先端データ解析論　1

48-196406　電子情報学専攻
磯川　弘基

HW.1

確率と統計の授業が好きな人，嫌いな人の確率が $p(X=\text{好})=0.8$, $p(X=\text{嫌})=0.2$ であるとする．また，確率と統計の授業が好きな人の中で授業中眠たい人，および，確率と統計の授業が嫌いな人の中で授業中眠たい人の確率が，それぞれ $p(Y=\text{眠}\,|X=\text{好})=0.25$, $p(Y=\text{眠}\,|X=\text{嫌})=0.25$ であるとする．

A) $p(X=\text{好},Y=\text{眠})$ を求めよ.

条件付き確率の定義より，

$$p(Y=\text{眠}\,|X=\text{好}) \quad = \quad \frac{p(Y=\text{眠},X=\text{好})}{p(X=\text{好})}$$

より，$p(Y=\text{眠},X=\text{好})=0.8\cdot 0.25=0.2$

B) $p(Y=\text{眠})$ を求めよ.

$$\begin{aligned} p(Y=\text{眠}) &= p(Y=\text{眠},X=\text{好})+p(Y=\text{眠},X=\text{嫌}) \\ &= p(Y=\text{眠}\,|X=\text{好})\cdot p(X=\text{好})+p(Y=\text{眠}\,|X=\text{嫌})\cdot p(X=\text{嫌}) \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

C) $p(X=\text{好}\,|Y=\text{眠})$ を求めよ.

ベイズの定理より，

$$\begin{aligned} p(X=\text{好}\,|Y=\text{眠}) &= p(Y=\text{眠}\,|X=\text{好})\cdot\frac{p(X=\text{好})}{p(Y=\text{眠})} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

D) 確率と統計の好き嫌いと授業中眠たい事は独立か?

任意の X={ 好，嫌 }, Y={ 眠, not 眠 } について以下が成り立つとき，独立.

$$p(X,Y)=p(X)p(Y)$$

いま，それぞれの組み合わせに関して，

$$p(X=\text{好},Y=\text{眠})=p(X=\text{好})p(Y=\text{眠})=0.2$$
$$p(X=\text{好},Y=\text{not 眠})=p(X=\text{好})p(Y=\text{not 眠})=0.6$$
$$p(X=\text{嫌},Y=\text{眠})=p(X=\text{嫌})p(Y=\text{眠})=0.05$$
$$p(X=\text{嫌},Y=\text{not 眠})=p(X=\text{嫌})p(Y=\text{not 眠})=0.15$$

が成立する．したがって，独立である．

HW.2

以下を証明せよ．

A) 定数は期待値をとっても値は変わらない．

$$
\begin{aligned}
E(c) &= \int c \cdot p(x)dx \\
&= c \cdot \int p(x)dx \\
&= c
\end{aligned}
$$

B) 定数を足した期待値は，期待値に定数を足したものと等しい．

$$
\begin{aligned}
E(X+c) &= \int (x+c) \cdot p(x)dx \\
&= \int x \cdot p(x)dx + c \cdot \int p(x)dx \\
&= E(X) + c
\end{aligned}
$$

C) 定数倍の期待値は，期待値の定数倍と等しい．

$$
\begin{aligned}
E(cX) &= \int cx \cdot p(x)dx \\
&= c \int x \cdot p(x)dx \\
&= cE(X)
\end{aligned}
$$

HW.3

以下を証明せよ．

A) 定数の分散はゼロ

$$
\begin{aligned}
V(c) &= E(c^2) - E(c)^2 \\
&= c^2 - c^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

B) 定数を足したものの分散は，もとの分散と等しい．

$$
\begin{aligned}
V(X+c) &= E[(X+c)^2] - E[X+c]^2 \\
&= E[X^2] + 2cE[X] + E[c^2] - (E[X]+c)^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2 \\
&= V(X)
\end{aligned}
$$

C) 定数倍の分散は，もとの分散に定数の 2 乗をかけたものと等しい．

$$
\begin{aligned}
V(cX) &= E[(cX)^2] - E[cX]^2 \\
&= E[(cX)^2] - E[cX]^2 \\
&= c^2E[X^2] - (cE[X])^2 \\
&= c^2(E[X^2] - E[X]^2) \\
&= c^2V(X)
\end{aligned}
$$

HW.4

以下を証明せよ．

A) 二つの確率変数 X と X' の和の期待値は，それぞれの期待値の和と等しい.

$$\begin{aligned} E(X+X') &= \int (x+x')\cdot p(x)dx && (\because \text{積分の加法性}) \\ &= \int x\cdot p(x)dx + \int x'\cdot p(x)dx \\ &= E(X)+E(X') \end{aligned}$$

となり，期待値の加法性が示された.
B)X と X' の和の分散は，一般にはそれぞれの分散の和とは等しくない.

$$\begin{aligned} V(X+X') &= E[((X+X')-E[X+X'])^2] \\ &= E[((X-E[X])+(X'-E[X']))^2] && (\because 4.A) \\ &= E[(X-E[X])^2+(X'-E[X'])^2+2(X-E[X])(X'-E[X'])] \\ &= E[(X-E[X])^2]+E[(X'-E[X'])^2]+2\cdot E[(X-E[X])(X'-E[X'])] && (\because 4.A) \\ &= V(X)+V(X')+2Cov(X,X') \end{aligned}$$

となり，分散の非加法性が示された.