Wstęp do matematyki B

Jan Kraszewski

Przedmowa

Niniejszy skrypt powstał w wyniku twórczego opracowania moich notatek, które sporządziłem prowadząc wykład ze Wstępu do Matematyki B. W jego napisaniu pomogły mi skrypty prof. Jacka Cichonia „Wykłady ze Wstępu do Matematyki” i prof. Ludomira Newelskiego „Wstęp do Matematyki A”. Jestem też wdzięczny prof. Piotrowi Zakrzewskiemu za możliwość korzystania z jego notatek, sporządzonych wspólnie z prof. Wojciechem Guzickim, do wykładu ze Wstepu do Matematyki prowadzonego na Uniwersytecie Warszawskim. Parę przykładów zaczerpnąłem z zestawu zadań do wykładu z Logiki dla Informatyków.

Stworzenie tego skryptu nie byłoby możliwe bez podręcznika „Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LaTeX2e” autorstwa Tobiasa Oetikera, Huberta Partla, Irene Hyna i Elisabeth Schlegl w tłumaczeniu i opracowaniu Janusza Gołdasza, Ryszarda Kubiaka i Tomasza Przechlewskiego.

Spis treści

Rozdział 0

Wstęp do Wstępu

Celem wykładu ze *Wstępu do matematyki* jest przede wszystkim zaznajomienie słuchaczy z formalizmem matematycznym, bez którego nie sposób uprawiać matematykę. Od studenta, który ukończy ten wykład, oczekuje się

- umiejętności poprawnego wyrażania się w języku matematycznym (zarówno pod względem merytorycznym, jak i składniowym),
- umiejętności analizowania ze zrozumieniem treści wyrażonych w języku matematycznym,
- umiejętności poprawnego formułowania myśli matematycznych,
- zrozumienia, na czym polega dowód matematyczny oraz praktycznej umiejętności dowodzenia prostych faktów,
- znajomości podstawowych pojęć, takich jak funkcja, relacja czy moc zbioru.

Wykład ten jest prawdopodobnie najtrudniejszym wykładem na pierwszym roku studiów matematycznych, ponieważ treścią zdecydowanie różni się od tego, do czego jego słuchacze przyzwyczaili się podczas lekcji matematyki w szkole średniej. Ponadto osiągnięcie wyżej wymienionych celów jest niemożliwe bez zrozumienia wymaganego materiału. Próby mechanicznego (pamięciowego) wyuczenia się w zdecydowanej większości przypadków kończą się klęską.

Co robić, by zrozumieć? Aktywnie i systematycznie pracować przez cały semestr, starać się pielęgnować w sobie umiejętność logicznego myślenia, a w razie kłopotów – żądać wyjaśnień od osób prowadzących zajęcia.

W ciągu wykładu będziemy używać kilku zbiorów, poznanych w szkole średniej. Dla porządku przypomnimy je poniżej (warto zwrócić uwagę, że oznaczenia niekiedy różnią się od szkolnych).

- zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$,
- zbiór liczb naturalnych dodatnich $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,
- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ = zbiór liczb naturalnych i liczb do nich przeciwnych $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ = zbiór wszystkich ułamków $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$,
- zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Będziemy też używali pojęcia podzielności liczb całkowitych. Otóż mówimy, że liczba całkowita n **dzieli** liczbę całkowitą m jeśli istnieje liczba całkowita k taka, że $m = nk$. Mówimy wtedy też, że liczba m jest **podzielna** przez liczbę n i piszemy $n|m$.

Podczas wykładu będziemy się też posługiwać alfabetem greckim, którego opanowanie w mowie i piśmie jest podczas studiów matematycznych nieuniknione. Dla ułatwienia przypominamy go poniżej.

α alfa	η eta	ν ni	τ tau
β beta	θ teta	ξ ksi	υ ypsilon
γ gamma	ι jota	o omikron	φ fi
δ delta	κ kappa	π pi	χ chi
ε epsilon	λ lambda	ρ ro	ψ psi
ζ dzeta	μ mi	σ sigma	ω omega

Przydają się też niektóre duże greckie litery.

Γ gamma	Θ teta	Ξ ksi	Σ sigma	Ψ psi
Δ delta	Λ lambda	Π pi	Φ fi	Ω omega

W skrypcie występuje sporo dowodów. Koniec dowodu zawsze będziemy oznaczali znakiem $\Box$.

Każdy rozdział (z wyjątkiem ostatniego) kończy się zadaniami. Zadania łatwe i trudne celowo nie są rozróżnione. Na końcu skryptu znajdują się odpowiedzi i wskazówki do niektórych zadań. Należy zaznaczyć, że na ogół są one skrótowe i często nie zawierają uzasadnienia, które normalnie jest od studenta wymagane. Jest to również celowe – odpowiedzi mają pomagać czytelnikowi w samodzielnej pracy, a nie wyręczać go.

Rozdział 1

Rachunek zdań

W języku matematycznym, podobnie jak np. w języku polskim, mamy do czynienia ze zdaniami, które zawierają pewną (matematyczną) treść. W odróżnieniu jednak od języka potocznego, zdania matematyczne mają zawsze *jednoznacznie* określoną *wartość logiczną*: są albo prawdziwe, albo fałszywe.

Podobnie jak w języku potocznym, w języku matematycznym rozważamy zdania proste, z których możemy następnie budować zdania złożone, używając *spójników logicznych*. Powstaje pytanie, jak prawdziwość zdania złożonego zależy od wartości logicznych tworzących je zdań prostych oraz własności użytych spójników. Odpowiedzi na nie udziela rachunek zdań, którym będziemy się zajmować w tym rozdziale.

Zwróćmy uwagę, że nie będzie nas interesować na razie *treść* zdań, a tylko ich wartość logiczna. Dlatego oznaczamy je literami $p, q, r, s, \ldots$[1] Fakt, że zdanie p jest prawdziwe zapisujemy $p = 1$, zaś że jest fałszywe $p = 0$. Przez 1 oznaczamy też dowolne zdanie prawdziwe, a przez 0 dowolne zdanie fałszywe.

Będziemy używać następujących spójników logicznych.

- *negacja*[2], oznaczana symbolem $\neg$. Napis $\neg p$ czytamy „nieprawda, że p" lub „nie p";
- *alternatywa*, oznaczana symbolem $\vee$. Napis $p \vee q$ czytamy „p lub q";
- *koniunkcja*, oznaczana symbolem $\wedge$. Napis $p \wedge q$ czytamy „p i q";
- *implikacja*[3], oznaczana symbolem $\Rightarrow$. Napis $p \Rightarrow q$ czytamy „jeżeli p, to q" lub „z p wynika q"[4];

[1] Będziemy mówili też, że $p, q, r, \ldots$ są to *zmienne zdaniowe*.
[2] Czasem mówimy też *zaprzeczenie*.
[3] Czasem mówimy też *wynikanie*.
[4] Nie są to jedyne możliwości (por. skrypt do Wstępu do Matematyki A).

- *równoważność*, oznaczana symbolem $\Leftrightarrow$. Napis $p \Leftrightarrow q$ czytamy „p wtedy i tylko wtedy, gdy q" lub „p jest równoważne q".

