Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вариант №13
Лабораторная работа №2
по дисциплине
Вычислительная математика

Выполнил студент группы P3212
Соколов Анатолий Владимирович
Преподаватель:
Наумова Надежда Александровна

г. Санкт-Петербург
2024г.

Содержание

1 Задание

Вычислительная часть лабораторной работы должна быть представлена в виде таблиц и отображена только в отчете.

1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (вид уравнения представлен в табл. 2.6)
2. График исследуемой функции отобразить в отчете
3. Определить интервалы изоляции корней
4. Уточнить корни заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$
5. Используемые методы для уточнения каждого из трех корней многочлена представлены в табл. 2.7
6. Вычисления оформить в виде таблиц (табл. 2.1–2.5), в зависимости от заданного метода. Для всех значений в таблицах удержать 3 знака после запятой;

1.1 Вариант

1.2 Для нелинейных уравнений должно быть реализовано

1. Все численные методы (см. табл. 2.8) должны быть реализованы в виде класса /метода/функции;
2. Пользователь выбирает уравнение, корень/корни которого требуется вычислить (3–5 функций, в том числе и трансцендентные), из тех, которые предлагает программа;
3. Предусмотреть ввод исходных данных (границы интервала, погрешность вычисления) из файла или с клавиатуры по выбору конечного пользователя;
4. Организовать вывод графика функции на исследуемом интервале (с запасом);
5. Выполнить верификацию исходных данных. Необходимо анализировать наличие корня на введенном интервале. Если на интервале несколько корней или они отсутствуют – выдавать соответствующее сообщение. Программа должна реагировать на некорректные введенные данные;
6. Для методов, требующих начальное приближение к корню (методы Ньютона, секущих, хорд с фиксированным концом, простой итерации), выбор начального приближения (a или b) вычислять в программе;

7. Для метода простой итерации проверять достаточное условие сходимости метода на введенном интервале. Если оно не выполняется, выводить соответствующее сообщение. При этом попытаться решить нелинейное уравнение, ограничив итерационный процесс заданным в программе максимальным числом итераций;
8. Для каждого метода учитывать все критерии выхода из итерационного цикла. Проверить, как изменятся результаты, если учитывать либо критерии по аргументу, либо критерии по функции;
9. Предусмотреть вывод результатов (найденный корень уравнения, значение функции в корне, число итераций) в файл или на экран по выбору конечного пользователя;
10. Проанализировать полученные результаты, оценить точность решения задачи;
11. Программа должна быть протестирована на различных наборах данных, в том числе и некорректных.

1.3 Для систем нелинейных уравнений должно быть реализовано

1. Пользователь выбирает предлагаемые программой системы двух нелинейных уравнений (2–3 системы);
2. Организовать вывод графика функций.
3. Ввести начальные приближения с клавиатуры;
4. Для метода простой итерации проверить достаточное условие сходимости. Если оно не выполняется, выводить соответствующее сообщение. При этом попытаться решить систему нелинейных уравнений, ограничив итерационный процесс заданным в программе максимальным числом итераций;
5. Организовать вывод вектора неизвестных: ;
6. Организовать вывод количества итераций, за которое было найдено решение;
7. Организовать вывод вектора погрешностей: ;
8. Проверить правильность решения системы нелинейных уравнений.
9. Программа должна быть протестирована при различных наборах данных, в том числе и некорректных.

1.4 Варианты задания

Выбор метода для вычислительной реализации задачи

$$x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

Метод простой итерации

$$\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ y + \cos(x-1) = 0.7 \end{cases}$$

Выбор метода для программной реализации задачи
Решение нелинейных уравнений: метод половинного деления, метод секущих, метод простой итерации
Решение систем нелинейных уравнений: метод Ньютона.

