

**Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной
техники**



**Вариант №13
Лабораторная работа №2
по дисциплине
Вычислительная математика**

Выполнил студент группы Р3212
Соколов Анатолий Владимирович
Преподаватель:
Наумова Надежда Александровна

г. Санкт-Петербург
2024г.

Содержание

1	Задание	1
1.1	Вариант	1
1.2	Для нелинейных уравнений должно быть реализовано	1
1.3	Для систем нелинейных уравнений должно быть реализовано	2
1.4	Варианты задания	2
1.5	Цель работы	2
2	Выполнение	3
2.1	Рабочие формулы	3
2.2	Графики функций	3
2.3	Метод простой итерации для x_3	4
2.4	Метод хорд для x_1	5
2.5	Метод Ньютона для x_2	5
2.6	Решение системы нелинейных уравнений	6
2.7	Блок-схема реализованного алгоритма	7
2.8	Ссылка на GitHub с основной реализацией	7
2.9	Примеры и результаты работы программы	8
3	Заключение	10
4	Список литературы	10

1 Задание

Вычислительная часть лабораторной работы должна быть представлена в виде таблиц и отображена только в отчете.

1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (вид уравнения представлен в табл. 2.6)
2. График исследуемой функции отобразить в отчете
3. Определить интервалы изоляции корней
4. Уточнить корни заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$
5. Используемые методы для уточнения каждого из трех корней многочлена представлены в табл. 2.7
6. Вычисления оформить в виде таблиц (табл. 2.1–2.5), в зависимости от заданного метода. Для всех значений в таблицах удерживать 3 знака после запятой;

1.1 Вариант

1.2 Для нелинейных уравнений должно быть реализовано

1. Все численные методы (см. табл. 2.8) должны быть реализованы в виде класса /метода/функции;
2. Пользователь выбирает уравнение, корень/корни которого требуется вычислить (3–5 функций, в том числе и трансцендентные), из тех, которые предлагает программа;
3. Предусмотреть ввод исходных данных (границы интервала, погрешность вычисления) из файла или с клавиатуры по выбору конечного пользователя;
4. Организовать вывод графика функции на исследуемом интервале (с запасом);
5. Выполнить верификацию исходных данных. Необходимо анализировать наличие корня на введенном интервале. Если на интервале несколько корней или они отсутствуют – выдавать соответствующее сообщение. Программа должна реагировать на некорректные введенные данные;
6. Для методов, требующих начальное приближение к корню (методы Ньютона, секущих, хорд с фиксированным концом, простой итерации), выбор начального приближения (а или b) вычислять в программе;

7. Для метода простой итерации проверять достаточное условие сходимости метода на введенном интервале. Если оно не выполняется, выводить соответствующее сообщение. При этом попытаться решить нелинейное уравнение, ограничив итерационный процесс заданным в программе максимальным числом итераций;
8. Для каждого метода учитывать все критерии выхода из итерационного цикла. Проверить, как изменятся результаты, если учитывать либо критерии по аргументу, либо критерии по функции;
9. Предусмотреть вывод результатов (найденный корень уравнения, значение функции в корне, число итераций) в файл или на экран по выбору конечного пользователя;
10. Проанализировать полученные результаты, оценить точность решения задачи;
11. Программа должна быть протестирована на различных наборах данных, в том числе и некорректных.

1.3 Для систем нелинейных уравнений должно быть реализовано

1. Пользователь выбирает предлагаемые программой системы двух нелинейных уравнений (2–3 системы);
2. Организовать вывод графика функций.
3. Ввести начальные приближения с клавиатуры;
4. Для метода простой итерации проверить достаточное условие сходимости. Если оно не выполняется, выводить соответствующее сообщение. При этом попытаться решить систему нелинейных уравнений, ограничив итерационный процесс заданным в программе максимальным числом итераций;
5. Организовать вывод вектора неизвестных: ;
6. Организовать вывод количества итераций, за которое было найдено решение;
7. Организовать вывод вектора погрешностей: ;
8. Проверить правильность решения системы нелинейных уравнений.
9. Программа должна быть протестирована при различных наборах данных, в том числе и некорректных.

1.4 Варианты задания

Выбор метода для вычислительной реализации задачи

$$x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

Метод простой итерации

$$\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ y + \cos(x - 1) = 0.7 \end{cases}$$

Выбор метода для программной реализации задачи

Решение нелинейных уравнений: метод половинного деления, метод секущих, метод простой итерации

Решение систем нелинейных уравнений: метод Ньютона.

