積分法の問題

問題 1857

同じ中心・長半径・短半径を持つ 2 つの楕円が, 互いに角 α だけ傾いているとき, それらの共通部分の面積は

$$2ab\tan^{-1}\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sin\alpha}$$

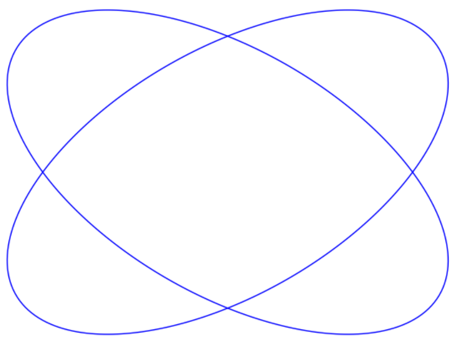
に等しい.

（解答）　極座標系 (r,θ) で考えることにする. このとき楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ の方程式は

$$r=f(\theta)=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

となる.

さて, 互いに角 α だけ傾いている 2 つの楕円は $r_1=f(\theta+\alpha/2)$ および $r_2=f(\theta-\alpha/2)$ であるとする. このとき 2 つの楕円は $\theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$ の時に交わる.



図の対称性より, 求める面積 S は

$$S=4\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r_1^2d\theta$$

となる.

この積分を行う. まず

$$S=2a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2\sin^2\left(\theta+\dfrac{\alpha}{2}\right)+b^2\cos^2\left(\theta+\dfrac{\alpha}{2}\right)}=2a^2b^2\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\frac{d\phi}{a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi}$$

とする. つぎに $t=\tan\phi$ と変数変換すると,

$$S=2a^2b^2\int_{t_0}^{t_1}\frac{dt}{a^2t^2+b^2}$$

となる. ただし $t_0=\tan\dfrac{\alpha}{2}, t_1=\tan\dfrac{\pi+\alpha}{2}$ と置いた. これは容易に積分できて,

$$S=2ab\left(\tan^{-1}\frac{at_1}{b}-\tan^{-1}\frac{at_0}{b}\right)$$

となる．

最後の式を簡単にするために，$\theta_0 = \tan^{-1}\dfrac{at_0}{b}, \theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{at_1}{b}$ と置く．すると

$$\tan(\theta_1 - \theta_0) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_0}{1 + \tan\theta_0\tan\theta_1} = \frac{\dfrac{at_1}{b} - \dfrac{at_0}{b}}{1 + \dfrac{at_0}{b}\cdot\dfrac{at_1}{b}} = \frac{ab(t_1 - t_0)}{a^2 t_0 t_1 + b^2}$$

となる．ところが

$$t_1 = \tan\frac{\pi + \alpha}{2} = \frac{\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}}{1 - \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{\dfrac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{t_0}$$

に注意すれば，

$$\tan(\theta_1 - \theta_0) = \frac{ab\left(-\dfrac{1}{t_0} - t_0\right)}{a^2 t_0\cdot\left(-\dfrac{1}{t_0}\right) + b^2} = \frac{ab}{a^2 - b^2}\cdot\frac{1 + t_0^2}{t_0}$$

となる．ここに $t_0 = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ を代入すれば，簡単な計算により，

$$\tan(\theta_1 - \theta_0) = \frac{ab}{a^2 - b^2}\cdot\frac{2}{\sin\alpha}$$

が導かれる．したがって

$$S = 2ab(\theta_1 - \theta_0) = 2ab\tan^{-1}\frac{2ab}{(a^2 - b^2)\sin\alpha}$$

を得る．□

問題 1858

楕円の中心から c の距離にある楕円内部の定点から，楕円のすべての接線に垂線を下ろす．このとき垂線の足が描く閉曲線に囲まれる領域の面積が

$$\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

に等しいことを証明せよ．

（解答）　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の任意の点は $(a\cos t, b\sin t)$ と表すことにする（楕円のパラメータ表示と言ってもよい）．中心から c の距離にある定点を $C = (p, q)$ と置く．$\sqrt{p^2 + q^2} < b < a$ であると仮定する．

