**Berufsbildungszentrum Wirtschaft, Informatik und Technik – Sursee**

Mathematik MA3

**Christian Schweizer (SCC)**

**Schuljahr 2024/25 - INA23bL, INA23cL, INP23bL, INP23cL**

**Inhalt**

1. [Einführung 2](#_bookmark0)
2. [Repetition Grundlagen 3](#_bookmark1)
   1. [Grundrechenarten und Klammern 3](#_bookmark2)
      1. [Übungen 4](#_bookmark3)
   2. [Bruchrechnen 5](#_bookmark4)
      1. [Aufgaben 7](#_bookmark6)
   3. [Potenzieren und Radizieren 9](#_bookmark7)
      1. [Aufgaben 13](#_bookmark8)
   4. [Logarithmus 17](#_bookmark9)
      1. [Aufgaben 19](#_bookmark10)
   5. [Textverständnis 20](#_bookmark11)

# Einführung

Gemäss Bildungsplan ist im 2. Lehrjahr folgende Kompetenz zu erarbeiten:

*Analysiert mittels statistischer Methoden vorliegende Daten und leitet Zusammenhänge ab.*

Zu Beginn werden wir bekannte Elemente aus dem Grundschulstoff repetieren. Die praktische Umsetzung der erlernten Grundlagen, sowie Überlegungen zu Effizienz sollen bei MA3 im Fo- kus stehen. Hilfsmittel sind dazu da, sie zu nutzen – nutzt sie, aber **seid kritisch**!

Tipps

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Tool | Beschreibung | Link |
| Photomath | Per Kamera Gleichungen lösen inkl. Step-By-Step Beschreibung | QR code to download Photomath |
| Desmos | Grafikrechner, Funktions- plotter | <https://www.desmos.com/calculator?lang=de> |
| ChatGPT | AI mit Antworten zu jeder Frage – Korrektheit immer  hinterfragen! | [https://chatgpt.com](https://chatgpt.com/) |

# Repetition Grundlagen

Die mathematischen Grundlagen bilden die Basis für die Statistik. Wir beginnen deshalb mit etwas Repetition. Im Informatik-Umfeld interessiert natürlich die Projektion der Theorie in die Praxis. Eine grosse Herausforderung im Alltag ist es, Anforderungen aus formulierter Sprache in Code zu übersetzen. Ein Grundvokabular der Mathematik ist unabdingbar und wir trainieren die Übersetzung von Text in Formeln.

## Grundrechenarten und Klammern

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Rechenart** | **Begriffe** | **Beispiele** |
| **Addition** | 𝑆𝑢𝑚𝑚𝑎𝑛𝑑 + 𝑆𝑢𝑚𝑚𝑎𝑛𝑑 = 𝑆𝑢𝑚𝑚𝑒  Die Summanden dürfen auch vertauscht werden:  𝑎 + 𝑏 = 𝑏 + 𝑎  (=Kommutativgesetz) | 2 + 3 = 5  −2 + 3 = (−2) + 3 = 1   * das erste Minus ist hier ein Vorzeichen   2 + (−3) = −1   * es empfiehlt sich, Vorzei- chen mit der Zahl in Klam- mern zu setzten, damit sie nicht mit Operationen ver-   wechselt werden |
| **Subtraktion** | 𝑀𝑖𝑛𝑢𝑒𝑛𝑑 – 𝑆𝑢𝑏𝑡𝑟𝑎ℎ𝑒𝑛𝑑 = 𝐷𝑖𝑓𝑓𝑒𝑟𝑒𝑛𝑧  Minuend und Subtrahend dürfen **nicht**  vertauscht werden:  𝑎 − 𝑏 ≠ 𝑏 − 𝑎 | 5 − 3 = 2  −2 − 3 = (−2) − 3 = −5  4 − (−2) = 6   * Minus Minus gleich Plus |
| **Multiplikation** | 𝐹𝑎𝑘𝑡𝑜𝑟 × 𝐹𝑎𝑘𝑡𝑜𝑟 = 𝑃𝑟𝑜𝑑𝑢𝑘𝑡  Andere Schreibweisen:  𝑎 × 𝑏 = 𝑎 ∙ 𝑏 = 𝑎 ∗ 𝑏 = 𝑎𝑏   * Das Multiplikationszeichen darf weg- gelassen werden, wenn mindestens einer der beiden Faktoren keine Zahl ist. * Bei der Schreibweise 𝑎 ∙ 𝑏 ist gut da- rauf zu achten, dass der Punkt nicht mit einem Dezimalpunkt verwechselt wird: 𝑎 ∙   𝑏 ≠ 𝑎. 𝑏 | 2 × 3 = 6  2 × 𝑎 = 2𝑎  𝑎 × 2 = 2𝑎   * Die Zahl immer voran- stellen, also **nicht** 𝑎2! |
| **Division** | 𝐷𝑖𝑣𝑖𝑑𝑒𝑛𝑑 ÷ 𝐷𝑖𝑣𝑖𝑠𝑜𝑟 = 𝑄𝑢𝑜𝑡𝑖𝑒𝑛𝑡  Andere Schreibweisen:  𝑎 ÷ 𝑏 = 𝑎: 𝑏 = 𝑎/𝑏 = 𝑎⁄ = 𝑎  𝑏 𝑏  Dividend und Divisor **nicht** vertauschen! | 8 ÷ 2 = 4  8  = 8 ÷ 2 = 4  2 |

