Edición 2021

Simulación de sistemas

Simulación de señales

R. Majalca, P. Rivas

Capítulo 2

Simulación de señales

Un sistema no es realmente nada si no tiene algo que procesar, y algo que producir. En el contexto en que nos manejamos, estos dos elementos llegan en forma de señales. ¿Qué es una señal? Definamos a un señal como a todo trozo de información que resulta útil para algo. Así, una señal es cualquier cosa que contiene información, y que esa información la estábamos esperando porque algo haremos con ella. Ejemplos de señales pueden ser las siguientes:

1. La llamada telefónica que esperábamos para saber si fuimos aceptados o no.
2. El calor que emite el calefactor en una noche invernal.
3. El correo electrónico que nos avisa a entregar una tarea asignada.
4. La señal de radio FM sintonizada en nuestra estación favorita.
5. La señal del módem inalámbrico que nos permite conectarnos a nuestros canales de streaming favoritos.

Y ejemplos de algo que podemos considerar señal existen muchos mas. En todo caso, una señal es algo que nos obliga a llevar a cabo una acción para lograr un resultado de interés. En el contexto de los sistemas que analizamos en el capítulo anterior, la señal que esperamos y nos obliga a actuar es la señal de entrada $x(t)$, el resultado obtenido puede considerarse la señal de salida $y(t)$, y nosotros, los que esperamos la entrada para producir un resultado seríamos el sistema $H\{.\}$ en si mismo.

En un contexto mas formal, hemos de representar a las señales como una función de la variable independiente temporal t, normalmente usamos una letra para denotar a la señal, por ejemplo $x(t)$, $y(t)$, $\mu(t)$, $\delta(t)$, etc. El hecho de que usemos una notación funcional no es ningún accidente, pues en este contexto, la información que recibimos de la señal y que nos resulta tan útil es, de hecho, una función del tiempo. Las señales, entonces, tienen forma, longitud o duración que está dictada por el tiempo t. Podemos decir que para la señal $x(t)$, se tiene lo siguiente:

1. Amplitud: cuanto vale la señal para el instante t_0, normalmente esto lo denotamos $x(t_0) \in \mathbb{R}$.
2. Duración: cuanto tiempo esperamos que nuestra señal exista, o dicho de otra forma, cuanto tiempo permanece la señal con una amplitud distinta de cero.

La figura 2.1 muestra una señal $x(t)$, en color rojo, y su valor de amplitud para dos instantes de tiempo t_1 y t_2. También nótese como la señal tiene una duración finita, pues solo existe para $0 \leq t \leq t_3$.

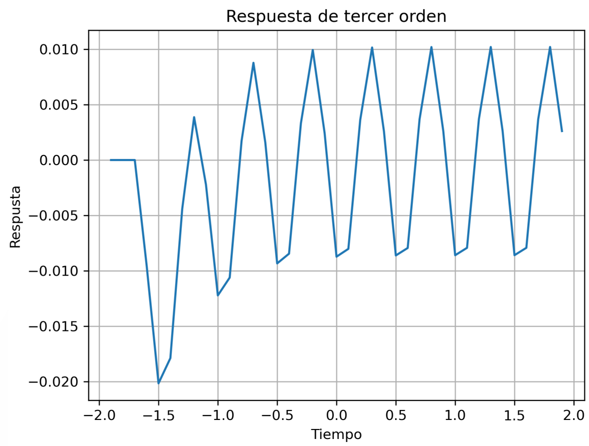


Figura 2.1: Una señal $x(t)$ y dos valores instantáneos t_1 y t_2

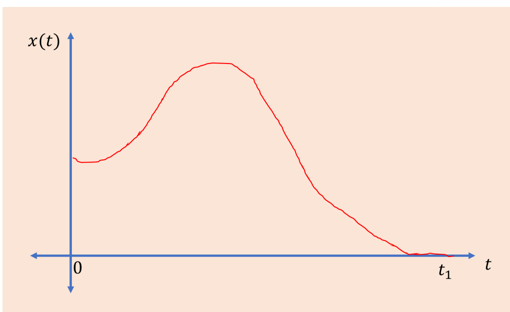
Cabe señalar que el concepto de amplitud de una señal puede cambiar un poco en otros contextos. Por ejemplo,en el caso de una señal senoidal suele considerarse que la amplitud de la señal se refiere mas bien a la extensión de la envolvente de la misma, algo parecido al intervalo formado por el máximo y el mínimo valor que la señal puede tomar durante su existencia. La señal senoidal será analizada con detalle mas adelante en este capítulo.

2.1. Clasificación de señales

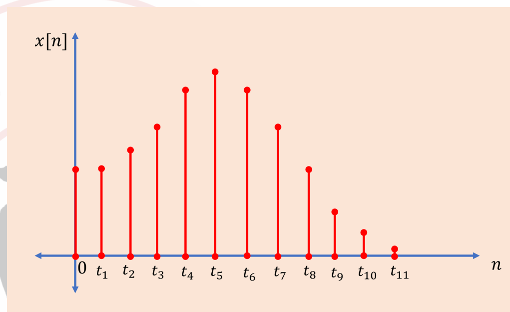
Así como pudimos clasificar la los sistemas en el capítulo anterior, vamos a clasificar a las señales en este. Clasificar señales es un poco parecido a clasificar a los sistemas, existen diferentes criterios para clasificar señales, algunos de estos criterios los estudiamos a continuación. para comenzar, podemos clasificar a las señales de acuerdo con la naturaleza de la variable independiente t, en este sentido existen dos tipos de señales:

1. Señales continuas: en este caso, la señal existe para cualquier instante de tiempo en un intervalo $[t_{ini}, t_{fin}]$. Nótese la presencia de la frase "para cualquier instante" en esta definición.
2. Señales discretas: en este caso la señal solo existe en ciertos instantes de tiempo muy específicos. Nótese la frase "en ciertos instantes".

Entonces, en esta clasificación quien dictamina si la señal es continua o discreta es la naturaleza de t, la variable independiente del tiempo. La figura 2.2 ilustra un ejemplo de cada una de estas señales.



(a) Una señal $x(t)$ continua para $0 \leq t \leq t_1$



(b) Una señal $x[n]$ discreta para $0 \leq n \leq t_{11}$

Figura 2.2: Señales continuas y discretas

Lo que vemos en la figura 2.2a es una señal continua. Debe quedar claro que es lo que hace que una señal sea continua, y es el hecho de que, al menos en un intervalo, la señal existe para cualquier instante de tiempo que a uno se le pueda ocurrir. En cambio, una señal discontinua como la mostrada en la figura 2.2b, solo existe en ciertos instantes de tiempo, cualquier instante de tiempo que a uno se le pueda ocurrir y que no sea uno de esos instantes especificados en la señal y la señal simplemente no existe, no está definida.

Existe un caso especial de la señal continua, y es la señal discontinua. Una señal discontinua es una señal que al menos en un instante t_d presenta una discontinuidad, es decir, la señal cambia de manera abrupta su valor o amplitud en ese justo instante. ¿Que hace que una señal $x(t)$ sea continua en el instante t_d? Definamos Δ_t como un valor muy muy pequeño, luego definamos dos nuevos instantes, al primero lo llamamos $t_d - \Delta_t$ y al segundo lo llamamos $t_d + \Delta_t$. Obviamente $t_d - \Delta_t$ queda apenas un poco a la izquierda de t_d y $t_d + \Delta_t$ queda apenas un poco a su derecha, como lo muestra la figura 2.3.

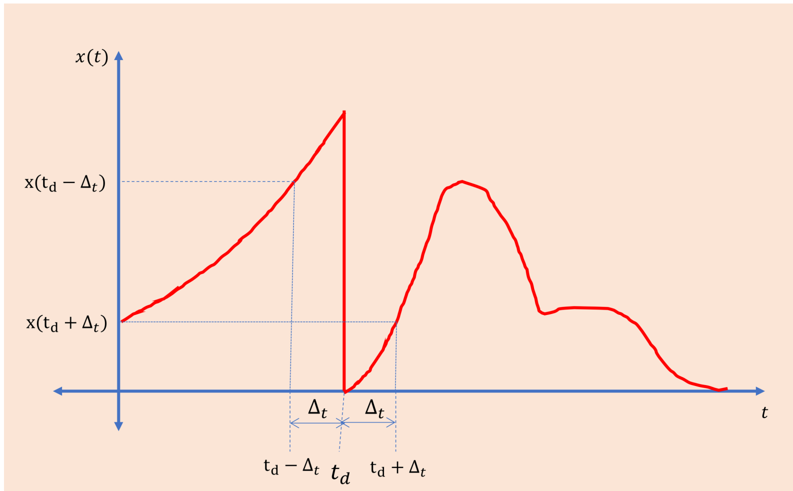


Figura 2.3: Una señal discontinua en t_d

Tomando como referencia la figura 2.3, podemos afirmar que la señal $x(t)$ es continua en el instante t_d si ocurre que:

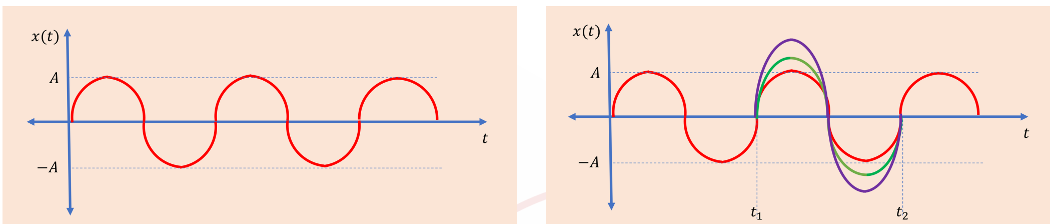
$$\lim_{\Delta_t \to 0} x(t_d - \Delta_t) = x(t_d + \Delta_t).$$

Si esto no se cumple, la señal $x(t)$ es discontinua en t_d. Nótese que, por definición, Δ_t es un valor muy muy pequeño, casi cero. Es claro que la señal de la figura 2.3 es discontinua en t_d, pues, por muy pequeño que uno haga a Δ_t, la equivalencia en la expresión anterior no se cumple. Las señales discontinuas, como veremos más adelante, resultan muy útiles en muchos casos.

Ahora pasemos a otro criterio de clasificación de señales, ahora con respecto a su naturaleza estadística. Este es un caso parecido al de la clasificación de sistemas, Según este criterio, una señal puede ser:

1. Señales deterministas: son señales en donde siempre podremos conocer su valor a amplitud para cualquier instante de tiempo.
2. Señales aleatorias: son señales que, al menos en algún intervalo, no podemos estar seguros de cual sería su valor o amplitud.

La diferencia entre una señal determinista y una aleatoria es, simplemente, que para la primera tenemos una sola expresión que nos permite anticipar su valor para cualquier instante permitido. En cambio, en una señal aleatoria no tenemos una sola expresión que nos permita anticipar su valor en cualquier instante de tiempo. Sucede que por lo menos en un intervalo la señal puede comportarse de distintas maneras, y no tenemos seguridad acerca de cual de esos comportamientos será el que la señal tome al final, cuando mucho, podemos asignar probabilidades a esos comportamientos y basarnos en esas probabilidades. La figura 2.4 muestra una señal determinista contra una aleatoria.



(a) Una señal $x(t)$ determinista (b) Una señal $x(t)$ aleatoria entre $t_1 \leq t \leq t_2$

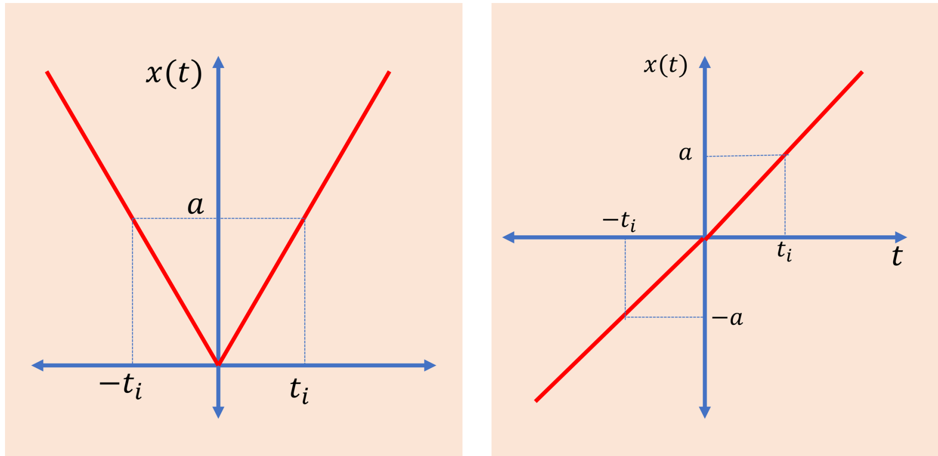
Figura 2.4: Señales deterministas y señales aleatorias

La figura 2.4b muestra una señal aleatoria. ¿Qué le hace ser aleatoria? Observemos que, en esta señal en particular, la aleatoriedad se presenta únicamente en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, y nada mas. En este intervalo la señal puede comportarse de tres maneras, la forma roja, la forma verde y la forma morada. Es decir que en el intervalo mencionado, la señal puede tener cualquiera de esos tres comportamientos. Quizá podamos asignar con cual forma será más probable que se comporte, y trabajar de acuerdo con ello. En nuestro curso, sin embargo, nosotros no trabajamos con señales aleatorias.

Otro criterio para clasificar señales es el que las divide entre señales con paridad funcional. Es decir, considerando que las señales son meras funciones de la variable independiente t, entonces las podemos clasificar entre:

1. Señales pares: señales que cumplen con $x(t) = x(-t)$.
2. Señales impares: que cumplen con $x(t) = -x(-t)$.

La figura 2.5 muestra el concepto detrás de esta clasificación. En la figura 2.5a aparece una señal par, es decir, para esta señal es claro que $x(t) = x(-t)$ para cualquier instante t. En la figura 2.5b se muestra una señal impar, en donde claramente $x(t) = -x(-t)$ para cualquier instante t.



(a) Una señal $x(t)$ par (b) Una señal $x(t)$ impar

Figura 2.5: Señales pares y señales impares

Algo que debemos remarcar en este criterio de clasificación, es que a diferencia de los dos anteriores, no todas las señales son pares o impares, más aún, muchas señales en la vida real resultan no quedar en una u otra categoría, es decir que muchas señales ni son pares ni impares. Esta clasificación no es exhaustiva como las dos que vimos antes. Vamos ahora a otro criterio de clasificación, este las separa de acuerdo con su periodicidad. En este sentido tenemos:

1. Señales periódicas: son señales para las que se cumple que $x(t) = x(t + nT)$, en donde T es el periodo fundamental de la señal y $n \in \mathbb{Z}$.
2. Señales aperiódicas: son señales para las que no existe un valor T que haga que $x(t) = x(t + T)$ se cumpla.

El hecho de que una señal sea periódica con periodo T implica que el valor de la señal en el instante t se repite cada T instantes de tiempo. Es decir que $x(t) = x(t + T) = x(t + 2T) = \ldots, = x(t + nT)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Podemos afirmar que T, el periodo fundamental, es el valor más pequeño que hace que $x(t) = x(t + nT)$ se cumpla. La figura 2.6 muestra el concepto de periodicidad de una señal.

