Berufsbildungszentrum Wirtschaft, Informatik und Technik – Sursee

Mathematik MA3

Christian Schweizer (SCC)

Schuljahr 2024/25 - INA23bL, INA23cL, INP23bL, INP23cL

Inhalt

1 Einführung

Gemäss Bildungsplan ist im 2. Lehrjahr folgende Kompetenz zu erarbeiten:
Analysiert mittels statistischer Methoden vorliegende Daten und leitet Zusammenhänge ab.

Zu Beginn werden wir bekannte Elemente aus dem Grundschulstoff repetieren. Die praktische Umsetzung der erlernten Grundlagen, sowie Überlegungen zu Effizienz sollen bei MA3 im Fokus stehen. Hilfsmittel sind dazu da, sie zu nutzen – nutzt sie, aber **seid kritisch**!

Tipps

Tool	Beschreibung	Link
Photomath	Per Kamera Gleichungen lösen inkl. Step-By-Step Beschreibung	
Desmos	Grafikrechner, Funktions-plotter	https://www.desmos.com/calculator?lang=de
ChatGPT	AI mit Antworten zu jeder Frage – Korrektheit immer hinterfragen!	https://chatgpt.com

2 Repetition Grundlagen

Die mathematischen Grundlagen bilden die Basis für die Statistik. Wir beginnen deshalb mit etwas Repetition. Im Informatik-Umfeld interessiert natürlich die Projektion der Theorie in die Praxis. Eine grosse Herausforderung im Alltag ist es, Anforderungen aus formulierter Sprache in Code zu übersetzen. Ein Grundvokabular der Mathematik ist unabdingbar und wir trainieren die Übersetzung von Text in Formeln.

2.1 Grundrechenarten und Klammern

Rechenart	Begriffe	Beispiele
Addition	$Summand\ +\ Summand\ =\ Summe$ Die Summanden dürfen auch vertauscht werden: $a + b = b + a$ (=Kommutativgesetz)	$2 + 3 = 5$ $-2 + 3 = (-2) + 3 = 1$ ☞ das erste Minus ist hier ein Vorzeichen $2 + (-3) = -1$ ☞ es empfiehlt sich, Vorzeichen mit der Zahl in Klammern zu setzten, damit sie nicht mit Operationen verwechselt werden
Subtraktion	$Minuend - Subtrahend\ =\ Differenz$ Minuend und Subtrahend dürfen **nicht** vertauscht werden: $a - b \neq b - a$	$5 - 3 = 2$ $-2 - 3 = (-2) - 3 = -5$ $4 - (-2) = 6$ ☞ Minus Minus gleich Plus
Multiplikation	$Faktor\ \times\ Faktor\ =\ Produkt$ Andere Schreibweisen: $a \times b = a \cdot b = a * b = ab$ ☞ Das Multiplikationszeichen darf weggelassen werden, wenn mindestens einer der beiden Faktoren keine Zahl ist. ☞ Bei der Schreibweise $a \cdot b$ ist gut darauf zu achten, dass der Punkt nicht mit einem Dezimalpunkt verwechselt wird: $a \cdot b \neq a.b$	$2 \times 3 = 6$ $2 \times a = 2a$ $a \times 2 = 2a$ ☞ Die Zahl immer voranstellen, also **nicht** $a2$!
Division	$Dividend\ \div\ Divisor\ =\ Quotient$ Andere Schreibweisen: $a \div b = a{:}b = a/b = {}^{a}/_{b} = \frac{a}{b}$ Dividend und Divisor **nicht** vertauschen!	$8 \div 2 = 4$ $\frac{8}{2} = 8 \div 2 = 4$

☞ **Punkt vor Strich**: Multiplikationen und Divisionen haben Priorität vor Additionen und Subtraktionen, d.h. sie werden zuerst ausgeführt. («Punkt» bezieht sich auf die Schreibweise $a \cdot b$ bzw. $a : b$)