* **Punkt vor Strich**: Multiplikationen und Divisionen haben Priorität vor Additionen und Sub- traktionen, d.h. sie werden zuerst ausgeführt. («Punkt» bezieht sich auf die Schreibweise 𝑎 ∙ 𝑏 bzw. 𝑎: 𝑏)

Klammern werden immer **von innen nach aussen** aufgelöst/ausgewertet. Oft werden verschie- dene Klammerzeichen () / [] / {} für die verschiedenen Ebenen verwendet. In der Informatik haben [] und {} aber andere Bedeutungen, wir beschränken uns deshalb auf (). Zusammenge- hörige Klammerpaare markieren wir am besten visuell (z.B. unterschiedliche Klammer- grösse/Farbe):

(((5 − 2) × 4 + 2) × 3 + (5 − 4) × 2) (5 − 2) → 3; (5 − 4) → 1

((3 × 4 + 2) × 3 + 1 × 2) (3 × 4 + 2) → 14

(14 × 3 + 2) = 44

### Übungen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 6 × (30 + 20 − 40) |  |
| 2 | 10 + 100 ÷ (12 − 2) |  |
| 3 | (200 − 100) × (5 − 1) |  |
| 4 | 6 + (3 − 2) × (5 + (6 − 2 × 2)) |  |
| 5 | ((14 − (2 × 3) × 2 + 2) × (8 ÷ 2 − 2)) |  |
| 6 | 80 − (24 × 2 + 2) × 2 + (16 − 6) − (5 × (−2)) |  |
| 7 | 35 + 2(−2 − 2𝑎) − 7𝑎 + (−3𝑎 − 9) |  |
| 8 | ((4 + 2𝑎) ÷ 2 + (−9 − 6𝑎) ÷ 3) ∗ 4 ÷ (−2) |  |

## Bruchrechnen

Der Bruchstrich entspricht einer Division. Brüche haben gegenüber von Dezimalzahlen den Vorteil, dass sie immer genau[1](#_bookmark5) sind und einfacher im Kopf zu rechnen sind. Nachteil ist, dass sich nicht alle reellen Zahlen abbilden lassen (nämlich die Irrationalen nicht, z.B. √2).

Bruchrechnen wird durch die folgenden Rechenregeln definiert:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Regel** | **Prinzip** | **Beispiel** |
| **Erweitern** | Zähler und Nenner mit derselben Zahl (ungleich 0) multiplizieren, so dass sich der Wert des Terms nicht ändert:  𝑎 𝑘 × 𝑎  =  𝑏 𝑘 × 𝑏 | 2 2 × 2 𝟒  = =  3 2 × 3 𝟔 |
| **Kürzen** | Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren, so dass der Term einfacher wird. Erlaubt sind ganzzahlige Teiler beider Zahlen, 0 selbstver- ständlich nicht!  𝑎 𝑎 ÷ 𝑘  =  𝑏 𝑏 ÷ 𝑘 | 4 4 ÷ 4 𝟏  = =  8 8 ÷ 4 𝟐 |
| **Addition und Subtraktion I** | Bei Brüchen mit gleichem Nenner wird nur der Zähler addiert/subtrahiert und der Nenner beibe- halten:  𝑎 𝑏 𝑎 + 𝑏  + =  𝑐 𝑐 𝑐  𝑎 𝑏 𝑎 − 𝑏  − =  𝑐 𝑐 𝑐 | 1 2 1 + 2 𝟑  + = =  5 5 5 𝟓  4 2 4 − 2 𝟐  − = =  5 5 5 𝟓 |
| **Addition und Subtraktion II** | Bei Brüchen mit ungleichem Nenner müssen die einzelnen Brüche zuerst erweitert werden, damit die Nenner gleich werden.  Kleinstes gemeinsa- mes Vielfaches der beiden Nenner:  𝑎 𝑏 𝑎 × 𝑒 𝑏 × 𝑓  + = +  𝑐 𝑑 𝑐 × 𝑒 𝑑 × 𝑓  Wobei 𝑒 und 𝑓 so zu wählen sind, dass gilt 𝑐 × 𝑒 =  𝑑 × 𝑓 | 1 3 1 × 2 3 × 3  + = +  6 4 6 × 2 4 × 3  2 9 𝟏𝟏  = + =  12 12 𝟏𝟐 |
| **Multipli- kation** | Bei der Multiplikation werden die Zähler miteinan- der und die Nenner miteinander multipliziert:  𝑎 𝑐 𝑎 × 𝑐  × =  𝑏 𝑑 𝑏 × 𝑑 | 2 4 2 × 4 𝟖  × = =  3 5 3 × 5 𝟏𝟓 |
| **Division** | Bei der Division wird der Dividend mit dem **Kehr- wert des Divisors** multipliziert:  𝑎 𝑐 𝑎 𝑑 𝑎 × 𝑑  ÷ = × =  𝑏 𝑑 𝑏 𝑐 𝑏 × 𝑐 | 2 4 2 5 2 × 5 𝟏𝟎  ÷ = × = =  3 5 3 4 3 × 4 𝟏𝟐 |