Con las señales periódicas pasa algo muy particular. Normalmente si queremos hablar de la "velocidad" de la señal, lo hacemos en términos de la frecuencia fundamental de la misma. La frecuencia fundamental se mide en hertz, esto no otra cosa que hablar de los ciclos por segundo, esto es, la cantidad de ciclos que la señal repite en un segundo. Entonces, llamamos ciclo a la parte de la señal que se repite una y otra vez, y justamente T, el periodo fundamental, mide cuantos segundos le toma a

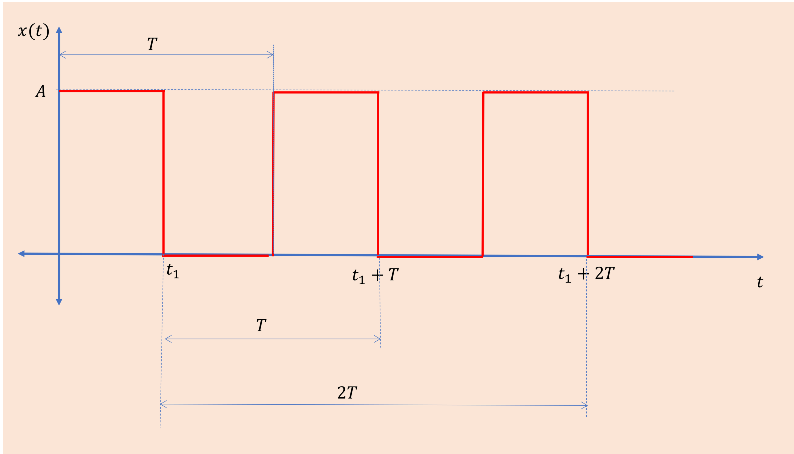


Figura 2.6: Una señal $x(t)$ periódica con periodo T

un ciclo en ocurrir. Existe, entonces, una clara relación entre periodo fundamental T y frecuencia fundamental f, esta relación se expresa como en la expresión 2.1.

$$f = \frac{1}{T} \tag{2.1}$$

De modo que una señal $x(t)$ cuyo ciclo toma 10 segundos en ocurrir tiene una frecuencia de 0,1 hz. Una señal $y(t)$ con un periodo fundamental de 0,2 segundos tiene una frecuencia de 20 hz. La figura 2.7 muestra tres señales cuya única diferencia es la frecuencia entre ellas. En la figura 2.7 vemos que la señal $x_3(t)$ es la mas "lenta", pues su frecuencia es de $f_1 = 1$ hz. Por otro lado, tenemos a la señal $x_2(t)$ con una frecuencia de $f_2 = 0{,}5$ hz, es más "rápida" que $x_3(t)$ pero menos que $x_1(t)$ cuya frecuencia es de $f_1 = 0{,}25$ hz.

No pocos autores prefieren expresar la periodicidad de una señal en términos un tanto distintos. Esto es, en lugar de usar la frecuencia nominal, como la que hemos visto, prefieren usar la llamada frecuencia angular. La frecuencia angular ω se mide en radianes por segundo, en lugar de ciclos por segundo o hertz. Para esto, establezcamos que un ciclo de la señal se cumple en 2π radianes, o en 360 grados, normalmente se prefieren los radianes, así que cualquier frecuencia queda expresada en términos de 2π, que es lo que le toma a un ciclo cumplirse. La relación entre frecuencia nominal y frecuencia angular la vemos como en la expresión 2.2.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{2.2}$$

Por lo tanto, las señales en la figura 2.7 tienen frecuencias fundamentales como

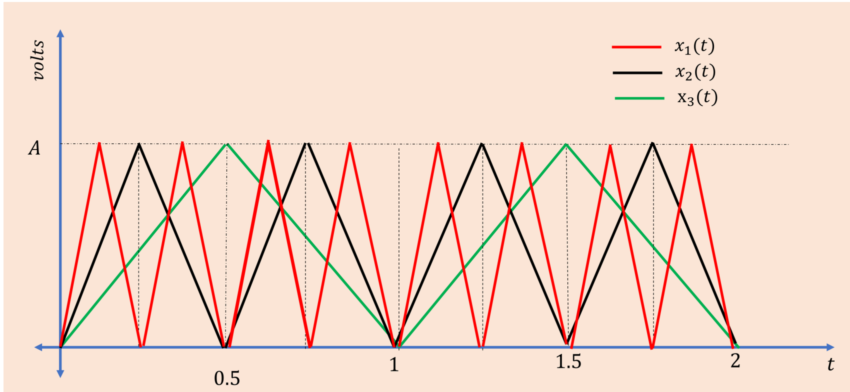


Figura 2.7: Tres señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ periódicas

en $\omega_1 = 8\pi$ rad/seg, $\omega_2 = 4\pi$ rad/seg y $\omega_3 = 2\pi$ rad/seg. Igual vemos que $x_1(t)$ es la más rápida de todas, $x_2(t)$ es mas rápida que $x_3(t)$ únicamente, mientras que $x_3(t)$ es definitivamente la más lenta.

Otra clasificación para las señales utiliza el concepto de "energía" y "potencia" para clasificarlas en dos categorías:

1. Señales de energía: este tipo de señales tienen duración finita y energía finita pero potencia cero.
2. Señales de potencia: este tipo de señales tienen duración infinita y potencia finita pero energía infinita.

Comenzamos esta discusión aclarando que la energía de la señal $x(t)$, a la que denotamos como $E_x(t)$ se refiere al trabajo, y más específicamente al trabajo por distancia o desplazamiento, La potencia de la señal $x(t)$ la denotamos como $P_x(t)$, y se refiere a la energía por unidad de tiempo. Formalmente expresamos esto como en las expresiones 2.3 y 2.4.

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \tag{2.3}$$

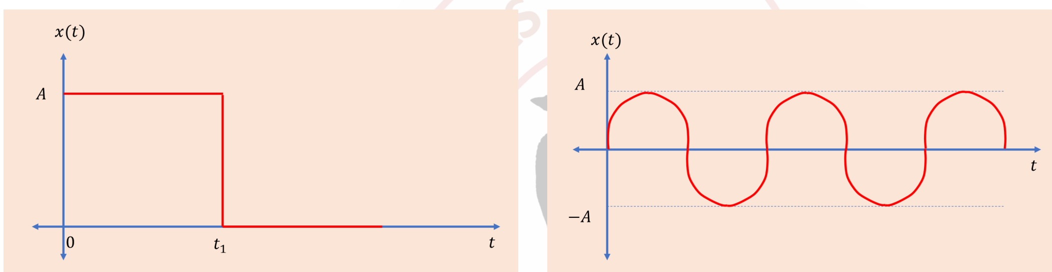
$$P_x(t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} |x(t)|^2 dt \tag{2.4}$$

Normalmente una señal de energía tiene duración finita, por lo que su energía es finita, su potencia, en cambio, implica una razón entre esa energía en un periodo de tiempo con duración infinita, por lo que esa potencia es nula, es cero. Y puesto que la potencia es nula, no resulta nada útil, preferimos, para estas sñales a la energía como descriptor de la misma. Una señal de potencia implica una duración infinita, por lo que su energía también es infinita y no nos sirve de nada. La potencia, en cambio, es finita y por eso la preferimos como descriptor de la señal.

En resumen, decimos que una señal $x(t)$ es una señal de energía si su energía es finita aunque su potencia sea nula, y es de potencia si su energía es infinita pero su potencia es finita, como en la expresión 2.5.

$$x(t) = \begin{cases} \text{Energía si } 0 \leq E_x(t) < \infty \text{ y } P_x(t) = 0 \\ \text{Potencia si } 0 \leq P_x(t) < \infty \text{ y } E_x(t) \to \infty \end{cases} \tag{2.5}$$

La figura 2.8 muestra un caso de una señal de energía y el de una señal de potencia. La señal de energía aparece en la figura 2.8a, esta señal tiene duraci;on finita, solo existe para el intervalo $[0, t_1]$, por lo que su energía es finita. La señal de potencia aparece en la figura 2.8b, es una señal con duración infinita, pues existe para $t \geq 0$, por lo que su energía es infinita pero su potencia es finita.



(a) Una señal $x(t)$ de enrgía

(b) Una señal $x(t)$ de potencia

Figura 2.8: Señales de potencia y energía

Aunque este último caso, el de la señal $x(t)$ en la figura 2.8b es un caso especial, pues es una señal periódica con periodo T. Para este tipo de señales el cálculo de la energía y la potencia es un poco diferente en el sentido de que el intervalo de integración es únicamente su periodo, como en las expresiones 2.6 y 2.7.

$$E_x(t) = \int_0^T |x(t)|^2 dt \tag{2.6}$$

$$P_x(t) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \tag{2.7}$$

Otra clasificación mas. En este caso, clasificamos a las señales de acuerdo con la naturaleza de la señal misma. Normalmente cuando hablamos de señales las consideramos de naturaleza real, sin embargo, una señal puede tener ambas naturalezas, la real y la imaginaria, es decir, podemos tener señales complejas. De hecho, la señal compleja es el caso más general que existe, y una señal compleja podría representarse como en $x(t) = \alpha(t) + j\beta(t)$. En este sentido es que clasificamos a las señales como:

1. Señales reales: son señales en donde solo existe la parte real de la señal compleja, como en $x(t) = \alpha(t)$.
2. Señales imaginarias: son señales en donde solo existe la parte imaginaria de la señal compleja, como en $x(t) = j\beta(t)$.

Naturalmente, la existencia de una señal compleja no se descarta, de hecho son bastante comunes. En realidad una señal real y una imaginaria tienen el mismo aspecto, lo que las separa es que existen en planos diferentes, una señal real existe en un plano real mientras que una imaginaria lo hace en un plano imaginario, siendo el plano complejo el planos mas general, el que contiene ambos planos. La figura 2.9 muestra la disposición de los planos real e imaginario de una señal compleja.

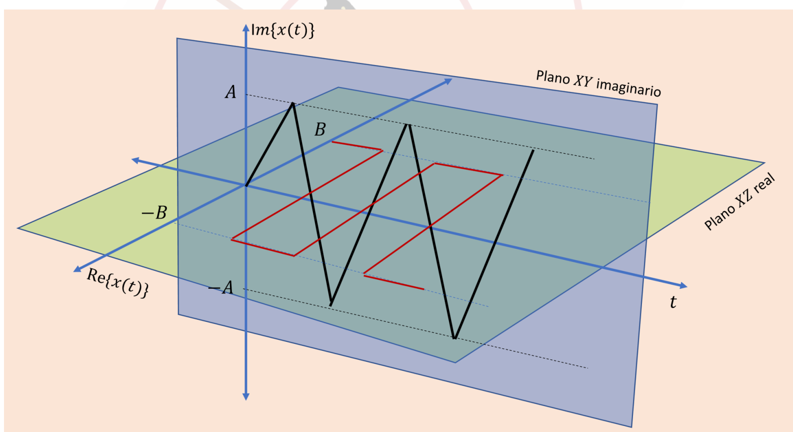


Figura 2.9: Los planos real e imaginario en una señal compleja

En la figura 2.9 en donde vemos una señal compleja, podemos apreciar que el plano real es el plano color verde, localizado en el plano XZ, siendo el eje X el eje del tiempo t, el eje Z es el eje real de la señal compleja. De la misma manera, el eje Y es el eje imaginario dela señal compleja. Entonces el plano XY es el plano imaginario. Así, la parte real de la señal compleja aparece en color negro y la parte real en color rojo. Vemos, entonces como los dos planos coexisten pero en naturalezas diferentes que nunca se conectan o traslapan. Comparten, ciertamente, la variable independiente del tiempo t.

2.2. Señales de prueba

Todo sistema $H\{.\}$ utiliza una señal de entrada $x(t)$ para producir una señal de salida o respuesta $y(t)$ luego de procesar la señal de entrada. Entonces, la señal de entrada ¿de que forma puede ser? Es decir, ¿como es una señal de entrada? Por principio de cuentas, la señal de entrada $x(t)$ puede tomar cualquier forma, sin embargo, normalmente cuando un sistema es estudiado, se prefiere que $x(t)$ tenga ciertas formas muy básicas a las que se llama señales de prueba.

2.2.1. Señal escalón unitario

Esta es una señal discontinua en $t = 0$, y es muy popular. Se le representa como $\mu(t)$, y se describe como en la expresión 2.8.

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 1 \text{ para } t \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Gráficamente esta señal tiene el aspecto mostrado en la figura 2.10. La razón por la que a esta señal le llaman escalón unitario es que su amplitud es unitaria para $t \geq 0$.

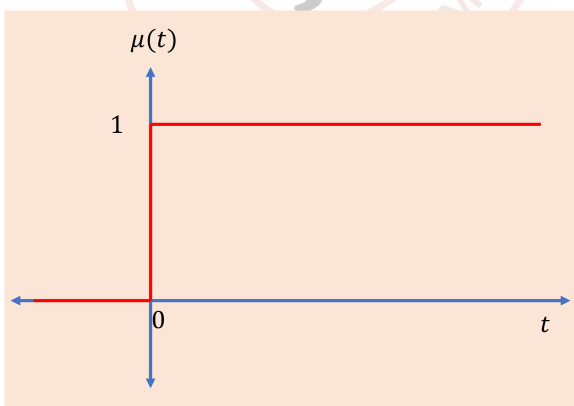


Figura 2.10: La señal escalón unitario $\mu(t)$

2.2.2. Señal impulso unitario

Esta es otra señal de prueba muy popular. Conocida como impulso unitario y denotada $\delta(t)$, es en realidad una señal muy peculiar. Formalmente se le describe como en la expresión 2.9.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t \neq 0 \\ A \text{ para } t = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

En loa expresión 2.9 vemos que esta señal es una que permanece con un valor nulo de cero, en todo instante excepto en el infinitesimalmente pequeño instante en que $t = 0$. En ese instante la señal toma un valor que aquí se describe como $A \in \mathbb{R}$. Este es un valor muy grande pero no infinito. Lo que si, es que a la señal $\delta(t)$ se le exige algo muy importante: su área debe ser unitaria, como enla expresión 2.10.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{2.10}$$

Puesto que su área es unitaria es que a este señal se le conoce como el impulso unitario [1].Esta es, obviamente, una señal discontinua. La función $\delta(t)$ gráficamente se le representa como en la figura 2.11.

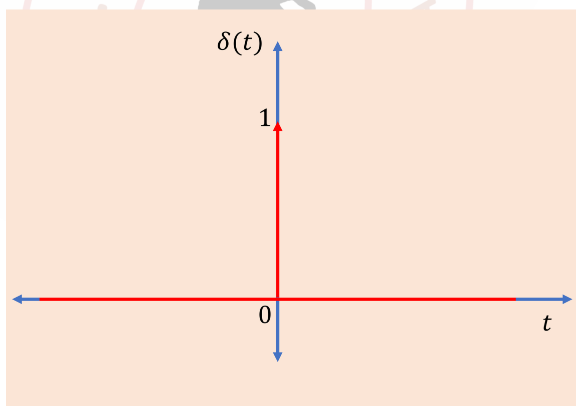


Figura 2.11: La señal impulso unitario $\delta(t)$

[1]Si en lugar de considerarle una señal consideramos que $\delta(t)$ es una función, entonces a esta función se le llama la función delta de Dirac

2.2.3. La señal rampa unitaria

Ahora llega otra señal de prueba que también es popular, se le conoce como la rampa unitaria y se le representa como $r(t)$ y cuya descripción se muestra en la expresión 2.11.

$$r(t) = t \tag{2.11}$$

Y así de simple es una rampa unitaria, lo único que hace es seguir o repetir los instantes de tiempo que recibe como argumento. La razón por la que se le llama rampa unitaria obedece al hecho de que es una recta con pendiente unitaria positiva, como lo ilustra la figura 2.12.

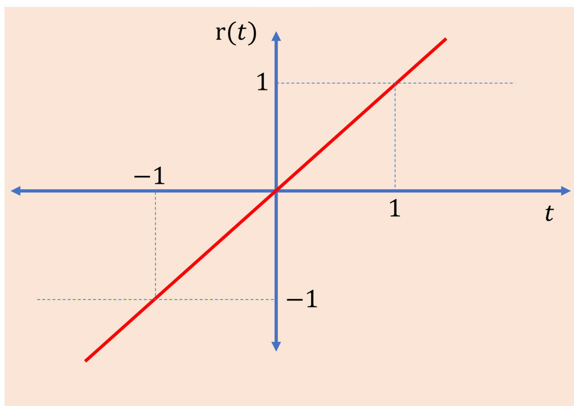


Figura 2.12: La señal rampa unitaria $r(t)$

2.2.4. La señal exponencial

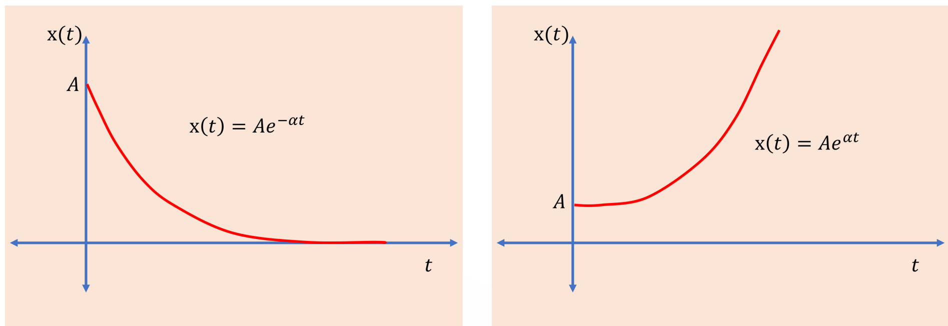
Comenos esta discusión hablando específicamente de las señales exponenciales reales. Estas son junto con el escalón unitario, ese tipo de señales de prueba que son las favoritas de todos. Una señal exponencial real y genérica se describe como en la expresión 2.12.

