Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вариант №13
Лабораторная работа №2
по дисциплине
Вычислительная математика

Выполнил студент группы P3212
Соколов Анатолий Владимирович
Преподаватель:
Наумова Надежда Александровна

г. Санкт-Петербург
2024г.

Содержание

1 Обязательное задание

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя
2.
   - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
   - Метод трапеций
   - Метод Симпсона
3. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
5. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использо- вать правило Рунге.
6. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
6. В отчете отразить последовательные вычисления.

2 Необязательное задание

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобствен- ных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный раз- рыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования

2.1 Вариант

Интеграл для вычислений в отчете:

$$\int_1^3 (-2x^3 - 5x^2 + 7x - 13)dx$$

2.2 Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

3 Выполнение

3.1 Точное вычисление интеграла:

$$\int_1^3 (-2x^3 - 5x^2 + 7x - 13)dx = \left(-\frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 13x\right)\Bigg|_1^3 = -\frac{244}{3} \approx -81.333$$

3.2 Вычисление по формуле Ньютона – Котеса

Берём n=6, тогда коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов:

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{42(b-a)}{840}$$

$$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$$

$$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$$

$$c_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$$

Границы известны a=2; b=3:

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{84}{840}$$

$$c_6^1 = c_6^5 = \frac{432}{840}$$

$$c_6^2 = c_6^4 = \frac{54}{840}$$

$$c_6^3 = \frac{544}{840}$$

Найдём шаг разбиения:

$$h = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

Запишем определенный интеграл в виде:

$$\int_2^3 3x^3 - 2x^2 - 7x - 8 = c_6^0 \cdot f(a) + c_6^1 \cdot f(a + \frac{1}{3}) + c_6^2 \cdot f(a + \frac{2}{3}) + c_6^3 \cdot f(a+1) + c_6^4 \cdot f(a + \frac{4}{3}) + c_6^5 \cdot f(a + \frac{5}{3}) + c_6^6 \cdot f(b)$$

$$f(1) = -13.0$$

$$f(1 + \frac{1}{3}) = -17.296$$

$$f(1 + \frac{2}{3}) = -24.481$$

$$f(1+1) = -35.0$$

$$f(1 + \frac{4}{3}) = -49.296$$

$$f(1+\frac{5}{3}) = -67.815$$

$$f(3) = -91.0$$

$$\frac{84}{840}\cdot -13 + \frac{432}{840}\cdot -17.296 + \frac{54}{840}\cdot -24.481 + \frac{544}{840}\cdot -35.0 + \frac{54}{840}\cdot -49.296 + \frac{432}{840}\cdot -67.815 + \frac{84}{840}\cdot -91.0 \approx -81.58$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|81.333 - 81.58|}{81.33} * 100 = 0.3\%$$

3.3 Вычисление по формуле прямоугольников со средними высотами:

По условию дано n = 10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{10} = 0.2$$

По формуле средних прямоугольников:

$$I = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}}$$

i	x_i	y_i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
1	1.1	-14.012	1.0	-14.012
2	1.3	-16.744	1.2	-16.744
3	1.5	-20.5	1.4	-20.5
4	1.7	-25.376	1.6	-25.376
5	1.9	-31.468	1.8	-31.468
6	2.1	-38.872	2.0	-38.872
7	2.3	-47.684	2.2	-47.684
8	2.5	-58.0	2.4	-58.0
9	2.7	-69.916	2.6	-69.916
10	2.9	-83.528	2.8	-83.528

Таблица 1: Приближенное вычисление интеграла методом средних прямоугольников

$$I = 0.1\cdot(-14.012 - 16.744 - 20.5 - 25.376 - 31.468 - 38.872 - 47.684 - 58.0 - 69.916 - 83.528) = -81.22$$

Полученное для $n = 10$ значение: -81.22.
Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|81.333 - 81.22|}{81.22} * 100 = 0.139\%$$

3.4 Вычисление методом трапеций

По условия дано n = 10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{10} = 0.1$$