1.5 Цель работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

2 Выполнение

$$x_3(2.138, 0)$$

$$x_2(0.345, 0)$$

$$x_1(-7.293, 0)$$

Номер варианта	Крайний правый корень	Крайний левый корень	Центральный корень
13	Метод простой итерации (5)	Метод хорд (2)	Метод Ньютона (3)

Таблица 1: Методы для вычислительной реализации

2.1 Рабочие формулы

Метод Ньютона $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$
Метод половинного деления $x_i = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{2}$
Метод простой итерации $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, где $\varphi(x) = x$ (x выражается из исходной функции $f(x)$)
Метод хорд $x_{i+1} = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$

2.2 Графики функций

Рис. 1: $x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$

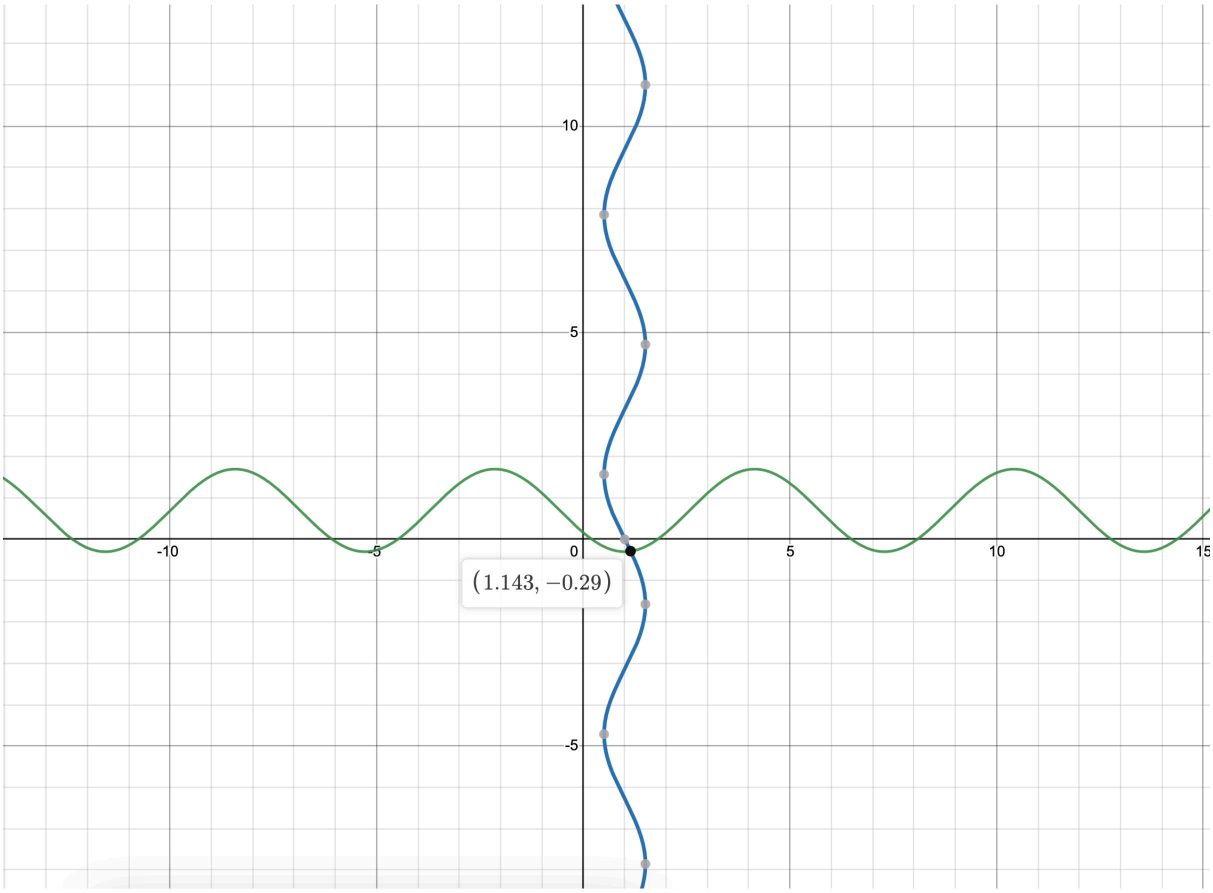


Рис. 2: $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ y + \cos(x-1) = 0.7 \end{cases}$

