y_3) = \left(\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - x_1 - x_2, \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x_1 - x_3) - y_1 \right);$$

- 当 $P = Q$ 时 (Doubling) ,

$$R = (x_3, y_3) = \left(\left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right)^2 - 2x_1, \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right) (x_1 - x_3) - y_1 \right);$$

- $P + \infty = \infty + P = P$;
- $(x_1, y_1) + (x_1, -y_1) = \infty$, 这里 $(x_1, -y_1) \in E(\mathbb{F}_p)$ 定义为 P 的逆元 $-P$. 特别的，$-\infty = \infty$.

可验证 $E(\mathbb{F}_p)$ 关于上述定义的 “$+$” 运算构成一个交换群，记为 $E(\mathbb{F}_p)$.

标量乘运算

设 $P \in E\left(F_p\right)$, 记

$$[k]\, P = P + P + \ldots + P\ (k\ times),$$

则 $[k]P \in E(\mathbb{F}_p)$，该运算称为椭圆曲线标量乘法运算。标量乘运算可由与平方乘算法类似的倍点点加（Double-and–Add) 算法完成). 设 r 为最小的正整数使得 $[r]\, P = \infty$, 则 r 称为是 P 的阶（order）. 令

$$\langle P\rangle = \{\infty\ ,\ P\ ,\ [2]P\ , \cdots\ ,\ [r-1]P\}.$$

可验证 $\langle P\rangle$ 关于 “$+$” 运算构成 $E(\mathbb{F}_p)$ 的一个 r 阶子群.

椭圆曲线加密体制的系统设定

赛题中所使用的椭圆曲线加密体制 (ECC) 描述如下：
公共参数设定
(1) 选择一个大素数 p(在具体赛题中, 我们总是固定选择 p 为 160 比特);
(2) 选择一条定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的椭圆曲线 $E: y^2 = x^3 + ax + b$, 以及在椭圆曲线 E 上的有理点 P 作为基点 .
公钥生成
(1) Alice 选择私钥 n_A，之后计算 $Q_A = [n_A]P$;
(2) Alice 公布自己的公钥 Q_A.

解密过程

(1) Bob 将明文信息 m 通过某种方式 (嵌入方式下面会详细说明) 嵌入到椭圆曲线上的一个点 $M \in E(\mathbb{F}_p)$;
(2) 每次加密时, 加密者 Bob 选择一个固定为 160 比特长度的随机数 k(部分随机数 k 由某一特定的随机数发生器生成), 计算

$$\begin{aligned} C_1 &= [k]P \in E(\mathbb{F}_p), \\ C_2 &= M + [k]Q_A \in E(\mathbb{F}_p); \end{aligned}$$

(3) Bob 发送 C_1 和 C_2 给 Alice.
解密过程
(1) Alice 收到 C_1 和 C_2 后, 使用自己的私钥计算 $M = C_2 - [n_A]C_1 \in E(\mathbb{F}_p)$;
(2) Alice 根据 M 恢复明文消息 m.

明文嵌入

本赛题中，加密这 Bob 每一次需要加密的明文消息包含 16 个明文字符以及分配给该消息的对应编号. 解密者 Alice 通过自己的私钥解密得到所有明文信息和相应编号后，按照正确编号排序所有明文消息, 可以恢复出 Bob 传输的完整有意义的消息. Bob 每次加密时的消息嵌入规则如下：

(1) 将该次明文消息的 16 个明文字符转为 ASCII 码 M_1，共计 128 比特;

(2) 将编号信息转为 ASCII 码 ((需要使用 8 比特)) 并添加在 M_1 尾部，得到 M_2，此时 M_2 为 136 比特;

(3) 在 M_2 后再填充 0 变为 M_3, 使得 M_3 的比特长度达到 160 比特;

(4) 把 M_3 看做 $\mathbb{F}_p$ 中的元素, 考虑 M_3, M_3+1, M_3+2, $\cdots$, 直到某一个最小非负整数 i 使得 $x_M = M_3 + i$ 满足：$x_M^3 + ax_M + b$ 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 中等于某个元素的平方;

(5) 令 $M = (x_M, y_M) \in E(\mathbb{F}_p)$，其中 y_M 满足

$$y_M^2 = x_M^3 + ax_M + b \mod p,$$

且 $y_M < \dfrac{p}{2}$.