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \tag{2.12}$$

En esta expresión llamamos amplitud al coeficiente $A \in \mathbb{R}$ que multiplica al exponencial, mientras que llamamos factor de crecimiento al factor α en el exponente, el que multiplica al instante t. Existen dos clases de señales exponenciales reales:

1. Exponenciales decrecientes: cuando $\alpha < 0$.
2. Exponenciales crecientes: cuando $\alpha > 0$.

El comportamiento de un exponencial creciente y uno decreciente se ilustra en la figura 2.13.



(a) Señal exponencial decreciente (b) Señal exponencial creciente

Figura 2.13: Señales exponenciales reales

De acuerdo a los que vemos en la figura 2.13a, un exponencial decreciente que ocurre cuando el factor de crecimiento $\alpha < 0$, es una señal que inicia con una amplitud A en $t = 0$, y a prtir de allí cuando $t > 0$, la señal decae exponencialmente, de modo que para valores de t muy grandes, la señal queda estable a un valor de cero, es decir, desaparece, como lo indica la expresión 2.13.

$$\lim_{t\to\infty} Ae^{-\alpha t} = 0 \tag{2.13}$$

Esta es la característica mas prominente de la señal exponencial decreciente, que con el tiempo se estabiliza en un valor de cero. Es decir que un exponencial decreciente es una señal acotada, una característica muy deseable en el estudio y modelado y simulación de sistemas. En cambio, cuando analizamos el comportamiento de una señal exponencial creciente, que ocurre cuando $\alpha > 0$, lo que tenemos es una señal que para valores muy grandes de t tiene una amplitud infinita, es decir, que conforme el tiempo avanza la señal se dispara sin control, como lo indica la expresión 2.14.

$$\lim_{t\to\infty} Ae^{-\alpha t} \to \infty \tag{2.14}$$

Este comportamiento de crecer sin control indica que un exponencial creciente es una señal no acotada, un atributo no muy apreciado en el estudio y simulación de sistemas.

2.2.5. Señales exponenciales complejas

Ahora veamos el caso mas general de la señal exponencial, es la señal exponencial compleja. Esta señal ocurre cuando el facto de crecimiento es una cantidad compleja, como en $\alpha = \gamma + j\beta$. En este caso vemos que:

$$x(t) = Ae^{(\gamma+j\beta)t} = Ae^{\gamma t}e^{j\beta t}$$

Pongamos nuestra atención en el segundo factor $Ae^{k\beta t}$. Por Euler sabemos que $e^{j\beta t} = cos(\beta t) + jsen(\beta t)$. Luego:

$$x(t) = Ae^{\gamma t}Ae^{j\beta t} = Ae^{\gamma t}\left(cos(\beta t) + jsen(\beta t)\right)$$

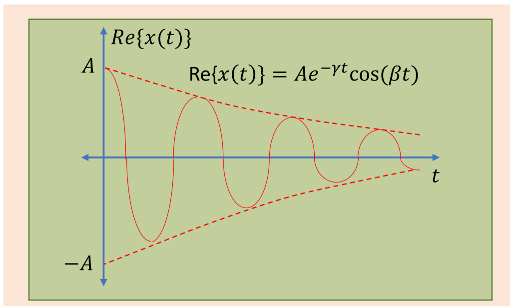
Con un poco mas de álgebra llegamos a lo que la expresión 2.15 concluye: que un exponencial complejo tiene una parte real y una imaginaria, la primera siendo una señal cosenoidal con amplitud controlada por un exponencial real, y la segunda es una seña senoidal imaginaria y cuya amplitud es controlada por ese mismo exponencial real.

$$Ae^{(\gamma+j\beta)t} = Ae^{\gamma t}cos(\beta t) + jAe^{\gamma t}sen(\beta t) \tag{2.15}$$

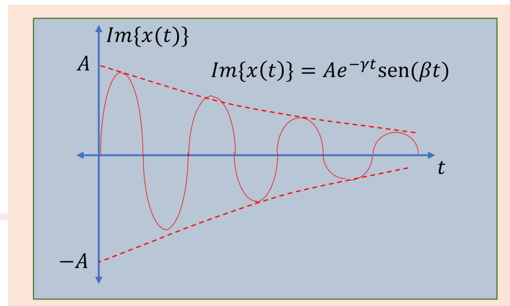
Con respecto a lo que implica esta última expresión 2.15, vemos claramente que existen dos términos, uno para la parte real $Re\{x(t)\} = Ae^{\gamma t}cos(\beta t)$, y otro para la parte imaginaria $Im\{x(t)\} = jAe^{\gamma t}sen(\beta t)$. Para cada uno de estos dos términos existen dos casos de comportamiento, todo dependiendo de como es el factor γ en el exponente del exponencial real. Estos cuatro casos son:

1. Si $\gamma > 0$ el exponencial real $Ae^{\gamma t}$ es un exponencial creciente que controla la amplitud de la señal cosenoidal en $Re\{x(t)\}$ y la amplitud de la señal senoidal en $Im\{x(t)\}$. Decimos, en cada caso, que tenemos una señal cosenoidal exponencialmente creciente en $Re\{x(t)\}$, y una señal senoidal exponencialmente creciente en $Im\{x(t)\}$.
2. Pero si $\gamma < 0$, entonces tenemos algo como $Ae^{-\gamma t}$, que es un exponencial decreciente, y por lo tanto la señal $Re\{x(t)\}$ es una señal cosenoidal exponencialmente decreciente, y tenemos en $Im\{x(t)\}$ una señal senoidal exponencialmente decreciente.
3. Un caso especial sucede cuando $\gamma = 0$. Porque en tal caso el exponencial real $Ae^{\gamma t} = A$, y por lo tanto $Re\{x(t)\} = Acos(\beta t)$ mientras que $Im\{x(t)\} = Asen(\beta t)$.

Lo que en un principio era solo una señal exponencial ha dado lugar a incluso seis formas de señales. Comencemos por analizar el caso en donde $\gamma < 0$. En este caso tenemos una parte real en forma de señal cosenoidal exponencialmente decreciente, lo que significa que la amplitud de la señal decae exponencialmente en un factor γ hasta eventualmente desaparecer para valores de t muy grandes. Para la parte imaginaria lo que tenemos es una señal senoidal cuya amplitud decrece exponencialmente, al igual que en la parte real esta señal eventualmente desaparece, cuando t sea muy grande. Ambos casos los podemos ver en la figura 2.14.



(a) La señal $Re\{x(t)\}$ para $\gamma < 0$



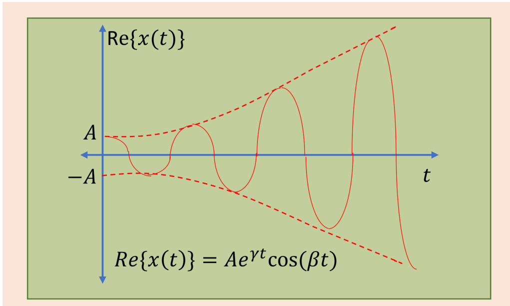
(b) La señal $Im\{x(t)\}$ para $\gamma < 0$

Figura 2.14: El caso del exponencial complejo con $\gamma < 0$

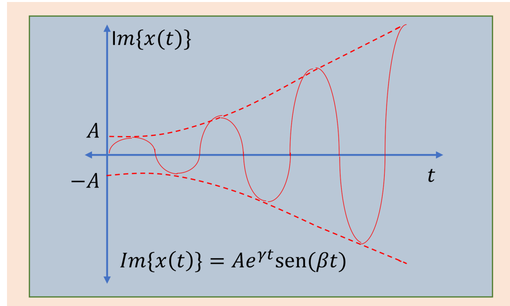
¿Qué podemos concluir del caso en que $\gamma < 0$? Vemos en las figuras 2.14a y 2.14b, que son la parte real y la parte imaginaria de la señal exponencial decreciente, que en amos casos la señal desaparece para valores de t muy grandes. Esto es una característica deseable, pues implica que la señal queda acotada. Ahora veamos lo que sucede cuando $\gamma > 0$. En este caso las amplitudes de la señal exponencial en la parte real y la señal senoidal en la parte imaginaria tienen una amplitud que crece exponencialmente, lo que implica que para valores de t muy grandes, la amplitud en ambas será también muy grande, como lo ilustra la figura 2.15.

¿Que podemos concluir de este caso? Pues que el exponencial complejo cuando $\gamma > 0$ produce una señal cosenoidal y una senoidal, en su parte real e imaginaria mostradas en las figuras 2.15a y 2.15b respectivamente, que poseen una amplitud que crece exponencialmente en un factor γ conforme t aumenta, lo que hemos de considerar algo indeseable, pues ambas señales son un ejemplo de una señal sin acotamiento, algo que no queremos. Y por último, cabe preguntarnos ¿que pasa si $\gamma = 0$ en un exponencial complejo? Pasa que ese exponencial real $Ae^{\gamma t} = A$, por lo que las amplitudes de las señales senoidal y cosenoidal para las partes imaginaria y real respectivamente quedan constantes en A, como lo ilustra la figura 2.16.

Esto significa que cuando $\gamma = 0$ las partes real e imaginaria son simples señales

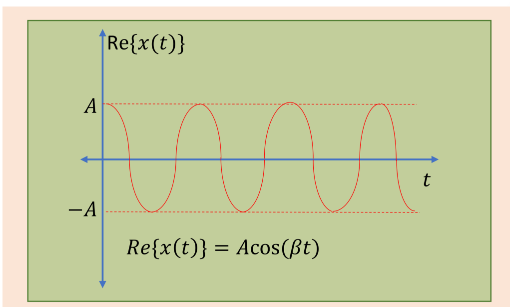


(a) La señal $Re\{x(t)\}$ para $\gamma > 0$

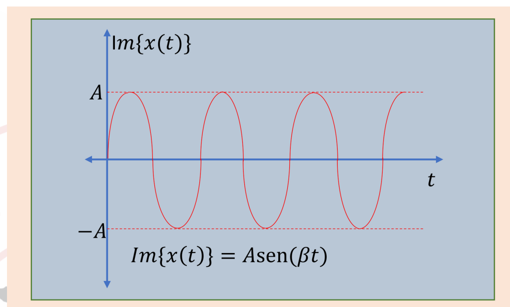


(b) La señal $Im\{x(t)\}$ para $\gamma > 0$

Figura 2.15: El caso del exponencial complejo con $\gamma > 0$



(a) La señal $Re\{x(t)\}$ para $\gamma = 0$



(b) La señal $Im\{x(t)\}$ para $\gamma = 0$

Figura 2.16: El caso del exponencial complejo con $\gamma = 0$

cosenoidales, como lo ilustra la figura 2.16a para la parte real, y una simple señal senoidal como lo ilustra la figura 2.16b para la parte imaginaria. Estas señales se mantienen estables en una amplitud A, por lo que aún son consideradas señales acotadas aún y cuando existen para cualquier instante $t \geq 0$. Este caso se conoce como el de los osciladores perpetuos, pues ambas partes son señales que oscilan a una frecuencia natural $\omega_n = \beta$.

2.3. Señales senoidales

Estamos en el caso en donde vamos a presentar una señal que en realidad ya hemos estado usando en secciones anteriores, pero que apenas vamos a presentar formalmente. Estas son las llamadas señales senoidales, que incluye a las señales cosenoidales como un caso especial. una señal senoidal es una descrita por la expresión 2.16.

$$x(t) = Asen(\omega t + \theta) \tag{2.16}$$

En la expresión 2.16 A es la amplitud de la señal senoidal, esto es, A es el valor más grande que la señal puede tomar, y $-A$ su valor más pequeño. Es una señal periódica con un periodo de 2π radianes y una frecuencia angular de $\omega = 2\pi f$ radianes por segundo. El término θ se refiere al desfazamiento de la señal y se mide en radianes. El desfazamiento, que pueda o no existir, se refiere a un desplazamiento temporal de la señal en el sentido de que esta se "atrase" o se "adelante", a partir de un instante de referencia, normalmente en $t = 0$. Por otro lado tenemos a la señal cosenoidal cuya descripción tenemos en la expresión 2.17.

$$x(t) = Acos(\omega t + \theta) \tag{2.17}$$

Una señal cosenoidal toma los mismos parámetros que la señal senoidal, y lo mas interesante, es que en realidad son casi lo mismo, excepto por un detalle: la señal cosenoidal es una versión desfasada en $\theta = \pi/2$ radianes de la señal senoidal, es decir, una señal cosenoidal es una versión adelantada 90 grados de la señal senoidal, como se aprecia en la figura 2.17 de forma gráfica.

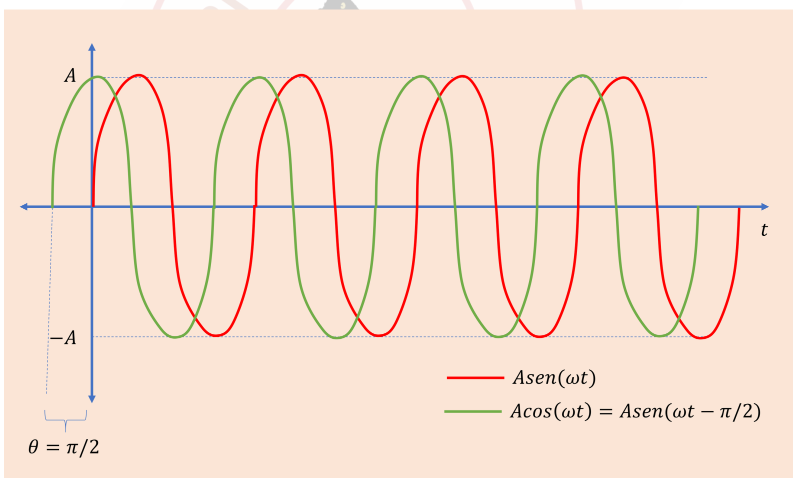


Figura 2.17: La señales senoidal y cosenoidal

Estas son las señales de prueba mas comunes en lo que a probar y sobre todo, simular sistemas se refiere. A continuación estudiamos como simular estas señales usando para ello Python. Seguiremos un estilo de simulación muy genérico a lo largo de toda esta asignatura.

2.4. Operaciones importantes con señales

Con una señal podemos efectuar operaciones a modo de generar una nueva señal a partir de la original, o al menos así será como consideramos aquí a las operaciones. Entre las operaciones más importantes tenemos a las siguientes:

1. El escalamiento de amplitud.
2. El desplazamiento temporal.
3. El escalamiento temporal.
4. La composición de señales.

2.4.1. El escalamiento de amplitud

Tenemos una señal $x(t)$ con alguna amplitud en el instante t, luego, su escalamiento de amplitud en un factor $a \in \mathbb{R}$ se denota como $ax(t)$. ¿Que efecto tiene el escalamiento temporal? Es sencillo, escala la amplitud original de $x(t)$ en un factor a. De modo que si $|a| < 1$ la amplitud de la señal se encoje, pero si $|a| > 1$ la amplitud de la señal se amplifica. Consideremos un escalón unitario $\mu(t)$ ¿Qué resulta de $4\mu(t)$? Por definición sabemos que:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 1 \text{ para } t \geq 1 \end{cases}$$

Entonces $4\mu(t)$ es como:

$$4\mu(t) = \begin{cases} 4(0) \text{ para } t < 0 \\ 4(1) \text{ para } t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 4 \text{ para } t \geq 0 \end{cases}$$

De la misma manera, un escalamiento como $-3\mu(t)$ resulta en:

$$-3\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ -3 \text{ para } t \geq 0 \end{cases}$$

La figura 2.18 muestra el efecto del escalamiento en el escalón unitario $\mu(t)$. En color rojo vemos al escalón unitario normal $\mu(t)$, en color verde al escalón escalado $4\mu(t)$ y en color morado al escalón escalado $-3\mu(t)$.

