Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО» Факультет программной инженерии и компьютерной техники



Вариант №13 Лабораторная работа №3 по дисциплине Вычислительная математика

> Выполнил студент группы Р3212 Соколов Анатолий Владимирович Преподаватель: Наумова Надежда Александровна

Содержание

1	Обязательное задание						
2	Необязательное задание 2.1 Вариант						
	2.2 Цель работы	. 2					
3	Выполнение	2					
	3.1 Точное вычисление интеграла:	. 2					
	3.2 Вычисление по формуле Ньютона – Котеса	. 2					
	3.3 Вычисление по формуле прямоугольников со средними высотами:						
	3.4 Вычисление методом трапеций	. 3					
	3.5 Вычисление методом Симпсона	. 4					
	3.6 Блок-схема реализованного алгоритма						
	3.7 Ссылка на GitHub с основной реализацией	. 5					
	3.8 Примеры и результаты работы программы						
4	Заключение	7					
5	6 Список литературы	8					

1 Обязательное задание

Программная реализация задачи:

- 1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя
- 2. Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
 - Метод трапеций
 - Метод Симпсона
- 3. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
- 4. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
- 5. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использо- вать правило Рунге.
- 6. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи

- 1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
- 2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона Котеса при n=6.
- 3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n=10.
- 4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
- 5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
- 6. В отчете отразить последовательные вычисления.

2 Необязательное задание

- 1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
- 2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобствен- ных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
- 3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный раз- рыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования

2.1 Вариант

Интеграл для вычислений в отчете:

$$\int_{1}^{3} (-2x^3 - 5x^2 + 7x - 13) dx$$

2.2 Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

3 Выполнение

3.1 Точное вычисление интеграла:

$$\int_{1}^{3} (-2x^{3} - 5x^{2} + 7x - 13) dx = \left(-\frac{x^{4}}{2} - \frac{5x^{3}}{3} + \frac{7x^{2}}{2} - 13x \right) \Big|_{1}^{3} = -\frac{244}{3} \approx -81.333$$

3.2 Вычисление по формуле Ньютона – Котеса

Берём n=6, тогда коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов:

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{42(b-a)}{840}$$

$$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$$

$$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$$

$$c_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$$

Границы известны a=2; b=3:

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{84}{840}$$
$$c_6^1 = c_6^5 = \frac{432}{840}$$
$$c_6^2 = c_6^4 = \frac{54}{840}$$
$$c_6^3 = \frac{544}{840}$$

Найдём шаг разбиения:

$$h = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

Запишем определенный интеграл в виде:

$$\int_{2}^{3} 3x^{3} - 2x^{2} - 7x - 8 = c_{6}^{0} \cdot f(a) + c_{6}^{1} \cdot f(a + \frac{1}{3}) + c_{6}^{2} \cdot f(a + \frac{2}{3}) + c_{6}^{3} \cdot f(a + 1) + c_{6}^{4} \cdot f(a + \frac{4}{3}) + c_{6}^{5} \cdot f(a + \frac{5}{3}) + c_{6}^{6} \cdot f(b)$$

$$f(1) = -13.0$$

$$f(1 + \frac{1}{3}) = -17.296$$

$$f(1 + \frac{2}{3}) = -24.481$$

$$f(1 + 1) = -35.0$$

$$f(1 + \frac{4}{3}) = -49.296$$

$$f(1+\frac{5}{3}) = -67.815$$

$$f(3) = -91.0$$

$$\frac{84}{840} \cdot -13 + \frac{432}{840} \cdot -17.296 + \frac{54}{840} \cdot -24.481 + \frac{544}{840} \cdot -35.0 + \frac{54}{840} \cdot -49.296 + \frac{432}{840} \cdot -67.815 + \frac{84}{840} \cdot -91.0 \approx -81.58$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|81.333 - 81.58|}{81.33} * 100 = 0.3\%$$

3.3 Вычисление по формуле прямоугольников со средними высотами:

По условию дано n = 10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{10} = 0.2$$