Negacja jest spójnikiem jednoargumentowym, pozostałe zaś spójniki są dwuargumentowe. Sposób, w jaki prawdziwość zdań złożonych stworzonych przy pomocy powyższych spójników zależy od prawdziwości zdań prostych, opisują poniższe tabelki.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

W niektórych z powyższych przypadków możemy mówić o zgodności z potoczną intuicją. Istotnie, oczekiwalibyśmy, że zaprzeczenie zdania prawdziwego będzie zdaniem fałszywym (i na odwrót) i tak faktycznie jest. Podobnie jest w przypadku alternatywy i koniunkcji zdań. Zdanie „p lub q" jest prawdziwe, gdy któreś ze zdań składowych jest prawdziwe, a zdanie „p i q" – – gdy oba, co też dość dobrze oddaje potoczne znaczenie spójników „lub" oraz „i". Wreszcie, zdania równoważne powinny być w jakimś sensie takie same (w tym wypadku chodzi o ich wartość logiczną) i tak również jest. Pewien problem możemy mieć z implikacją.

Jeśli wiemy, że ze zdania p wynika zdanie q (czyli $p \Rightarrow q$), to zdanie p nazywamy *założeniem* (lub *poprzednikiem* implikacji), a zdanie q – *wnioskiem, tezą* (lub *następnikiem* implikacji). Oczywiste wydaje się, że jeśli założenie jest prawdziwe, to powinniśmy dojść do prawdziwego wniosku (czyli, że zdanie $1 \Rightarrow 1$ jest prawdziwe, a zdanie $1 \Rightarrow 0$ fałszywe). Pewną wątpliwość może budzić sytuacja, gdy poprzednik implikacji jest fałszywy, gdyż potoczne rozumienie sformułowania „jeśli p, to q" może się nie zgadzać z powyższą definicją. W matematyce przyjmujemy jednak, że opierając się na fałszywych założeniach można dojść do dowolnych wniosków i dlatego zarówno zdanie $0 \Rightarrow 0$, jak i $0 \Rightarrow 1$ są prawdziwe.

Budując zdania bardziej złożone, wykorzystujące większą liczbę spójników, będziemy musieli używać nawiasów (podobnie jak to ma miejsce w przypadku wyrażeń algebraicznych) w celu zaznaczenia kolejności „używania" spójników logicznych. Na przykład możemy rozważyć zdanie

$$(((\neg p) \wedge q)) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \vee q).$$

Widzimy, że duża ilość nawiasów czyni je mniej czytelnym. Można ustalić pewną hierarchie spójników logicznych (tak jak dla działań algebraicznych, gdzie wykonujemy mnożenie przed dodawaniem i odejmowaniem), która pozwoli nam niektóre z nich opuścić. Najpierw działa spójnik negacji, potem równorzędnie spójniki koniunkcji i alternatywy, wreszcie równorzędnie spójniki implikacji i równoważności. Zatem uproszczony zapis powyższego zdania to

$$(\neg p \wedge q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \vee q.$$

Nawiasy możemy też opuścić, gdy mamy do czynienia z kilkoma kolejnymi koniunkcjami lub alternatywami – wynika to z faktu, że oba te spójniki są łączne, o czym za chwilę się dowiemy. Czyli zamiast $(p \vee q) \vee r$ możemy napisać $p \vee q \vee r$. Nie wolno natomiast opuszczać nawiasów, gdy spójniki koniunkcji i alternatywy występują obok siebie. W szczególności zapis $p \vee q \wedge r$ jest niepoprawny, gdyż jest niejednoznaczny.

Istotna jest umiejętność analizowania struktury logicznej posiadanych informacji (a następnie wyciągania wniosków). Dla ilustracji rozpatrzmy dwa „niematematyczne" przykłady.

Przykłady

1. Oto fragment raportu policji, sporządzony przez młodego aspiranta:

   Świadek był zastraszony lub też, jeśli Henry popełnił samobójstwo, to testament odnaleziono. Jeśli świadek był zastraszony, to Henry nie popełnił samobójstwa. Jeśli testament odnaleziono, to Henry popełnił samobójstwo. Jeśli Henry nie popełnił samobójstwa, to testament odnaleziono.

   Przyjmijmy następujące oznaczenia:
   p – „świadek był zastraszony",
   q – „Henry popełnił samobójstwo",
   r – „testament odnaleziono".
   Wtedy raport aspiranta można przedstawić jako

   $$(p \vee (q \Rightarrow r)) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow r).$$

2. Podczas pewnej kampanii wyborczej Olek, Józek oraz Kazik wygłosili następujące oświadczenia:

   Olek: *Józek zawsze kłamie.*
   Józek: *Kazik zawsze kłamie.*
   Kazik: *Olek zawsze kłamie.*

   Przyjmijmy następujące oznaczenia:
   p – „Józek zawsze kłamie",
   q – „Kazik zawsze kłamie",

r – „Olek zawsze kłamie”.
Z powyższych oświadczeń wynika zatem, że

$$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \Rightarrow \neg r) \wedge (r \Rightarrow \neg p).$$

W dalszej części tego rozdziału w powyższych sytuacjach wyciągniemy wnioski, korzystając z dokonanej analizy.

1.1 Tautologie i dowody

Korzystając z tabelek na stronie 6 możemy, w zależności od wartości logicznych zdań prostych, wyznaczyć wartość logiczną dowolnego zdania złożonego. I tak, wartość logiczna zdania $(\neg p \wedge q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \vee q$ dla $p = 0$ i $q = 1$ to

$$((\neg 0 \wedge 1 \Rightarrow 0) \Leftrightarrow 0 \vee 1) = ((1 \wedge 1 \Rightarrow 0) \Leftrightarrow 1) = ((1 \Rightarrow 0) \Leftrightarrow 1) = (0 \Leftrightarrow 1) = 0$$

fałsz. Ogólniej, możemy sporządzić tabelkę wartości logicznych danego zdania, która dla powyższego zdania wygląda następująco:

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q \Rightarrow p$	$p \vee q$	$(\neg p \wedge q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \vee q$
0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Oczywiście, interesujące dla nas są tylko dwie pierwsze i ostatnia kolumna, pozostałe pełnią jedynie funkcje pomocnicze.

Widzimy, że rozpatrywane przez nas zdanie złożone jest dla niektórych wartości logicznych zmiennych zdaniowych p i q prawdziwe, a dla innych fałszywe. Z punktu widzenia rachunku zdań szczególnie interesujące są te zdania, które nigdy nie są fałszywe.

Definicja *Zdanie logiczne nazywamy* ***tautologią*** *jeśli jest zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zmiennych zdaniowych w nim występujących.*

Tautologie nazywa się też prawami rachunku zdań, choć niekiedy zachowuje się tę nazwę jedynie dla szczególnie ważnych tautologii.

Przykład Rozważmy zdanie $p \wedge q \Rightarrow p$. Pokażemy dwoma sposobami, że jest ono tautologią.

1. Wprost. Sporządźmy tabelkę wartości logicznych tego zdania.

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

   Widzimy, że jest ono zawsze prawdziwe (ostatnia kolumna tabelki to same jedynki).

   Wydawać by się mogło, że trudno o prostszy dowód. Okazuje się jednak, że przy bardziej skomplikowanych zdaniach metoda ta jest nieefektywna. Istotnie, jeśli w zdaniu występują trzy zmienne zdaniowe, to tabelka wartości logicznych ma $2^3 = 8$ wierszy. Każda zmienna więcej oznacza podwojenie liczby wierszy. Jeżeli na dodatek zdanie ma złożoną strukturę, to rośnie prawdopodobieństwo pomyłki. Dlatego warto poznać metodę alternatywną.