2.3 Метод простой итерации для x_3

Приведём уравнение:

$$x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

Решим через параметр λ: Пусть начальное приближение будет:

$$a_0 = 1.4;\ b_0 = 1.9$$

$$f(x) = x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

$$\lambda f(x) = 0\ (\lambda! = 0)$$

$$\varphi(x)\ = x + \lambda f(x)$$

$$\varphi'(x)\ = 1 + \lambda f'(x)$$

$$f'(x) = -17.37 + 9.62x + 3x^2$$

$$f'(1.4) = -17.37 + 9.62 \cdot 1.4 + 3 \cdot (1.4)^2 = 1.978$$

$$f'(2.2) = -17.37 + 9.62 \cdot 2.2 + 3 \cdot (2.2)^2 = 18.314$$

Так как $f'[a, b] > 0$, то рассматриваем:

$$\lambda = -\frac{1}{max|f'(x)|} = -\frac{1}{18.314} = 0.054$$

Подставим:

$$\varphi(x) = x + (-1/(-17.37 + 9.62 * 2.2 + 3 * (2.2)^2)) * (x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38)$$

$$= -0.293764 + 1.94845 \cdot x - 0.262641 \cdot x^2 - 0.054603 \cdot x^3$$

$$\varphi'(x) = 1.94845 - 0.525282 * x - 0.163809 * x^2$$

Проверим точки:

$$\varphi'(1.4) = 1.94845 - 0.525282 * 1.4 - 0.163809 * 1.4^2 < 1$$

$$\varphi'(2.2) = 1.94845 - 0.525282 * 2.2 - 0.163809 * 2.2^2 < 1$$

Условие сходимости выполняется!

$$x_0 = 1.4$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = -0.293764 + 1.94845 \cdot (1.4) - 0.262641 \cdot (1.4)^2 - 0.054603 \cdot (1.4)^3 = 1.769459008$$

$$x_2 = -0.293764 + 1.94845 \cdot (1.769459008) - 0.262641 \cdot (1.769459008)^2 - 0.054603 \cdot (1.769459008)^3 = 2.0291045184565837$$

$$f(x_2) = (1.769459008)^3 + 4.81 \cdot (1.769459008)^2 - 17.37 \cdot (1.769459008) + 5.38 = -4.755314315965413$$

$$\dots$$

$$f(x) = x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

$$\varphi(x) = -0.293764 + 1.94845 \cdot x - 0.262641 \cdot x^2 - 0.054603 \cdot x^3$$

Номер	x_i	x_{i+1}	$\varphi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	1.4	1.76945901	2.02910452	-1.7071388	0.36945901
1	1.76945901	2.02910452	2.12230887	-0.2600345	0.25964551
2	2.02910452	2.12230887	2.13649639	-0.0228481	0.09320435
3	2.12230887	2.13649639	2.13773272	-0.0019654	0.01418751
4	2.13649639	2.13773272	2.13782878	-0.0003413	0.00123633

Таблица 2: Уточнение корня уравнения методом простой итерации

2.4 Метод хорд для x_1

Возьму за изолированный интервал $[-8, -7]$

$$x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

Вычисление будем производить по формуле:

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

Номер	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-8	-7	-7.2473578	-59.82	19.66	3.24634659	0.24735783
1	-8	-7.2473578	-7.2861002	-59.82	3.24634659	0.49019797	0.03874233
2	-8	-7.2861002	-7.2919027	-59.82	0.49019797	0.07300449	0.00580254
3	-8	-7.2919027	-7.2927658	-59.82	0.07300449	0.01085004	0.00086311

Таблица 3: Уточнение корня уравнения методом хорд

Тогда ответ:

$$x \approx -7.2927658$$

2.5 Метод Ньютона для x_2

Возьму за изолированный интервал $[0.3, 0.4]$

$$x^3 + 4.81x^2 - 17.37x + 5.38$$

Вычисление будем производить по формуле:

$$f(0.3) = 0.3^3 + 4.81 * 0.3^2 - 17.37 * 0.3 + 5.38 = 0.6289$$

$$f(0.4) = 0.4^3 + 4.81 * 0.4^2 - 17.37 * 0.4 + 5.38 = -0.7344$$

Найдем производные:

$$f'(x) = -17.37 + 9.62x + 3x^2$$
$$f'(0.3) = -17.37 + 9.62 * 0.3 + 3 * 0.3^2 = -14.214$$
$$f'(0.4) = -17.37 + 9.62 * 0.4 + 3 * 0.4^2 = -13.042$$

