Dr hab. J. B. Gosk

Dodatek A

Idea i sposób wykonania pomiaru współczynnika κ=c_p/c_v

I. Wstęp

Powietrze jest ośrodkiem sprężystym, tak więc zaburzenia wywołane w powietrzu mogą propagować się w postaci fal, w szczególności fal dźwiękowych (FD). Każdy z nas może samodzielnie określić prędkość FD w powietrzu. W tym celu potrzebujemy trochę szczęścia, aby wykorzystać to, czym obdarza nas sama natura. Mierząc czas od rozbłysku pioruna do chwili usłyszenia grzmotu oraz odległość między miejscami gdzie uderzył piorun i gdzie usłyszeliśmy grzmot dostajemy niezbędne dane do policzenia prędkości dźwięku.

Podstawą do wyznaczenia wielkości $\kappa=c_p/c_v$ w ćwiczeniu 43 jest pomiar prędkości FD w powietrzu. Aby zrealizować ten cel należy wykonać dwa niezależne podzadania:

1) Zmierzyć prędkość dźwięku w powietrzu. Ten pomiar wykonujemy wykorzystując dostępną w laboratorium aparaturę.
2) Zapoznać się z teorią opisującą rozchodzenie się fal dźwiękowych w powietrzu. Teoria daje nam związek pomiędzy prędkością FD i wartością $\kappa=c_p/c_v$.

II. Uwagi dotyczące zadania drugiego

Rozpoczniemy od prostszego drugiego podzadania. Wyprowadzenie równań opisujących propagacje FD wraz z ich rozwiązaniem w bardzo przystępny i poglądowy sposób przedstawia podręcznik „Feymana Wykłady z Fizyki" (PWN 1974, Tom I, Część 2). Wyprowadzenie układu równań wraz z komentarzem zawiera również mój dodatek B. Równania opisujące propagację zaburzeń w powietrzu, w szczególności propagacji FD, bazują na założeniach, których ostateczną słuszność powinny zweryfikować wyniki eksperymentalne. W teorii prędkość dźwięku v pojawia się w równaniu:

$$v^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_o$$

Chodzi tu o pochodną ciśnienia względem gęstości, dla ciśnienia, gęstości i temperatury powietrza, dla których mierzymy prędkość FD (p_o, ρ_o, T_o -parametry niezaburzonego ośrodka). Dla wyznaczenia tej pochodnej Newton skorzystał z prawa Boyle'a ($pV = p_oV_o$, tu V oznacza objętość) i otrzymał związek (zobacz F.C. Craford „Fale" PWN 1972):

$$v = \sqrt{\frac{p_o}{\rho_o}}$$

Przyjęcie za Newtonem założenia, że nie ma zmian temperatury towarzyszących rozchodzeniu się FD daje, niezgodną z eksperymentem, zaniżoną wartości prędkości fal dźwiękowych. Dla nas oznaczało by to brak możliwości pomiaru wielkości $\kappa=c_p/c_v$! Na szczęście okazało się, że błąd popełnił Newton. Aby być w zgodzie z eksperymentem należy zamiast prawa Boyle'a zastosować prawo opisujące adiabatyczną przemianę gazu. Przypomnijmy, dla procesów zachodzących bez wymiany ciepła zależność miedzy ciśnieniem p i gęstością ρ gazu przedstawia wzór:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_o}{{\rho_0}^\gamma} \quad \rightarrow \quad p = \frac{p_o}{{\rho_0}^\gamma}\,\rho^\gamma$$

Różniczkując powyższe równanie i podstawiając do niego $\rho=\rho_o$ ostatecznie otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_o}{\rho_o}}$$