По формуле трапеций:

$$I = h\cdot\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

i	x_i	y_i
0	1	-13
1	1.2	-15.256
2	1.4	-18.488
3	1.6	-22.792
4	1.8	-28.264
5	2	-35
6	2.2	-43.096
7	2.4	-52.648
8	2.6	-63.752
9	2.8	-76.504
10	3	-91

Таблица 2: Приближенное вычисление интеграла методом трапеций

$$I = 0.1\cdot\left(\frac{-13-91}{2} + (-13-15.256-18.488-22.792-28.264-35-43.096-52.648-63.752-76.504-91)\right)$$

Полученное для $n = 10$ значение: -81.56.
Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|81.333 - 81.56|}{81.56} * 100 = 0.279\%$$

3.5 Вычисление методом Симпсона

По условию дано n = 10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{10} = 0.2$$

По формуле Симпсона:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4\cdot(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2\cdot(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}) =$$

i	x_i	y_i
0	1	-13
1	1.2	-15.256
2	1.4	-18.488
3	1.6	-22.792
4	1.8	-28.264
5	2	-35
6	2.2	-43.096
7	2.4	-52.648
8	2.6	-63.752
9	2.8	-76.504
10	3	-91

Таблица 3: Приближенное вычисление интеграла методом Симпсона

$$\frac{0.2}{3}(-13+4\cdot(-13-18.488-28.264-43.096-52.648-76.504)+2\cdot(-18.488-28.264-43.096-63.752)-91 = -68.252$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|81.333 - 68.252|}{68.252} * 100 = 16.247\%$$