По формуле средних прямоугольников:

$$I = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}}$$

i	x_i	y_i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
1	1.1	-14.012	1.0	-14.012
2	1.3	-16.744	1.2	-16.744
3	1.5	-20.5	1.4	-20.5
4	1.7	-25.376	1.6	-25.376
5	1.9	-31.468	1.8	-31.468
6	2.1	-38.872	2.0	-38.872
7	2.3	-47.684	2.2	-47.684
8	2.5	-58.0	2.4	-58.0
9	2.7	-69.916	2.6	-69.916
10	2.9	-83.528	2.8	-83.528

Таблица 1: Приближенное вычисление интеграла методом средних прямоугольников

$$I = 0.1 \cdot \left(-14.012 - 16.744 - 20.5 - 25.376 - 31.468 - 38.872 - 47.684 - 58.0 - 69.916 - 83.528\right) = -81.22$$

Полученное для n = 10 значение: -81.22.

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|81.333 - 81.22|}{81.22} * 100 = 0.139\%$$

3.4 Вычисление методом трапеций

По условия дано n=10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{10} = 0.1$$

По формуле трапеций:

$$I = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

i	x_i	y_i
0	1	-13
1	1.2	-15.256
2	1.4	-18.488
3	1.6	-22.792
4	1.8	-28.264
5	2	-35
6	2.2	-43.096
7	2.4	-52.648
8	2.6	-63.752
9	2.8	-76.504
10	3	-91

Таблица 2: Приближенное вычисление интеграла методом трапеций

$$I = 0.1 \cdot \left(\frac{-13 - 91}{2} + \left(-13 - 15.256 - 18.488 - 22.792 - 28.264 - 35 - 43.096 - 52.648 - 63.752 - 76.504 - 91 \right) \right)$$

Полученное для n = 10 значение: -81.56.

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|81.333 - 81.56|}{81.56} * 100 = 0.279\%$$

3.5 Вычисление методом Симпсона

По условию дано n = 10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{10} = 0.2$$

По формуле Симпсона:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}) =$$

i	x_i	y_i
0	1	-13
1	1.2	-15.256
2	1.4	-18.488
3	1.6	-22.792
4	1.8	-28.264
5	2	-35
6	2.2	-43.096
7	2.4	-52.648
8	2.6	-63.752
9	2.8	-76.504
10	3	-91

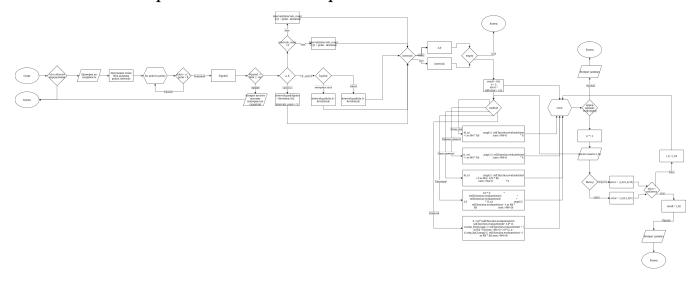
Таблица 3: Приближенное вычисление интеграла методом Симпсона

$$\frac{0.2}{3}(-13+4\cdot(-13-18.488-28.264-43.096-52.648-76.504)+2\cdot(-18.488-28.264-43.096-63.752)-91=-80.0115$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|81.333 - 68.252|}{68.252} * 100 = 1.6247\%$$