Первая производная сохраняет знаки
Найдем вторую производную

$$f''(x) = 9.62 + 6x f''(0.3) = 9.62 + 6 * 0.3 = 11.42 f''(0.4) = 9.62 + 6 * 0.4 = 12.02$$

Вторая производная сохраняет знаки
Выполняется условие $f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0$, тогда $x_0 = a_0 = 0.3$

Номер	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0.3	0.34424511	0.6289	20.526	0.04424511
1	0.34424511	0.34506718	0.01126468	21.0371521	0.00082207
2	0.34506718	0.34506747	3.9491E-06	21.0467603	2.8839E-07

Таблица 4: Уточнение корня уравнения методом Ньютона

Условие окончания итер метода соблюдается:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$

Тогда ответ:

$$x \approx 0.34506747$$

2.6 Решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ y + \cos(x-1) = 0.7 \end{cases}$$

Определяем, что решение системы уравнений находится в квадрате:

$$1 \leqslant x \leqslant 2$$
$$-1 \leqslant y \leqslant 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{(2-\sin y)}{2} \\ y = 0.7 - \cos(x-1) \end{cases}$$

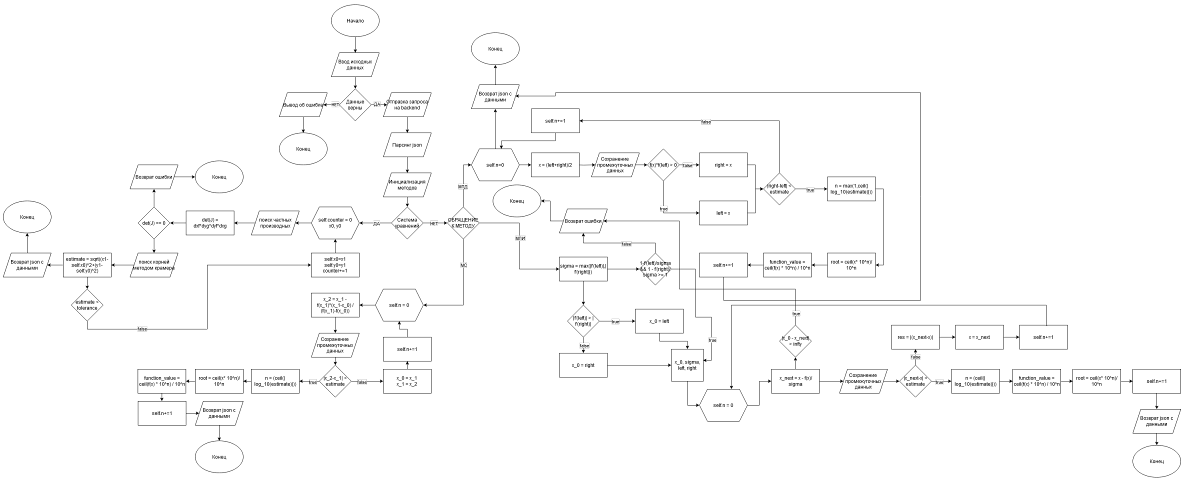
$$\frac{\partial x}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{(2-\sin y)}{2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0.7 - \cos(x-1)$$
$$\left|\frac{\partial x}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \left|\frac{(2-\sin y)}{2}\right| \leqslant 1$$
$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial y}\right| = |\cos(x-1)| \leqslant 1$$

$$\max_{[x \in G]} |\varphi'| < 1 \rightarrow \text{Процесс сходящийся}$$

Номер итерации	x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	$\lvert y_{i+1} - y_i \rvert$
0	0	0	1	0.1597	1	0.1597
1	1	0.1597	0.9205	-0.3	0.0795	0.4597
2	0.9205	-0.3	1.1478	-0.2968	0.2273	0.0032
3	1.1478	-0.2968	1.1463	-0.2891	0.0015	0.0077