1.5 Цель работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

2 Выполнение

$$x_3(2.138, 0)$$

$$x_2(0.345, 0)$$

$$x_1(-7.293, 0)$$

Номер варианта	Крайний правый корень	Крайний левый корень	Центральный корень
13	Метод простой итерации (5)	Метод хорд (2)	Метод Ньютона (3)

Таблица 1: Методы для вычислительной реализации

2.1 Рабочие формулы

Метод Ньютона $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$

Метод половинного деления $x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}$

Метод простой итерации $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, где $\varphi(x) = x$ (x выражается из исходной функции $f(x)$)

Метод хорд $x_{i+1} = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$

2.2 Графики функций

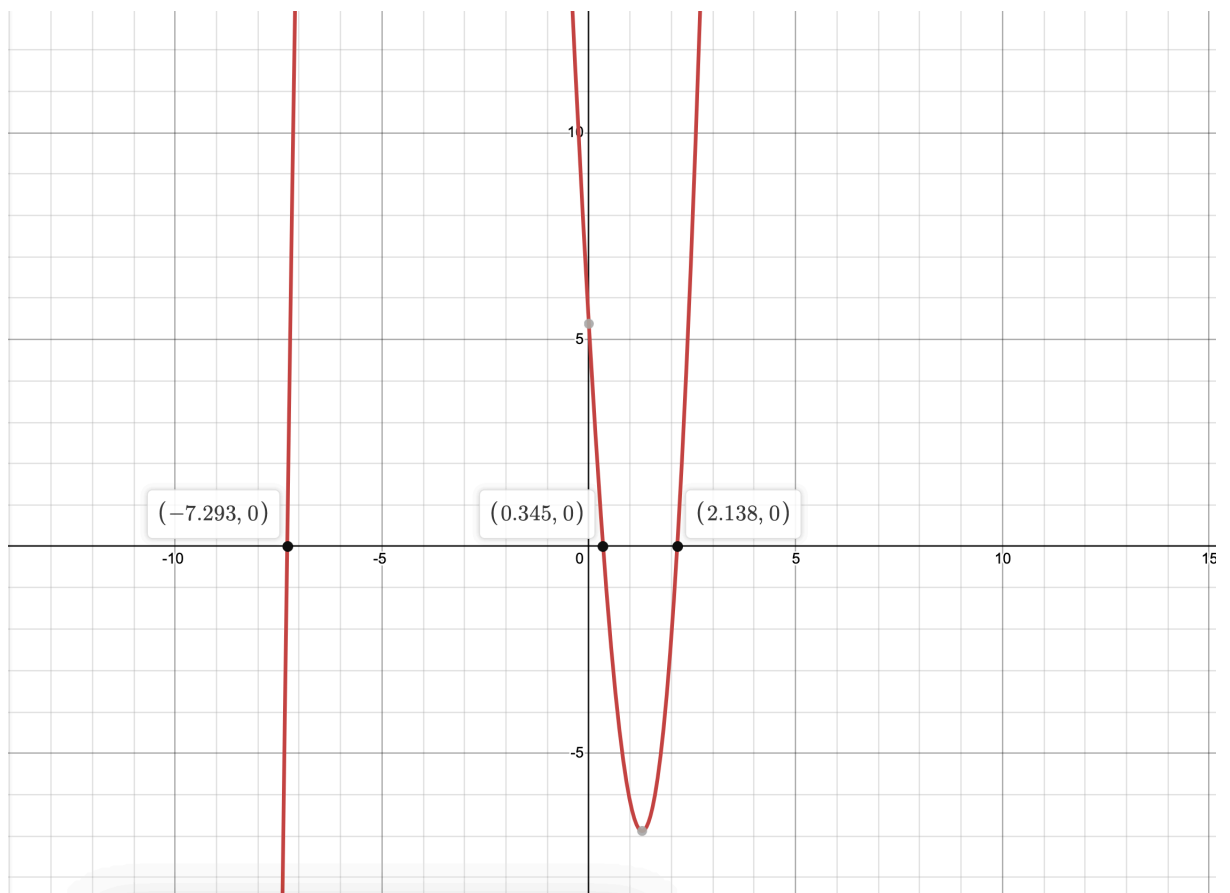


Рис. 1: $x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$

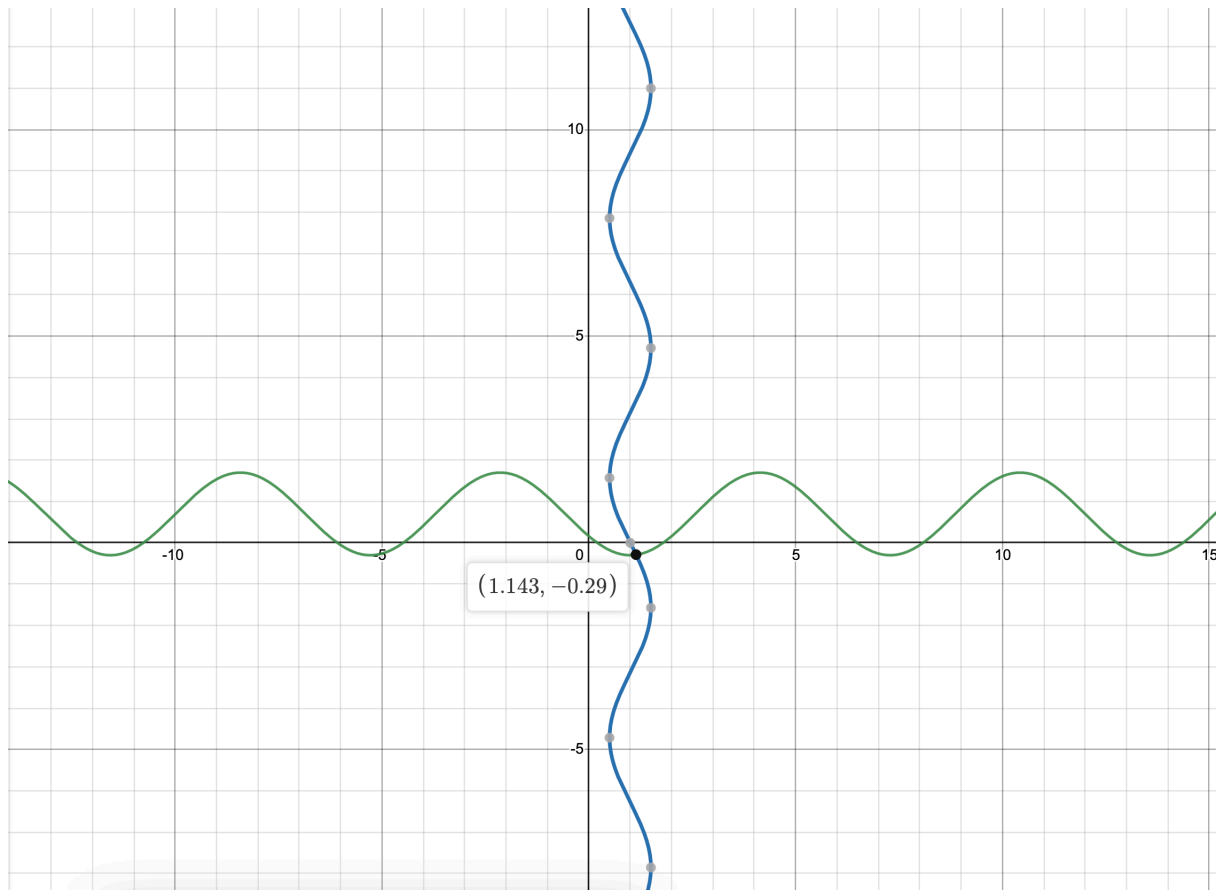


Рис. 2: $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ y + \cos(x-1) = 0.7 \end{cases}$