Ahora escalemos una rampa. Por definición la rampa es una señal realmente simple $r(t) = t$, para $-\infty < t < +\infty$, por lo que un escalamiento como $2r(t) = 2t$, y

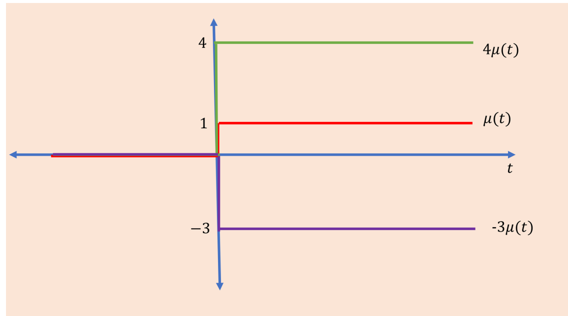


Figura 2.18: Un escalón unitario y su escalamiento en $a = 4$ y en $a = -3$

uno como $0{,}5r(t) = 0{,}5t$. La figura 2.19 muestra el resultado de estos escalamientos en comparación con la señal original. En color rojo vemos a la señal $r(t)$, en color verde a la señal $2r(t)$ y en color morado a la señal $-0{,}5r(t)$.

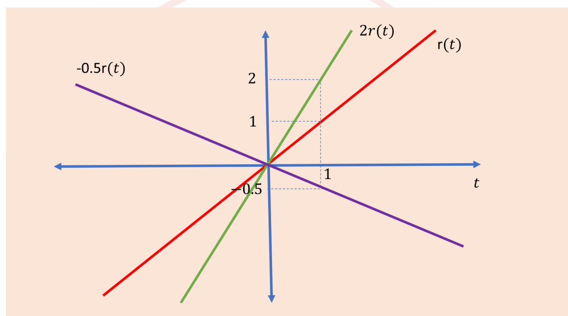


Figura 2.19: Una rampa unitaria y su escalamiento en $a = 2$ y en $a = -0{,}5$

Algo a señalar en este caso es que escalar una rampa unitaria resulta en otra rampa, solo que ya no es unitaria, puesto que su pendiente deja de ser unitaria. Ahora hagamos un escalamiento a una señal exponencial real. Por ejemplo, para la señal e^{-2t} podemos hacer un escalamiento como en $2e^{-2t}$ y también otro escalamiento como $-0{,}5e^{-2t}$. El resultado lo vemos en la figura 2.20. En esta figura la señal original aparece en color rojo, la versión escalada en un factor de 2 en color verde y la versión escalada en un factor $a = -0{,}5$ aparece en color morado.

Vemos en la figura 2.20 que escalar un exponencial decreciente real produce otro exponencial decreciente real, lo que cambia es la amplitud de la señal al iniciar en $t = 0$. La caída a cero de la señal no se ve afectada, puesto que eso no lo controla la amplitud. Ahora escalemos una señal senoidal. Supongamos que la seNal original es $sen(\omega t)$, entonces tendremos dos versiones escaladas, la primera es $2sen(\omega t)$ y la

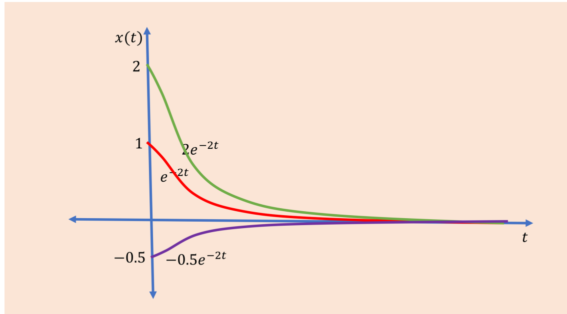


Figura 2.20: Una seNal exponencial real y su escalamiento en $a = 2$ y en $a = -0{,}5$

segunda es $-0{,}5sen(\omega t)$. En la figura 2.21 aparecen las señales original en color rojo, escalada en $a = 2$ en color verde y la escalada en $a = -0{,}5$ en color morado.

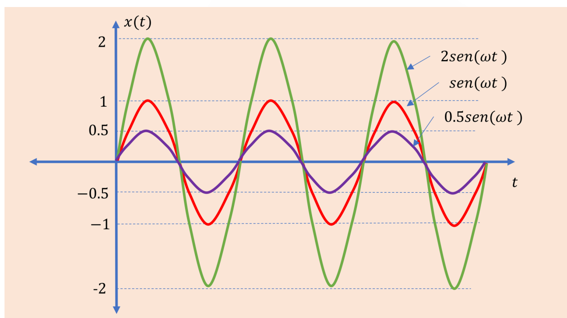


Figura 2.21: Un señal senoidal y su escalamiento en $a = 2$ y en $a = -0{,}5$

Vemos en la figura 2.21 como el escalamiento de la señal original solo afecta la amplitud de la señal, pero no su frecuencia ω.

2.4.2. El desplazamiento temporal

Esta es otra operación muy importante, le llamamos desplazamiento temporal porque consiste en mover en el tiempo a la señal, es decir, adelantamos o retrasamos en el tiempo a la señal. Así, si $x(t)$ es la señal original, la versión desplazada k unidades de tiempo (segundos casi siempre) se denota $x(t - k)$. Un desplazamiento temporal implica sustituir la variable de tiempo t, por su versión desplazada $t - k$ en la expresión de la señal. Consideremos lo siguiente: si $k > 0$ lo que tenemos en un atraso de la señal en k segundos, si $k, 0$ entonces tenemos un adelanto de k segundos de la señal.

Por ejemplo, la versión desplazada k segundos de un escalón unitario la calculamos de la siguiente manera. Si ocurre que:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 1 \text{ para } t \geq 0 \end{cases}$$

Entonces su versión desplazada k segundos es:

$$\mu(t-k) = \begin{cases} 0 \text{ para } (t-k) < 0 \\ 1 \text{ para } (t-k) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ para } t < k \\ 1 \text{ para } t \geq k \end{cases}$$

En cuanto al término de desplazamiento k. En la expresión $x(t-k)$ vemos que este aparece como un término que se resta al instante t. Es importante tener esto en cuenta, pues de ello depende comprender cuando un desplazamiento es una delante y cuando un retraso. Normalmente en la señal original $x(t)$ el valor $x(0)$ aparece cuando $t = 0$, obvio. Pero en la versión desplazada $x(t-k)$ el valor $x(0)$ aparece cuando $t = k$, es decir que $x(0)$ aparece en $x(t-k)$ k segundos después de lo que lo hace en $x(t)$, por eso es un retraso. En cambio, si $k < 0$ la versión desplazada k unidades de tiempo es $x(t+k)$, y el valor $x(0)$ en esta señal desplazada aparece cuando $t = -k$, es decir, k segundos antes de lo que lo hace en $x(t)$, por eso se le considera un adelanto.

Veamos primero dos casos de desplazamiento sobre un escalón unitario. La figura 2.22 muestra al escalón unitario $\mu(t)$ en color rojo.Muestra también un retraso del escalón unitario de 2 segundos, como en $\mu(t-2)$ en color verde y muestra también un adelanto de 3 segundos como en $\mu(t+3)$ en color morado.

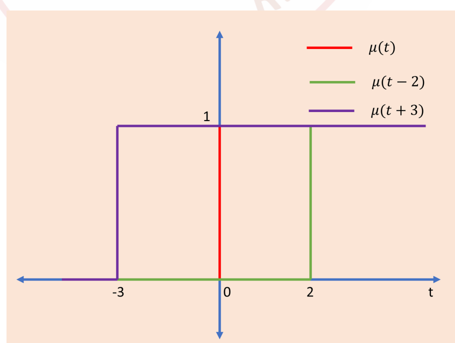


Figura 2.22: Un señal escalón unitario y su desplazamiento en $k = 2$ y en $k = -3$

Ahora veamos el efecto del desplazamiento temporal en una rampa. Por definición una rampa es $r(t) = t$, entonces si retrasamos k segundos a la rampa tendríamos

$r(t-k) = t-k$, si debemos adelantar la señal entonces usaríamos $-k$ para tener un adelanto de k segundos, como en $r(t-(-k)) = r(t+k) = t+k$. En la figura 2.23 podemos apreciar una comparación entre una rampa regular $r(t)$ en color rojo, su versión atrasada $k=2$ segundos en color verde, y su versión adelantada $k=-3$ segundos en color morado.

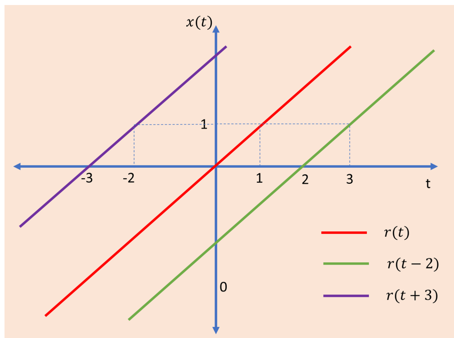


Figura 2.23: Un señal rampa unitaria y su desplazamiento en $k=2$ y en $k=-3$

En la figura 2.23 se nos indica en donde, en cada rampa, se tiene el valor unitario, es decir, en donde en cada rampa se cumple con $r(t-k) = 1$. Así es muy claro cual de las rampas está adelantada y cual está retrasada.

Por otro lado ¿que pasa si desplazamos temporalmente una señal exponencial? Primero que nada, en una señal exponencial vamos a asumir que existe solo para $t \geq 0$. Por lo que cuando se dice que $x(t) = Ae^{\alpha t}$ es siempre para $t \geq 0$. Ahora, si le desplazamos k segundos, tenemos que $x(t-k) = Ae^{\alpha(t-k)}$ para $t-k \geq 0$, o lo que es lo mismo para $t \geq k$. En la figura 2.24 se ilustra la comparación de un exponencial decayente $x(t) = Ae^{-2t}$ en color rojo, una versión atrasada en $k=3$ segundos, en color verde, y una versión adelantada en $k=-2$ segundos, esta última en color morado.

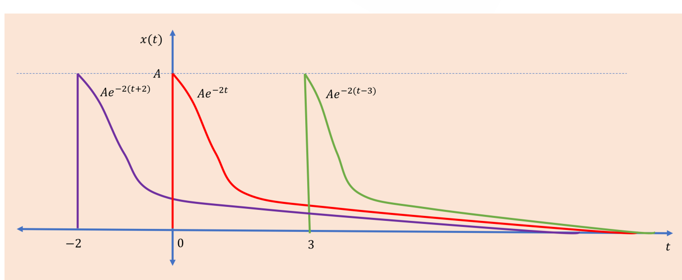


Figura 2.24: Un señal exponencial decayente y su desplazamiento en $k=3$ y en $k=-2$

Pasemos ahora a estudiar como ocurre un desplazamiento temporal en una señal senoidal, o cosenoidal. Ya sabemos que una señal cosenoidal es un caso especial de la senoidal, por lo que limitaremos esta discusión a únicamente las señales senoidales. El primero aspecto a notar aquí es que en una señal senoidal no se habla de desplazamiento temporal, sino de un desfase de la señal. Ese desfase se mide en radianes o grados, para nosotros serán radianes y se denota θ en lugar de k. Así que si la señal original es $Asen(\omega t)$, su versión desfasada θ radianes se denota $Asen(\omega t + \theta)$.

En una señal periódica con periodo $T = 2\pi$, los desfasamientos siempre se indican en múltiplos de este periodo. De manera que un desfazamiento ocurre en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Estos desfasamientos siempre se miden con respecto al valor de la señal original justo en $t = 0$. Para comprender mejor esto tenemos a la figura 2.25, en donde podemos comparar la señal original $Asen(\omega t)$ en color rojo y nótese su inicio marcado por un pequeño círculo rojo. También apreciamos una versión desfasada $\theta = \pi/2$ radianes en color verde y con su inicio de referencia marcado con un círculo verde, y una versión desfasada $3\pi/2$ radianes en color morado con su inicio marcado por un círculo morado. En cada señal se muestra su ciclo en color sólido y el resto de la señal con líneas punteadas.

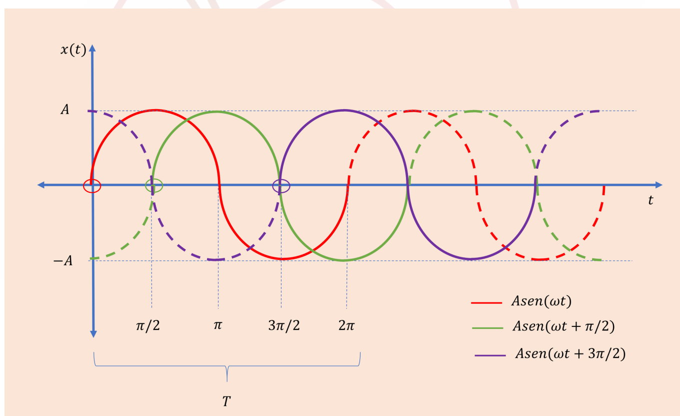


Figura 2.25: Un señal senoidal y su desfasaientos en $\theta = \pi/23$ y en $\theta = 3\pi/2$

En señales periódicas es común que los desplazamientos se expresen siempre de forma positiva, como si fueran atrasos de la señal, pues así es más fácil manejarlos y representarlos, pues como basta con representar un ciclo de estas señales para conocer toda la señal, así que, en ese sentido, todo desfasamiento se entiende como un retraso.

2.4.3. Composición de señales

Otra operación importante en lo que a simular señales es aquella de la composición de señales. Por composición nos referimos a formar una nueva señal a partir de la suma, resta y multiplicación de señales previas. En principio, cualquiera de estas tres formas de composición no serían difíciles de realizar, pues dado $x_1(t)$ y $x_2(t)$, bastaría que hiciéramos lo siguiente:

1. Para sumar $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$.
2. Para restar $x_2(t)$ de $x_1(t)$ haríamos $x_3(t) = x_1(t) - x_2(t)$.
3. Y para multiplicar haríamos $x_3(t) = x_1(t) * x_2(t)$.

El problema de esto es que si una de las señales $x_1(t)$ o $x_2(t)$ tienen al menos una discontinuidad, entonces las operaciones deben contemplar esa o esas discontinuidades para generar una nueva señal que las hereda. En estos casos, al menos cuando compongamos señales de manera formal, debemos seguir el siguiente proceso:

1. Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ nuestras señales a componer.
2. Acomodemos todas las discontinuidades de $x_1(t)$ y todas las de $x_2(t)$ en una lista de discontinuidades t_d de manera ordenada, de la menor a la mayor, De esta forma lo que nos queda en ts es una lista de instantes que representan una discontinuidad ya sea en $x_1(t)$ o en $x_2(t)$.
3. Ahora para cada $t_i \in t_d$ hagamos un intervalo como en $inte = [t_{i-1}, t_i]$ y hagamos $x_3(t) = x_1(t) oper x_2(t)$ para $t \in inte$ y en donde $oper \in \{+, /, *\}$.

La idea detrás de todo esto, es que la composición de señales ocurre por intervalos, cada intervalo está delimitado por las discontinuidades en cada señal, por eso lo primero que hacemos es tomar todas las discontinuidades en $x_1(t)$, luego todas las de $x_2(t)$, y las acomodamos de menor a mayor para formar el conjunto o lista de discontinuidades t_d. Con eta lista, ahora si, tomamos cada par de discontinuidades seguidas para formar un intervalo, y listo.