2. Nie wprost. Przypuśćmy, że zdanie $p \wedge q \Rightarrow p$ nie jest tautologią, czyli dla pewnych wartości zmiennych zdaniowych jest fałszywe. Zauważmy jednak, że jest ono implikacją, a implikacja jest fałszywa dokładnie wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Zatem musi być $p \wedge q = 1$ i $p = 0$. Ale koniunkcja jest prawdziwa, gdy oba jej składniki są prawdziwe, czyli $p = q = 1$. Nasze przypuszczenie doprowadziło nas zatem do sprzeczności ($p = 0$ i $p = 1$), czyli nie mogło być prawdziwe. Stąd zdanie $p \wedge q \Rightarrow p$ jest tautologią.

   W skrócie nasze rozumowanie można zapisać tak:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} p & \wedge & q & \Rightarrow & p \\ \hline & & & 0 & \\ & 1 & & & \underline{p=0} \\ \underline{p=1} & & q=1 & & \end{array}$$

   Sprzeczność.

   Trzeba nadmienić, że sposób ten nie zawsze jest skuteczny, najlepiej działa w wypadku zdań będących implikacjami.

Wnioskowanie przeprowadzone drugim sposobem jest przykładem *dowodu nie wprost.* Polega on na tym, że zakładamy, że dowodzona teza nie zachodzi i staramy się (korzystając być może z występujących w twierdzeniu założeń) wywnioskować sprzeczność. Gdy nam się to uda, oznacza to, że nasza teza jest prawdziwa (bo nie może być fałszywa)[5]. Jest to jedna z podstawowych metod dowodowych, bez zrozumienia i opanowania której nie można się obejść. Dlatego przedstawimy jeszcze jeden przykład dowodu nie wprost, tym razem niezwiązany z rachunkiem zdań.

Przykład Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.
Załóżmy nie wprost, że liczba $\sqrt{2}$ nie jest niewymierna, czyli, że jest liczbą wymierną. Istnieją zatem liczby całkowite a i b takie, że $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ oraz a i b są względnie pierwsze[6] (czyli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny). To pociąga, że $2 = (\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{b^2}$, czyli $2b^2 = a^2$. Wnioskujemy stąd, że liczba a^2 jest parzysta. Wtedy jednak liczba a również jest parzysta i istnieje liczba całkowita c, taka że $a = 2c$. Wówczas $2b^2 = (2c)^2$, czyli $b^2 = 2c^2$. Podobnie jak poprzednio wnioskujemy, że liczba b jest parzysta. To jednak stoi w sprzeczności z faktem, że liczby a i b są względnie pierwsze. Zatem liczba $\sqrt{2}$ nie może być wymierna.

Zastanowimy się teraz, jak sprawdzić, *czy* dane zdanie jest tautologią. Zauważmy, że sytuacja jest nieco trudniejsza, niż poprzednio, gdyż w tym wypadku nie znamy odpowiedzi. Tym razem również wykorzystamy przykład.

Przykład Sprawdzić, czy zdanie $p \Rightarrow (q \vee (p \Rightarrow \neg r))$ jest tautologią.
Podobnie jak poprzednio możemy zrobić to na dwa sposoby.

1. Tabelka. Tworzymy tabelkę wartości logicznych naszego zdania.

p	q	r	$\ldots$	$p \Rightarrow (q \vee (p \Rightarrow \neg r))$
0	0	0	$\ldots$	1
0	0	1	$\ldots$	1
0	1	0	$\ldots$	1
0	1	1	$\ldots$	1
1	0	0	$\ldots$	1
1	0	1	$\ldots$	0
1	1	0	$\ldots$	1
1	1	1	$\ldots$	1

Widać, że dla $p = r = 1$ i $q = 0$ nasze zdanie jest fałszywe, zatem nie jest tautologią. Ten sposób zawsze daje jednoznaczną odpowiedź,

[5] Tak naprawdę korzystamy z tautologii $(\neg p \Rightarrow 0) \Rightarrow p$.
[6] Liczby całkowite a i b są *względnie pierwsze*, jeśli ich największy wspólny dzielnik wynosi 1, czyli nie istnieje liczba całkowita $d > 1$, taka że $d|a$ i $d|b$.

ma jednak wspomniane wcześniej mankamenty. Powyższy wynik można osiągnąć szybciej, umiejętnie stosując metodę skróconą.

2. Metoda skrócona. Sprawdzamy, czy założenie fałszywości naszego zdania doprowadza nas do sprzeczności. Jeśli tak – na mocy wnioskowania nie wprost zdanie jest tautologią. Jeżeli nie – otrzymamy przykład na to, że zdanie tautologią nie jest. Konkretnie:

p	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$(p$	$\Rightarrow$	$\neg r))$
	0					
p=1			0			
		$q=0$			0	
				$p=1$		0
						$r=1$

Widać, że doszliśmy do $p = r = 1$ i $q = 0$. Szybkie sprawdzenie pokazuje, że dla tych wartości zmiennych zdaniowych nasze zdanie jest fałszywe, czyli nie jest ono tautologią.

W obu powyższych metodach otrzymaliśmy taki układ wartości logicznych zmiennych zdaniowych, dla którego dane zdanie było fałszywe. Innymi słowy, znaleźliśmy *kontrprzykład* na stwierdzenie, że zdanie to jest tautologią. Zrozumienie pojęcia kontrprzykładu jest również bardzo ważne do przyswojenia umiejętności dowodzenia, dlatego będziemy jeszcze do niego wracać.

1.2 Ważniejsze prawa rachunku zdań

Na zakończenie tego rozdziału wymienimy ważniejsze tautologie i podamy proste zastosowania. Dowody, że wymienione poniżej zdania są istotnie tautologiami pozostawiamy jako ćwiczenie.

Definicja *Będziemy mówili, że zdania logiczne φ i ψ są* ***równoważne****, jeśli zdanie $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią.*

Zauważmy, że prawie wszystkie podane niżej prawa mówią o równoważności pewnych zdań. Zaczniemy jednak od wyjątku.

- Prawo wyłączonego środka.

$$p \vee \neg p$$

Prawo to mówi, że w matematyce nie ma „trzeciej drogi" – tylko prawda albo fałsz. Oto przykład jego zastosowania.

Przykład Istnieją liczby niewymierne a i b, takie że a^b jest liczbą wymierną. Rozważmy liczbę $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Zgodnie z prawem wyłączonego środka są dwie możliwości. Jeśli liczba jest wymierna, to przyjmujemy $a = b = \sqrt{2}$. Jeśli zaś jest niewymierna, to

$$\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

i wystarczy przyjąć $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{2}$.

- Prawo sprzeczności.

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

- Prawa idempotentności alternatywy i koniunkcji.

$$p \vee p \Leftrightarrow p \qquad\qquad p \wedge p \Leftrightarrow p$$

- Prawo podwójnej negacji.

$$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$$

Zauważmy, że prawem tym język matematyki różni się od języka polskiego. Istotnie, zdanie „Nic nie umiem" zgodnie z tym prawem znaczyłoby „Wszystko umiem"[7].

- Prawa łączności alternatywy i koniunkcji.

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r), \qquad\qquad (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

- Prawa przemienności alternatywy i koniunkcji.

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p, \qquad\qquad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

- Prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy.

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

[7] W tym sensie matematyce bliższy jest język angielski, który nie dopuszcza konstrukcji z podwójną negacją.

- Prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji.

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

Prawa łączności, tak jak już wspomnieliśmy, pozwalają nam opuszczać nawiasy, gdy mamy do czynienia z kilkoma kolejnymi koniunkcjami lub alternatywami.