2.3 Метод простой итерации для x_3

Приведём уравнение:

$$x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

Решим через параметр λ : Пусть начальное приближение будет:

$$a_0 = 1.4; \quad b_0 = 1.9$$

$$f(x) = x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

$$\lambda f(x) = 0 \quad (\lambda! = 0)$$

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x)$$

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$$

$$f'(x) = -17.37 + 9.62x + 3x^2$$

$$f'(1.4) = -17.37 + 9.62 \cdot 1.4 + 3 \cdot (1.4)^2 = 1.978$$

$$f'(2.2) = -17.37 + 9.62 \cdot 2.2 + 3 \cdot (2.2)^2 = 18.314$$

Так как $f'[a, b] > 0$, то рассматриваем:

$$\lambda = -\frac{1}{\max|f'(x)|} = -\frac{1}{18.314} = 0.054$$

Подставим:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x + (-1/(-17.37 + 9.62 \cdot 2.2 + 3 \cdot (2.2)^2)) \cdot (x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38) \\ &= -0.293764 + 1.94845 \cdot x - 0.262641 \cdot x^2 - 0.054603 \cdot x^3 \end{aligned}$$

$$\varphi'(x) = 1.94845 - 0.525282 * x - 0.163809 * x^2$$

Проверим точки:

$$\varphi'(1.4) = 1.94845 - 0.525282 * 1.4 - 0.163809 * 1.4^2 < 1$$

$$\varphi'(2.2) = 1.94845 - 0.525282 * 2.2 - 0.163809 * 2.2^2 < 1$$

Условие сходимости выполняется!

$$x_0 = 1.4$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = -0.293764 + 1.94845 \cdot (1.4) - 0.262641 \cdot (1.4)^2 - 0.054603 \cdot (1.4)^3 = 1.769459008$$

$$x_2 = -0.293764 + 1.94845 \cdot (1.769459008) - 0.262641 \cdot (1.769459008)^2 - 0.054603 \cdot (1.769459008)^3 = 2.0291045184565837$$

$$f(x_2) = (1.769459008)^3 + 4.81 \cdot (1.769459008)^2 - 17.37 \cdot (1.769459008) + 5.38 = -4.755314315965413$$

...

$$f(x) = x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

$$\varphi(x) = -0.293764 + 1.94845 \cdot x - 0.262641 \cdot x^2 - 0.054603 \cdot x^3$$

Номер	x_i	x_{i+1}	$\varphi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$ x_{i+1} - x_i $
0	1.4	1.76945901	2.02910452	-1.7071388	0.36945901
1	1.76945901	2.02910452	2.12230887	-0.2600345	0.25964551
2	2.02910452	2.12230887	2.13649639	-0.0228481	0.09320435
3	2.12230887	2.13649639	2.13773272	-0.0019654	0.01418751
4	2.13649639	2.13773272	2.13782878	-0.0003413	0.00123633

Таблица 2: Уточнение корня уравнения методом простой итерации

2.4 Метод хорд для x_1

Возьму за изолированный интервал $[-8, -7]$

$$x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

Вычисление будем производить по формуле:

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

Номер	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_{i+1} - x_i $
0	-8	-7	-7.2473578	-59.82	19.66	3.24634659	0.24735783
1	-8	-7.2473578	-7.2861002	-59.82	3.24634659	0.49019797	0.03874233
2	-8	-7.2861002	-7.2919027	-59.82	0.49019797	0.07300449	0.00580254
3	-8	-7.2919027	-7.2927658	-59.82	0.07300449	0.01085004	0.00086311

Таблица 3: Уточнение корня уравнения методом хорд

Тогда ответ:

$$x \approx -7.2927658$$

2.5 Метод Ньютона для x_2

Возьму за изолированный интервал $[0.3, 0.4]$

$$x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

Вычисление будем производить по формуле:

$$f(0.3) = 0.3^3 + 4.81 * 0.3^2 - 17.37 * 0.3 + 5.38 = 0.6289$$

$$f(0.4) = 0.4^3 + 4.81 * 0.4^2 - 17.37 * 0.4 + 5.38 = -0.7344$$

Найдем производные:

$$f'(x) = -17.37 + 9.62x + 3x^2$$

$$f'(0.3) = -17.37 + 9.62 * 0.3 + 3 * 0.3^2 = -14.214$$

$$f'(0.4) = -17.37 + 9.62 * 0.4 + 3 * 0.4^2 = -13.042$$

Первая производная сохраняет знаки

Найдем вторую производную

$$f''(x) = 9.62 + 6x \quad f''(0.3) = 9.62 + 6 * 0.3 = 11.42 \quad f''(0.4) = 9.62 + 6 * 0.4 = 12.02$$

Вторая производная сохраняет знаки

Выполняется условие $f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0$, тогда $x_0 = a_0 = 0.3$

Номер	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $
0	0.3	0.34424511	0.6289	20.526	0.04424511
1	0.34424511	0.34506718	0.01126468	21.0371521	0.00082207
2	0.34506718	0.34506747	3.9491E-06	21.0467603	2.8839E-07