加密解密过程示范

如下我们提供一个实例供参赛选手理解.
注：我们对有理点的表示采用点压缩技术：即对一个点 $R = (x_R, y_R) \in E(\mathbb{F}_p)$, 当 $y_R \equiv 1 \pmod 2$ 时我们将 R 记为 $[x_R, 1]$, 否则记为 $[x_R, 0]$.
参数设定：
(1) 选择大素数 $p = 0\text{xb77902abd8db9627f5d7ceca5c17ef6c5e3b0969}$;
(2) 选择定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的一条椭圆曲线 $E : y^2 = x^3 + ax + b$, 其中

$$a = 0\text{x9021748e5db7962e1b208e3949d42ad0388a18c},$$

$$b = 0\text{x744f47974caabdd8b8192e99da51c87f91cc453e}.$$

之后选择椭圆曲线上的一点

$$P = [0\text{x4f1ecacc3b1e56066b02f6a6033f940fc5c9805}, 0]$$

该点 P 已经使用点压缩技术表示, 以下所有的点都会使用点压缩技术表示.

示范：公钥生成

公钥生成：

1. Alice 选择私钥 $n_A = 0\text{x}9022802\text{bb}688656\text{ee}1914\text{e}6\text{dd}7\text{f}74\text{e}1\text{ecd}1\text{d}6780$(在真正安全实现时该信息不会给出, 这里仅仅作为示范故给出该信息), 之后计算

$$Q_A = [n_A]P = [0\text{xb}50\text{e}2\text{eb}55\text{cd}84112077\text{a}5\text{acca}94\text{b}4623\text{a}8\text{b}020\text{d}7, 0],$$

2. Alice 公布自己的公钥 Q_A.

示范：加密过程

(1) Bob 将明文信息"I would like to share a secret. " 切段为"I would like to " 和"share a secret. " 后，对两个明文段编号为 1 和 2，并打乱顺序加密. 假设现在 Bob 要为 “share a secret. ” 加密, 则先将"share a secret. " 转为 ASCII 码

$$M_1 = 0\text{x}73686172652061207365637265742\text{e}20,$$

之后将编号 2 转为 ASCII 码"0x32", 得到

$$M_2 = 0\text{x}736861726520612073656372657420\text{32},$$

最后补足 0 使其达到 160 比特:

$$M_3 = 0\text{x}7368617265206120736563726574\text{e}2032000000,$$

此时，取 $x_M = M_3$, 此时$M_3 + 0$恰好使得 $x_M^3 + ax_M + b$ 是有限域 $\mathbb{F}_p$ 中某个元素的平方, 通过计算，可得 $E(\mathbb{F}_p)$ 上一点

$$M = [0\text{x}7368617265206120736563726574\text{e}2032000000, 1].$$

示范：加密过程 (续)

(2) Bob 选择一个随机数 $k = 0\text{xe6ea1793a37dedf12ed676aef41ed68f4da4ae8f}$, 计算

$$C_1 = [k]P = [0\text{x2592c6e5b7176ef74a7c7adc9a19906445759d5}, 0],$$

$$C_2 = M + [k]Q_A = [0\text{x47190e98e7d440679b896e2a672c9ad58e13d212}, 1];$$

(3) Bob 发送 (C_1, C_2) 给 Alice.