1 z.B.: 1 = 0. 3̅, eingeben können wir 0.333333333(…), was eine beliebig gute Annäherung, aber nie genau ist

3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Echte/Unechte Brüche** | Von unechten Brüchen spricht man, wenn sie ≥ 1  sind. D.h. der Bruch 𝑎 ist:  𝑏   * Echt wenn 𝑎 < 𝑏 * Unecht wenn 𝑎 ≥ 𝑏 | 7  → 7 ≥ 6 → 𝒖𝒏𝒆𝒄𝒉𝒕  6  34  → 34 < 35 → 𝒆𝒄𝒉𝒕  35 |
| **Gemischte Zahlen** | Gemischte Zahlen sind die Kombination aus Ganz- zahlen und Brüchen. Umgangssprachlich werden sie oft verwendet, z.B. Zweieinhalb (2½), zum Rechnen sind sie unpraktisch und werden deshalb in Brüche umgewandelt:  𝐴 𝑏⁄𝑐 = 𝐴 + 𝑏 = 𝐴 × 𝑐 + 𝑏 = 𝐴 × 𝑐 + 𝑏  1 𝑐 𝑐 𝑐 𝑐  Unechte Brüche können wiederum in gemischte Zahlen umgerechnet werden, indem die grösste Ganzzahl herausgelöst wird:  𝑎 = 𝑎1 + 𝑎2, wobei 𝑎 das grösste Vielfache von b,  𝑏 𝑏 𝑏 1  das kleiner als 𝑎 ist, beschreibt. | 1 2 1 4 1  2½ = 2 + = + = +  2 1 2 2 2  𝟓  =  𝟐  9 8 1 1  = + = 2 + = 𝟐¼  4 4 4 4 |
| **Dezimalzahlen und Brüche** | Dezimalzahlen mit endlichen Nachkommastellen lassen sich mithilfe von Zehnerpotenzen im Nen- ner in Brüche umwandeln:  𝑎 mit 𝑥 Nachkommastellen lässt sich schreiben als  𝑎 × 10𝑥  10𝑥 | Bsp. 3.5:  1 Nachkommastelle   3.5 × 101 3.5 × 10  3.5 = =  101 10  35 𝟕  = =  10 𝟐  Bsp. 2.123:  3 Nachkommastellen   2.123 × 103  2.123 =  103  2.123 × 1000 𝟐𝟏𝟐𝟑  = =  1000 𝟏𝟎𝟎𝟎 |
| **Vergleich von Brüchen** | Damit Brüche verglichen werden können, müssen sie auf den gleichen Nenner gebracht, oder in De- zimalzahlen umgerechnet werden.  Bei **gleichem positivem Zähler** verhält sich der Vergleich des Bruchs **umgekehrt** zum Vergleich des Nenners:  𝑎 𝑣𝑠. 𝑎 bei 𝑎 > 0 𝑢𝑛𝑑 𝑏 < 𝑐 𝑎 > 𝑎  𝑏 𝑐 𝑏 𝑐 | 1 1 1 1  𝑣𝑠. → 2 < 3 → >  2 3 2 3  Aber:  −1 −1 1 1  𝑣𝑠 → − < − !  2 3 2 3 |