Таблица 4: Уточнение корня уравнения методом Ньютона

Условие окончания итер метода соблюдается:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$

Тогда ответ:

$$x \approx 0.34506747$$

2.6 Решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ y + \cos(x - 1) = 0.7 \end{cases}$$

Определяем, что решение системы уравнений находится в квадрате:

$$1 \leq x \leq 2$$

$$-1 \leq y \leq 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{(2 - \sin y)}{2} \\ y = 0.7 - \cos(x - 1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{(2 - \sin y)}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cos(x - 1)$$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| = \left| \frac{(2 - \sin y)}{2} \right| \leq 1$$

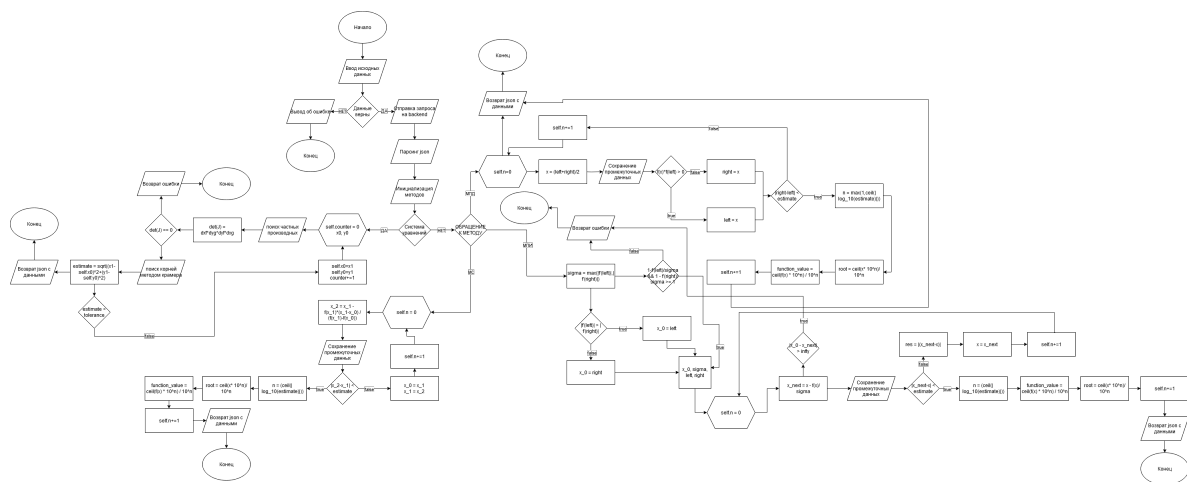
$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial y} \right| = |\cos(x - 1)| \leq 1$$

$$\max_{x \in G} |\varphi'| < 1 \rightarrow \text{Процесс сходящийся}$$

Номер итерации	x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $	$ y_{i+1} - y_i $
0	0	0	1	0.1597	1	0.1597
1	1	0.1597	0.9205	-0.3	0.0795	0.4597
2	0.9205	-0.3	1.1478	-0.2968	0.2273	0.0032
3	1.1478	-0.2968	1.1463	-0.2891	0.0015	0.0077

Таблица 5: Уточнение корня уравнения методом простой итерации

2.7 Блок-схема реализованного алгоритма



2.8 Ссылка на GitHub с основной реализацией

Github

2.9 Примеры и результаты работы программы

Лабораторная работа

«Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений»

Ручной ввод параметров

☒ Система уравнений

Equation ID:

0

starting x

-1

starting y

1

Estimate:

0.1

Method ID:

0

0. Newton

Рассчитать

Ручной ввод параметров

Browse...

No file selected.