Componiendo $3\mu(t) - 3\mu(t-3)$

Solo como un ejemplo muy sencillo, ti tenemos que componer dos escalones, el primero esa $3\mu(t)$ y el segundo es $3\mu(t-3)$. Esta composición debe restar el segundo del primero. Por lo que podemos pensar en esto como en $3\mu(t) + (-1)3\mu(t-3)$.Por definición tenemos que:

$$3\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 3 \text{ para } t \geq 0 \end{cases}$$

Mientras que:

$$(-1)(3)\mu(t-3) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 3 \\ -3 \text{ para } t \geq 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, la señal $3\mu(t)$ tiene una discontinuidad en $t_1^1 = 0$ mientras que $(-1)(3)\mu(t-3)$ tiene una discontinuidad es $t_2^1 + 3$. Lo primero que hacemos es acomodar las discontinuidades de menor a mayor en una lista $t_d = \{0, 3\}$. Así que la composición la formamos en tres intervalos:

1. Para $t < 0$ tenemos $3\mu(t) = 0$ y $-3\mu(t-3) = 0$, por lo que $3\mu(t) - 3\mu(t-3) = 0$ para $t < 0$.
2. Para $0 \leq t \leq 3$ tenemos $3\mu(t) = 3$ y $-3\mu(t-3) = 0$, por lo tanto $3\mu(t) - 3\mu(t-3) = 3 + 0 = 3$ para $0 \leq t \leq 3$.
3. Y por último, para $t > 3$ tenemos que $3\mu(t) = 3$ mientras que $-3\mu(t-3) = -3$, por lo que $3\mu(t) - 3\mu(t-3) = 3 - 3 = 0$.

Juntando estos resultados concluimos que:

$$3\mu(t) - 3\mu(t-3) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 3 \text{ para } 0/leqt \leq 3 \\ 0 \text{ para } t > 3 \end{cases}$$

Y la figura 2.26 muestra la gráfica de las dos señales originales y la señal que resulta de la composición. En color rojo podemos ver a $3\mu(t)$, en color verde vemos a $-3\mu(t-3)$ y en color morado vemos a la composición $3\mu(t) - 3\mu(t-3)$.

Nota: este proceso que hemos visto y que consiste en separar por intervalos la composición de las señales, debido a los instantes de discontinuidad solo es útil cuando se efectúa tal composición de manera analítica, porque en nuestras simulaciones todo, desde las señales hasta la manera en que implementamos las composiciones ocurre de forma discreta, muestra por muestra, y como tal, la composición no exige tales consideraciones. En nuestras simulaciones todo tiene forma de lista, las señales. principalmente, por lo que operar con ellas ocurre elemento por elemento, muestra por muestra y sin importar en donde esas señales son discontinuas.

2.5. Simulando señales de prueba

Vamos a utilizar Python para simular señales de prueba, todas las que hemos analizado hasta ahora. Para esto, además de Python, debemos instalar los siguientes paquetes:

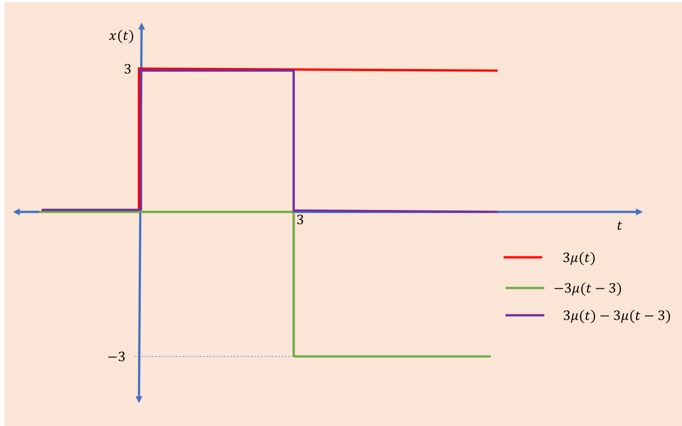


Figura 2.26: La composición $3\mu(t) - 3\mu(t-3)$

1. El paquete Numpy, para que Python tenga un ambiente numérico similar al de Matlab.
2. El paquete Scipy, para aumentar las capacidades numéricas de Python, sobre todo en la cuestión estadística.
3. El paquete Matplotlib, para tener un ambiente de generación de gráficas y figuras similar al de Matlab.

Entonces, un script en Python para simular una señal es, al menos como el mostrado en el listado 2.1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as mpl

## Funcion que simula la senal
def senal(ts):
    x=[]
    for t in ts:
        x.append(t)
    return x

## Esta es nuestra funcion principal
def main(ini,fin,delta):
    ts=np.arange(ini,fin,delta)
    x=senal(ts)
    mpl.plot(ts,x)
    mpl.grid()
    mpl.title('Senal simulada')
    mpl.xlabel("Tiempo")
```

```
19     mpl.ylabel("Volts")
20     mpl.savefig("figEj1.png",format='png',dpi=300)
21     mpl.show()
22
23 ## Este es el punto de entrada al programa
24 if __name__=="__main__":
25     main(0,10,0.1)
```

Listado 2.1: El mínimo script de simulación de señales

En el listado 2.1 tenemos el mínimo script para simular señales. Este script en particular en realidad no simula ninguna señal, tan solo produce en la lista x un seguidor de los instantes de simulación de este ejemplo en particular. Este script no simula ninguna señal en especial, solo pretende darnos un esquema general de simulación. Lo único a resaltar aquí es como generamos los instantes de simulación: en una lista que contiene en orden ascendente todos los instantes que se pueden generar desde ini hasta fin con saltos o pasos de $delta$. También está el hecho de que esa lista llamada ts con los instantes de simulación se genera con una función del paquete Numpy, razón por la que en la línea 1 incluimos tal paquete.

Luego está el detalle de como desplegar el resultado de simular una señal. Para eso usamos el paquete Matplotlib, por eso lo incluimos en el script justo en la línea 2, aunque mas bien lo que estamos incluyendo es una servicio llamada Pyplot, que es quien específicamente se encarga de manejar los gráficos. Este paquete nos permite despegar una gráfica en pantalla o imprimir la gráfica a un archivo.

Nota: hemos incluido las librerías Numpy y Matplotlib.pyplot, pero en realidad las hemos renombrado como np y mpl respectivamente. Esto, porque es mucho mas fácil invocarlas con un nombre corto.

Entre las líneas 5 y 9 tenemos una función llamada `senal` que es quien propiamente simula la señal de interés. Toma como argumento al menos los instantes de simulación, y regresa como resultado la lista con la señal simulada. Obviamente, adentro de la función usamos los instantes en ts para dar lugar a la señal x, que al final es lo que esta función regresa.

Entre las lineas 12 y 20 está la función principal del programa. Esta función se encarga de darle forma a todo el proceso de simulación, que consiste en mandar llamar a la función que simula la señal, y después desplegar en pantalla la gráfica de la misma. De ser necesario también la guarda en un archivo, en nuestro caso en la línea 19 guardamos la gráfica en un archivo con formato PNG. Entre las líneas 12 y 20 usamos Matplotlib.pyplot, ahora renombrado a mpl, para primero graficar la señal simulada con respecto a los instantes de simulación, luego adornamos la gráfica con un cuadriculado en la línea 16, luego le grabamos una leyenda a la gráfica en la línea 17, una leyenda al eje X en la línea 18 y otra leyenda para el eje Y en la linea

19. En la línea 20, finalmente, desplegamos la figura en pantalla después de haberla impreso en un archivo llamado "figEj1.png".

En las líneas 24 y 25 tenemos lo que oficialmente es el punto de entrada de la ejecución del script. Nótese que la función main de este ejemplo exige tres argumentos de entrada, que son ini el instante de inicio de la simulación, fin el instante de finalización de la simulación, y $delta$, el tamaño de paso entre instantes de simulación.

2.5.1. Simulando un escalón

Vamos a simular todas nuestras señales de prueba usando como parámetros los siguiente:

1. Los instantes de simulación ts.
2. Su factor de escalamiento a.
3. Su término de desplazamiento o desfasamiento k o $theta$.

De manera que si una señal no tiene un escalamiento, hacemos que este parámetros sea unitario, si una señal no está desplazada o desfasada hacemos este parámetro cero. Con esto podemos plantear una función para simular un escalón no necesariamente unitario, sino con escalamiento a y desplazamiento k, como en el listado 2.2. Aquí estamos simulando $10\mu(t-3)$ junto con $\mu(t)$ para $-10 \leq t \leq 10$ usando pasos de $delta = 0{,}1$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as mpl

## Esta funcion simula un escalon
def escalon(ts,a,k):
    x=[]
    for t in ts:
        if t<k:
            x.append(0)
        else:
            x.append(a)
    return x

## Esta es la funcion principal del programa
def main(ini,fin,delta):
    ts=np.arange(ini,fin,delta)
    x1=escalon(ts,10,5)
    x2=escalon(ts,1,0)
    mpl.plot(ts,x1)
    mpl.plot(ts,x2)
```

```
    mpl.grid()
    mpl.title('ESCALON NORMAL Y ESCALON CHIDO')
    mpl.xlabel('Tiempo')
    mpl.ylabel('Respuesta')
    mpl.savefig('ejem2.png',format='png',dpi=300)
    mpl.show()

## El punto de entrada al programa
if __name__=='__main__':
    main(-10,10,0.1)
```

Listado 2.2: Script para simular un escalón

El resultado de la simulación es una gráfica como el de la figura 2.27.

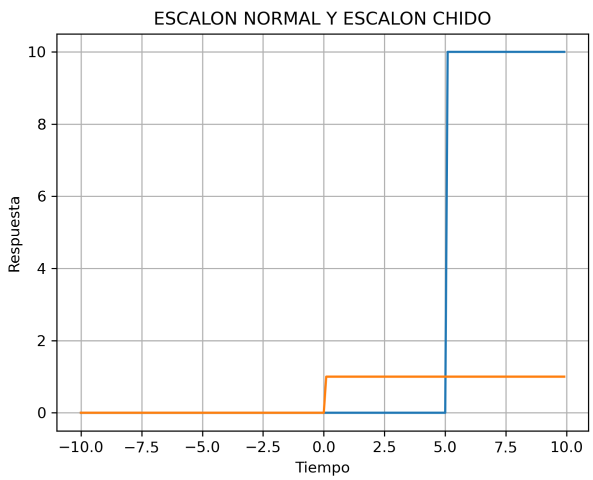


Figura 2.27: Simulando los escalones $10\mu(t-3)$ y $\mu(t)$ para $-10 \leq t \leq 10$

2.5.2. Simulando una rampa

Ahora vamos a simular una rampa, de nuevo, con todos los argumentos que hemos comentado. La función que simula a la rampa es la mostrada en el listado 2.3. En este script vamos a simular dos rampas, una normal $r(t)$ y otra que está retrasada 3 segundos y no tiene escalamiento, como en $r(t-3)$, y simulamos ambas rampas para $-10 \leq t \leq 10$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as mpl
```

```

## Esta funcion simula una rampa
def rampa(ts,a,k):
    x=[]
    for t in ts:
        x.append(a*(t-k))
    return x

## Esta es la funcion principal del programa
def main(ini,fin,delta):
    ts=np.arange(ini,fin,delta)
    x1=rampa(ts,1,0)
    x2=rampa(ts,1,3)
    mpl.plot(ts,x1)
    mpl.plot(ts,x2)
    mpl.grid()
    mpl.title('RAMPA NORMAL Y RAMPA CHIDA')
    mpl.xlabel('Tiempo')
    mpl.ylabel('Resspuesta')
    mpl.savefig('ejem3.png',format='png',dpi=300)
    mpl.show()

## Punto de entrada al prgorama
if __name__=='__main__':
    main(-10,10,0.1)
```

Listado 2.3: Script para simular una rampa

El resultado de la simulación es una gráfica como el de la figura 2.28.

2.5.3. Simulando un exponencial real

Ahora vamos a simular dos tres señales exponenciales reales. La primera es la señal $x_1(t) = 10e^{-2t}$, la segunda es $x_2(t) = 10e^{-2(t-3)}$ y la tercera es la exponencial $x_3(t) = 8e^{-4(t+3)}$, las tres señales las simulamos para $-10 \leq t \leq 10$ con $delta = 0{,}1$. El script que simula estas tres señales se presenta como el listado 2.4.

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as mpl

## Esta es la funcion que simula un exponencial
def expo(ts,alpha,a,k):
    x=[]
    for t in ts:
        if t<k:
```

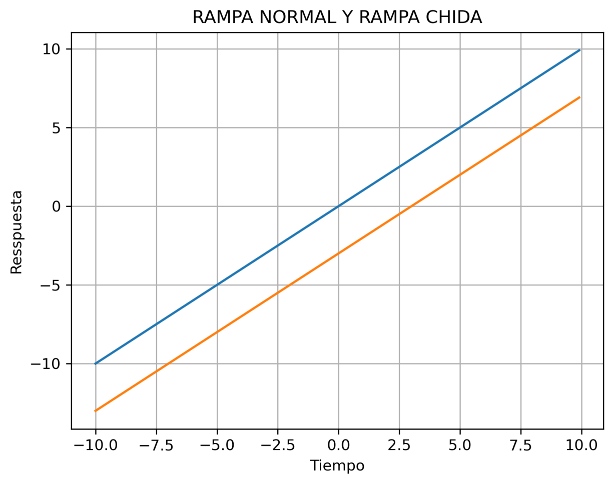


Figura 2.28: Simulando dos rampas $r(t)$ y $r(t-3)$ para $-10 \leq t \leq 10$

```
            x.append(0)
        else:
            x.append(a*math.exp(alpha*(t-k)))
    return x

## Esta es la funcion prinicpal del programa
def main(ini,fin,delta):
    ts=np.arange(ini,fin,delta)
    x1=expo(ts,-2,10,0)
    x2=expo(ts,-2,10,3)
    x3=expo(ts,-4,8,-3)
    mpl.plot(ts,x1,ts,x2,ts,x3)
    mpl.grid()
    mpl.title('UN ESCALON NORMAL, OTRO CHIDO Y OTRO NO TAN CHIDO')
    mpl.xlabel('Tiempo')
    mpl.ylabel('Respuesta')
    mpl.legend((r'$10e^{-2t}$',r'$10e^{-2(t-3)}$',r'$8e^{-4(t+3)}$'))
    mpl.savefig('ejem5.png',format='png',dpi=300)
    mpl.show()

## Punto de entrada al programa
if __name__=='__main__':
    main(-10,10,0.1)
```

Listado 2.4: Script para tres exponenciales reales

El resultado de la simulación es una gráfica como el de la figura 2.29.