次の事は容易にわかる．楕円上の点 $(a\cos t, b\sin t)$ における接線は

$$l:\ (b\cos t)x + (a\sin t)y = ab$$

であり，点 C から直線 l への法線は

$$n:\ (a\sin t)(x - p) - (b\cos t)(y - q) = 0$$

である．

接線 l と法線 n の交点を求める．これは連立方程式を解くだけの初等的計算だが，少々面倒な計算である．そこで計算の途中を省き，結果だけを記す： 交点は $(x,y)=\left(\frac{f}{h},\frac{g}{h}\right)$ となる．ただし

$$\begin{cases} f &= ab^2\cos t + a^2 p\sin^2 t - abq\sin t\cos t \\ g &= a^2 b\sin t + b^2 q\cos^2 t - abp\sin t\cos t \\ h &= a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t \end{cases}$$

これは法線の足が描く曲線のパラメータ表示である．

この閉曲線の内部の面積を求めるために，つぎの Lemma を用いる．

Lemma

曲線 $P(t):=(x(t),y(t)), t_0 \leqq t \leqq t_1$ に対して，動径 $OP(t)$ が掃く図形の面積は

$$S:=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\left(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right)dt$$

に等しい．

（証明） 極座標系を用いると曲線の方程式は

$$r(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}, \theta(t)=\tan^{-1}\frac{y(t)}{x(t)}$$

となる．このとき

$$S=\int\frac{1}{2}r^2 d\theta=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}r(t)^2\theta'(t)dt$$

である．ところが

$$d\theta=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{r^2}$$

である．すなわち $r^2 d\theta = xdy-ydx$ である．したがって求める公式を得る．□

Lemma を用いて求積をする．まず

$$xy'-yx'=\frac{f}{h}\cdot\frac{g'h-gh'}{h^2}-\frac{g}{h}\cdot\frac{f'h-fh'}{h^2}=\frac{fg'-f'g}{h^2}.$$

つぎに

$$\begin{aligned} fg'-f'g &= (ab^2\cos t + a^2p\sin^2 t - abq\sin t\cos t)(a^2b\cos t - 2b^2q\sin t\cos t - abp(\cos^2 t - \sin^2 t)) \\ &\quad - (-ab^2\sin t + 2a^2p\sin t\cos t - abq(\cos^2 t - \sin^2 t)(a^2b\sin t + b^2q\cos^2 t - abp\sin t\cos t) \\ &= ab\{(ap\sin t - bq\cos t)^2 - (ap\cos t + bq\sin t)h + a^2b^2\}. \end{aligned}$$

だから

$$xy'-yx'=ab\frac{(ap\sin t - bq\cos t)^2}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2}-ab\frac{ap\cos t + bq\sin t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}+a^3b^3\frac{1}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2}$$

となる.

そこで

$$S=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(ap\sin t-bq\cos t)^2}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt-\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\frac{ap\cos t+bq\sin t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt+\frac{a^3b^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt$$

を求めることになる.

ところで,

- まず $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin t\cos t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t\cos t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt$ であるが, 被積分関数は奇関数だから, この積分の値はゼロである.
- 同様の理由により

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=0,\quad \int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=0.$$

だから

$$S=\frac{a^3bp^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt+\frac{ab^3q^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt+\frac{a^3b^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt \tag{1}$$

に帰着する.

また, 容易にわかるように

$$I_1:=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt$$

である. ここで $u=\tan t$ と変数変換して

$$\begin{aligned}I_1&=4\int_0^{\infty}\frac{1+u^2}{(a^2u^2+b^2)^2}\,du=4\left[\frac{a^2+b^2}{2a^3b^3}\,\tan^{-1}\left(\frac{au}{b}\right)+\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}\,\frac{u}{a^2u^2+b^2}\right]_0^{\infty}\\&=4\cdot\frac{a^2+b^2}{2a^3b^3}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi(a^2+b^2)}{a^3b^3}\end{aligned}$$