Stąd już jasno wynika jakie wielkości należy zmierzyć, aby otrzymać poszukiwaną wartość $\gamma \equiv \kappa = c_p/c_v$. Tymi wielkościami są: v, p_o, ρ_o. W ćwiczeniu 43 część eksperymentalną stanowi pomiar prędkości FD. Aby dostać wartość p_o/ρ_o należy skorzystać z danych literaturowych. W naszym przypadku mogą to być Tablice Matematyczno-Fizyczne lub dane z Internetu. W Tablicach Matematyczno-Fizycznych znajdujemy wartość masy molowej powietrza M=28.964 g/mol. Jeżeli przyjąć tą wielkość za podstawę naszych obliczeń to dla obliczenia brakującej wielkości p_o/ρ_o można skorzystać z równania Clapeyrona :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

Do obliczenia p_o/ρ_o, oprócz znajomości M i stałej gazowej R (R=8,31447 J/(mol K)) musimy znać temperaturę powietrza. Do tego wystarczy miernik temperatury.

III. Uwagi dotyczące części eksperymentalnej

Jak zmierzyć prędkość dźwięku? Popatrzmy na zestaw eksperymentalny. Rozchodzące się w rurze fale płaskie (zaburzenie zależne od jednej zmiennej przestrzennej x i czasu t) generujemy przy użyciu głośnika. Drgania elementu wywołującego FD (membrana głośnika) sterowane są napięciem zmiennym (opisanym funkcją harmoniczną) o zadawanej przez nas częstości *f*. Tak więc rozpatrujemy najprostszą postać fali biegnącej (fali bieżącej). Dla fali biegnącej w dodatnim kierunku osi x zmiany ciśnienia opisuje wzór:

$$p(x, t) = p_e\cos(\varphi(x, t)) = p_e\cos(\omega t - kx + \varphi_o).$$

Gdyby mierzyć zmiany ciśnienia w dwóch różnych punktach x_1 i $x_2 = x_1+\Delta x$ to powinniśmy otrzymać:

$$p(t, x_1) = p_e\cos(\omega t - kx_1 + \varphi_o)= p_e \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad (1)$$

$$p(t, x_2) = p_e\cos(\omega t - kx_2 + \varphi_o)= p_e \cos(\omega t + \varphi_1 - \Delta\varphi) \qquad (2)$$

gdzie:

$$\Delta\varphi = k\cdot\Delta x \qquad (3)$$

Detektory dźwięku (mikrofony) umieszczone w punktach x_1 i x_2 pokażą sygnały o tej samej częstości, ale przesunięte względem siebie w fazie. Wartość $\Delta\varphi$ zależy od odległości między detektorami i długości fali ($k=2\pi/\lambda$). Poniżej pokażemy, że oznacza to, że oba sygnały są przesunięte w czasie (Δt).
W pomiarach w laboratorium wykorzystujemy oscyloskop dwustrumieniowy ustawiony w trybie z włączoną podstawą czasu lub w trybie X-Y tj. jeden sygnał podajemy na wyjście X oscyloskopu, a drugi na wejście Y (zamiast podstawy czasu). W pierwszym przypadku na osi x ekranu oscyloskopu mamy czas (centymetry przeliczmy na sekundy).Ten tryb pracy oscyloskopu pozwala na jednoczesną obserwację dwóch sygnałów. Co powinniśmy zobaczyć na oscyloskopie, do którego doprowadzono sygnały z dwóch czujników/detektorów ciśnienia odległych od siebie o Δx? Aby zaburzenie (zmiany ciśnienia) z punktu x_1 dotarło do bardziej oddalonego od źródła dźwięku, punktu x_2 wymagany jest dodatkowy czas $\Delta t=\Delta x/v$, gdzie v oznacza prędkość fali. Przebieg napięcia z czujnika w położeniu x_2 będzie taki sam jak ten z czujnika w położeniu x_1 zaobserwowany wcześniej tj. w czasie $t-\Delta t$. Zapiszmy to:

$$p_2(t) = p_e \cos(\omega t - k\, x_1 - k\Delta x + \varphi_o) = p_e \cos(\omega(t - \Delta t) - kx_1 + \varphi_o) = p_1(t - \Delta t) \qquad (4)$$