3.6 Блок-схема реализованного алгоритма



3.7 Ссылка на GitHub с основной реализацией

Github

3.8 Примеры и результаты работы программы

quation ID: 1. x.sin() 2. x(1 o + x.powi(2) + 7.0 * x - 10.0 1. x.sin() 2. x(1 o + x.powi(2)).sqrt() 4. 1.0 / x sqrt() 4. 1.0 / x sqrt() 4. 1.0 / x sqrt() 1. x.sin() 2. x o x o x v.powi(2)).sqrt() 4. 1.0 / x sqrt() 4. 1.0 / x sqrt() 1. x.sin() 2. x o x o x v.powi(2) + 7.0 * x - 10.0 2. x o x o x o x v.powi(2) + 7.0 * x - 10.0 3. x o x o x o x o x o x o x o x o x o x	Skuf Prod.		Лаб. 1 Лаб. 2 Лаб. 3 Лаб. 4 Лаб. 5 Лаб. 6
quation ID:	Пабораторная работа Численное интегрирование»	1	
quation ID:			0. x.powi(3) - 3.0 * x.powi(2) + 7.0 * x - 10.0
3. x / (1.0 + x.powi(2)).sqrt() 4.1.0 / x 5.1.0 / x.sqrt() Вод параметров из файла Вод параметров из файла Вомуве і прит Решение Оличество разбиений Тава Вамение интеграла			1. x.sin()
4.1.0/х 5.1.0/х.sqrt() мжняя граница 1 ерхняя граница 1 о о о о о о о о о о о о о о о о о о		^	
ижняя граница практиви граница практивительница практивительни	U	V	
ерхняя граница 1			5. 1.0 / x.sqrt()
ерхняя граница alculation error: 0.01 0. LeftRectangles 1. RightRectangles 2. MiddleRectangles 3. Trapezoid 4. Simpson Рассчитать Решение оличество разбиений такжение интеграла	ижняя граница		
alculation error: 2.01 O. LeftRectangles 1. RightRectangles 2. MiddleRectangles 3. Trapezoid 4. Simpson Вод параметров из файла Вгомзе Іприt Рассчитать Решение оличество разбиений так начение интеграла	-1		0
alculation error: D.01 D. LeftRectangles 1. RightRectangles 2. MiddleRectangles 3. Trapezoid 4. Simpson Вод параметров из файла Вгомзе Input Рассчитать Решение Оличество разбиений Тав	ерхняя граница		
D. LeftRectangles 1. RightRectangles 2. MiddleRectangles 3. Trapezoid 4. Simpson Вод параметров из файла Втомзе Input Рассчитать Решение Оличество разбиений Тав	1		0
Левом разбиений О. LeftRectangles 1. RightRectangles 2. MiddleRectangles 3. Trapezoid 4. Simpson Рассчитать Вод параметров из файла Вгомзе Іприт Рассчитать Решение Оличество разбиений Таза начение интеграла	alculation error:		
Accuutate Во В	0.01		0
2. MiddleRectangles 3. Trapezoid 4. Simpson Вод параметров из файла Втомуве Input Рассчитать Решение оличество разбиений 128			0. LeftRectangles
3. Тгареzoid 4. Simpson Рассчитать вод параметров из файла Вгомзе Input Рассчитать Решение оличество разбиений такия правинение интеграла	Method ID:		
4. Simpson Рассчитать вод параметров из файла Вгомзе Input Решение оличество разбиений 128	0	\$	
вод параметров из файла Вгомѕе Input Рассчитать Решение оличество разбиений 128			
Решение оличество разбиений 128 начение интеграла	Ввод параметров из файла	Рассчитать	
Решение оличество разбиений такжение интеграла	Browse input		
оличество разбиений 128 начение интеграла			Рассчитать
начение интеграла	Решение		
начение интеграла	Количество разбиений		
•	128		
-7.2695465087890625	Вначение интеграла		
	-7.2695465087890625		

Рис. 1: *UI 1*

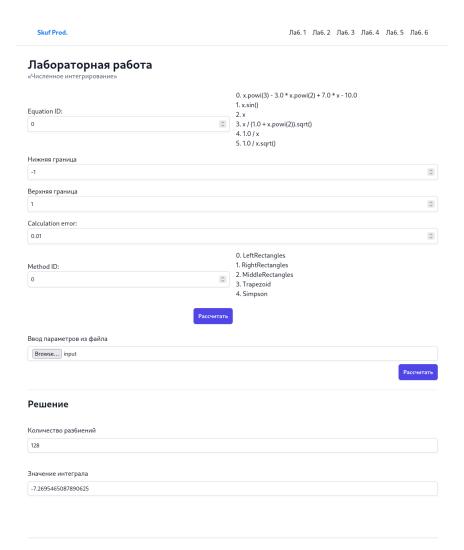


Рис. 2: UI 2

4 Заключение

В ходе выполнения данной ЛР я ознакомился с основыми методами интегрирования. Вообще с кайфом написал даже не 2к строк кода, а всего 800

5 Список литературы

[1] Слайды с лекций (2023). // Кафедра информатики и вычислительной техники – Малышева Татьяна Алексеевна, к.т.н., доцент.