### Aufgaben

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1** | 2 2⁄3 × 1 1⁄4 ÷ 1 4⁄6 |  |
| 2 | 1 2⁄ ÷ 3 × 2 1⁄  7 7 3 |  |
| 3 | 1 4⁄5 1    2 3⁄ + 2 1⁄ + 1 3⁄ ÷ 10  4 7 28 |  |
| **4** | 5 7𝑎 1  𝑎 − + 𝑎  4 8 2 |  |
| 5 | 3𝑥 14𝑦 2𝑧  × ÷  7 5 3 |  |
| **6** | 𝑥 𝑦 3𝑧 ( + ) ×  2 3 4 |  |
| 7 | 4𝑎𝑏 9𝑐  ×  6𝑐 12𝑏 |  |
| **8** | 𝑚 + 𝑛 𝑎 − 𝑏 𝑐 − 𝑎  × ×  𝑎 − 𝑏 𝑎 − 𝑐 𝑚 − 𝑛 |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **9** | 3𝑎𝑏 5𝑏 7𝑐 5𝑑  × ( + − )  5𝑏 + 14𝑐 − 40𝑑 24𝑎 12𝑎 3𝑎 |  |
| **10** | 8𝑦  3𝑧 (4𝑧 × 18𝑦)  9𝑥 5𝑧 |  |
| **11** | 24𝑥𝑦𝑧 18𝑥𝑦 1    × ÷ 𝑦 × 36𝑥𝑦 24𝑧 𝑥 |  |
| **12** | Zähle bei den Aufgaben 8-11 die An- zahl Rechenoperationen, die zur Eva- luation des Terms notwendig sind:   1. in der ursprünglichen Auf- gabenstellung 2. im vereinfachten Term Bsp.: Aufgabe 4   5 ÷ 4 × 𝑎 → 3 𝑂𝑃  7 × 𝑎 ÷ 5 → 3 𝑂𝑃  1 ÷ 2 × 𝑎 → 3 𝑂𝑃  𝐷𝑖𝑓𝑓𝑒𝑟𝑒𝑛𝑧 & 𝑆𝑢𝑚𝑚𝑒 → 2 𝑂𝑃  - = 11 OP |  |
| **13** | Wir gehen für Aufgabe 11 davon aus, dass es auch Zeit kostet, die Variab- len zu berechnen, der Einfachheit halber **1 Sekunde pro Variable**:   1. Bei Evaluation der Variablen bei **jedem** Auftreten 2. Bei **vorgängiger** Evaluation der Variablen 3. Nach der **Vereinfachung** |  |
| **14** | Was bedeutet das für uns? Wo könnte das in unserem Business rele- vant sein? |  |

## Potenzieren und Radizieren

Potenzen und Wurzeln sind elementar in diversen Fachbereichen, ganz besonders in der Stochastik, wovon die Statistik ein Teilgebiet darstellt.