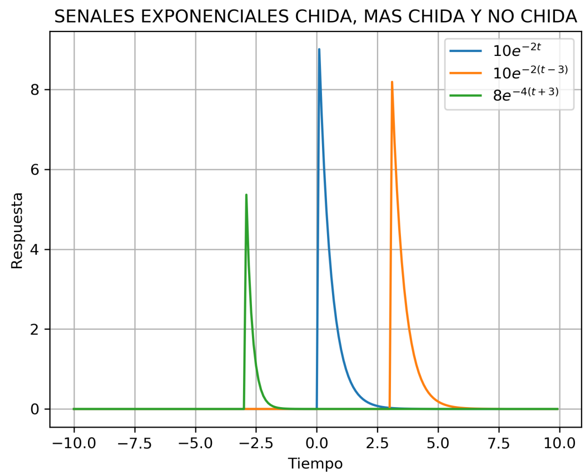


Figura 2.29: Tres exponeciales $10e^{-2t}$, $10e^{-2(t-3)}$ y $8e^{-4(t+3)}$para $-10 \leq t \leq 10$

2.5.4. Simulando una señal senoidal

Ahora pasemos a simular una señal senoidal. Primero simularemos $x_1(t) = 10sen(\omega_1 t)$ con $f_1 = 4$ hzy también simularemos $20sen(\omega_2 t)$ con $f_2 = 8$ hz. Lo anterior implica que $\omega_1 = 8\pi t$ mientras que $\omega_2 = 16\pi t$. Simularemos ambas señales para $-5 \leq t \leq 15$. El listado 2.5 muestra el script con la simulación de este ejemplo.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as mpl

## Esta funcion genera una senal senoidal
def seno(ts,a,f,theta):
    x=[]
    for t in ts:
        x.append(a*np.sin((2*np.pi*f*t)+theta))
    return x

## Esta funcion genera una senal cosenoidal
def seno(ts,a,f,theta):
    x=[]
    for t in ts:
        x.append(a*np.cos((2*np.pi*f*t)+theta))
    return x
```

```python

## Esta es la funcion principal del programa
def main(ini,fin,delta):
    ts=np.arange(ini,fin,delta)
    x1=seno(ts,10,0.25,0)
    x2=seno(ts,20,0.125,np.pi/2)
    mpl.plot(ts,x1)
    mpl.plot(ts,x2)
    mpl.grid()
    mpl.title('SENAL SENO CHIDA Y OTRA MAS CHIDA')
    mpl.xlabel('Tiempo')
    mpl.ylabel('Respuesta')
    mpl.legend((r'$10sen(\omega_1 t)$',r'$20sen(\omega_2 t+\pi/2)$'))
    mpl.savefig('ejem6.png',format='png',dpi=300)
    mpl.show()

## Este es el punto de entrada al programa
if __name__=='__main__':
    main(-5,15,0.1)
```

Listado 2.5: Script para dos senales senoidales

El resultado de la simulación es una gráfica como el de la figura 2.30.

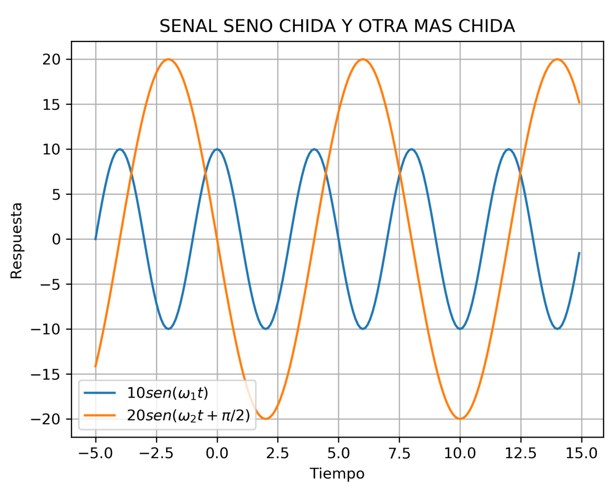


Figura 2.30: Dos senoidales $10sen(\omega_1 t)$, $20sen(\omega_2 t + \pi/2)$ para $-5 \leq t \leq 15$

Con esto hemos visto como simular las principales señales de prueba. A continuación veremos como simular otro tipo de señal que no califican como señales de prueba, de hecho no son señales instantáneas como todas las que hemos analizado y simulado hasta ahora, sino que mas bien quedan en la categoría de señales aleatorias.

2.5.5. Simulando una composición

Ahora supongamos dos señales, la primera es $x_1(t) = 5sen(\omega t)$ con $f_1 = 8$ hz. La segunda señal es $x_2(t) = 2\mu(t-3)$. Queremos formar una nueva señal $x_3(t) = x_1(t) * x_2(t)$, y debemos simular estas señales para $-5 \leq t \leq 5$. Analíticamente, sabemos que:

$$2\mu(t-3) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 3 \\ 2 \text{ para } t \geq 3 \end{cases}$$

Por lo tanto la composición $x_1(t) * x_{(}t) = 2\mu(t-3) * 5sin(\omega t)$, que si lo resolvemos analíticamente todo nos resulat como en la siguiente expresión:

$$x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 3 \\ 10sen(16\pi t) \text{ para } t \geq 3 \end{cases}$$

Esta señal es simulada en el siguiente script, cuyo listado es el mostrado en 2.6.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as mpl

## Esta es la funcion que simula un escalon
def escalon(ts,a,k):
    x=[]
    for t in ts:
        if t<k:
            x.append(0)
        else:
            x.append(a)
    return x
## Esto simula una senal senoidal
def seno(ts,a,f,theta):
    x=[]
    for t in ts:
        x.append(a*np.sin((2*np.pi*f*t)+theta))
    return x
## Esta funcion implementa la multiplicacion de dos listas
def multi(s1,s2):
    x=[]
    for x1,x2 in zip(s1,s2):
        x.append(x1*x2)
```

```python
    return x
## Esta es la funcion prinicpal del programa
def main(ini,fin,delta):
    ts=np.arange(ini,fin,delta)
    x1=escalon(ts,2,3)
    x2=seno(ts,5,8,0)
    x3=multi(x1,x2)
    mpl.plot(ts,x1)
    mpl.plot(ts,x2)
    mpl.plot(ts,x3)
    mpl.grid()
    mpl.title('COMPOSISCION DE UNA SENAL CHIDA Y OTRA NO TANTO')
    mpl.xlabel('Tiempo')
    mpl.ylabel('Respuesta')
    mpl.legend((r'$x_1(t)$',r'$x_2(t)$',r'$x_3(t)$'))
    mpl.savefig('ejem7.png',format='png',dpi=300)
    mpl.show()
## Este es el punto de entrada al programa
if __name__=='__main__':
    main(-5,5,0.1)
```

Listado 2.6: Script para dos senales senoidales

El resultado de la simulación es una gráfica como el de la figura 2.31.

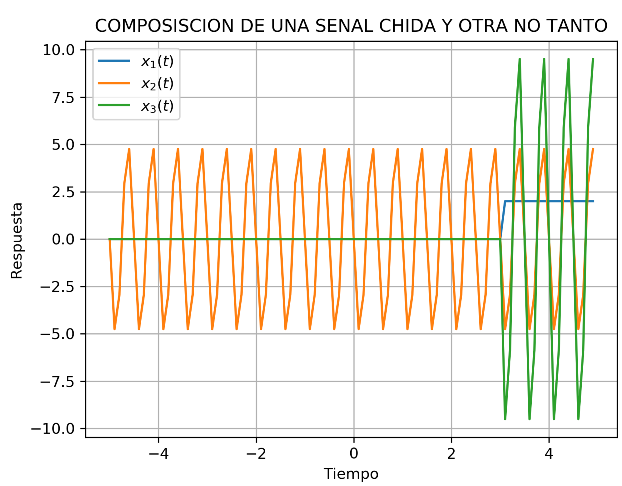


Figura 2.31: Composición $x_3(t) = x_1(t) * x_2(t)$ para $-5 \leq t \leq 5$

En este caso la composición ocurre como una multiplicación de las dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Esta composición también puede ocurrir a manera de suma de ellas o de la resta de una para con la otra. Sin embargo, lo que todas ellas tienen en común es que cualquier composición se realiza elemento con elemento de ambas listas, y no a modo de multiplicación, suma o resta de arreglos, por lo que muy probablemente esa operación en particular de composición deba ser implementada en una función de usuario, como es nuestro caso con la función multi entre las líneas 20 y 24 del script.

2.6. Series de Fourier

Sabemos que por lo común las señales de prueba y otro tipo de señales que no califican como de prueba tienen formas mas bien sencillas, otras no tanto. De cualquier manera es bueno conocer que siempre podemos aproximar una señal a partir de la agregación de dos o mas señales mas simples. Este es el principio de las series de Fourier, podemos formar cualquier señal a partir de la agregación de infinitas señales mas simples llamadas armónicos. Esto es algo parecido a la expresión 2.18.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_i \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \tag{2.18}$$

En la expresión 2.18 vemos que la aproximación a la señal $x(t)$ ocurre sumando infinitas señales de la forma $\rho_i \left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$), cada una de ellas es conocida como la k-ésima armónica de la sumatoria. Ahora, en esta señal tan especial tenemos $a_k \in \mathbb{R}$, el coeficiente real de la k-ésima armónica y tenemos T, que es el periodo de la señal $x(t)$. Ahora vamos con mas detalles. ¿Exactamente como es la k-ésima armónica $\rho_k(\frac{2\pi kt}{T})$? En realidad esta suele ser una señal compuesta por una parte par y otra impar, o una real y otra imaginaria, el hecho es que es una señal compuesta por dos señales complementarias u ortogonales. Nosotros nos atenemos a la siguiente forma para cada armónica:

$$\rho_k \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) = a_k cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) + b_k sen \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \tag{2.19}$$

Según esta forma de las armónicas, cada una de ellas tiene una parte real, que es la formada por la señal coseno, y una imaginaria, que es la parte de la señal seno aunque no la indique como imaginaria de manera explícita. Todo esto implica que la aproximación final a $x(t)$ es como en la expresión 2.20.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k sen\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right) \quad (2.20)$$

Vemos que cada termino de la aproximación en 2.20 tiene un coeficiente a_k para $k = 0, 1, \ldots, \infty$ o b_j parta $j = 1, 2, \ldots, \infty$. Estos son siempre coeficientes reales, y para calcularlos usamos las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt \quad (2.21)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt \quad (2.22)$$

$$b_j = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sen\left(\frac{2\pi jt}{T}\right)dt \quad (2.23)$$

Vemos que en cualquier aproximación el primer término es $a_0/2$, la razón de esto es que este es el llamado término de DC, o término de corriente directa, o término constante para finalizar. En realidad es algo así como el promedio de la señal en un periodo T, lo que resulta obvio al analizar la expresión 2.20. Algunas señales únicamente están formadas por las partes reales, por lo que los coeficientes b_j son siempre nulos, otras señales solo están formadas por las partes imaginarias, ,por lo que los coeficientes a_k son todos nulos, otras señales tienen ambas partes y aún otras señales no contienen el término DC.

Nota: la sumatoria en 2.20 implica usar una infinita cantidad de armónicos para que la aproximación sea idéntica a la señal $x(t)$, naturalmente nosotros no podemos agregar una cantidad infinita de estos términos. A este respecto solo podemos indicar que entre mas términos se agreguen mejor será la aproximación.

2.6.1. Aproximando una señal

Sea la señal $x(t)$ una señal definida como en la siguiente expresión:

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 3 \text{ para } 0 \leq t \leq 0{,}25 \\ 0 \text{ para } 0{,}25 \leq t \leq 0{,}5 \end{cases}$$

Es decir, esta señal la podemos considerar como una con un periodo $T = 0{,}5$ segundos, de los cuales la mistad del periodo la señal toma un valor de 3 y la otra mitad del tiempo toma un valor de 0. De manera que solo en el intervalo $0 \leq t \leq 0{,}25$ la señal toma un valor no nulo. Vamos a aproximar la señal usando los primeros cinco armónicos únicamente, como en la siguiente expresión:

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{5} \left(a_k cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k sen\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right)$$

Como estamos considerando que $T = 0{,}5$, la expresión anterior se simplifica bastante, como en:

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{5} (a_k cos(4\pi kt) + b_k sen(4\pi kt))$$

Si esto lo desarrollamos a esos cinco armónicos, nos quedamos con la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) \approx & \frac{a_0}{2} + a_1 cos(4\pi t) + b_1 sen(4\pi t) + a_2 cos(8\pi t) + b_2 sen(8\pi t) \\ & + a_3 cos(12\pi t) + b_3 sen(12\pi t) + a_4 cos(16\pi t) + b_4 sen(16\pi t) \\ & + a_5 cos(20\pi t) + b_5 sen(20\pi t) \end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular cada uno de los coeficientes implicados en esta última expresión, comenzamos calculando el coeficiente del término de DC:

$$a_0 = \frac{2}{0{,}5} \int_0^{0{,}25} 3dt = 12t\Big|_0^{0{,}25} = 12(0{,}25 - 0) = 3$$

Esta aproximación entonces, tiene el término de DC con un coeficiente $a_0 = 3$. Ahora vamos a calcular el coeficiente a_1 de la siguiente manera:

$$a_1 = 4\int_0^{0{,}25} 3cos(4\pi t)dt = \frac{3}{\pi} sen(4\pi t)\Big|_0^{0{,}25} = \frac{3}{\pi}(sen(\pi) - sen(0)) = 0$$

Así que $a_1 = 0$. Ahora vamos a calcular el coeficiente b_1 de la siguiente manera:

$$b_1 = 4\int_0^{0{,}25} 3sin(4\pi t)dt = -\frac{3}{\pi} cos(4\pi t)\Big|_0^{0{,}25} = -\frac{3}{\pi}(cos(\pi) - cos(0)) = \frac{6}{\pi}$$

Así que $b_1 = \frac{6}{\pi}$. Ahora vamos a calcular a_2 de la siguiente manera:

$$a_2 = 4\int_0^{0,25} 3cos(8\pi t)dt = \frac{3}{2\pi}sen(8\pi t)\Big|_0^{0,25} = \frac{3}{2\pi}\Big(sen(2\pi) - sen(0)\Big) = 0$$

Así que $a_2 = 0$. Ahora vamos a calcular el coeficiente b_2 de la siguiente manera:

$$b_2 = 4\int_0^{0,25} 3sen(8\pi t)dt = -\frac{3}{2\pi}cos(8\pi t)\Big|_0^{0,25} = -\frac{3}{2\pi}\Big(cos(2\pi) - cos(0)\Big) = 0$$

De manera que $b_2 = 0$, ahora calcularemos el coeficiente a_3 de la siguiente manera:

$$a_3 = 4\int_0^{0,25} 3cos(12\pi t)dt = \frac{1}{\pi}sen(12\pi t)\Big|_0^{0,25} = \frac{1}{\pi}\Big(sen(3\pi) - sen(0)\Big) = 0$$

De nuevo tenemos que un coeficiente es nulo, ahora con $a_3 = 0$. Pasamos ahora a calcular el coeficiente b_3 de la siguiente manera:

$$b_3 = 4\int_0^{0,25} 3sen(12\pi t)dt = -\frac{1}{\pi}cos(12\pi t)\Big|_0^{0,25} = -\frac{1}{\pi}\Big(cos(3\pi) - cos(0)\Big) = \frac{2}{\pi}$$

Así que $b_3 = \frac{2}{\pi}$. Ahora calcularemos el coeficiente a_4 de la siguiente manera:

$$a_4 = 4\int_0^{0,25} 3cos(16\pi t)dt = \frac{3}{2\pi}sen(16\pi t)\Big|_0^{0,25} = \frac{3}{2\pi}\Big(sen(4\pi) - sen(0)\Big) = 0$$

De manera que $a_4 = 0$, ahora vamos a calcular b_4 como en la siguiente expresión:

$$b_4 = 4\int_0^{0,25} 3sen(16\pi t)dt = -\frac{3}{2\pi}cos(16\pi t)\Big|_0^{0,25} = -\frac{3}{2\pi}\Big(cos(4\pi) - cos(0)\Big) = 0$$

Entonces tenemos $b_4 = 0$. Vamos a calcular ahora a_5 de la siguiente manera:

$$a_5 = 4\int_0^{0,25} 3cos(20\pi t)dt = \frac{3}{5\pi}sen(20\pi t)\Big|_0^{0,25} = \frac{3}{5\pi}\Big(sen(5\pi) - sen(0)\Big) = 0$$

Pues resulta que $a_5 = 0$. Vamos a calcular ahora el coeficiente b_5 de la siguiente manera:

$$b_5 = 4\int_0^{0,25} 3sen(20\pi t)dt = -\frac{3}{5\pi}cos(20\pi t)\Big|_0^{0,25} = -\frac{3}{5\pi}\Big(cos(5\pi) - cos(0)\Big) = \frac{6}{5\pi}$$

Así que $b_5 = \frac{6}{5\pi}$. Al final nos quedamos con que la mayoría de los coeficientes en esta aproximación son nulos. Solo permanecen $a_0 = 3$, $b_1 = \frac{6}{\pi}$, $b_3 = \frac{2}{\pi}$ y $b_5 = \frac{6}{5\pi}$. Entonces la expresión para aproximar $x(t)$ es la siguiente:

$$x(t) \approx \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}sen(4\pi t) + \frac{2}{\pi}sen(12\pi t) + \frac{6}{5\pi}sen(20\pi t) \tag{2.24}$$

Ahora que ya tenemos una expresión para la aproximación a $x(t)$ con una serie de Fourier, como en la expresión 2.24, ahora simulemos esta señal, que al final es una composición de un escalón con tres señales senoidales. El script 2.7 muestra la implementación de esta aproximación a $x(t)$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as mpl

## Esto simula un escalon
def escalon(ts,a,k):
    x=[]
    for t in ts:
        if t<k:
            x.append(0)
        else:
            x.append(a)
    return x

## Esto simula una senal senoidal
def seno(ts,a,f,theta):
    x=[]
    for t in ts:
        x.append(a*np.sin((2*np.pi*f*t)+theta))
    return x

## Esto implementa una suma de senales
def suma(s1,s2):
    x=[]
    for x1,y1 in zip(s1,s2):
        x.append(x1+y1)
    return x