Klammern werden immer **von innen nach aussen** aufgelöst/ausgewertet. Oft werden verschiedene Klammerzeichen () / [] / {} für die verschiedenen Ebenen verwendet. In der Informatik haben [] und {} aber andere Bedeutungen, wir beschränken uns deshalb auf (). Zusammengehörige Klammerpaare markieren wir am besten visuell (z.B. unterschiedliche Klammergrösse/Farbe):

$\big(((5-2)\times 4+2)\times 3+(5-4)\times 2\big)$ $\qquad (5-2)\rightarrow 3; (5-4)\rightarrow 1$

$\big((3\times 4+2)\times 3+1\times 2\big)$ $\qquad (3\times 4+2)\rightarrow 14$

$(14\times 3+2)=44$

2.1.1 Übungen

1	$6\times(30+20-40)$	
2	$10+100\div(12-2)$	
3	$(200-100)\times(5-1)$	
4	$6+(3-2)\times\big(5+(6-2\times 2)\big)$	
5	$\big((14-(2\times 3)\times 2+2)\times(8\div 2-2)\big)$	
6	$80-(24\times 2+2)\times 2+(16-6)-\big(5\times(-2)\big)$	
7	$35+2(-2-2a)-7a+(-3a-9)$	
8	$\big((4+2a)\div 2+(-9-6a)\div 3\big)*4\div(-2)$	

2.2 Bruchrechnen

Der Bruchstrich entspricht einer Division. Brüche haben gegenüber von Dezimalzahlen den Vorteil, dass sie immer genau[1] sind und einfacher im Kopf zu rechnen sind. Nachteil ist, dass sich nicht alle reellen Zahlen abbilden lassen (nämlich die Irrationalen nicht, z.B. $\sqrt{2}$).

Bruchrechnen wird durch die folgenden Rechenregeln definiert:

Regel	Prinzip	Beispiel
Erweitern	Zähler und Nenner mit derselben Zahl (ungleich 0) multiplizieren, so dass sich der Wert des Terms nicht ändert: $$\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{k\times b}$$	$\frac{2}{3}=\frac{2\times 2}{2\times 3}=\mathbf{\frac{4}{6}}$
Kürzen	Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren, so dass der Term einfacher wird. Erlaubt sind ganzzahlige Teiler beider Zahlen, 0 selbstverständlich nicht! $$\frac{a}{b}=\frac{a\div k}{b\div k}$$	$\frac{4}{8}=\frac{4\div 4}{8\div 4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$
Addition und Subtraktion I	Bei Brüchen mit gleichem Nenner wird nur der Zähler addiert/subtrahiert und der Nenner beibehalten: $$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$ $$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\mathbf{\frac{3}{5}}$ $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\mathbf{\frac{2}{5}}$
Addition und Subtraktion II	Bei Brüchen mit ungleichem Nenner müssen die einzelnen Brüche zuerst erweitert werden, damit die Nenner gleich werden. → Kleinstes gemeinsames Vielfaches der beiden Nenner: $$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a\times e}{c\times e}+\frac{b\times f}{d\times f}$$ Wobei e und f so zu wählen sind, dass gilt $c\times e=d\times f$	$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{1\times 2}{6\times 2}+\frac{3\times 3}{4\times 3}$ $=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\mathbf{\frac{11}{12}}$
Multiplikation	Bei der Multiplikation werden die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert: $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\mathbf{\frac{8}{15}}$
Division	Bei der Division wird der Dividend mit dem **Kehrwert des Divisors** multipliziert: $$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$	$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\mathbf{\frac{10}{12}}$

[1] z.B.: $\frac{1}{3}=0.\overline{3}$, eingeben können wir 0.333333333(…), was eine beliebig gute Annäherung, aber nie genau ist