Folgende Zusammenstellung von Definitionen und Regeln soll die Thematik auffrischen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Regel** | **Prinzip** | **Beispiel** |
| **Definition** | 𝑎𝑏 ≡ 𝐵𝑎𝑠𝑖𝑠𝐸𝑥𝑝𝑜𝑛𝑒𝑛𝑡  Ist definiert als die 𝑏-fache Multiplikation von 𝑎:  𝑎𝑏 = 𝑎 × 𝑎 × 𝑎 … | 24 = 2 × 2 × 2 × 2 = 16 |
| **Negative Basis** | Ist die Basis negativ, ist das Resultat   * Negativ bei ungeradem Exponen- ten * Positiv bei geradem Exponenten * Steht das Minus nicht mit der Basis in Klammern, ist das Resultat immer negativ (Punkt vor Strich) | (−2)3 = −8  (−2)2 = 4  Aber:  −22 = −4 |
| **Addition / Subtraktion** | Produktterme mit einem Potenzterm (𝑎𝑐𝑛) können addiert werden, wenn der Potenzterm übereinstimmt:  𝑎𝑐𝑛 + 𝑏𝑐𝑛 = (𝑎 + 𝑏)𝑐𝑛  Gleiches gilt für die Subtraktion:  𝑎𝑐𝑛 − 𝑏𝑐𝑛 = (𝑎 − 𝑏)𝑐𝑛 | 2𝑎2 + 3𝑎2 = (2 + 3)𝑎2 = 5𝑎2 |
| **Produktregel** | Bei der Multiplikation zweier Potenzen mit gleicher Basis werden die Exponenten addiert:  𝑎𝑚 × 𝑎𝑛 = 𝑎𝑚+𝑛 | 22 × 23 = 22+3 = 25  32 × 33 × 3 = 32 × 33 × 31 = 32+3+1  = 36 |
| **Quotientenregel** | Analog zur Produktregel werden bei der Division bei gleicher Basis die Exponen- ten subtrahiert:  𝑎𝑚  = 𝑎𝑚 ÷ 𝑎𝑛 = 𝑎𝑚−𝑛  𝑎𝑛 | 25  = 25−2 = 23  22  26 26  = = 26−1 = 25  2 21 |
| **Potenzregel** | Bei Potenzierung einer Potenz werden die Exponenten multipliziert:  (𝑎𝑚)𝑛 = 𝑎𝑚×𝑛 = 𝑎𝑚𝑛 | (22)3 = 22×3 = 26 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Potenz von Produkten und Quotienten** | Die Potenz eines Produkts entspricht dem Produkt der einzeln potenzierten Faktoren:  (𝑎𝑏)𝑛 = 𝑎𝑛 × 𝑏𝑛  Analog gilt das auch für Quotienten:  𝑎 𝑛 𝑎𝑛 ( ) =  𝑏 𝑏𝑛   * b darf nicht 0 sein!  | (3 × 4)2 = 32 × 42 = 9 × 16 = 144  Kontrolle:  (3 × 4)2 = 122 = 144  2 2 22 4 ( ) = =  3 32 9 |
| **Negative Exponenten** | Negative Exponenten entsprechen dem Kehrwert des Resultats mit positivem Ex- ponenten:  1  𝑎−𝑛 =  𝑎𝑛   * 𝑎 darf nicht 0 sein!  | 2−3 = 1 = 1  23 8  10−1 = 1 = 1 = 0.1  101 10  10−4 = 1 = 1 = 0.0001  104 10000 |
| **Binomische Formeln** | Die binomischen Formeln erlauben die Umformung von potenzierten Additio- nen/Subtraktionen in Additionen und Subtraktionen von einzelnen Potenzen (und mindestens genauso wichtig: auch umgekehrt!)  𝐼: (𝑎 + 𝑏)2 = 𝑎2 + 2𝑎𝑏 + 𝑏2  𝐼𝐼: (𝑎 − 𝑏)2 = 𝑎2 − 2𝑎𝑏 + 𝑏2  𝐼𝐼𝐼: (𝑎 + 𝑏)(𝑎 − 𝑏) = 𝑎2 − 𝑏2   * Die hohe Kunst ist es, solche Muster zu erkennen, bzw. umzuformen, bis sie erkennbar sind! Oft gelingt das durch Ausklammern von -1:   𝐵𝑠𝑝: (𝑎 + 𝑏)(𝑏 − 𝑎)  → (𝑏 − 𝑎) = (−𝑎 + 𝑏) = −1(𝑎 − 𝑏)  → (𝑎 + 𝑏)(𝑏 − 𝑎)  = (𝑎 + 𝑏) × (−1)(𝑎 − 𝑏)  = −1((𝑎 + 𝑏)(𝑎 − 𝑏))  = −1(Binomische Formel III)  = −1(𝑎2 − 𝑏2) = −𝑎2 + 𝑏2 = 𝑏2 − 𝑎2 | Zu I:  (3 + 4)2 = 32 + 2 × 3 × 4 + 42  = 9 + 24 + 16 = 49  (3 + 𝑎)2 = 32 + 2 × 3 × 𝑎 + 𝑎2  = 9 + 6𝑎 + 𝑎2  4𝑎2 + 12𝑎 + 9  Sieht nach Binomischer Formel I aus:  (𝑥𝑎 + 𝑦)2  Finde x und y:  𝑥 = 2, da (2𝑎)2 = 4𝑎2  𝑦 = 3, da 32 = 9 Kontrolle, ob der mittlere Term stimmt:  2 × 2 × 3 = 12? → **  → 4𝑎2 + 12𝑎 + 9 = (2𝑎 + 3)2  Zu II:  (5 − 3)2 = 52 − 2 × 5 × 3 + 32  = 25 − 30 + 9 = 4  Zu III:  (𝑎 + 3)(𝑎 − 3) = 𝑎2 − 32 = 𝑎2 − 9 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Spezialfälle** | Jede Potenz mit Exponent 0 ergibt, unab- hängig von der Basis, immer 1:  𝑎0 = 1   * gilt nicht für Basis 0, 00 ist **nicht** defi- niert!   Bei Basis 1 ergibt die Potenz, unabhängig vom Exponenten, immer 1:  1𝑛 = 1  Bei Basis 0 ergibt die Potenz, unabhängig vom (positiven) Exponenten, immer 0:  0𝑛 = 0   * bei negativem Exponenten würde es eine Division durch 0 ergeben:   0−2 = 1 = 1 **  02 0 | 20 = 1  9876543219876543210 = 1  13 = 1  1987654321987654321  04 = 0  0987654321 = 0 |
| **Notation** | In der Wissenschaft, insbesondere in der Programmierung ist die sogenannte **Sci- entific Notation** für Zehnerpotenzen ge- bräuchlich:  aEb = 𝑎 × 10𝑏  aE-b = 𝑎 × 10−𝑏 = 𝑎  10𝑏 | 5E6 = 5 × 106 = 5 × 1000000  = 5000000 (5 Millionen)  2E-3 = 2 × 10−3 = 2 × 1 = 2 × 1  103 1000  2  = (2 Tausendstel)  1000 |