W powyższych prawach można dostrzec analogię pomiędzy własnościami spójników logicznych alternatywy i koniunkcji a własnościami działań algebraicznych dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych. Nie ma jednak pełnej odpowiedniości, gdyż dodawanie nie jest rozdzielne względem mnożenia.

- Prawo przechodniości implikacji (zwane też prawem sylogizmu).

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

- Prawo eliminacji implikacji.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

- Prawo eliminacji równoważności.

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Z prawa tego będziemy często korzystać przy dowodzeniu twierdzeń. Pozwala ono bowiem zastąpić dowód równoważności dwóch stwierdzeń matematycznych (co bywa trudne) dowodami dwóch wynikań (co bywa prostsze, np. każde wynikanie można udowadniać innym sposobem).

- Prawa de Morgana.

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q, \qquad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

- Prawo negacji implikacji.

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Prawa te pozwalają nam negować dowolne złożone zdania logiczne. Opanowanie tej umiejętności jest niezwykle istotne – na przykład chcąc zrobić dowód nie wprost musimy umieć poprawnie zanegować tezę.

Zakończymy naszą listę (inne tautologie można znaleźć w zadaniach) kilkoma prawami bez nazwy.

- $p \vee 0 = p, \qquad p \vee 1 = 1, \qquad p \wedge 0 = 0, \qquad p \wedge 1 = p$

Zastosujemy teraz poznane prawa do znanych nam już przykładów ze strony 7.

Przykłady

1. Wróćmy do raportu nieszczęsnego aspiranta i zastanówmy się, jakie wnioski może z niego wyciągnąć jego przełożony (poza oczywistym, że aspiranta należy zwolnić). Przypomnijmy, że raport miał postać

$$R = (p \vee (q \Rightarrow r)) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow r).$$

Stosując m.in. prawa eliminacji implikacji, przemienności, łączności, rozdzielności i sprzeczności, przekształcamy go do równoważnej, prostszej postaci.

$$\begin{aligned}
R &\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \Big(((p \vee r) \wedge \neg p) \vee \neg q\Big) \wedge ((\neg r \wedge r) \vee q) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \Big(((p \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg p)) \vee \neg q\Big) \wedge (0 \vee q) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \Big((0 \vee (r \wedge \neg p)) \vee \neg q\Big) \wedge q \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (r \wedge \neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q) \Leftrightarrow (r \wedge \neg p \wedge q) \vee 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge r
\end{aligned}$$

Zatem raport ten jest prawdziwy (a wierzymy aspirantowi) tylko wtedy, gdy $p = 0$ i $q = r = 1$. Czyli świadek nie był zastraszony, Henry popełnił samobójstwo, a testament odnaleziono.

2. Jeśli chodzi o analizę polemik przedwyborczych, to pokażemy, że przynajmniej dwaj panowie mylili się w ocenie swoich kontrkandydatów. Mamy do rozpatrzenia prawdziwe zdanie

$$P = (p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \Rightarrow \neg r) \wedge (r \Rightarrow \neg p).$$

Stosując eliminację implikacji dostajemy

$$P \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg p).$$

Załóżmy nie wprost, że przynajmniej dwa spośród zdań p, q i r są prawdziwe. Oznacza to, że przynajmniej dwa spośród zdań $\neg p, \neg q$ i $\neg r$ są fałszywe. Ale wtedy jedna z powyższych alternatyw musi być fałszywa, zatem całe zdanie P też. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Na zakończenie zrobimy jeszcze jedną uwagę. Często w matematyce spotykamy się z twierdzeniami postaci $p \Rightarrow q$, gdzie, przypomnijmy, p to założenia, a q to teza. *Twierdzeniem odwrotnym* do tego twierdzenia nazywamy twierdzenie $q \Rightarrow p$. Zauważmy teraz, że zdanie

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$$

nie jest tautologią. Mimo tego studentom zdarza się o tym zapominać i mylić założenie z tezą, a twierdzenie z twierdzeniem do niego odwrotnym. Należy o tym pamiętać i zdecydowanie się tego wystrzegać.

1.3 Zadania

1. Dla poniższych zdań sprawdzić, czy informacja $p = 0$ jest wystarczająca do wyliczenia wartości logicznej zdania złożonego. Jeśli tak, to wyznaczyć tę wartość, jeśli nie, to pokazać, że obie wartości są możliwe.
   (a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$;
   (b) $p \wedge (q \Rightarrow r)$;
   (c) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$;
   (d) $p \wedge q \Rightarrow p \vee r$.
2. Które z nawiasów w poniższych wyrażeniach można opuścić nie zmieniając sensu?
   (a) $(p \wedge (q \vee (\neg r))) \Rightarrow ((\neg s) \Leftrightarrow (r \vee q))$;
   (b) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q)$;
   (c) $((p \vee q) \vee r) \wedge (\neg s) \wedge \neg(r \vee s)$.
3. Sprawdzić, że wymienione do tej pory prawa rachunku zdań istotnie są tautologiami.
4. Sprawdzić, że poniższe prawa rachunku zdań są tautologiami.
   (a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (prawo transpozycji[8]);
   (b) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (prawo odrywania);
   (c) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p, \quad p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (prawa pochłaniania);
   (d) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (prawo Dunsa Szkota).

[8] Zwane też prawem kontrapozycji.

5. Zbadać, czy poniższe zdania są tautologiami.

   (a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$;
   (b) $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$;
   (c) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$;
   (d) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$;
   (e) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$;
   (f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q)$;
   (g) $(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow q)$;
   (h) $(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

6. W miejsce znaku $\Box$ wstawić zmienną zdaniową p, q lub r tak, by otrzymane zdanie złożone było tautologią.

   (a) $p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \Box)$;
   (b) $(p \Rightarrow q) \wedge r \Rightarrow p \vee \Box$.

7. W miejsce znaku $\Box$ wstawić symbol spójnika logicznego tak, by otrzymane zdanie złożone było tautologią. W przypadku więcej niż jednej możliwości podać wszystkie.

   (a) $p \,\Box\, (p \vee q)$;
   (b) $((p \Rightarrow q) \Box \neg q) \Rightarrow \neg p$.

8. Niech p, q, r oznaczają pewne zdania, a p', q', r' ich negacje. Zapisać negacje poniższych zdań złożonych bez użycia symbolu negacji $\neg$ (można używać pozostałych spójników oraz p, q, r, p', q', r').

   (a) $(q \Rightarrow r \wedge p) \vee \neg r$;
   (b) $\neg(p \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;
   (c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$;
   (d) $(p \wedge q) \Leftrightarrow r$.

9. Zakładamy, że o pewnej liczbie naturalnej n wiemy, że

   - n jest podzielna przez 4 i
   - jeśli n jest podzielna przez 2, to n jest podzielna przez 3.

   Czy stąd wynika, że liczba n jest podzielna przez 12?

10. Zbadać poprawność poniższych rozumowań.

    (a) Gdyby Karol był żołnierzem, to byłby odważny. Lecz Karol nie jest żołnierzem. Zatem Karol jest tchórzem.

    (b) Jeśli stopa procentowa nie ulegnie zmianie, to wzrosną wydatki rządowe lub pojawi się bezrobocie. Jeśli wydatki rządowe nie wzrosną, to podatki zostaną obniżone. Jeśli podatki zostaną obniżone i stopa procentowa nie ulegnie zmianie, to bezrobocie się nie pojawi. Zatem wydatki rządowe wzrosną.