Echte/Unechte Brüche	Von unechten Brüchen spricht man, wenn sie ≥ 1 sind. D.h. der Bruch $\frac{a}{b}$ ist: • Echt wenn $a < b$ • Unecht wenn $a \geq b$	$\frac{7}{6} \rightarrow 7 \geq 6 \rightarrow \boldsymbol{unecht}$ $\frac{34}{35} \rightarrow 34 < 35 \rightarrow \boldsymbol{echt}$
Gemischte Zahlen	Gemischte Zahlen sind die Kombination aus Ganzzahlen und Brüchen. Umgangssprachlich werden sie oft verwendet, z.B. Zweieinhalb (2½), zum Rechnen sind sie unpraktisch und werden deshalb in Brüche umgewandelt: $A\,{}^{b}/_{c} = \frac{A}{1} + \frac{b}{c} = \frac{A \times c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{A \times c + b}{c}$ Unechte Brüche können wiederum in gemischte Zahlen umgerechnet werden, indem die grösste Ganzzahl herausgelöst wird: $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b}$, wobei a_1 das grösste Vielfache von b, das kleiner als a ist, beschreibt.	$2½ = 2 + \frac{1}{2} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$ $\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \boldsymbol{2¼}$
Dezimalzahlen und Brüche	Dezimalzahlen mit endlichen Nachkommastellen lassen sich mithilfe von Zehnerpotenzen im Nenner in Brüche umwandeln: a mit x Nachkommastellen lässt sich schreiben als $\frac{a \times 10^x}{10^x}$	Bsp. 3.5: 1 Nachkommastelle → $3.5 = \frac{3.5 \times 10^1}{10^1} = \frac{3.5 \times 10}{10} = \frac{35}{10} = \boldsymbol{\frac{7}{2}}$ Bsp. 2.123: 3 Nachkommastellen → $2.123 = \frac{2.123 \times 10^3}{10^3} = \frac{2.123 \times 1000}{1000} = \boldsymbol{\frac{2123}{1000}}$
Vergleich von Brüchen	Damit Brüche verglichen werden können, müssen sie auf den gleichen Nenner gebracht, oder in Dezimalzahlen umgerechnet werden. Bei **gleichem positivem Zähler** verhält sich der Vergleich des Bruchs **umgekehrt** zum Vergleich des Nenners: $\frac{a}{b}\,vs.\frac{a}{c}$ bei $a > 0\ und\ b < c$ → $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$	$\frac{1}{2}\,vs.\frac{1}{3} \rightarrow 2 < 3 \rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ Aber: $\frac{-1}{2}\,vs\,\frac{-1}{3} \rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}!$

2.2.1 Aufgaben

1	$2\,{}^{2}/_{3} \times 1\,{}^{1}/_{4} \div 1\,{}^{4}/_{6}$	
2	$1\,{}^{2}/_{7} \div \frac{3}{7} \times 2\,{}^{1}/_{3}$	
3	$\frac{1\,{}^{4}/_{5}}{2\,{}^{3}/_{4} + 2\,{}^{1}/_{7} + 1\,{}^{3}/_{28}} \div \frac{1}{10}$	
4	$\frac{5}{4}a - \frac{7a}{8} + \frac{1}{2}a$	
5	$\frac{3x}{7} \times \frac{14y}{5} \div \frac{2z}{3}$	
6	$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) \times \frac{3z}{4}$	
7	$\frac{4ab}{6c} \times \frac{9c}{12b}$	
8	$\frac{m+n}{a-b} \times \frac{a-b}{a-c} \times \frac{c-a}{m-n}$	