Für Wurzeln gelten grundsätzlich die gleichen Regeln wie für die Potenzen, sowie ein paar Ei- genheiten, die zu beachten sind. Die wichtigsten Regeln:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Regel** | **Prinzip** | **Beispiel** |
| **Definition** | Radizierung (Wurzelziehen) ist die Umkeh- rung der Potenzierung:  √𝑎 = 𝑥 → 𝑥2 = 𝑎  Allgemein:  𝑛  √𝑎 = 𝑥 → 𝑥𝑛 = 𝑎   * Im reellen Zahlenraum ist die Quadratwur- zel (und alle geraden 𝑛) nur für positive 𝑎 de- finiert. Für ungerade 𝑛 ist auch ein negatives   𝑎 erlaubt. | √16 = 4 → 42 = 16  4  √16 = 2 → 24 = 16  3  √−27 = −3 → (−3)3 = −27  2  √−4 = **  Bzw. im imaginären Zahlenraum. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Produktregel** | Die Produktregel besagt, dass die Wurzel ei- nes Produkts gleich dem Produkt der Wurzeln der einzelnen Faktoren ist:  𝑛 𝑛 𝑛  √𝑎 × 𝑏 = √𝑎 × √𝑏 | 3 3 3  √8 × 27 = √8 × √27 = 2 × 3 = 6 |
| **Quotientenregel** | Analog dazu ist die Wurzel eines Quotienten gleich des Quotienten aus den Wurzeln von Zähler und Nenner:  𝑛  𝑛 𝑎 √𝑎  √ =  𝑏 𝑛√𝑏 | 9 √9 3  √ = =  4 √4 2 |
| **Potenzregel** | Wurzeln können in Potenzschreibweise, d.h. als Potenz mit einem Bruch im Exponenten geschrieben werden:  𝑎 1  √𝑏 = 𝑏𝑎 | 3 1  √27 = 273 = 3 |
| **Wurzeln und Potenzen** | Durch die Potenzregel lassen sich Wurzeln zu Potenzen transformieren. Kombiniert mit ei- ner Potenz wird einfach die Potenz multipli- ziert:  1 1 𝑚  𝑛√𝑎𝑚 = (𝑎𝑚)𝑛 = 𝑎𝑚×𝑛 = 𝑎 𝑛 | 3√272 = 2 = (33 2 = 32 = 9  273 )3 |
| **Vereinfachen von Wurzeln** | Durch Finden und Faktorisieren von bekann- ten Quadratzahlen (bzw. höherer Potenzen) lassen sich Wurzeln vereinfachen:    √𝑥 = √𝑎𝑏 = √𝑎 × √𝑏  Wird a so gewählt, dass sie eine Quadratzahl von y ist, folgt:    √𝑎 × √𝑏 = 𝑦√𝑏 | √72 = √36 × 2 = √36 × √2 = 6√2 |
| **Eigenheiten** | Eine nullte Wurzel gibt es nicht, da das ja ge- mäss Potenzregel wäre:  1  0  √𝑎 = 𝑎0 → Division durch 0 **  Wurzeln negativer Ordnung sind der Kehr- wert der entsprechenden positiven Ordnung:  −𝑛 −1 1  √𝑎 = 𝑎 𝑛 = 1  𝑎𝑛 | −2√16 = 16−1 = 1 = 1 = 1  2 1 4  162 √16 |