## Esta es la funcion principal del programa
def main(ini,fin,delta):
```

```
    ts=np.arange(ini,fin,delta)
    u1=escalon(ts,1.5,0)
    s1=seno(ts,6/np.pi,2,0)
    s2=seno(ts,2/np.pi,6,0)
    s3=seno(ts,6/(5*np.pi),10,0)
    tmp1=suma(u1,s1)
    tmp2=suma(tmp1,s2)
    x=suma(tmp2,s3)
    mpl.plot(ts,x)
    mpl.plot(ts,u1)
    mpl.plot(ts,s1)
    mpl.plot(ts,s2)
    mpl.plot(ts,s3)
    mpl.grid()
    mpl.title('APROXIMANDO X(T) CHIDA')
    mpl.xlabel('Tiempo')
    mpl.ylabel('Respuesta')
    mpl.legend((r'$x(t)$',r'$1.5\mu(t)$',r'$\frac{6}{\pi}sen(4\pi t)$',r'$\frac{2}{\pi}sen(12\pi t)$',r'$\frac{6}{5\pi}sen(20\pi t)$'))
    mpl.savefig('ejem8.png',format='png',dpi=300)
    mpl.show()

## Este es el punto de entrada al programa
if __name__=='__main__':
    main(0,0.5,0.01)
```

Listado 2.7: Script para una aproximación a una señal

Cabe resaltar que en esta implementación hemos simulado cada armónica de la siguiente manera: el término DC $\frac{3}{2}$ lo hemos implementado simplemente como un escalón $1{,}5\mu(t)$, los otros tres armónicos los hemos implementado como señales senoidales, en donde la amplitud corresponde al coeficiente b_i para $i = 1, 2, 5$, según lo obtenido antes. En cada señal senoidal usamos como frecuencia el factor $f_i = 1/T$ siendo $T = 0{,}5$, es decir que en los tres términos con señal senoidal el periodo es 2, además hemos cuidado que en cada uno de ellos la frecuencia sea múltiplo del índice del armónico correspondiente. El resultado de la simulación es una gráfica como el de la figura 2.32.

Es factible verificar como la aproximación a la señal $x(t)$, en color morado en la figura 2.32 es una buena aproximación en el sentido de que ya recuerda la forma de la función $x(t)$ ideal. Entre mas armónicos se utilicen mucho mejor será la aproximación, esto es un hecho.

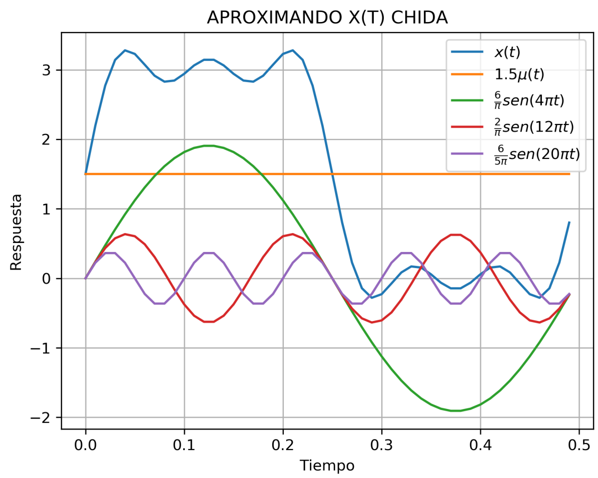


Figura 2.32: Aproximación a $x(t)$ para $0 \leq t \leq 0{,}5$

2.7. Señales aleatorias

Todas las señales que hasta ahora hemos simulado son señales deterministas, de hecho todas ellas son señales instantáneas, pues para cada una de ellas tenemos una expresión que nos permite calcular su valor para cualquier instante de tiempo t. En ocasiones esto no es posible. Existen situaciones en donde el valor de una señal no es conocido con toda exactitud, y en el mejor de los casos, lo único que podemos decir de ello es aproximadamente que podemos esperar de su valor. En tales casos recurrimos a simular este tipo de señales como variables aleatorias.

Cuando se utiliza un variable aleatoria o VA, para dejarlo en pocas letras, lo que se establece es un comportamiento en el valor que uno espera obtener en una señal. En este sentido, podríamos afirmar que algunos de estos "comportamientos usuales" son los siguientes:

1. El valor de $x(t)$ es cualquiera en el intervalo $[a, b]$.
2. El valor de $x(t)$ es parecido al valor c.

A la primer forma de comportamiento se denomina comportamiento con distribución uniforme, a la segunda se le denomina comportamiento con distribución normal. Si la señal $x(t)$ tiene un comportamiento con distribución uniforme, decimos entonces que $x(t)$ es una VA uniforme entre $[a, b]$, mientras que si $x(t)$ tiene un comportamiento con distribución normal, decimos que $x(t)$ es una VA normal con media c y varianza σ^2.

2.7.1. Antecedentes de VAs

Comenzamos simplificando un poco nuestra representación formal de las cosas. Por ejemplo tenemos a la señal $x(t)$. Si esta señal es una VA, bien podemos simplificar su representación. Sabemos que la señal $x(t)$ depende del tiempo t, así que demos esto por hecho y de aquí en adelante hablamos de la señal X en lugar de la señal $x(t)$. Esto es así porque normalmente una VA se representa como una letra mayúscula, mientras que los valores que toma se representan como una letra minúscula o un número.

Existen algunos conceptos que debemos aclarar antes de entrar de lleno a estudiar lo que una VA es y como se utiliza. Son conceptos muy fundamentales pero que vale la pena analizar a fondo. Por ejemplo, el concepto de evento. Llamamos evento al hecho de que una señal X tome el valor específico $X = a$. Es decir, hablamos del evento de que $x(t) = a$.

Y luego asociado al evento de que $X = a$ tenemos una probabilidad $p(X = a)$. Sabemos que la VA X puede tomar valores en un intervalo de ellos. Entonces la probabilidad $p(X = a)$ nos indica cual es la posibilidad de que X tome ese valor específico a de entre varios valores que podría tomar. La probabilidad $p(X = a)$ es una cuantificación de esa posibilidad. Esta cuantificación debe cumplir con lo siguiente:

1. La probabilidad de un evento $X = a$ es una cantidad real como en $0 \leq p(X = a) \leq 1$
2. Si X toma valores en el intervalo $[a, b]$ entonces $\int_a^b p(X = \tau)d\tau = 1$

Esto implica que las probabilidades de un evento son siempre cantidades reales entre 0 y 1 inclusive, y que la suma de las probabilidades de todos los eventos nunca es mayor a 1. Esto es fundamental en teoría de probabilidad.

Funciones de densidad y de densidad acumulada

Supongamos que tenemos un evento. Nuestra señal $x(t)$ tiene la posibilidad de tomar el valor x, es decir, tenemos el evento de que $X = x$. Entonces es claro que la probabilidad de este evento es $p(X = x)$. Es muy común tener una expresión funcional para calcular esta probabilidad, esto es así porque la VA X asociada a nuestra señal tiene un cierto comportamiento que es muy conocido, es decir, tiene un distribución de probabilidad conocida.

En realidad tenemos dos formas funcionales para expresar la probabilidad de que un evento como $X = x$ ocurra. Estas dos formas funcionales son:

1. La función de densidad $f(x) = p(X = x)$.
2. Y la función de densidad acumulada $F(x) = p(X \leq x)$.

Nótese que la función de densidad $f(x)$ implica un cálculo puntual, es decir, colo calcula la probabilidad de que $X = x$, y nada mas, porque en cambio, la función de densidad acumulada calcula una probabilidad de un intervalo, es decir $X \leq x$, por lo cual es común que esta probabilidad sea calculada como una integración, como en la expresión siguiente:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau$$

Números aleatorios y seudoaleatorios

Supongamos que tenemos que crear una secuencia de, digamos k números reales $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Decimos que esta es una secuencia de k números aleatorios si no podemos explicarnos como esta secuencia fue creada, mas que con la mera aleatoriedad de las cosas. Es decir que no nos podemos explicar, y sobre todo, no podemos reproducir la misma secuencia de k números usando nuestros propios recursos y conocimientos.

Ahora, decimos que esos k números son una secuencia de números seudoaleatorios si existe un algoritmo que usando una semilla puede crearlos. Cualquiera que no conozca la semilla y el algoritmo pensará que son aleatorios cuando en realidad no lo son, son seudoaleatorios.

Normalmente los números seudoaleatorios suelen ser tal que $0 \leq r \leq 1$, y a un programa que puede crear una secuencia de ellos lo llamamos generador de números seudoaleatorios G. Mas adelante veremos como usar uno para simular señales aleatorias.

Generadores de números seudoaleatorios

Entonces, si queremos lograr una secuencia de k números seudoaleatorios necesitamos un generador de números seudoaleatorios o un PRNG, por sus siglas en inglés. La idea detrás de un PRNG es que sea una entidad o máquina capaz de generar secuencias de números que para aquel que no esté familiarizado con nuestro algoritmo, parece a todas luces una secuencia de números verdaderamente aleatorios.

Si vemos al PRNG como una especie de caja negra, veríamos que su único argumento de entrada es la semilla o estado inicial x_0, y que su respuesta es una secuencia de k números seudoaleatorios $r_1, r_2, \ldots, r_k$, como en la figura 2.33.

Ahora, un buen generador de números seudoaleatorios tiene tres propiedades que son básicas e ilustrativas acerca de como queremos que un PRNG funcione:

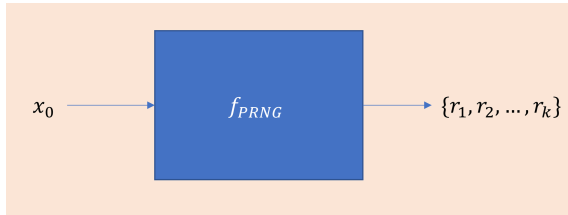


Figura 2.33: Un generador de números seudoaleatorios

1. La cantidad k entre mas grande mejor, es decir, la cantidad de números diferentes que un generador debe producir debería ser mas bien grande, es decir, es eficiente.
2. Una secuencia de k números diferentes debería poderse generar una vez mas y en cualquier momento,ç si conocemos la semilla x_0. Es decir, es determinista.
3. En todo PRNG se puede generar una secuencia de k números diferentes, después de lo cual la misma secuencia vuelve a generarse una vez mas desde el principio. Esto, a pesar de todo es deseable siempre y cuando k sea una cantidad muy grande. A esa cantidad k de números diferentes que se pueden generar antes de que la secuencia se repita se llama periodo del PRNG. Es decir que los PRNG deben ser periódicos, solo que con un periodo grande.

Algo que debería ser obvio luego de leer estas tres características detrás de los PRNG es que cada uno de ellos tiene un periodo, esto se refiere a la cantidad de números diferentes que se pueden generar antes de que repita eventualmente la misma secuencia exacta de números. Esto es inevitable y lo mejor que podemos hacer es asegurarnos de que el periodo sea lo mas grande posible para que a los ojos de los demás el PRNG genere secuencias que parezcan realmente aleatorias. Además, el algoritmo en el que se basa en PRNG debe ser capaz de reiniciar la secuencia de números una y otra vez cuando sea necesario y siempre generando los mismos números cada vez que se reinicia.

El algoritmo lineal congruente

De todos los algoritmos o métodos que existen para implementar un PRNG el mas popular es, definitivamente, el algoritmo lineal congruencial. Esta es un algoritmo que genera siempre un nuevo número a partir del anterior o de algunos de los anteriores en la secuencia. El primer número se genera a partir de la semilla del generador. La expresión que describe el comportamiento de todo generador lineal congruente se presenta en la expresión 2.25.

$$X_{n+1} = mod(aX_n + c, n) \tag{2.25}$$

En la expresión 2.25 tenemos que $m \in \mathbb{Z}$ es el módulo, $a \in \mathbb{Z}$ es el multiplicador y $c \in \mathbb{Z}$ es el incremento.Si ocurre que $c = 0$ entonces tenemos un generador congruencial multiplicativo, y si $c \neq 0$ tenemos un generador congruencial mixto.

Nota: téngase mucho cuidado con la elección de valores para estos tres parámetros, pues la calidad del PRNG depende en gran medida de esta elección. Una mala elección hace que el periodo del PRNG sea demasiado corto, y por lo tanto, hace que el PRNG sea virtualmente inútil. Algunos consejos acerca de como elegir estos tres parámetros son los siguientes:

1. Hacer $c = 0$ y m un número primo.
2. Hacer $c = 0$ y m una potencia de 2.
3. Si deseamos que $c \neq 0$, entonces al menos deberíamos tener en cuenta que:
   a) m y c deberán ser relativamente primos.
   b) $a - 1$ deberá ser divisible entre todos los factores primos de m.
   c) $a - 1$ es deberá ser divisible entre 4 si m es divisible entre 4.

Todos esto requerimientos son conocidos como el teorema de Hull-Dobell. Una forma de PRNG muy simple y efectivo es el llamado generador de Lehmer. Este es un generador multiplicativo congruente en el que $m = 2^{31} - 1$ y $a = 7^5$.

Un ejemplo: el PRNG de Lehmer

Una de las formas mas sencillas de generador de números seudoaleatorios más comunes es el conocido como generador de Lehmer. En realidad es un generador congruencial multiplicativo en donde $c = 0$ y m un número primo. Tenemos muchas opciones para los parámetros a y c. Pero para ilustrar un ejemplo ilustrativo muy sencillo, hagamos que $m = 13$ y $a = 6$ y $x_0 = r_0 = 1$. La tabla 2.1 muestra el desempeño de este generador durante su periodo de 10 números diferentes únicamente.

Podemos ver de acuerdo con lo que la tabla 2.1 muestra, que el generador de Lehmer es una forma muy simple de implementar un generador PRNG. El hecho de que el ejemplo específico da lugar a un generador con un periodo muy pequeño no debe desalentar acerca de este tipo de generadores en particular, este periodo tan corto se debe mas que nada a la elección de los valores para a y para m, si se eligen con mas cuidado se puede lograr un generador mucho mas útil que este. El resultado de ejecutar este PRNG en particular es la secuencia con diez números seudoaleatorios siguiente $\{6, 10, 8, 9, 2, 12, 3, 4, 11, 1\}$.

r_{n-1}	$6X_{n-1}\, mod\, 13$	r_n
1	$6(1)\, mod\, 13$	6
6	$6(6)\, mod\, 13$	10
10	$6(10)\, mod\, 13$	8
8	$6(8)\, mod\, 13$	9
9	$6(9)\, mod\, 13$	2
2	$6(2)\, mod\, 13$	12
12	$6(12)\, mod\, 13$	3
3	$6(3)\, mod\, 13$	4
4	$6(4)\, mod\, 13$	11
11	$6(11)\, mod\, 13$	1
1	$6(1)\, mod\, 13$	6

Cuadro 2.1: El generador de Lehmer con $a = 6$ y $m = 13$

Nota: la secuencia que cualquier PRNG genera se corresponde con una serie de números extraídos todos de una distribución uniforme entre 0 y m. En muchos casos se prefiere que los números seudoaleatorios provengan de una distribución normal entre 0 y 1. En este caso basta con dividir cada nuevo número generado entre el módulo m y listo, tenemos un generador de números seudoaleatorios provenientes de una distribución uniforme entre 0 y1.

Nota 2: en realidad, nosotros cuando debamos utilizar un PRNG habremos de utilizar el que incluye el paquete Numpy de Python, en lugar de implementar el nuestro. La razón de esto es que ese PRNG es realmente efectivo, así que no hay necesidad de "reinventar la rueda" implementando uno propio.

2.7.2. VA normal

Esta es quizá el estilo de VA más popular, pues muchos eventos en la naturaleza ocurren con el comportamiento que este tipo de VA describe. Cuando una VA es normal, significa que tiene "preferencia" por un valor central de entre todos los que puede tomar. A ese valor central lo llamamos la media de la distribución y la denotamos como μ. Nótese aquÍ que no hemos mencionado nada sobre un intervalo de valores que la VA pueda tomar, pues ese no es la intención de esta. Mas bien esta variable tiene la idea o la preferencia de tomar un valor específico y no un intervalo. Ahora, ,puesto que es una VA, no es seguro que siempre tome ese valor, puede tomar otros, la cuestión es que estos otros valores tienden a parecerse en la medida de lo posible a ese valor central μ. Que tanto es diferente el valor que la VA tome de su valor central es algo que controla otro parámetro de este tipo de VA, y le llamamos la varianza y la denotamos como σ^2. Además llamamos desviación estándar a la raíz cuadrada de la varianza, es decir, a σ. La desviación estándar cuantifica que tanto los datos que la VA puede tomar se dispersan o alejan de la media.

Siendo entonces X una VA normal ¿con que probabilidad toma X un valor? Esto lo describimos con la expresión 2.26.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{2.26}$$

En el caso de que X sea una VA normal, esta probabilidad $f(x)$ es mayor en tanto x sea mas parecido a μ. La varianza σ^2 controla que tanto le es permitido a la VA X tomar valores distantes a la media μ. Una varianza σ^2 muy grande, le permite tomar valores más distantes, una varianza σ^2 pequeña significa que X solo puede tomar valores muy cercanos a la media μ, como lo ilustra la figura 2.34.

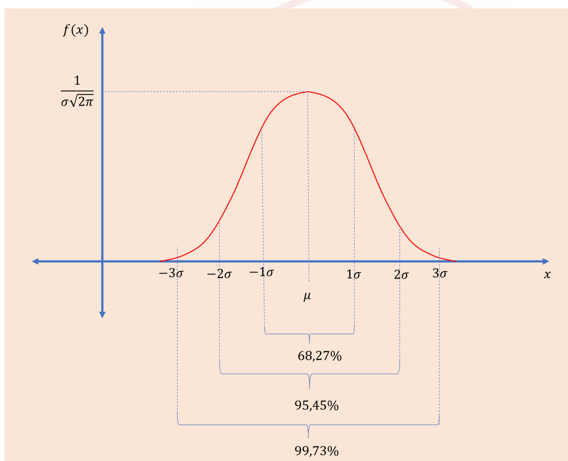


Figura 2.34: La función de probabilidad normal

Algo muy importante en toda VA normal, es que de acuerdo con la forma de su función de probabilidad $f(x)$, la mayor probabilidad la mantiene el valor central μ, conforme uno se aleja de la media, la probabilidad disminuye de manera exponencial. Ahora, con respecto a la desviación estándar, podemos afirmar que si nos alejamos de la media μ hasta $\pm 1\sigma$, en ese intervalo tenemos concentrado cerca del 63,27 % de los datos en la distribución. Si nos alejamos hasta $\pm 2\sigma$ tenemos concentrados en ese intervalo cerca de 95,45 % de los datos en la distribución, y si nos alejamos hasta $\pm 3\sigma$ tendremos concentrados cerca del 99,73 % de los datos. Algo que también muestra muy claramente la figura 2.34.

Desde un punto de vista mas práctico, el tener una señal X que se comporta como una VA con distribución normal con media $\mu = c$, significa que cuando la simulemos, digamos, generando k valores de ella, todos ello tienden a parecerse al valor c, que es el valor central. Que tanto esos datos son parecidos o diferentes de la media c, depende de la varianza σ^2 que usemos, si usamos una varianza pequeña, la mayoría de los k datos serían muy parecidos a c, pero si usamos una varianza muy grande algunos de ellos podrían no ser tan similares a c.

Nota: cuando queremos indicar que X es una VA con distribución normal con media μ y varianza σ^2, lo hacemos de la siguiente manera: $X \in N(\mu, \sigma^2)$.

2.7.3. VA uniforme

Otra forma de variable aleatoria es la VA uniforme. Si una señal $x(t)$ se comporta como una VA uniforme, significa que $X = x$ y que x puede tomar cualquier valor adentro de un intervalo $a \leq x \leq b$, y todos con la misma probabilidad. Es decir, la VA uniforme no tiene ninguna preferencia, para ella todos los datos en ese intervalo resultan igual de apetecibles. La función de probabilidad para una VA con distribución normal es la expresada en 2.27.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ para } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ para otro} \end{cases} \tag{2.27}$$

Nótese que en una VA uniforma existe un intervalo de valores que puede tomar, de ellos la cota inferior es a y la superior es b. Cualquier otro valor que pueda existir en ese intervalo es igual de probable de ser tomado por la variable, así que no tiene un valor central ni una varianza ni nada de eso. Si debemos ilustrar el comportamiento de la VA uniforme entre a y b usaríamos una gráfica como la mostrada en la figura 2.35.

Cuando uno habla de tener una señal que se comporta como una VA uniforme entre a y b, lo que uno quiere decir es que si simulamos k valores de esta señal, ellos podrían ser cualquier valor entre a y b, cualquiera de ellos, sin clara preferencia por alguno ni nada.

Nota: si una señal $x(t)$ dice comportarse como una VA con distribución uniforme entre a y b, esto lo denotamos como $X \in U[a, b]$.

2.7.4. Simulando señales aleatorias

Recordemos que en este punto hemos usado la notación X para describir a una señal aleatoria, pues consideramos que esta es una VA. Esto podría considerarse un

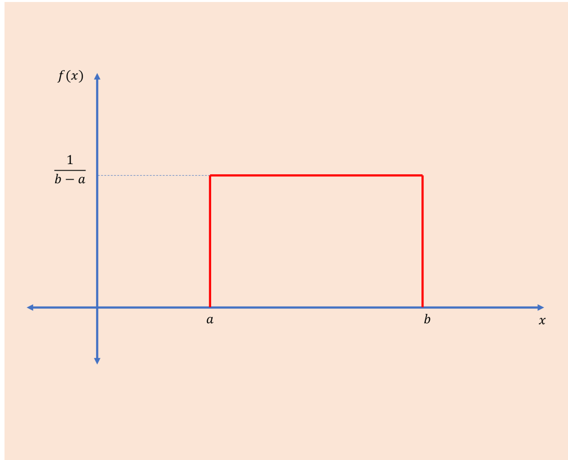


Figura 2.35: La función de probabilidad uniforme

abuso de notación, pero es como procederemos en adelante. Por otro lado debemos hacer una definición oportuna, y esta corresponde con la de un evento Montecarlo. Un evento Montecarlo es uno que ocurre o se controla a partir de la generación de números seudoaleatorios. Es decir que una parte medular para que este tipo de eventos tengan lugar consiste en tener a la mano un generador de números seudoaleatorios. Nuestra herramienta de trabajo básica para esto es la transformada inversa. Esta es una metodología que nos permite simular cualquier variable aleatoria, es decir, simular nuestra señal aleatoria, usando para ello dos artilugios, primero, la función de densidad acumulada $F(x)$ de la VA con distribución conocida, y segundo, un generador PRNG con buen desempeño.

La transformada inversa

Supongamos que tenemos una señal $x(t)$ que es una señal aleatoria y misma que representamos como X. Esta señal tiene una función de distribución acumulada $F(x)$ conocida. Esto último es clave, porque esta técnica para simular una Va y por lo tanto, una señal aleatoria consiste en un razonamiento muy sencillo:

$$X = F^{-1}(r) \tag{2.28}$$

En la expresión 2.28 X es nuestra señal o Va que queremos simular mientras que $r \in U[0,1]$, es decir que r es un número seudoaleatorio generado con un PRNG como los analizados antes. Pero analicemos esto con mejor detalle. Sabemos que $0 \leq F(x) \leq 1$, por lo que es totalmente factible tomar un número $r \in U[0,1]$

y considerar que este es un valor de probabilidad para una función de densidad acumulada. Luego, si en efecto r lo consideramos como el argumento de tal función, el valor de la VA X que estamos simulando sería ese para el que r es el argumento de $F(.)$. Véase la figura 2.36 para una representación gráfica de este proceso.

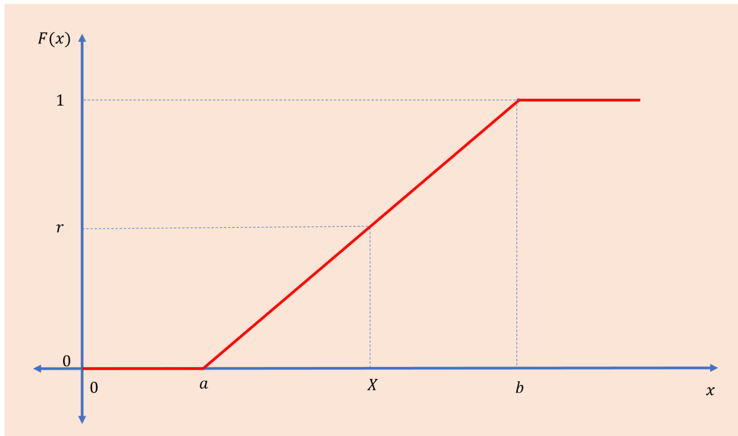


Figura 2.36: la transformada inversa $X = F^{-1}(r)$

Este procedimiento es realmente simple. para generar un valor de la VA X cuya función de distribución acumulada es $F(x)$ hacemos lo siguiente:

1. Generar $r \in U[0, 1]$.
2. Hacer $X = F^{-1}(r)$.
3. Reportar X

Claro que todavía falta indicar exactamente como es $F^{-1}(.)$, es decir, la inversa de la función de distribución acumulada de la VA X. la forma exacta de esta función depende en gran medida del tipo de VA que es nuestra señal. Por ejemplo, si X tiene distribución uniforme como en $X \in U[a, b]$ entonces para simular a X mediante la transformada inversa partimos que de:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} d\tau = \frac{1}{b-a} \tau \Big|_a^x = \frac{1}{b-a}(x-a) \tag{2.29}$$

Ahora ya tenemos una expresión para $F(.)$, la función de densidad acumulada. Ahora necesitamos una expresión para $F^{-1}(.)$, la inversa de la función de densidad acumulada. Para esto requerimos despejar x en la expresión para $F^{-1}(.)$, si es que esto es posible. En este caso y como podemos verificar en la expresión 2.29 es realmente simple despejar x, lo que resulta en la expresión 2.30.

$$X = F^{-1}(r) = (b - a)r + a \tag{2.30}$$

Nótese que lo único que hemos hecho para llegar a la expresión 2.30 a partir de la expresión 2.29 es despejar x además de sustituir $F(x)$ por r, y siendo r un número seudoaleatorio producto de un PRNG. El listado 2.8 muestra una simulación de tres valores para una señal representada por la VA X con distribución uniforme entre 1 y 10, esto es $X \in U[1, 10]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as mpl

## Esta la funci;on que simula una VA uniforme entre a y b
def uniforme(a,b):
    resp=np.round(((b-a)*np.random.uniform())+a)
    return resp

## Esta es la funcion prinicipal del programa
def main(a,b):
    X1=uniforme(a,b)
    X2=uniforme(a,b)
    X3=uniforme(a,b)
    print('Simulando tres valores uniforme entre '+str(a)+' y '+str(
   b)+' = '+str(X1)+','+str(X2)+','+str(X3))

## Este es el punto de entrada al programa
if __name__=='__main__':
    main(1,12)
```