    (c) Jeśli $x + 3 = \sqrt{3 - x}$, to $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$, więc $x = -6$ lub $x = -1$. Zatem liczby -6 i -1 są rozwiązaniami równania $x + 3 = \sqrt{3 - x}$.

11. Wędrowiec zatrzymał się przed rozwidleniem dróg, przy którym mieszkają dwie siostry-bliźniaczki, nota bene wiedźmy. Jedna z nich zawsze mówi prawdę, druga zawsze kłamie. Jedna z dróg prowadzi do miasta, a druga na śmiercionośne bagna. W tym momencie stanęła przed nim jedna z sióstr, której może zadać jedno, jedyne pytanie o drogę. Jak powinien je sformułować, by być pewnym, że trafi do miasta?

12. Które spośród zdań: $p \Rightarrow p$, $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$, $((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow p$,... są tautologiami?

13. Korzystając z podanych praw rachunku zdań pokazać, że spójniki logiczne $\wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ są definiowalne za pomocą spójników $\vee$ i $\neg$ (czyli pokazać, że zdania $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$ i $p \Leftrightarrow q$ są równoważne zdaniom, w których występują tylko spójniki $\vee$ i $\neg$).

14. Uzasadnić, że negacja nie jest definiowalna przez alternatywę i koniunkcję.

15. Uzasadnić, że implikacja nie jest definiowalna przez alternatywę i koniunkcję.

16. Definiujemy spójnik $|$ zwany *kreską Sheffera* następująco:

    $$p|q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

    Napisać tabelkę tego spójnika. Uzasadnić, że spójniki $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ są definiowalne za pomocą tego spójnika.

17. Definiujemy spójnik $\perp$ zwany *spójnikiem Pierce'a* następująco:

    $$p \perp q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$$

Napisać tabelkę tego spójnika. Uzasadnić, że spójniki $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ są definiowalne za pomocą tego spójnika.

18. Mówimy, że dwa spójniki $\odot$ i $\oslash$ są równoważne, jeśli tautologią jest zdanie $p \odot q \Leftrightarrow p \oslash q$. Uzasadnić, że jest 16 parami nierównoważnych spójników dwuargumentowych.

19. Uzasadnić, że kreska Sheffera i spójnik Pierce'a są jedynymi spójnikami takimi, że każdy ze spójników $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ jest definiowalny za ich pomocą.

20. Definiujemy spójnik $\triangledown$ zwany *alternatywą wyłączającą*[9] następująco:

$$p \triangledown q \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q).$$

Napisać tabelkę tego spójnika. Pokazać, że poniższe zdania są tautologiami.

(a) $\neg(p \triangledown p)$;

(b) $p \triangledown q \Leftrightarrow q \triangledown p$;

(c) $(p \triangledown q) \triangledown r \Leftrightarrow p \triangledown (q \triangledown r)$;

(d) $p \triangledown q \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$.

[9] Jeśli $p \triangledown q$, to mówimy „albo p, albo q" (czyli zachodzi tylko jedna z tych możliwości).

Rozdział 2

Zbiory

W tym rozdziale zajmiemy się podstawowymi obiektami matematycznymi, czyli zbiorami. Pojawia się od razu pytanie: „Co to jest zbiór?” Intuicyjnie pojęcie to opisuje pewną kolekcję obiektów, np. zbiór studentów pierwszego roku matematyki, o których mówimy, że są elementami tego zbioru. Jest to intuicja poprawna, choć oczywiście mocno nieprecyzyjna.

W matematyce przyjmujemy, że pojęcie zbioru i pojęcie należenia do zbioru (czyli bycia elementem zbioru) to pojęcia pierwotne, tzn. nie wymagające definicji. Dlatego w dalszym ciągu będziemy zajmować się ich własnościami, które z naszego punktu widzenia są najważniejsze.

Zazwyczaj zbiory oznaczamy dużymi literami, zaś ich elementy małymi literami. Należy jednak pamiętać, że to *nie* jest reguła i będą zdarzały sytuacje, gdy używać będziemy innych oznaczeń.

Fakt, że obiekt *a jest elementem* zbioru A (mówimy też *a należy* do A) zapisujemy

$$a \in A.$$

Przykład $2 \in \mathbb{N}$, $-5 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$.

Dla zaznaczenia, że *a nie jest elementem* zbioru A (*a nie należy* do A) piszemy

$$a \notin A.$$ [1]

Przykład $-1 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{7} \notin \mathbb{Z}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$.

W tym miejscu należy uczynić bardzo istotną uwagę. Ponieważ w szkole na ogół mamy do czynienia ze zbiorami liczbowymi lub np. zbiorami punktów

[1] Oczywiście $a \notin A$ jest skrótem $\neg(a \in A)$.

na płaszczyźnie, to może powstać intuicja, że zbiór i jego element mają zawsze różną naturę. To *nie jest* poprawna intuicja – będziemy rozważać zbiory, których elementy też będą zbiorami.

Poznamy teraz kluczową zasadę, wiążącą ze sobą pojęcia zbioru i należenia do zbioru, która mówi, że zbiór jest *jednoznacznie* wyznaczony przez swoje elementy.

Zasada Ekstensjonalności *Zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same elementy. Czyli*

$$A = B \Leftrightarrow (\textit{dla dowolnego } x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

W przyszłości bardzo często będziemy korzystali z tej zasady, dlatego należy ją dobrze zrozumieć i zapamiętać. Mimo bowiem swej intuicyjnej oczywistości, jej zastosowanie w praktyce sprawia często spore kłopoty. A sprowadza się ono najczęściej do tego, że w celu pokazania równości zbiorów A i B (czyli, że jest to ten sam zbiór) sprawdzamy, że każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, oraz że każdy element zbioru B jest elementem zbioru A. [2]

Zauważmy też, że *różność* zbiorów A i B oznacza, że istnieje element zbioru A, który nie jest elementem zbioru B lub istnieje element zbioru B, który nie jest elementem zbioru A.[3]

Żeby jednak cokolwiek móc o zbiorach powiedzieć, musimy się nauczyć poprawnie je opisywać. Zgodnie z Zasadą Ekstensjonalności oznacza to, że powinniśmy umieć wyrazić, z jakich elementów się one składają.

Zaczniemy od specjalnego zbioru, zwanego *zbiorem pustym*, który oznaczamy przez $\emptyset$. Jest to zbiór, który nie ma żadnych elementów. Z Zasady Ekstensjonalności wynika, że jest tylko jeden zbiór, który ma tę własność. Najprościej uzasadnić to rozumując nie wprost. Gdyby były dwa różne zbiory puste, to musiałby istnieć element jednego z tych zbiorów, który nie byłby elementem drugiego. Ale to oznacza, że jeden z tych zbiorów ma element! Nie jest zatem pusty, co przeczy założeniu. Może się to wydawać trochę dziwne, ale wynika stąd, że zbiór tych liczb rzeczywistych x, które spełniają równanie $x^2 + 1 = 0$, zbiór tych prostych na płaszczyźnie, które przechodzą (równocześnie) przez punkty $(0, 0), (1, 1)$ i $(9, 10)$ to ten sam zbiór[4], równy także zbiorowi krasnoludków[5].

---

[2] Skorzystaliśmy z prawa eliminacji równoważności.

[3] Jest to intuicyjnie zrozumiałe, do formalnego wyciągnięcia tego wniosku potrzebujemy wiadomości o kwantyfikatorach – patrz następny rozdział.

[4] Choć podobno przez każde trzy punkty przechodzi odpowiednio gruba prosta...

[5] Przynajmniej zgodnie z obecnym stanem wiedzy.