9	$\frac{3ab}{5b+14c-40d} \times \left(\frac{5b}{24a} + \frac{7c}{12a} - \frac{5d}{3a}\right)$	
10	$\frac{\frac{8y}{3z}}{\left(\frac{4z}{9x} \times \frac{18y}{5z}\right)}$	
11	$\frac{24xyz}{36xy} \times \frac{18xy}{24z} \div y \times \frac{1}{x}$	
12	Zähle bei den Aufgaben 8-11 die Anzahl Rechenoperationen, die zur Evaluation des Terms notwendig sind: 1. in der ursprünglichen Aufgabenstellung 2. im vereinfachten Term Bsp.: Aufgabe 4 $5 \div 4 \times a \rightarrow 3\ OP$ $7 \times a \div 5 \rightarrow 3\ OP$ $1 \div 2 \times a \rightarrow 3\ OP$ $Differenz\ \&\ Summe \rightarrow 2\ OP$ - = 11 OP	
13	Wir gehen für Aufgabe 11 davon aus, dass es auch Zeit kostet, die Variablen zu berechnen, der Einfachheit halber **1 Sekunde pro Variable**: 1. Bei Evaluation der Variablen bei **jedem** Auftreten 2. Bei **vorgängiger** Evaluation der Variablen 3. Nach der **Vereinfachung**	
14	Was bedeutet das für uns? Wo könnte das in unserem Business relevant sein?	

2.3 Potenzieren und Radizieren

Potenzen und Wurzeln sind elementar in diversen Fachbereichen, ganz besonders in der Stochastik, wovon die Statistik ein Teilgebiet darstellt.

Folgende Zusammenstellung von Definitionen und Regeln soll die Thematik auffrischen:

Regel	Prinzip	Beispiel
Definition	$a^b \equiv Basis^{Exponent}$ Ist definiert als die b-fache Multiplikation von a: $a^b = a \times a \times a \dots$	$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
Negative Basis	Ist die Basis negativ, ist das Resultat - Negativ bei ungeradem Exponenten - Positiv bei geradem Exponenten ☞ Steht das Minus nicht mit der Basis in Klammern, ist das Resultat immer negativ (Punkt vor Strich)	$(-2)^3 = -8$ $(-2)^2 = 4$ Aber: $-2^2 = -4$
Addition / Subtraktion	Produktterme mit einem Potenzterm (ac^n) können addiert werden, wenn der Potenzterm übereinstimmt: $ac^n + bc^n = (a+b)c^n$ Gleiches gilt für die Subtraktion: $ac^n - bc^n = (a-b)c^n$	$2a^2 + 3a^2 = (2+3)a^2 = 5a^2$
Produktregel	Bei der Multiplikation zweier Potenzen mit gleicher Basis werden die Exponenten addiert: $a^m \times a^n = a^{m+n}$	$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$ $3^2 \times 3^3 \times 3 = 3^2 \times 3^3 \times 3^1 = 3^{2+3+1} = 3^6$
Quotientenregel	Analog zur Produktregel werden bei der Division bei gleicher Basis die Exponenten subtrahiert: $\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$ $\frac{2^6}{2} = \frac{2^6}{2^1} = 2^{6-1} = 2^5$
Potenzregel	Bei Potenzierung einer Potenz werden die Exponenten multipliziert: $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$	$(2^2)^3 = 2^{2\times3} = 2^6$