Таблица 5: Уточнение корня уравнения методом простой итерации

2.7 Блок-схема реализованного алгоритма



2.8 Ссылка на GitHub с основной реализацией

Github

2.9 Примеры и результаты работы программы

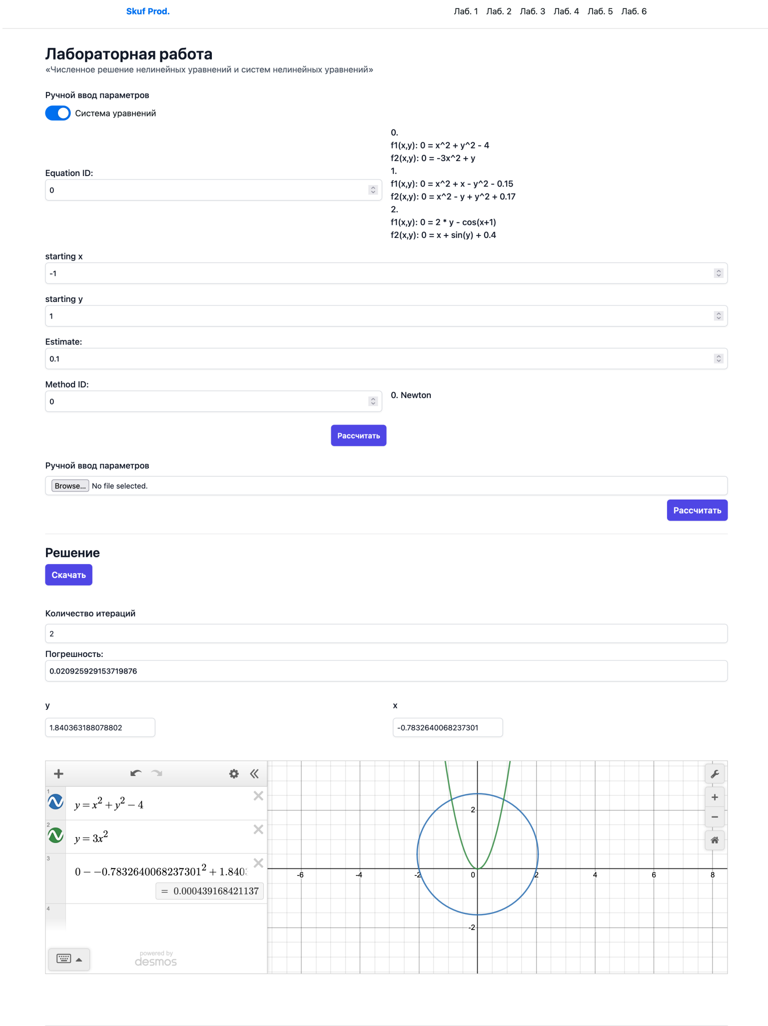


Рис. 3: *UI 1*

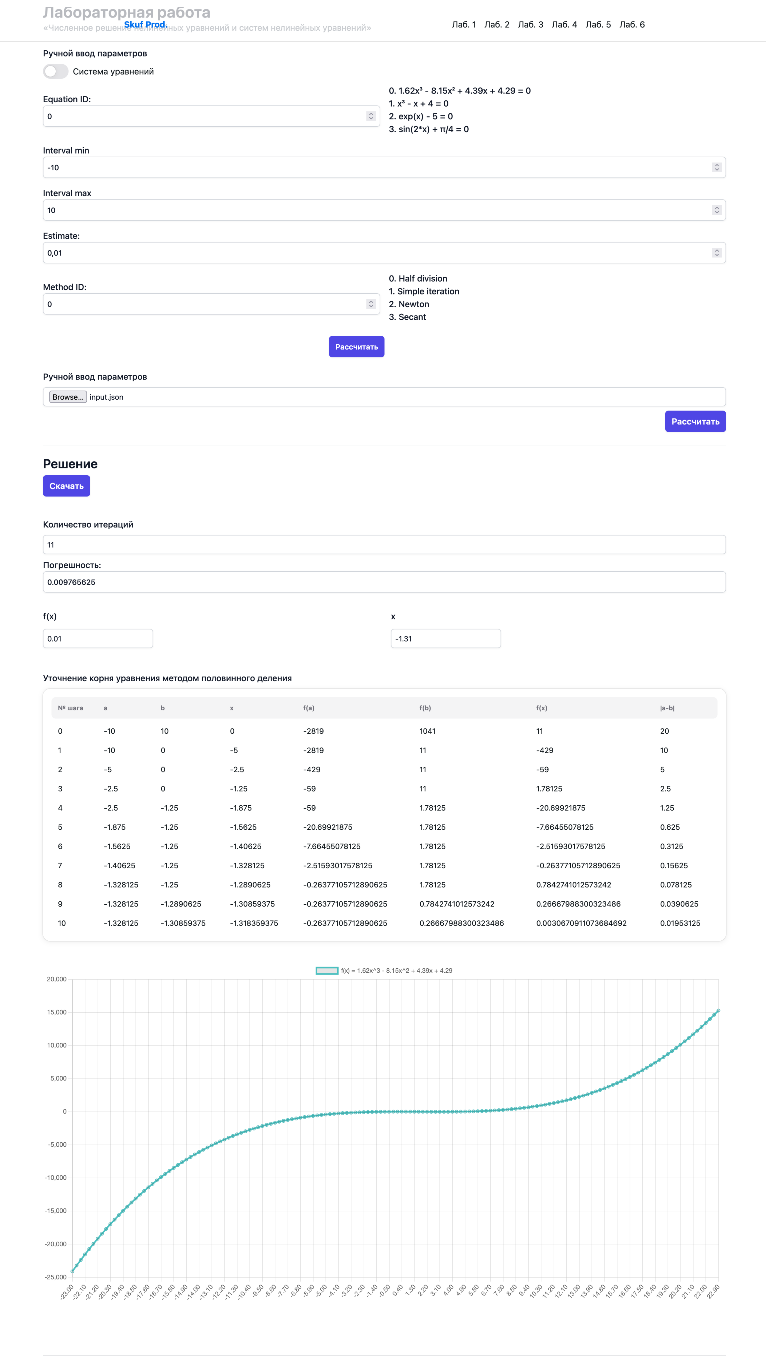

Лабораторная работа
Skuf Prod.
«Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений»
Лаб. 1 Лаб. 2 Лаб. 3 Лаб. 4 Лаб. 5 Лаб. 6
Ручной ввод параметров
Система уравнений
Equation ID:
0
0. 1.62x³ - 8.15x² + 4.39x + 4.29 = 0
1. x³ - x + 4 = 0
2. exp(x) - 5 = 0
3. sin(2*x) + π/4 = 0
Interval min
-10
Interval max
10
Estimate:
0,01
Method ID:
0
0. Half division
1. Simple iteration
2. Newton
3. Secant
Рассчитать
Ручной ввод параметров
Browse... input.json
Рассчитать
Решение
Скачать
Количество итераций
11
Погрешность:
0.009765625
f(x)
0.01
x
-1.31