Listado 2.8: Simulando una VA uniforme

Al ejecutar este script vemos el resultado mostrado en la figura 2.37.

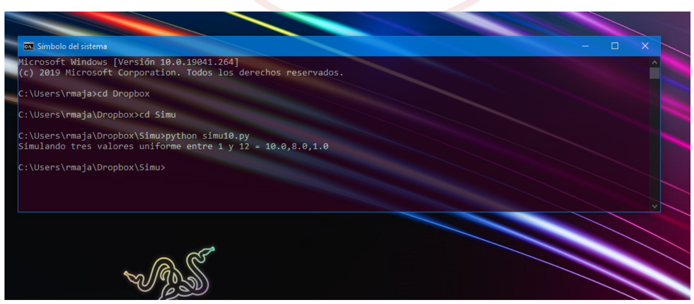


Figura 2.37: Simulando una VAS uniforme entre 1 y 10

En esta implementación, en el listado 2.8 anterior, vemos que el PRNG utilizado es el que incluye el paquete Numpy, lo hemos invocado como `np.random.uniform()`, pues esta es la forma estándar de llamarlo para que produzca una cantidad seudoaleatoria $r \in U[0,1]$. También debe tenerse en cuenta que nosotros hemos optado por redondear la cantidad que produce el aplicar la expresión 2.30, pues en este ejemplo en particular requerimos que las cantidades generadas en $X \in U[1,12]$ sean necesariamente enteras.

2.7.5. El caso de la VA normal

Ahora, si queremos simular una VA normal, tenemos un gran problema no podemos usar la transformada inversa para simular una VA con distribución normal. La razón de esto yace en el hecho de que la integral con la que calculamos la función e distribución acumulada no tiene forma cerrada. Esto es, la expresión $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau$ no tiene una solución que nos permita despejar x de ella. Luego, no podemos utilizar la transformada inversa para simular una señal $x(t)$ que se comporte como una VA con distribución normal.

El teorema del límite central

Este es un teorema que nos viene muy útil ahora que buscamos otro método para simular una VA con distribución normal. Este teorema nos dice una cosa muy interesante: ... sumar n VAs todas con la misma distribución y cuya distribución tiene una media mu_D y una varianza σ_D^2, todas y cada una de esas muestras son independientes una de las otras, produce una VA con distribución normal con media $\mu = \mu_D$ y varianza $\sigma^2 = \frac{\sigma_D^2}{n}$..., o algo así, mas o menos. Es decir que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i \in D(\mu_D, \sigma_D^2) = N(\mu = \mu_D, \sigma^2 = \frac{\sigma_D^2}{n}) \tag{2.31}$$

En la expresión 2.31 $D(\mu_D, \sigma_D^2)$ se refiere a una cierta distribución con su media μ_D y varianza σ_D^2 perfectamente conocidas. Vamos ahora a considerar sumar n números seudoaleatorios $r_i \in U[0,1]$ como los que genera un generados PRNG de los que ya vimos antes. En ese caso para una distribución $U[0,1]$ se tiene que $\mu_D = 0{,}5$ y $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$. Por lo tanto hagamos que $n = 12$ en la expresión 2.31, entonces en ese caso tendremos que:

$$\sum_{i=1}^{12} r_i = N(0{,}5, 1)$$

Si el resultado de sumar muchos números uniformes entre 0 y 1 es aproximadamente un número que simula una VA $X \in N(0{,}5, 1)$, entonces si a este último resultado le restamos 0,5 lo que nos resulta es un número z que proviene de una distribución normal con media cero y varianza unitaria, es decir que:

$$\sum_{i=1}^{12} r_i - 0{,}5 = N(0,1)$$

Y por lo tanto, si lo que queremos es simular una VA $X \in N(\mu, \sigma^2)$, lo único que hacemos es multiplicar este último resultado por σ^2 y después sumar μ al resultado anterior y listo. Esto se dice de la siguiente manera:

$$N(\mu, \sigma^2) = \Big(\sum_{i=1}^{12} r_i - 0{,}5\Big)\sigma^2 + \mu = (N(0,1))\sigma^2 + \mu$$

En la expresión anterior $r_i \in U[0,1]$, es decir, es un número generado por un PRNG como los que hemos estado analizando antes. El listado 2.9 muestra la implementación en un script en donde se simulan tres valores para una señal que se comporta como una VA normal con media $\mu = 12$ y varianza $\sigma^2 = 0{,}1$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as mpl

## Esta funcion genera una cantidad ranorm
def ranorm():
    suma=0
    for i in range(12):
        suma=suma+np.random.uniform()
    suma=suma/12
    resp=(suma-0.5)
    return resp

## Esto simula una VA normal con media mu y varianza var
def normal(mu,var):
    return (ranorm()*var)+mu

## Esta es la funcion prinicpal del programa
def main(mu,var):
    X1=normal(mu,var)
    X2=normal(mu,var)
    X3=normal(mu,var)
    print('Tres numeros normales con media '+str(mu)+' y varianza '+str(var)+' son '+str(X1)+','+str(X2)+','+str(X3))
## Este es el punto de entrada al programa
```

```python
if __name__=='__main__':
    main(12,0.1)
```

Listado 2.9: Simulando una VA normal

El resultado de ejecutar este script se muestra en la figura 2.38.

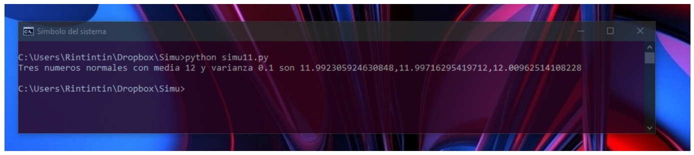


Figura 2.38: Simulando una VA normal