Potenz von Produkten und Quotienten	Die Potenz eines Produkts entspricht dem Produkt der einzeln potenzierten Faktoren: $(ab)^n = a^n \times b^n$ Analog gilt das auch für Quotienten: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ☞ b darf nicht 0 sein! 💣	$(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2 = 9 \times 16 = 144$ Kontrolle: $(3 \times 4)^2 = 12^2 = 144$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
Negative Exponenten	Negative Exponenten entsprechen dem Kehrwert des Resultats mit positivem Exponenten: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ☞ a darf nicht 0 sein! 💣	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0.1$ $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$
Binomische Formeln	Die binomischen Formeln erlauben die Umformung von potenzierten Additionen/Subtraktionen in Additionen und Subtraktionen von einzelnen Potenzen (und mindestens genauso wichtig: auch umgekehrt!) $I: (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $II: (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $III: (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ☞ Die hohe Kunst ist es, solche Muster zu erkennen, bzw. umzuformen, bis sie erkennbar sind! Oft gelingt das durch Ausklammern von -1: $Bsp: (a+b)(b-a)$ $\rightarrow (b-a) = (-a+b) = -1(a-b)$ $\rightarrow (a+b)(b-a)$ $= (a+b) \times (-1)(a-b)$ $= -1\big((a+b)(a-b)\big)$ $= -1(\text{Binomische Formel III})$ $= -1(a^2 - b^2) = -a^2 + b^2 = b^2 - a^2$	Zu I: $(3+4)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 4 + 4^2$ $= 9 + 24 + 16 = 49$ $(3+a)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times a + a^2$ $= 9 + 6a + a^2$ $4a^2 + 12a + 9$ Sieht nach Binomischer Formel I aus: $(xa+y)^2$ Finde x und y: $x = 2, \text{da } (2a)^2 = 4a^2$ $y = 3, \text{da } 3^2 = 9$ Kontrolle, ob der mittlere Term stimmt: $2 \times 2 \times 3 = 12? \rightarrow$ ✓ $\rightarrow 4a^2 + 12a + 9 = (2a+3)^2$ Zu II: $(5-3)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$ $= 25 - 30 + 9 = 4$ Zu III: $(a+3)(a-3) = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$

Spezialfälle	Jede Potenz mit Exponent 0 ergibt, unabhängig von der Basis, immer 1: $$a^0 = 1$$ ☞ gilt nicht für Basis 0, 0^0 ist **nicht** definiert! Bei Basis 1 ergibt die Potenz, unabhängig vom Exponenten, immer 1: $$1^n = 1$$ Bei Basis 0 ergibt die Potenz, unabhängig vom (positiven) Exponenten, immer 0: $$0^n = 0$$ ☞ bei negativem Exponenten würde es eine Division durch 0 ergeben: $$0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$$ 💣	$$2^0 = 1$$ $$987654321987654321^0 = 1$$ $$1^3 = 1$$ $$1^{987654321987654321}$$ $$0^4 = 0$$ $$0^{987654321} = 0$$
Notation	In der Wissenschaft, insbesondere in der Programmierung ist die sogenannte **Scientific Notation** für Zehnerpotenzen gebräuchlich: $$\text{aEb} = a \times 10^b$$ $$\text{aE-b} = a \times 10^{-b} = \frac{a}{10^b}$$	$$\text{5E6} = 5 \times 10^6 = 5 \times 1000000 = 5000000 \text{ (5 Millionen)}$$ $$\text{2E-3} = 2 \times 10^{-3} = 2 \times \frac{1}{10^3} = 2 \times \frac{1}{1000} = \frac{2}{1000} \text{ (2 Tausendstel)}$$

Für Wurzeln gelten grundsätzlich die gleichen Regeln wie für die Potenzen, sowie ein paar Eigenheiten, die zu beachten sind. Die wichtigsten Regeln:

Regel	Prinzip	Beispiel
Definition	Radizierung (Wurzelziehen) ist die Umkehrung der Potenzierung: $$\sqrt{a} = x \rightarrow x^2 = a$$ Allgemein: $$\sqrt[n]{a} = x \rightarrow x^n = a$$ ☞ Im reellen Zahlenraum ist die Quadratwurzel (und alle geraden n) nur für positive a definiert. Für ungerade n ist auch ein negatives a erlaubt.	$$\sqrt{16} = 4 \rightarrow 4^2 = 16$$ $$\sqrt[4]{16} = 2 \rightarrow 2^4 = 16$$ $$\sqrt[3]{-27} = -3 \rightarrow (-3)^3 = -27$$ $$\sqrt[2]{-4} =$$ 💣 Bzw. im imaginären Zahlenraum.