Уточнение корня уравнения методом половинного деления
№ шага a b x f(a) f(b) f(x) |a-b|
0 -10 10 0 -2819 1041 11 20
1 -10 0 -5 -2819 11 -429 10
2 -5 0 -2.5 -429 11 -59 5
3 -2.5 0 -1.25 -59 11 1.78125 2.5
4 -2.5 -1.25 -1.875 -59 1.78125 -20.69921875 1.25
5 -1.875 -1.25 -1.5625 -20.69921875 1.78125 -7.66455078125 0.625
6 -1.5625 -1.25 -1.40625 -7.66455078125 1.78125 -2.51593017578125 0.3125
7 -1.40625 -1.25 -1.328125 -2.51593017578125 1.78125 -0.26377105712890625 0.15625
8 -1.328125 -1.25 -1.2890625 -0.26377105712890625 1.78125 0.7842741012573242 0.078125
9 -1.328125 -1.2890625 -1.30859375 -0.26377105712890625 0.7842741012573242 0.26667988300323486 0.0390625
10 -1.328125 -1.30859375 -1.318359375 -0.26377105712890625 0.26667988300323486 0.0030670911073684692 0.01953125
f(x) = 1.62x^3 - 8.15x^2 + 4.39x + 4.29
20,000
15,000
10,000
5,000
0
-5,000
-10,000
-15,000
-20,000
-25,000