3.6 Блок-схема реализованного алгоритма

3.7 Ссылка на GitHub с основной реализацией

Github

3.8 Примеры и результаты работы программы

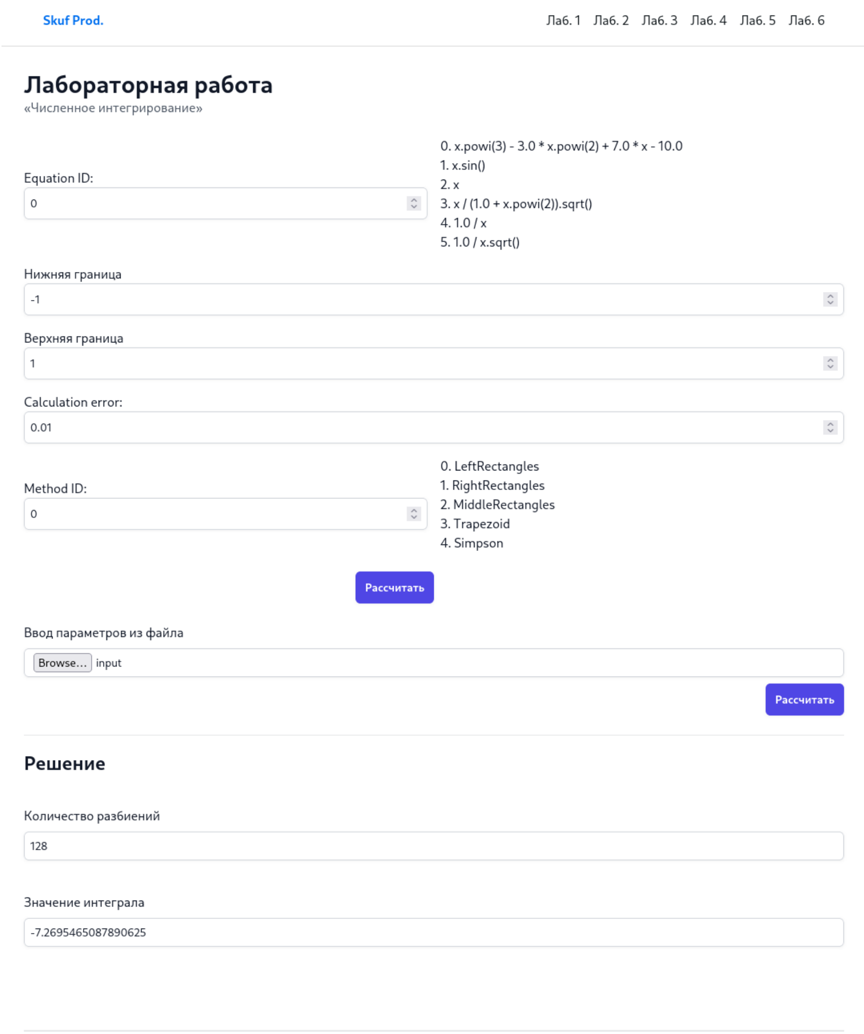

Рис. 1: *UI 1*

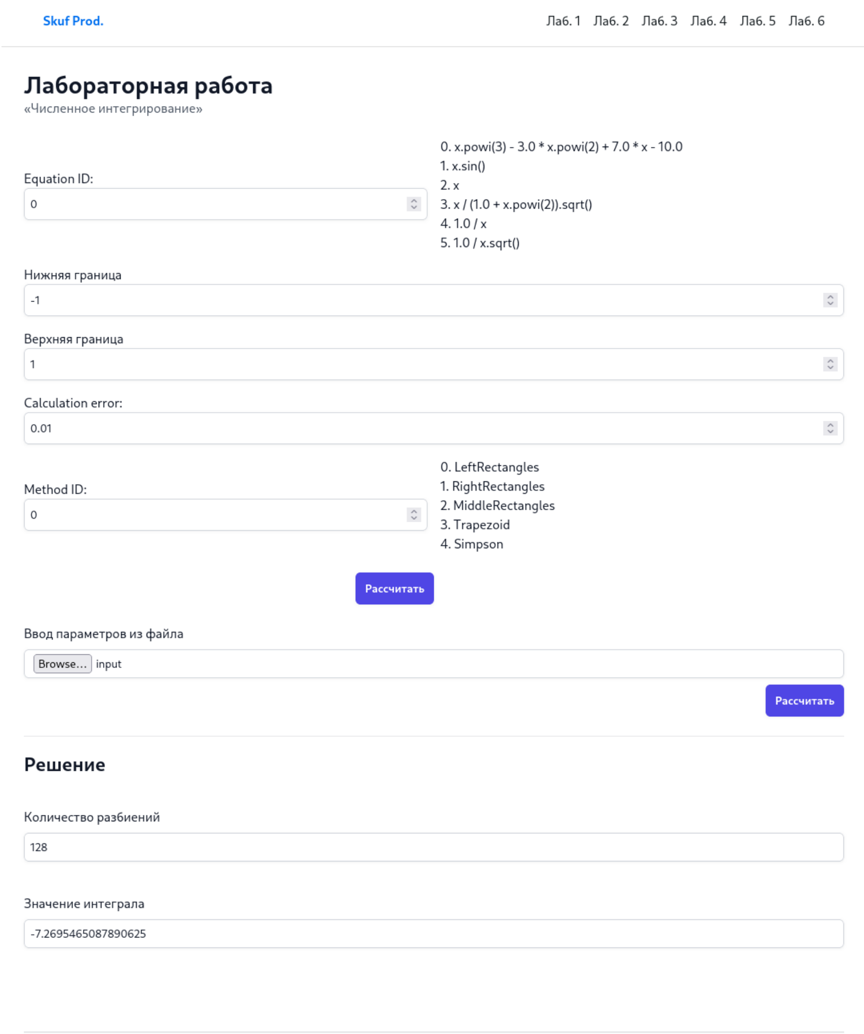

Рис. 2: *UI 2*

4 Заключение

В ходе выполнения данной ЛР я ознакомился с основыми методами интегрирования. Вообще с кайфом написал даже не 2к строк кода, а всего 800

5 Список литературы

[1] Слайды с лекций (2023). // Кафедра информатики и вычислительной техники – Малышева Татьяна Алексеевна, к.т.н., доцент.