Produktregel	Die Produktregel besagt, dass die Wurzel eines Produkts gleich dem Produkt der Wurzeln der einzelnen Faktoren ist: $$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$	$\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$
Quotientenregel	Analog dazu ist die Wurzel eines Quotienten gleich des Quotienten aus den Wurzeln von Zähler und Nenner: $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$	$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$
Potenzregel	Wurzeln können in Potenzschreibweise, d.h. als Potenz mit einem Bruch im Exponenten geschrieben werden: $$\sqrt[a]{b} = b^{\frac{1}{a}}$$	$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$
Wurzeln und Potenzen	Durch die Potenzregel lassen sich Wurzeln zu Potenzen transformieren. Kombiniert mit einer Potenz wird einfach die Potenz multipliziert: $$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \times \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$	$\sqrt[3]{27^2} = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$
Vereinfachen von Wurzeln	Durch Finden und Faktorisieren von bekannten Quadratzahlen (bzw. höherer Potenzen) lassen sich Wurzeln vereinfachen: $$\sqrt{x} = \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$ Wird a so gewählt, dass sie eine Quadratzahl von y ist, folgt: $$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = y\sqrt{b}$$	$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
Eigenheiten	Eine nullte Wurzel gibt es nicht, da das ja gemäss Potenzregel wäre: $$\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{0}} \rightarrow \text{Division durch } 0$$ 💣 Wurzeln negativer Ordnung sind der Kehrwert der entsprechenden positiven Ordnung: $$\sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$$	$\sqrt[-2]{16} = 16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

2.3.1 Aufgaben

1	Berechne: $3+(-7)^2$ $3+(-7^2)$ $3\times(-7)^2$ $3\times(-7^2)$ $(3-7)^2$ $3-7^2$ $3-(-7)^2$	
2	Berechne: $3\times 7^2+5^2$ $3\times(7^2+5^2)$ $(3\times 7)^2+5^2$ $\big(3\times(7+5)\big)^2$ $(3\times 7+5)^2$	
3	Berechne: $(-5)^2+(-2)^3-(-2)^4$	
4	Berechne: $(-1)^{12}+(-1)^{27}+0^{14}$	
5	Vereinfache: $3x^5+2x^5-4x^3+7x^3-2x^3-x^5$	
6	Vereinfache: $8a^4b^7-2a^3b^6-(a^3b^6+6a^4b^7)$	
7	Vereinfache: $4a(2a^2-3a+4)$	

8	Vereinfache: $\frac{4x^2}{3y^3} \times \frac{ay^4}{16x^3}$	
9	Vereinfache: $(a^2b^3)^3$	
10	Vereinfache: $\frac{(a^2+y^3)^{5a-4b}}{(a^2+y^3)^{4a-4b}}$	
11	Vereinfache: $\frac{5a^3b}{2c^2} \div \left(\frac{15ab^2}{4c} \times \frac{8c^3}{10a^2b}\right)$ Was bedeutet das für ein sehr aufwändig zu Berechnendes b?	
12	Vereinfache: $\left(\frac{7x^2}{2y} - \frac{3y^2}{x}\right) \times \frac{2xy}{7x^2}$	

13	Vereinfache: $$\left(\frac{7x^2}{2y}-\frac{3y^2}{x}\right)\times\frac{2xy}{7x^2}\times\left(\frac{56x^6}{2xy^7}\right)^{a-a}$$ ☞ zuerst gut lesen!	
14	Vereinfache: $$\left(\frac{5x^2}{3y^8}-9y^5\right)^{\left(2x^2-2y^2-2(x+y)(x-y)\right)}$$	
15	Berechne a: $$\frac{4a^2-4b^2}{2a^2+4ab+2b^2}=4$$	
16	Berechne a, b, und c: $$\frac{2ab-2a^2+bc-ac}{2ab-2ac+bc-c^2}=2$$	