Zasadniczo są trzy sposoby określania zbiorów. Pierwszy z nich polega na wypisaniu elementów zbioru (ujętych w nawiasy klamrowe, oddzielonych przecinkami). I tak

$$\{1,2,3,4\}$$

jest zbiorem, którego elementami są liczby 1,2,3 i 4. Zbiór $\{a\}$, którego jedynym elementem jest a nazywamy *singletonem* elementu a. Zbiór $\{a,b\}$, którego elementami są a i b nazywamy *parą nieuporządkowaną* elementów a i b.

Ze względów praktycznych metoda ta ma swoje ograniczenia. Wprawdzie niekiedy dla zastąpienia pewnych elementów można użyć kropek (jeżeli to nie prowadzi do niejasności), np. elementami zbioru $\{3,4,5,\ldots,17\}$ są wszystkie liczby naturalne nie mniejsze niż 3 i nie większe niż 17, to jednak nie da się w ten sposób zapisać dużych zbiorów skończonych ani zbiorów nieskończonych.

Przykłady

1. Z Zasady Ekstensjonalności wynika, że $\{a,b\} = \{b,a\}$, co tłumaczy, dlaczego zbiór ten nazwaliśmy parą *nieuporządkowaną*[6]. Podobnie mamy $\{a,b\} = \{a,b,b,a,b\}$ oraz $\{a,a,a,a,a\} = \{a\}$.

2. Jak już mówiliśmy, elementami zbiorów mogą być zbiory. I tak $\{\emptyset\}$ jest zbiorem, którego jedynym elementem jest zbiór pusty. W szczególności jest niepusty, czyli $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Zauważmy, że zbiór $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ jest różny od obu poprzednich zbiorów. Ma on bowiem dwa elementy: $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$.
   Zbiór $\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$ jest również dwuelementowy, jego elementami są $\{\emptyset\}$ i $\{\{\emptyset\}\}$. Natomiast zbiór $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ ma tylko jeden element: $\{\{\emptyset\}\}$.

By móc wprowadzić drugi sposób określania zbiorów będziemy potrzebowali najpierw pojęcia funkcji zdaniowej.

Nie każde znane nam wyrażenie matematyczne ma jednoznacznie określoną wartość logiczną. Na przykład równanie

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

staje się zdaniem prawdziwym dla $x = 2$ lub $x = 3$, natomiast dla dowolnej innej liczby rzeczywistej – zdaniem fałszywym. Równanie to jest właśnie przykładem funkcji zdaniowej.

Definicja *Wyrażenie $W(x)$, które staje się zdaniem, gdy za zmienną x podstawimy obiekt określonego typu (np. element ustalonego zbioru) nazywamy*

[6] Choć sam termin *para* może być mylący, gdyż w wypadku, gdy $a = b$ jest to zbiór jednoelementowy.

funkcją zdaniową. *Jeśli określony jest zbiór Z, z którego bierzemy elementy do podstawiania za zmienną x, to mówimy, że zmienna x w funkcji zdaniowej $W(x)$ ma* ***zakres (zmienności)*** *Z.*[7] *Można również rozpatrywać funkcje zdaniowe bez określania zakresu zmiennej.*

W analogiczny sposób definiujemy funkcje zdaniowe większej (skończonej) ilości zmiennych, które oznaczamy $W(x, y), W(x, y, z)$ itd. Posługując się spójnikami logicznymi (i nawiasami) możemy z funkcji zdaniowych prostszych tworzyć inne, bardzie złożone. W tym wypadku z przyczyn formalnych wymagamy zgodności zakresów tych samych zmiennych, występujących w różnych składowych funkcjach zdaniowych. Istotnie, formuła

$$(x + 2 = 7) \wedge (x \text{ jest trójkątem równobocznym})$$

nie ma większego sensu.

Możemy już teraz podać drugą metodę określania zbiorów. Polega ona na „gromadzeniu" elementów, mających tę samą własność, opisaną pewną funkcją zdaniową. Dokładniej, zbiór tych elementów x, które mają własność $W(x)$ (czyli tych, po podstawieniu których w miejsce zmiennej x funkcja zdaniowa $W(x)$ staje się zdaniem prawdziwym[8]) oznaczamy

$$\{x : W(x)\}.$$

Czyli

$$a \in \{x : W(x)\} \Leftrightarrow W(a).$$

Przykład W powyższy sposób można opisać występujące wcześniej zbiory:

- $\emptyset = \{x : x \neq x\}$,
- $\{a\} = \{x : x = a\}$,
- $\{a, b\} = \{x : x = a \vee x = b\}$.

Taki sposób określania zbioru kryje jednak w sobie pewne ryzyko. Okazuje się bowiem, że w pewnych wypadkach opisany obiekt może nie być zbiorem.

Przykład *Antynomia Russella*
Na początku XX wieku Bertrand Russell stwierdził, że założenie, iż

$$A = \{x : x \notin x\}$$

jest zbiorem prowadzi do sprzeczności. Gdyby tak bowiem było, to możemy

[7] Piszemy wtedy niekiedy $W(x)$, $x \in Z$.
[8] Mówimy też, że elementy te *spełniają* $W(x)$.

spytać, czy A jest swoim własnym elementem, czyli czy $A \in A$. Ale elementami A są dokładnie obiekty spełniające zależność $x \notin x$, zatem

$$A \in A \Leftrightarrow A \notin A,$$

co jest ewidentną sprzecznością.

W celu ominięcia takich pułapek modyfikujemy nieco naszą metodę opisu zbiorów. Mianowicie wybieramy elementy mające ustaloną własność $W(x)$ spośród elementów ustalonego wcześniej zbioru A i tworzymy z nich nowy zbiór. Zatem

$$\{x \in A : W(x)\}$$

oznacza zbiór złożony z tych i tylko tych elementów zbioru A, które mają własność $W(x)$. Podobnie jak powyżej,

$$a \in \{x \in A : W(x)\} \Leftrightarrow a \in A \wedge W(a).$$

Rozumowanie przedstawione przy okazji antynomii Russella daje nam wniosek, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów. Istotnie, gdyby V był zbiorem wszystkich zbiorów, to również $A = \{x \in V : x \notin x\}$ byłby zbiorem. Ale $A \in V$ (bo do V należą wszystkie zbiory) i w analogiczny sposób otrzymujemy sprzeczność.

Przykłady

1. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$.

2. $\mathbb{N}^+ = \{n \in \mathbb{N} : n > 0\}$.

3. Niech P oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a N zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Wtedy

$$P = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}, \qquad N = \{n \in \mathbb{N} : \neg 2|n\}.$$

4. Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Możemy zdefiniować następujące zbiory:

   - *odcinek otwarty* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < b\}$;
   - *odcinek domknięty* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq b\}$;
   - *półprosta otwarta* $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
     $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;

- *półprosta domknięta* $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
  $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.

  Analogicznie można zdefiniować odcinek jednostronnie domknięty (otwarty).

W wypadku odcinków oczekujemy na ogół, by $a < b$. Formalnie rzecz biorąc nie musimy jednak tego zakładać, gdyż definicja ma sens dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b – na przykład mamy $(1,1) = [3,2] = \emptyset$ oraz $[2,2] = \{2\}$.[9]

Trzeci sposób opisu zbiorów związany jest z pojęciem operacji. Rozważmy trójmian kwadratowy

$$x^2 - 5x + 6.$$

Po podstawieniu w miejsce x dowolnej liczby rzeczywistej otrzymamy w wyniku również liczbę rzeczywistą. Trójmian ten jest właśnie przykładem operacji.