### Aufgaben

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | Berechne:  3 + (−7)2  3 + (−72)  3 × (−7)2  3 × (−72)  (3 − 7)2  3 − 72  3 − (−7)2 |  |
| 2 | Berechne:  3 × 72 + 52  3 × (72 + 52)  (3 × 7)2 + 52  2  (3 × (7 + 5))  (3 × 7 + 5)2 |  |
| 3 | Berechne:  (−5)2 + (−2)3 − (−2)4 |  |
| 4 | Berechne:  (−1)12 + (−1)27 + 014 |  |
| 5 | Vereinfache:  3𝑥5 + 2𝑥5 − 4𝑥3 + 7𝑥3 − 2𝑥3 − 𝑥5 |  |
| 6 | Vereinfache:  8𝑎4𝑏7 − 2𝑎3𝑏6 − (𝑎3𝑏6 + 6𝑎4𝑏7) |  |
| 7 | Vereinfache:  4𝑎(2𝑎2 − 3𝑎 + 4) |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8 | Vereinfache:  4𝑥2 𝑎𝑦4  3𝑦3 × 16𝑥3 |  |
| 9 | Vereinfache:  (𝑎2𝑏3)3 |  |
| 10 | Vereinfache:  (𝑎2 + 𝑦3)5𝑎−4𝑏  (𝑎2 + 𝑦3)4𝑎−4𝑏 |  |
| 11 | Vereinfache:  5𝑎3𝑏 15𝑎𝑏2 8𝑐3  2𝑐2 ÷ ( 4𝑐 × 10𝑎2𝑏)  Was bedeutet das für ein sehr auf- wändig zu Berechnendes 𝑏? |  |
| 12 | Vereinfache:  7𝑥2 3𝑦2 2𝑥𝑦 ( 2𝑦 − 𝑥 ) × 7𝑥2 |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 13 | Vereinfache:  7𝑥2 3𝑦2 2𝑥𝑦 56𝑥6 𝑎−𝑎  ( 2𝑦 − 𝑥 ) × 7𝑥2 × (2𝑥𝑦7)   * zuerst gut lesen! |  |
| 14 | Vereinfache:  2 2  5𝑥2 (2𝑥 −2𝑦 −2(𝑥+𝑦)(𝑥−𝑦))  ( − 9𝑦5)  3𝑦8 |  |
| 15 | Berechne 𝑎:  4𝑎2 − 4𝑏2  2𝑎2 + 4𝑎𝑏 + 2𝑏2 = 4 |  |
| 16 | Berechne 𝑎, 𝑏, und 𝑐:  2𝑎𝑏 − 2𝑎2 + 𝑏𝑐 − 𝑎𝑐  2𝑎𝑏 − 2𝑎𝑐 + 𝑏𝑐 − 𝑐2 = 2 |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 17 | Berechne:  3 4  √√4096   * Die Zahl 4096 sollte bekannt sein!? |  |
| 18 | Vereinfache:  9 × √5𝑥  6  3 × √20  6𝑥  Welchen Wert bzw. welche Werte darf 𝑥 NICHT annehmen? |  |
| 19 | Berechne 𝑓:  8 + 3√2𝑓 − 4 = 10  Welchen Wert bzw. welche Werte darf 𝑓 NICHT annehmen? |  |
| 20 | 3 3  4 × √13 − 2𝑑 = 2 × √16𝑑 + 24  Berechne 𝑑 |  |

## Logarithmus

Der Logarithmus ist in vielen technischen Anwendungsbereichen eine nützliche Funktion. Er ist die Umkehrung der Potenzierung und erlaubt es, herauszufinden, mit welchem Exponenten eine Basis potenziert werden muss, um einen bestimmten Wert zu erhalten. Selbstverständlich werden wir den Logarithmus auch in der Statistik wieder antreffen.

Der Logarithmus wird oft verwendet, um exponentielle Daten sinnvoll darzustellen. Vorteil an logarithmierten Werten ist, dass Multiplikationen zu Additionen werden und somit einfacher (schneller) sind.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Regel** | **Prinzip** | **Beispiel** |
| **Definition** | Der Logarithmus ist definiert durch:  logb 𝑥 = 𝑦 ↔ 𝑏𝑦 = 𝑥   * 𝑏 muss positiv, grösser als 0 und ≠ 1 sein | log2 8 = 3  (23 = 8) |
| **Produktregel** | Der Logarithmus eines Produkts ist die Summe der Logarithmen der einzelnen Fak- toren:  log𝑏(𝑥 × 𝑦) = log𝑏 𝑥 + log𝑏 𝑦 | log2(32) = log2(4 × 8)  = log2(4) + log2(8)  = 2 + 3 = 5 |
| **Quotientenregel** | Der Logarithmus eines Quotienten ist die Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner:  𝑥  log𝑏 (𝑦) = log𝑏(𝑥) − log𝑏(𝑦) | 4  log2 ( ) = log2(4) − log2(16) 16  = 2 − 4 = −2 |
| **Potenzregel** | Der Logarithmus einer Potenz ist das Pro- dukt aus Exponenten und Logarithmus der Basis:  log𝑏(𝑥𝑛) = 𝑛 × log𝑏(𝑥) | log10(54) = 4 × log10(5) |
| **Eigenschaften** | Der Logarithmus von 1 ist immer 0:  log𝑏(1) = 0  Der Logarithmus einer Zahl zur identischen Basis ist immer 1:  log𝑏(𝑏) = 1  Der Logarithmus ist für Werte ≤ 0 nicht de- finiert (jedenfalls im reellen Zahlenraum) | log2(1) = log10(1) = log27(1) = 0  log2(2) = log7(7) = log9(9) = 1 log2(0) → **  log10(𝑎 − 𝑎) → ** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Basiswechsel** | Der Logarithmus mit einer Basis 𝑏 lässt sich durch Logarithmen einer anderen Basis 𝑘 ausdrücken:  log𝑘(𝑥) log𝑏(𝑥) = log (𝑏)  𝑘 | log2(16) 4  log8(16) = log (8) = 3  2 |
| **Natürlicher Logarithmus** | Eine wichtige Konstante in der Mathematik ist die Eulersche Zahl 𝑒. Ihr Wert beträgt un- gefähr:  𝑒 ≅ 2.71828182845904523536028747135  𝑒 ist eine irrationale reelle Zahl, d.h. sie hat unendlich viele und nicht periodische Nach- kommastellen.  Als Konstante kann 𝑒 wie eine Zahl verwen- det werden, also auch als Basis von Poten- zen und Logarithmen:  log𝑒(𝑥) = 𝑦 ↔ 𝑒𝑦 = 𝑥  Weil der Logarithmus mit der Basis 𝑒 so wichtig ist, erhält er den eigenen Namen  «**Natürlicher Logarithmus»**:  log𝑒(𝑥) = ln(𝑥) | ln(𝑒) = 1  ln(𝑒𝑥) = 𝑥 × ln(𝑒) = 𝑥 × 1 = 𝑥 |
| **Logarithmus in Programmiersprachen** | Weil es noch nicht kompliziert genug ist, werden die Funktionen in Programmier- sprachen nochmal anders benannt!  Natürlicher Logarithmus ln (𝑎):  Math.Log(a) (C#) Math.log(a) (JavaScript) math.log(a) (Python) log(a) (C/C++)   * Aber, z.B. Konstante für ln(2) ist in JavaScript definiert als Math.LN2   Für andere Basen 𝑏 gibt es teilweise einen zweiten Parameter:  Math.Log(a, b) (C#)  math.log(a, b) (Python)  In anderen Sprachen (Bsp: C/C++) muss die Basis 𝑏 manuell umgerechnet werden:  float logbase(float a, float b)  {  return log(a)/log(b);  } | |