同様に,

$$I_2:=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt$$

であり, ふたたび $u=\tan t$ と変数変換して

$$\begin{aligned}I_2&=4\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(a^2u^2+b^2)^2}\,du=4\left[\frac{1}{2a^3b}\,\tan^{-1}\left(\frac{au}{b}\right)-\frac{1}{2a^2}\,\frac{u}{a^2u^2+b^2}\right]_0^{\infty}\\&=4\cdot\frac{1}{2a^3b}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{a^3b}\end{aligned}$$

そして

$$I_3:=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}\,dt$$

であり, ふたたび $u=\tan t$ と変数変換して

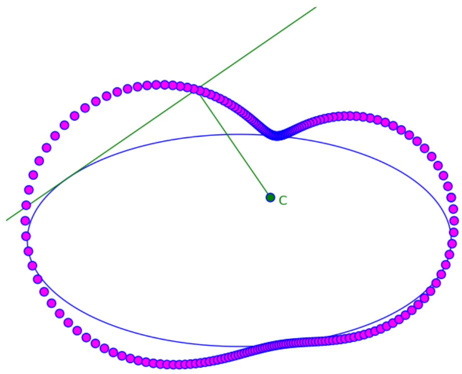
$$I_3 = 4\int_0^\infty \frac{u^2}{(a^2u^2+b^2)^2}\,du = 4\left[\frac{1}{2ab^3}\,\tan^{-1}\left(\frac{au}{b}\right)+\frac{1}{2b^2}\,\frac{u}{a^2u^2+b^2}\right]_0^\infty$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2ab^3}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{ab^3}$$

I_1, I_2, I_3 の値を, (1) に代入して, 求める結果を得ることができる：

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^3bp^2}{2}\,I_2 + \frac{ab^3q^2}{2}\,I_3 + \frac{a^3b^3}{2}\,I_1 \\ &= \frac{a^3bp^2}{2}\cdot\frac{\pi}{a^3b} + \frac{ab^3q^2}{2}\cdot\frac{\pi}{ab^3} + \frac{a^3b^3}{2}\cdot\frac{\pi(a^2+b^2)}{a^3b^3} \\ &= \frac{\pi}{2}\,(a^2+b^2+p^2+q^2) = \frac{\pi}{2}\,(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

Work to do　解答において, 暗黙に仮定した事柄がある．求積に関する Lemma では, 曲線が **star-shaped** であることを暗黙に仮定している．star-shaped とは, 原点から発する半直線が曲線と唯 1 点で交わるという意味．しかし本問の曲線が star-shaped であることは証明できていない．

本問の曲線の一例を示す．このように凸曲線でない（ star-shaped であると思われるが）．



問題 1859

曲線 $a^2y^2(x-b)^2 = (a^2-x^2)(bx-a^2)^2$　$(b > a > 0)$ により囲まれ領域の面積を A とする．このとき

$$\lim_{b\downarrow a}\frac{\pi a^2 - A}{b-a} = 3\pi a$$

であることを証明せよ．[a]

[a] 注意: 原文では極限の値は $6\pi a$ となっているが, 間違いと思われる．

（解答）　曲線の方程式より, $|x| \leqq a$ かつ

$$y = \pm\frac{|bx-a^2|\sqrt{a^2-x^2}}{a(b-x)}$$

である．分母は決してゼロにならないことに注意．だから，曲線により囲まれ領域の面積は

$$A = 2\int_{-a}^{a} \frac{|bx-a^2|\sqrt{a^2-x^2}}{a(b-x)}\,dx = 2\left\{\int_{-a}^{\frac{a^2}{b}} \frac{(a^2-bx)\sqrt{a^2-x^2}}{a(b-x)}\,dx + \int_{\frac{a^2}{b}}^{a} \frac{(bx-a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{a(b-x)}\,dx\right\}$$

となる．

$b = a+t$ と置いて，関数

$$F(t) = 2\left\{\int_{-a}^{\frac{a^2}{a+t}} \frac{(a^2-(a+t)x)\sqrt{a^2-x^2}}{a(a+t-x)}\,dx + \int_{\frac{a^2}{a+t}}^{a} \frac{((a+t)x-a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{a(a+t-x)}\,dx\right\} \tag{2}$$

を考える．ただし，ϵ は十分小さい数として，関数 $F(t)$ を $-\epsilon < t < \epsilon$ の範囲で定義されているとする．この関数の性質を調べるために，次の Lemma を用いる．