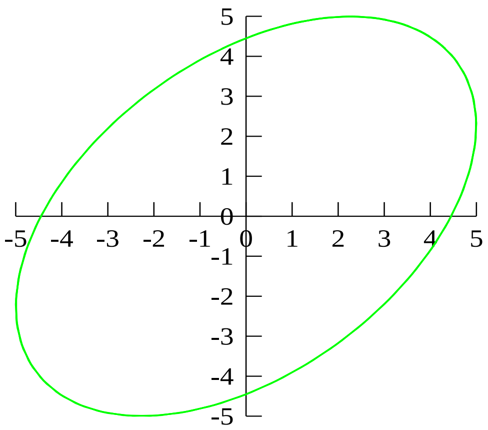
co wynika z prostych przekształceń:

$$k\Delta x = (2\pi/\lambda)\, \Delta x = \{T\cdot v = \lambda\} = (2\pi/T)\Delta x/v = \omega\Delta x/v = \omega\Delta t,$$

gdzie T jest okresem. Mamy więc:

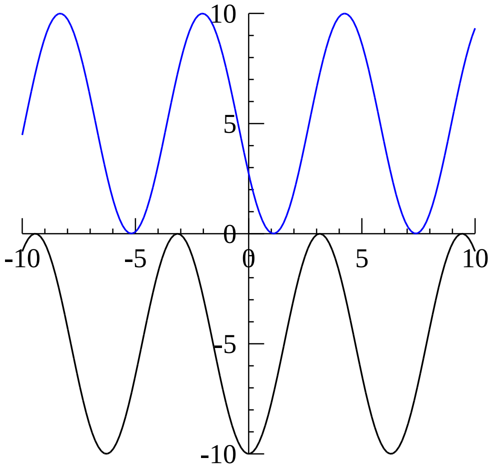
$$k\cdot\Delta x = \omega\cdot\Delta t = \Delta\varphi \rightarrow \Delta t = T\Delta x/\lambda, \qquad (6)$$

Z powyższych rozważań wynikają dwa różne sposoby pomiaru długości fali dźwiękowej. Pierwszy sposób bazuje na możliwości bezpośredniego pomiaru przesunięcia fazowego $\Delta\varphi = \Delta\varphi(\Delta x)$ (obserwacja krzywych Lissajous) i skorzystaniu ze wzoru (3). W tym celu należy sygnały z mikrofonów w x_1 i $x_2 = x_1 + \Delta x$ podać na wejścia dwustrumieniowego oscyloskopu w trybie X-Y (wyłączona podstawa czasu). W tym celu zmieniamy położenia odbiornika FD i zapisujemy te odpowiadające obserwacji jednej z dwóch szczególnych krzywych Lissajous. Są to pojawiające się naprzemiennie odcinki prostej o odpowiednio nachyleniach dodatnim i ujemnym. Ten pomiar pozwala zmierzyć długość fali λ, który w połączeniu ze znajomością *f* daje poszukiwaną wartość prędkość FD ($v=\lambda f$, $f=1/T$).



Rys. 1. Obraz z oscyloskopu w trybie pracy X-Y dla przykładowych sygnałów z rys. 2.

Drugi sposób, wynika z analizy jednoczesnej obserwacji sygnałów z mikrofonów umieszczonych w x_1 i x_2. Dwustrumieniowy oscyloskop jest ustawiony w trybie z włączoną podstawą czasu. Obserwujemy zmiany przesunięcia czasowego Δt odpowiadające zmianom Δx. Długość fali λ otrzymujemy ze wzoru (6) (zalecamy mierzenie położenia detektora dla $\Delta t = n\cdot T$).



Rys. 2. Obraz z oscyloskopu dwustrumieniowego w trybie pracy - z podstawą czasu. Oś Y - sygnały z generatora (podawany na głośnik) i z mikrofonu; centymetry przeliczmy na wolty. Oś X – to oś ‘czasu’; centymetry przeliczmy na sekundy. Te same sygnały posłużyły do narysowania krzywej Lissajous na rys. 1.