### Aufgaben

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | Berechne mit Hilfe der Produktregel:  log10(100 × 10000) |  |
| 2 | Berechne mit der Quotientenregel:  16  log2 ( 4 ) |  |
| 3 | Berechne 𝑥: 5 × 2𝑥 = 40 |  |
| 4 | Löse auf nach 𝑥:  𝑦 = 100 × 100.5𝑥 |  |
| 5 | Berechne 𝑥:  log2(𝑥 − 1) + log2(𝑥 + 1) = 3 |  |
| 6 | Was hilft uns der 2-er-Logarithmus in der Digitaltechnik?  Was könnte der 16-er-Logarithmus für uns bedeuten? |  |

## Textverständnis

In der Informatik ist eine der wichtigsten Aufgaben, Anweisungen (Requirements) zu verstehen, entsprechend niederzuschreiben (Konzept) und dann in neuer Form wieder zu formulieren (Im- plementation). Nachfolgend zuerst einige Aufgaben mit konkreten Zahlen, dann Anweisungen, die so von einem Kunden formuliert worden sein könnten. Wir formalisieren die Erkenntnisse in mathematischer Sprache und vereinfachen so weit wie möglich. Die so gewonnenen Formeln könnten dann problemlos in jeder Programmiersprache abgebildet werden.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | Die Differenz aus 50 und der Anzahl Geräte verhält sich zur Summe von 60 und der glei- chen Anzahl Geräte wie 3 zu 7. Von wie vielen  Geräten ist die Rede? |  |
| 2 | Eine Reinigungskraft verdient beim Arbeitgeber A 140 CHF in 7 Stunden, beim Arbeitgeber B 225 CHF in 9 Stunden. Welcher Arbeitgeber bezahlt besser? Wieviel Prozent bezahlt der lukrativere Arbeitgeber mehr, im Vergleich zum  anderen? |  |
| 3 | Die gesamte AHV-Abgabe auf das Einkommen beträgt (der Einfachheit halber) 10%. Die Hälfte davon wird dem Arbeitgeber vom Lohn abge- zogen, die andere Hälfte bezahlt der Arbeitge- ber. Wieviel Geld wird dem Arbeitnehmer bei einem vereinbarten Jahreslohn von 50'000 CHF ausbezahlt? Wieviel kostet das den Arbeitgeber  insgesamt und wieviel Geld fliesst in die AHV? |  |
| 4 | Der Hokuspokus-Index ist wie folgt definiert: 2- mal die Summe aus x und dem doppelten von y wird quadriert. Davon wird 4-mal das Quad- rat von y abgezogen und das Resultat schliess- lich durch 4-mal x dividiert. Wie sieht die ver- einfachte Formel dieses Index aus? Sind die Eingangsgrössen x, y in ihrem Wertebereich  eingeschränkt? |  |
| 5 | Beim Hoppala-Index wird der Logarithmus mit der Basis 2 von der Differenz von 4 und x ge- nommen. Dieser Wert wird durch den 10-er Lo- garithmus von der Summe von 3 und y divi- diert. Wie sieht die Formel aus? Gibt es Ein- schränkungen der Eingangsgrössen x und y?  Wie würden wir das in Programmcode umset-  zen? (Erklärung, Pseudocode oder echter Code) |  |