示范：解密过程

解密过程

(1) Alice 计算 $M = C_2 - [n_A]C_1 \in E(\mathbb{F}_p)$;

(2) Alice 根据 M 恢复明文消息"share a secret. "，编号为 2 . （注意空格也是一个字符，也会被转为 ASCII 码参与加密。）

问题描述

- **已知条件**

  给定椭圆曲线加密体制中每次加密所使用的椭圆曲线 $E(\mathbb{F}_p)$ 的基本参数. 有理点 $P \in E(\mathbb{F}_p)$ 作为基点和公钥 $Q_A = [n_A]P$ 的坐标也被给定, 每次加密后的密文 C_1 和 C_2 也被给定.

- **求解目标**

  1. 已知点 $P \in E(\mathbb{F}_p)$ 和 $Q_A = [n_A]P$ 的坐标信息, 求解出私钥 n_A.
  2. 恢复出与密文 C_1 和 C_2 所对应的明文 m.

成绩评判标准

- 共八道小题，随着序数递进每道小题的分值分别为 10、10、15、20、20、25、50、50，共计 200 分. 每道题目需要选手恢复出密文所对应的有意义的明文消息 m 和 Alice 解密时所使用的私钥 n_A, 并说明获得正确结果的理由. 若只获得密文所对应的有意义的明文消息 m，但有正确的理由论证获得结果的正确性, 则可获得该题分数的 40%. 获得其他部分结果将根据求解原理酌情给分.
- 分数相同的选手依照难度最高的挑战求解时间来排序，求解用时越少者排名越靠前；
- 针对每个小题，给出计算平台和计算结果，并简述求解原理、步骤和实现效率（包括计算需要的时间和空间等），引用前人方法的必须在报告中给出明确引用，否则报告内容作废；
- 利用特殊算法求解或求解算法中有创新内容的，酌情加分.

问题来源

- 1986 年，Koblitz 和 Miller 分别独立提出了椭圆曲线密码体制 (ECC) . 该密码体制的安全性依赖于椭圆曲线离散对数问题 (ECDLP) 的难解性. 因为有限域中的离散对数问题还可用亚指数时间的指标演算法求解，而一般的 ECDLP 目前没有亚指数时间的求解算法，故而它被认为比有限域乘法群中的离散对数问题更加难以求解.
- 大家认为 160 比特的椭圆曲线加密体制的安全强度与 1024 比特的 RSA 加密体制相当. 且随着模数的增大，它们之间安全性的差距也会增大. 因此，ECC 可以提供一个具有更小密钥长度的公开加密系统.
- ECC 是 ElGamal 密码体制的一个变种，而 ElGamal 密码体制是 1985 年由 Taher ElGamal 提出的，现今在工业界应用广泛. ElGamal 密码体制可以定义在任何循环群 G 上，其安全性取决于 G 上离散对数问题的困难性. 椭圆曲线加密体制的安全性主要由基于 ECDLP 的困难性保证.

问题求解的一些可能方法

- 椭圆曲线离散对数问题求解的基本方法如下：
  - 对于 ECDLP 常见的求解算法有大步-小步法、Pollard's rho 算法等.
  - SSSA 攻击可以将迹为 1 的异常椭圆曲线转为有限域加法群的 DLP.
  - 选择的椭圆曲线有理点的阶等于一些小素数因子的乘积, 那可以用 Pholig-Hellman 算法来求解相应的 ECDLP.
  - 如果已知离散对数问题的解在某个固定区间时 (Interval DLP)，其困难性可能也会降低.
  - MOV 攻击可以利用双线性对将 ECDLP 求解转为有限域中乘法群的 DLP 求解，而有限域的乘法群中 DLP 存在亚指数时间的算法, 解题者可以考虑利用 CADO-NFS 软件 (`https://gitlab.inria.fr/cado-nfs/cado-nfs`) 或者数论库 NTL(`https://libntl.org/`)
- ElGamal 类型密码体制还依赖于加密时所使用随机数生成器的安全性.

诚 挚 感 谢 参 与!