Reasumując: obserwując zmiany czasowe ciśnienia w dwóch różnych punktach wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali możemy zmierzyć przesunięcie fazowe lub opóźnienie czasowe między tymi sygnałami. Istotne jest to, że zarówno $\Delta\varphi$ jak i Δt zależą od Δx oraz poszukiwanej przez nas długości fali λ.

Uwaga. W eksperymencie zmiany ciśnienia są obserwowane za pomocą oscyloskopu i czujnika/detektora, którego zasadniczym elementem jest membrana mikrofonu. Drgająca membrana pod wpływem FD indukuje zmienne napięcie w cewce mikrofonu, które po wzmocnieniu obserwujemy na oscyloskopie. Oscylująca membrana czujnika/odbiornika, podobnie jak membrana głośnika, generuje fale dźwiękowe rozchodzące się zarówno w kierunku do przodu jak i do tyłu. Tak więc na 'przeszkodzie' jaką jest membrana mikrofonu zachodzi odbicie i transmisja fali dźwiękowej.

Po omówieniu stosownych wzorów wracamy do pytania: jak wykorzystując układ pomiarowy ćwiczenia 43 zmierzyć długości fali? Pomiar rozpoczynamy od 'zsynchronizowania' sygnałów odbiornika (mikrofon) i nadajnika (głośnik). Odbiornik ustawiamy w pozycji x_1 takiej, aby sygnały z głośnika i z mikrofonu były w tej samej fazie lub przesunięte o π. Następnie przesuwamy odbiornik w prawo (nowe położenia x_2). Zmianie Δx odpowiada zmiana przesunięcia fazowego ($\Delta\varphi$, wzór 6). *De facto* w punkcie x_1 nie ma już odbiornika (zmienia swoje położenie). Zamiast niego do pomiaru $\Delta\varphi$ korzystamy z sygnału referencyjnego z głośnika. W tym przypadku wyznaczenie długości fali opiera się na znajomości krzywych Lissajous (patrz instrukcja lub Wikipedia). Jak wspomniano wyżej wygodnie będzie skoncentrować się tu jedynie na dwóch szczególnych wybranych krzywych Lissajous (odcinki prostej). Pojawiają się one regularnie gdy $\Delta\varphi$ zwiększa swoją wartość o $n\pi$ (n jest liczbą całkowitą). Powrót do jednej z dwóch charakterystycznych krzywych Lissajous wiążemy z przesunięciem odbiornika $\Delta x = n \cdot \lambda/2$, co wynika z zależności:

$$\Delta\varphi = k\cdot\Delta x = \{\, k = 2\pi/\lambda \,\} = 2\pi\cdot\Delta x/\lambda \qquad (7)$$

Uwaga. Zmiana Δx w zakresie od x_o do $x_o+\lambda$ pozwala zaobserwować wszystkie krzywe Lissajous odpowiadające przesunięciom fazowym $0 \leq \Delta\varphi \leq 2\pi$. Na wykresie zależności $\Delta x_n := \Delta x(n)$ (do wzoru 7 podstawiamy $\Delta\varphi = n\pi$ i $\Delta x = \Delta x_n$) powinniśmy zaobserwować układanie się punktów pomiarowych na prostej. Znajomość współczynnika kierunkowego prostej pozwala wyznaczyć poszukiwaną wartość długości fali λ.
W drugiej metodzie tj. przy zastosowaniu podstawy czasu 'synchronizacja' polega na ustaleniu położenia początkowego odbiornika tak by $\Delta t=0$. Przesuwając detektor notujemy położenia dla których $\Delta t = n\cdot T/2$ lub jedynie te (łatwiejsze do precyzyjnego ustawienia), dla których $\Delta t = n\cdot T$. Podobnie jak w pierwszym sposobie z wykresu $\Delta x_n := \Delta x(n)$ wyznaczamy (wzór 6) długość fali λ.