17	Berechne: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}$ ☞ Die Zahl 4096 sollte bekannt sein!?	
18	Vereinfache: $\dfrac{9 \times \sqrt{\dfrac{5x}{6}}}{3 \times \sqrt{\dfrac{20}{6x}}}$ Welchen Wert bzw. welche Werte darf x NICHT annehmen?	
19	Berechne f: $8 + \sqrt[3]{2f - 4} = 10$ Welchen Wert bzw. welche Werte darf f NICHT annehmen?	
20	$4 \times \sqrt[3]{13 - 2d} = 2 \times \sqrt[3]{16d + 24}$ Berechne d	

2.4 Logarithmus

Der Logarithmus ist in vielen technischen Anwendungsbereichen eine nützliche Funktion. Er ist die Umkehrung der Potenzierung und erlaubt es, herauszufinden, mit welchem Exponenten eine Basis potenziert werden muss, um einen bestimmten Wert zu erhalten. Selbstverständlich werden wir den Logarithmus auch in der Statistik wieder antreffen.

Der Logarithmus wird oft verwendet, um exponentielle Daten sinnvoll darzustellen. Vorteil an logarithmierten Werten ist, dass Multiplikationen zu Additionen werden und somit einfacher (schneller) sind.

Regel	Prinzip	Beispiel
Definition	Der Logarithmus ist definiert durch: $\log_b x = y \leftrightarrow b^y = x$ ☞ b muss positiv, grösser als 0 und $\neq 1$ sein	$\log_2 8 = 3$ $(2^3 = 8)$
Produktregel	Der Logarithmus eines Produkts ist die Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren: $\log_b(x \times y) = \log_b x + \log_b y$	$\log_2(32) = \log_2(4 \times 8)$ $= \log_2(4) + \log_2(8)$ $= 2 + 3 = 5$
Quotientenregel	Der Logarithmus eines Quotienten ist die Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner: $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$	$\log_2\left(\frac{4}{16}\right) = \log_2(4) - \log_2(16)$ $= 2 - 4 = -2$
Potenzregel	Der Logarithmus einer Potenz ist das Produkt aus Exponenten und Logarithmus der Basis: $\log_b(x^n) = n \times \log_b(x)$	$\log_{10}(5^4) = 4 \times \log_{10}(5)$
Eigenschaften	Der Logarithmus von 1 ist immer 0: $\log_b(1) = 0$ Der Logarithmus einer Zahl zur identischen Basis ist immer 1: $\log_b(b) = 1$ Der Logarithmus ist für Werte ≤ 0 nicht definiert (jedenfalls im reellen Zahlenraum)	$\log_2(1) = \log_{10}(1) = \log_{27}(1) = 0$ $\log_2(2) = \log_7(7) = \log_9(9) = 1$ $\log_2(0) \rightarrow$ 💣 $\log_{10}(a - a) \rightarrow$ 💣

Basiswechsel	Der Logarithmus mit einer Basis b lässt sich durch Logarithmen einer anderen Basis k ausdrücken: $$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)}$$	$$\log_8(16) = \frac{\log_2(16)}{\log_2(8)} = \frac{4}{3}$$
Natürlicher Logarithmus	Eine wichtige Konstante in der Mathematik ist die Eulersche Zahl e. Ihr Wert beträgt ungefähr: $$e \cong 2.71828182845904523536028747135$$ e ist eine irrationale reelle Zahl, d.h. sie hat unendlich viele und nicht periodische Nachkommastellen. Als Konstante kann e wie eine Zahl verwendet werden, also auch als Basis von Potenzen und Logarithmen: $$\log_e(x) = y \ \leftrightarrow e^y = x$$ Weil der Logarithmus mit der Basis e so wichtig ist, erhält er den eigenen Namen «**Natürlicher Logarithmus**»: $$\log_e(x) = \ln(x)$$	$$\ln(e) = 1$$ $$\ln(e^x) = x \times \ln(e) = x \times 1 = x$$

Logarithmus in Programmiersprachen	Weil es noch nicht kompliziert genug ist, werden die Funktionen in Programmiersprachen nochmal anders benannt!
	