Lemma

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = f(b(t),t) - f(a(t),t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dt$$

関数 (2) の定義第 1 項の被積分関数について，$x = \frac{a^2}{a+t}$ のとき因子 $a^2-(a+t)x$ がゼロとなり，$x=-a$ のとき因子 $\sqrt{a^2-x^2}$ がゼロとなる．第 2 項の被積分関数についても同様である．したがって Lemma より

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2\left\{\int_{-a}^{\frac{a^2}{a+t}} \frac{\partial}{\partial t}\frac{a^2-(a+t)x}{a(a+t-x)}\sqrt{a^2-x^2}\,dx + \int_{\frac{a^2}{a+t}}^{a} \frac{\partial}{\partial t}\frac{(a+t)x-a^2}{a(a+t-x)}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right\} \\ &= \frac{2}{a}\left\{\int_{-a}^{\frac{a^2}{a+t}} \frac{x^2-a^2}{(a+t-x)^2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx + \int_{\frac{a^2}{a+t}}^{a} \frac{a^2-x^2}{(a+t-x)^2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right\} \end{aligned}$$

となる．とくに

$$F'(0) = \frac{2}{a}\int_{-a}^{a}(-1)\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^2}\,dx$$

である．

ところが，定石通りの計算により次の結果を示すことができる．

Exercise

$$\int_{-a}^{a}(-1)\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^2}\,dx = \frac{3\pi}{2}a^2.$$

この結果より，$F'(0) = -3\pi a$．また，明らかに

$$F(0) = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \pi a^2$$

したがって

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(0)-F(t)}{t} = 3\pi a$$

を得る．□

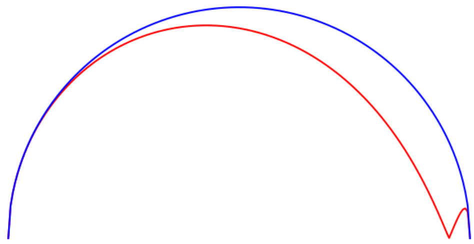
考察　曲線の概形について調べる．曲線の $y \geqq 0$ の部分の方程式は

$$y = \frac{|bx - a^2|}{a(b-x)} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

である．ここで関数 $h(x) := \dfrac{|bx - a^2|}{a(b-x)}$ の増減表は次の様である：

x	$-a$		$\frac{a^2}{b}$		a
$h(x)$ 形状	1	$\searrow$ concave	0	$\nearrow$ convex	1

だから本問の曲線は，半円の縦方向に縮めたものである．たとえば $a = 1, b = 1.1$ の場合は次のようになる（赤が本問の曲線，青は半円）．



問題 1860

The sum of the products of each element of an elliptic lamina multiplied by its distance from the focus is $\frac{1}{3}\,Ma(2+e^2)$, M being the mass of the lamina, $2a$ the major axis, and e the excentricity; and the mean distance of all points within a prolate spheroid from one of the foci is $\frac{1}{2}\,a(3+e^2)$.

1 原文

1857. The area common to two ellipses which have the same centre and equal axes inclined at an angle α is

$$2ab\tan^{-1}\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sin\alpha}.$$

1858. Perpendiculars are let fall upon the tangents to an ellipse from a point within it at a distance c from the centre; prove that the area of the curve traced out by the feet of these perpendiculars is

$$\frac{\pi}{2}\,(a^2+b^2+c^2).$$

1859. The areas of the curves

$$a^2y^2(x-b)^2=(a^2-x^2)(bx-a^2)^2,\ x^2+y^2=a^2,\ (b>a)$$

are A, A': prove that the limiting value of $\dfrac{A'-A}{b-a}$, as b decreases to a is $6\pi a$.

1860. The sum of the products of each element of an elliptic lamina multiplied by its distance from the focus is $\frac{1}{3}\,Ma(2+e^2)$, M being the mass of the lamina, $2a$ the major axis, and e the excentricity; and the mean distance of all points within a prolate spheroid from one of the foci is $\frac{1}{2}\,a(3+e^2)$.