Definicja *Wyrażenie $\Phi(x)$ nazywamy* ***operacją****, jeśli po podstawieniu za zmienną x obiektu określonego typu (np. elementu ustalonego zbioru) otrzymamy pewien obiekt (często, choć nie zawsze, tego samego typu).*

Podobnie jak w przypadku funkcji zdaniowej określa się zakres zmiennej. Możemy też rozpatrywać operacje większej ilości zmiennych. Zauważmy, że po podstawieniu ustalonego obiektu za zmienną w operacji nie otrzymujemy zdania logicznego – nie ma zatem sensu łączenie operacji spójnikami logicznymi. W szczególności operacjami są wszystkie wyrażenia algebraiczne.

Mając daną operację $\Phi(x)$ możemy określić zbiór

$$\{\Phi(x) : x \in A\}.$$

Jest to zbiór tych elementów, które otrzymujemy w wyniku podstawienia w miejsce zmiennej w operacji $\Phi(x)$ wszystkich elementów zbioru A. Czyli

$$a \in \{\Phi(x) : x \in A\} \Leftrightarrow a = \Phi(x) \text{ dla pewnego } x \in A.$$

Przykłady

1. $\mathbb{N}^+ = \{n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Zbiory liczb naturalnych parzystych i liczb naturalnych nieparzystych także możemy zapisać na inny sposób. Mianowicie

$$P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad N = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

[9] Choć w tym wypadku trudno mówić o odcinkach w zwykłym sensie tego słowa.

Większość zbiorów zapisanych przy pomocy operacji daje się zapisać przy pomocy funkcji zdaniowej (jak to miało miejsce w powyższych przykładach). Często jednak jedna z tych metod jest wyraźnie wygodniejsza od drugiej.

Wiemy już, kiedy zbiory są sobie równe, a kiedy są różne. Nie wyczerpuje to jednak wiedzy na temat możliwych zależności pomiędzy dwoma zbiorami. Kluczowe jest tu pojęcie *zawierania* (*inkluzji*) zbiorów.

Definicja *Zbiór A jest* ***podzbiorem*** *zbioru B (mówimy też, że A jest* ***zawarty*** *w B lub że A* ***zawiera się*** *w B) jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B. Piszemy wtedy $A \subseteq B$. Czyli*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\textit{dla dowolnego } x,\ x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Jeśli A jest podzbiorem B, to B jest ***nadzbiorem*** *A. Jeśli $A \subseteq B$ i $A \neq B$, to mówimy, że A jest* ***podzbiorem właściwym*** *B, a zbiór B* ***nadzbiorem właściwym*** *A i piszemy $A \subsetneq B$.* [10]

Zauważmy, że

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Z powyższej definicji wynika, że zbiór A *nie zawiera się* w zbiorze B (co oznaczamy $A \not\subseteq B$), jeśli istnieje element zbioru A, który nie jest elementem zbioru B. Stąd wynika od razu, że zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru. Istotnie, załóżmy nie wprost, że istnieje zbiór A, taki że $\emptyset \not\subseteq A$. Oznacza to, że istnieje element $\emptyset$, który nie jest elementem A. Ale zbiór pusty nie ma żadnych elementów, sprzeczność. Dla każdego zbioru A mamy też $A \subseteq A$.

Przykład $\mathbb{N}^+ \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Pojęcia należenia i zawierania są często za sobą mylone i dlatego zrozumienie różnicy pomiędzy nimi jest bardzo istotne. Pojęcia należenia nie definiowaliśmy, to czy dany obiekt x jest *elementem* danego zbioru B wynika bezpośrednio z opisu tego zbioru (trzy różne sposoby opisu przedstawiliśmy we wcześniejszej części tego rozdziału). Natomiast pojęcie zawierania jest ściśle zdefiniowane przy pomocy należenia. To, czy dany zbiór A jest *podzbiorem* danego zbioru B sprawdzamy zgodnie z tą definicją, patrząc, czy każdy element A jest też elementem B. Nie można jednak wprowadzać rozróżnienia, że podzbiorami są zbiory, a elementami obiekty nie będące zbiorami – pamiętamy, że elementami zbiorów też mogą być zbiory.

Sytuację komplikuje dodatkowo fakt, że może się zdarzyć dla pewnych zbiorów A i B, iż A jest równocześnie elementem i podzbiorem B.

[10] Stosuje się też oznaczenie $A \subset B$.

Przykłady

1. Rozważmy zbiory $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Wtedy $A \in B$ oraz $A \subseteq B$. Pierwsza zależność jest oczywista, gdyż zbiór $\{\emptyset\}$ został wyszczególniony jako jeden z elementów zbioru $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Druga zależność wynika stąd, że jedyny element zbioru $\{\emptyset\}$, czyli zbiór pusty, jest również wyszczególniony jako jeden z elementów zbioru $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Zatem A jest podzbiorem B, bo każdy element A jest elementem B.

2. Niech teraz $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{\{\emptyset\}\}$. Wtedy, tak jak w powyższym przykładzie, mamy $A \in B$. Natomiast oczywiście $A \not\subseteq B$, bo $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.

3. Jeśli $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$, to $A \notin B$, bo elementami zbioru B są zbiory $\emptyset$ i $\{\{\emptyset\}\}$, a zbiór A nie jest żadnym z nich. Mamy za to $A \subseteq B$ (gdyż $\emptyset \in B$).

4. Wreszcie, gdy $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{\{\{\emptyset\}\}\}$, to $A \notin B$ (bo $\emptyset \neq \{\{\emptyset\}\}$) oraz $A \not\subseteq B$ (bo $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$).

Na zakończenie udowodnimy pewną własność inkluzji zbiorów.

Twierdzenie 2.1 *Dla dowolnych zbiorów A, B i C, jeśli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$.*

Dowód. Mamy pokazać, że $A \subseteq C$, czyli że każdy element A jest elementem C. Niech zatem $x \in A$ będzie dowolnym elementem zbioru A. Z założenia wiemy, że $A \subseteq B$, skąd wnioskujemy, że $x \in B$. Ale drugie założenie mówi, że $B \subseteq C$. Stąd (ponieważ $x \in B$) mamy, że $x \in C$, co należało dowieść. □

2.1 Działania na zbiorach

Na zbiorach możemy wykonywać różne działania (zwane też operacjami mnogościowymi). Część z nich jest znana ze szkoły.