Рассчитать

Решение

Скачать

Количество итераций

2

Погрешность:

0.02092659291537198876

y

1.840363188078802

x

-0.7832640068237301

+

↶

⚙

⏪

1

$y = x^2 + y^2 - 4$

×

2

$y = 3x^2$

×

3

$$0 - 0.7832640068237301^2 + 1.840363188078802^2 - 4$$

$$= 0.0004391684221137$$

×

4

×

desmos

Рис. 3: *UI 1*

Ручной ввод параметров

☐ Система уравнений

Equation ID:

0

0. $1.62x^3 - 8.15x^2 + 4.39x + 4.29 = 0$ 1. $x^3 - x + 4 = 0$ 2. $\exp(x) - 5 = 0$ 3. $\sin(2^*x) + \pi/4 = 0$

Interval min

-10

Interval max

10

Estimate:

0,01

Method ID:

0

0. Half division

1. Simple iteration

2. Newton

3. Secant

Рассчитать

Ручной ввод параметров

Browse... input.json

Рассчитать

Решение

Скачать

Количество итераций

11

Погрешность:

0.009765625

f(x)

0,01

x

-1.31

Уточнение корня уравнения методом половинного деления

№ шага	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	a-b
0	-10	10	0	-2819	1041	11	20
1	-10	0	-5	-2819	11	-429	10
2	-5	0	-2.5	-429	11	-59	5
3	-2.5	0	-1.25	-59	11	1.78125	2.5
4	-2.5	-1.25	-1.875	-59	1.78125	-20.69921875	1.25
5	-1.875	-1.25	-1.5625	-20.69921875	1.78125	-7.66455078125	0.625
6	-1.5625	-1.25	-1.40625	-7.66455078125	1.78125	-2.51593017578125	0.3125
7	-1.40625	-1.25	-1.328125	-2.51593017578125	1.78125	-0.26377105712890625	0.15625
8	-1.328125	-1.25	-1.2890625	-0.26377105712890625	1.78125	0.7842741012573242	0.078125
9	-1.328125	-1.2890625	-1.30859375	-0.26377105712890625	0.7842741012573242	0.26667988300323486	0.0390625
10	-1.328125	-1.30859375	-1.318359375	-0.26377105712890625	0.26667988300323486	0.0030670911073684692	0.01953125

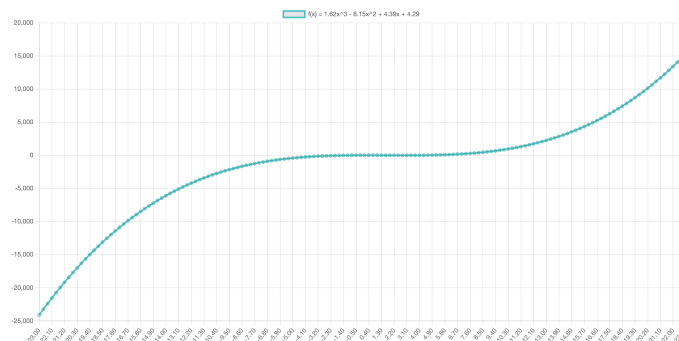


Рис. 4: UI 2

Лабораторная работа

«численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений»

Ручной ввод параметров

☐ Система уравнений

Equation ID:

0

0. $1.62x^3 - 8.15x^2 + 4.39x + 4.29 = 0$ 1. $x^2 - x + 4 = 0$ 2. $\exp(x) - 5 = 0$ 3. $\sin(2^*x) + \pi/4 = 0$

Interval min

-1

Interval max

1

Estimate:

0.1

Method ID:

0

0. Half division

1. Simple iteration

2. Newton

3. Secant

Рассчитать

Ручной ввод параметров

 No file selected.

Рассчитать

Решение

Скачать

Количество итераций

5

Погрешность:

0.0625

f(x)

0.5

x

0.9

Уточнение корня уравнения методом половинного деления

№ шага	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	a-b
0	-1	1	0	7	-3	11	2
1	0	1	0.5	11	-3	5.5	1
2	0.5	1	0.75	5.5	-3	1.53125	0.5
3	0.75	1	0.875	1.53125	-3	-0.67578125	0.25
4	0.75	0.875	0.8125	1.53125	-0.67578125	0.44384765625	0.125

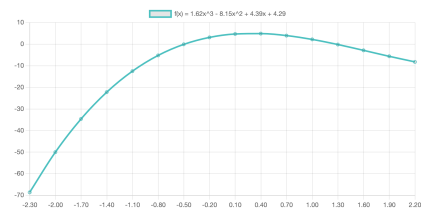


Рис. 5: UI 3

3 Заключение

В ходе выполнения данной ЛР я ознакомился с основными методами решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Вообще с кайфом написал 2к строк кода

4 Список литературы

- [1] Слайды с лекций (2023). // Кафедра информатики и вычислительной техники – Малышева Татьяна Алексеевна, к.т.н., доцент.