	Natürlicher Logarithmus $\ln(a)$:
	`Math.Log(a)` (C#)
	`Math.log(a)` (JavaScript)
	`math.log(a)` (Python)
	`log(a)` (C/C++)
	☞ Aber, z.B. Konstante für $\ln(2)$ ist in JavaScript definiert als `Math.LN2`
	
	Für andere Basen b gibt es teilweise einen zweiten Parameter:
	`Math.Log(a, b)` (C#)
	`math.log(a, b)` (Python)
	
	In anderen Sprachen (Bsp: C/C++) muss die Basis b manuell umgerechnet werden:
	
	`float logbase(float a, float b)`
	`{`
	`   return log(a)/log(b);`
	`}`	

2.4.1 Aufgaben

1	Berechne mit Hilfe der Produktregel: $\log_{10}(100 \times 10000)$	
2	Berechne mit der Quotientenregel: $\log_2\left(\frac{16}{4}\right)$	
3	Berechne x: $5 \times 2^x = 40$	
4	Löse auf nach x: $y = 100 \times 10^{0.5x}$	
5	Berechne x: $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$	
6	Was hilft uns der 2-er-Logarithmus in der Digitaltechnik? Was könnte der 16-er-Logarithmus für uns bedeuten?	

2.5 Textverständnis

In der Informatik ist eine der wichtigsten Aufgaben, Anweisungen (Requirements) zu verstehen, entsprechend niederzuschreiben (Konzept) und dann in neuer Form wieder zu formulieren (Implementation). Nachfolgend zuerst einige Aufgaben mit konkreten Zahlen, dann Anweisungen, die so von einem Kunden formuliert worden sein könnten. Wir formalisieren die Erkenntnisse in mathematischer Sprache und vereinfachen so weit wie möglich. Die so gewonnenen Formeln könnten dann problemlos in jeder Programmiersprache abgebildet werden.

1	Die Differenz aus 50 und der Anzahl Geräte verhält sich zur Summe von 60 und der gleichen Anzahl Geräte wie 3 zu 7. Von wie vielen Geräten ist die Rede?	
2	Eine Reinigungskraft verdient beim Arbeitgeber A 140 CHF in 7 Stunden, beim Arbeitgeber B 225 CHF in 9 Stunden. Welcher Arbeitgeber bezahlt besser? Wieviel Prozent bezahlt der lukrativere Arbeitgeber mehr, im Vergleich zum anderen?	
3	Die gesamte AHV-Abgabe auf das Einkommen beträgt (der Einfachheit halber) 10%. Die Hälfte davon wird dem Arbeitgeber vom Lohn abgezogen, die andere Hälfte bezahlt der Arbeitgeber. Wieviel Geld wird dem Arbeitnehmer bei einem vereinbarten Jahreslohn von 50'000 CHF ausbezahlt? Wieviel kostet das den Arbeitgeber insgesamt und wieviel Geld fliesst in die AHV?	
4	Der Hokuspokus-Index ist wie folgt definiert: 2-mal die Summe aus x und dem doppelten von y wird quadriert. Davon wird 4-mal das Quadrat von y abgezogen und das Resultat schliesslich durch 4-mal x dividiert. Wie sieht die vereinfachte Formel dieses Index aus? Sind die Eingangsgrössen x, y in ihrem Wertebereich eingeschränkt?	
5	Beim Hoppala-Index wird der Logarithmus mit der Basis 2 von der Differenz von 4 und x genommen. Dieser Wert wird durch den 10-er Logarithmus von der Summe von 3 und y dividiert. Wie sieht die Formel aus? Gibt es Einschränkungen der Eingangsgrössen x und y? Wie würden wir das in Programmcode umsetzen? (Erklärung, Pseudocode oder echter Code)	