先端データ解析論　4

48-196406　電子情報学専攻

磯川　弘基

HW.1

線形モデル

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{b} \theta_j \phi_j(\boldsymbol{x})$$

に対する重み付き最小二乗法

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_i \left(f_{\boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{x}_i\right) - y_i \right)^2$$

の解が次式で表されることを示せ.

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^{\top} \widetilde{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{\top} \widetilde{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{y}$$

$$f_{\boldsymbol{\theta}}\left(x_i\right) = \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\theta}$$

と表されることを用い，重み付き二乗誤差 $L(\boldsymbol{\theta})$ を変形する.

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i \left(\boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\theta} - y_i \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{w}_i^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\theta} - \tilde{w}_i^{\frac{1}{2}} y_i \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\| \tilde{W}^{\frac{1}{2}} \Phi \theta - \tilde{W}^{\frac{1}{2}} y \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\tilde{W}^{\frac{1}{2}} \Phi \theta - \tilde{W}^{\frac{1}{2}} y \right)^{\mathsf{T}} \left(\tilde{W}^{\frac{1}{2}} \Phi \theta - \tilde{W}^{\frac{1}{2}} y \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\theta^{\mathsf{T}} \Phi^{\mathsf{T}} \tilde{W}^{\frac{1}{2}} - y^{\mathsf{T}} \tilde{W}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\tilde{W}^{\frac{1}{2}} \Phi \theta - \tilde{W}^{\frac{1}{2}} y \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\theta^{\mathsf{T}} \Phi^{\mathsf{T}} \tilde{W} \Phi \theta - y^{\mathsf{T}} \tilde{W} \Phi \theta - y^{\mathsf{T}} \tilde{W} \Phi \theta + y^{\mathsf{T}} \tilde{W} y \right)
\end{aligned}$$

これを θ で微分したものが 0 となる条件を考える.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \Phi^{\mathsf{T}} \tilde{W} \Phi \theta - \Phi^{\mathsf{T}} \tilde{W} y = 0$$

したがって，これを満たす $\hat{\theta}$ は，以下のようになる.

$$\hat{\theta} = \left(\Phi^{\mathsf{T}} \tilde{W} \Phi \right)^{-1} \Phi^{\mathsf{T}} \tilde{W} y$$

HW.2

微分可能で対称な損失 $\rho(r)$ に対して $\tilde{r}$ で接する二次上界は次式で与えられることを示せ.

$$\widetilde{\rho}(r) = \frac{\tilde{w}}{2} r^2 + \text{const}$$

対称な二次式より，二次上界は一般的に以下のように表される.

$$\hat{\rho}(r) = ar^2 + b$$

$\tilde{r}$ において，$\hat{\rho}(r)$ は $\rho(r)$ に接するため，

$$\hat{\rho}'(\tilde{r}) = 2a\tilde{r} = \rho'(\tilde{r})$$

したがって，

$$a = \frac{\rho'(\tilde{r})}{2\tilde{r}}$$

以上より示された.

HW.3

直線モデル $f_\theta(x) = \theta_1 + \theta_2 x$ に対して，テューキー回帰の繰り返し最小二乗アルゴリズムを実装せよ.

別途ファイル（tukey.py）に解答.