Рис. 4: *UI 2*

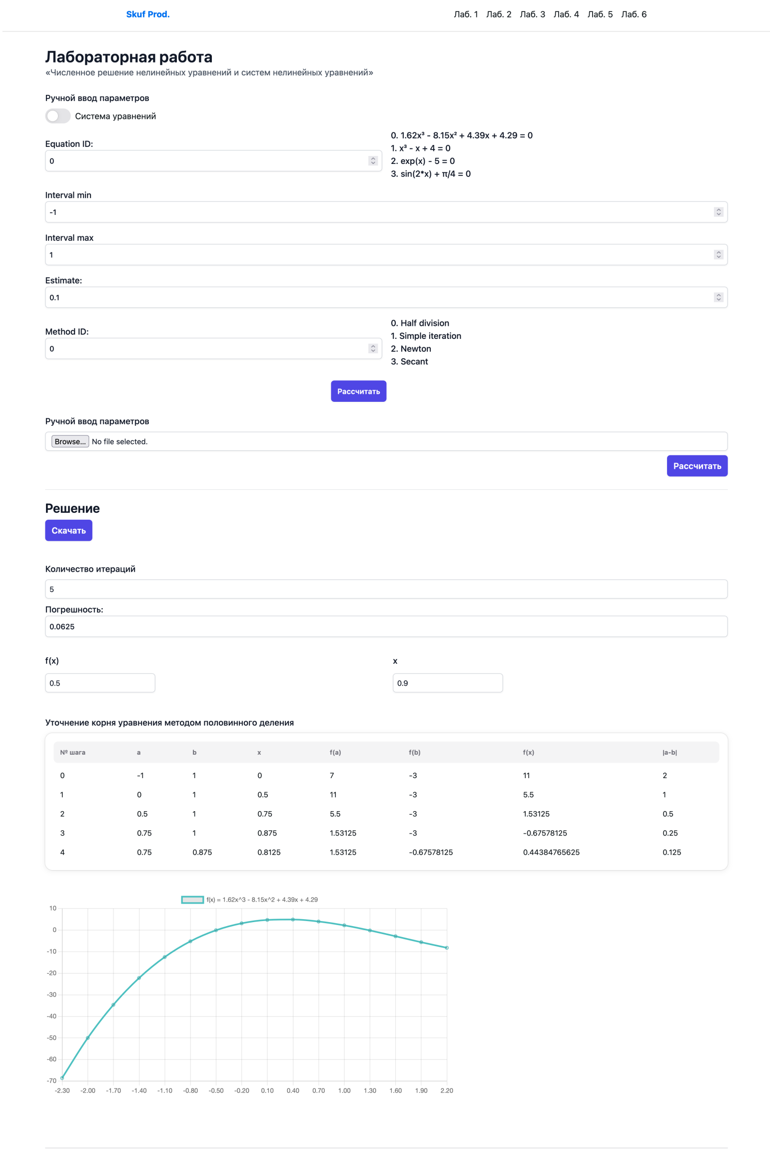


Рис. 5: *UI 3*

3 Заключение

В ходе выполнения данной ЛР я ознакомился с основыми методами решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Вообще с кайфом написал 2к строк кода

4 Список литературы

[1] Слайды с лекций (2023). // Кафедра информатики и вычислительной техники – Малышева Татьяна Алексеевна, к.т.н., доцент.