Definicja *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami.*

1. ***Sumą*** *zbiorów A i B nazywamy zbiór*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

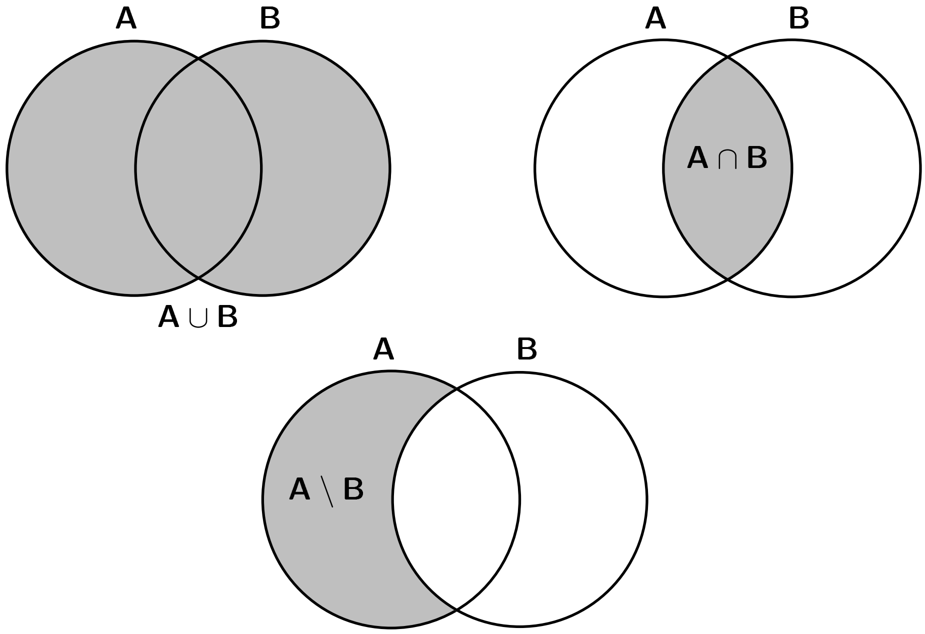
*2. **Przekrojem** (lub **częścią wspólną**[11]) zbiorów A i B nazywamy zbiór*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in A : x \in B\}.$$

*3. **Różnicą** zbiorów A i B nazywamy zbiór*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Wyniki opisanych wyżej działań wygodnie przedstawia się na *diagramach Venna*[12]. Zbiory A i B są reprezentowane jako kółka.



Jak zobaczymy w następnym podrozdziale, diagramy Venna bardzo pomagają w zrozumieniu różnych własności operacji mnogościowych. Należy jednak pamiętać, że *zawsze* pełnią one funkcję pomocniczą i nie zastępują dowodu.

Przykłady

1. Jeśli $A = \{0, 1, 2\}$ i $B = \{0, 2, 4\}$, to

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}, \quad A \cap B = \{0, 2\}, \quad A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

[11] Używa się też terminu *iloczyn*, my będziemy go jednak unikać.

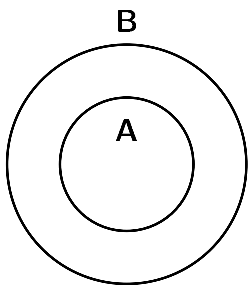
[12] Jest to prosty system wizualizacji związków pomiędzy zbiorami upowszechniony przez J. Venna pod koniec XIX wieku.

2. $\mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}, \qquad \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

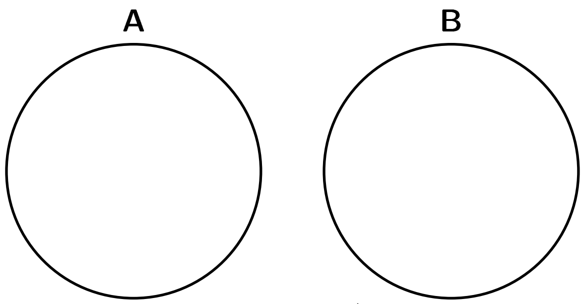
3. Zbiór liczb niewymiernych to $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definicja *Zbiory A i B nazywamy* ***rozłącznymi****, gdy $A \cap B = \emptyset$.*

Zarówno zawieranie, jak i rozłączność zbiorów również można zilustrować na diagramach Venna.



A ⊆ B



A ∩ B = ∅

Jak można zauważyć, zawieranie i rozłączność zbiorów są własnościami przeciwstawnymi. Następne twierdzenie stanowi inną charakteryzację zawierania.

Twierdzenie 2.2 *Dla dowolnych zbiorów A i B mamy*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset.$$

Dowód. Zgodnie z prawem eliminacji równoważności wystarczy pokazać dwa wynikania.
($\Rightarrow$) Mamy pokazać, że $A \setminus B = \emptyset$. Załóżmy nie wprost, że $A \setminus B \neq \emptyset$, czyli że istnieje $x \in A \setminus B$. Wtedy z definicji różnicy zbiorów wynika, że $x \in A$ i $x \notin B$. Ale z założenia wiemy, że $A \subseteq B$, czyli jeśli $x \in A$, to $x \in B$. Zatem wywnioskowaliśmy, że $x \in B$ i $x \notin B$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód pierwszego wynikania.
($\Leftarrow$) Tym razem mamy uzasadnić, że $A \subseteq B$. Załóżmy nie wprost, że $A \nsubseteq B$, czyli że istnieje x, takie że $x \in A$ i $x \notin B$. Ale to oznacza, że $x \in A \setminus B$, co jest sprzeczne z założeniem, że $A \setminus B = \emptyset$.[13] □

Jak łatwo spostrzec, działanie różnicy nie jest symetryczne, tzn. na ogół $A \setminus B \neq B \setminus A$. Tej „wady” nie ma następne, bardzo istotne działanie.

[13]Dowód ten można zrobić krócej. Dzięki tautologii $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$ wystarczy pokazać, że $A \nsubseteq B \Leftrightarrow A \setminus B \neq \emptyset$. To zaś można zrobić podobnie, jak w przedstawionym dowodzie, ale bez konieczności korzystania z prawa eliminacji równoważności.

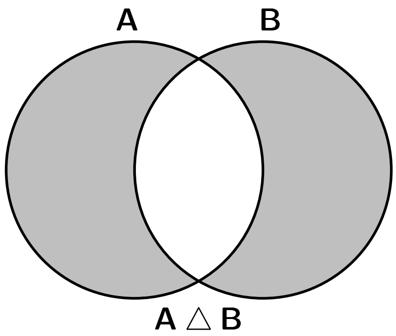
Definicja *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami.* ***Różnicą symetryczną*** *zbiorów A i B nazywamy zbiór*

$$A \triangle B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zauważmy, że x jest elementem różnicy symetrycznej $A \triangle B$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest elementem dokładnie jednego ze zbiorów A i B. Prawdą jest również, że

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow x \in A \triangledown x \in B,$$

gdzie $\triangledown$ jest spójnikiem logicznym zdefiniowanym w ostatnim zadaniu poprzedniego rozdziału. Ta zależność bardzo nam się przyda przy dowodzeniu własności różnicy symetrycznej. Zaś odpowiedni diagram Venna to



Działania sumy i przekroju zbiorów odpowiadają spójnikom alternatywy i koniunkcji. Naturalne wydaje się zatem pytanie o działanie związane ze spójnikiem negacji. Jednak rozpatrywanie zbioru wszystkich elementów nie należących do ustalonego zbioru A nie jest możliwe – prowadzi to szybko do sprzeczności, jako że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

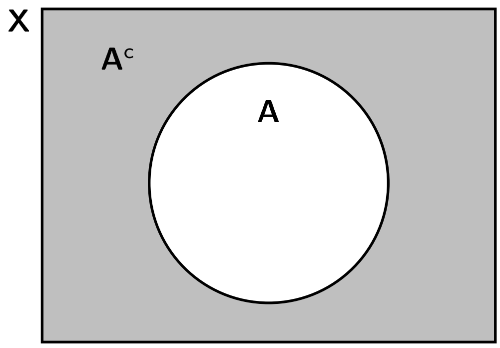
Z tym problemem możemy sobie jednak poradzić. W matematyce często rozważamy podzbiory pewnego ustalonego wcześniej zbioru X, który nazywamy czasem *przestrzenią*. Wtedy sens ma następująca definicja.

Definicja *Niech X będzie ustalonym zbiorem.* ***Dopełnieniem*** *zbioru $A \subseteq X$ (do przestrzeni X) nazywamy zbiór*

$$A^c = X \setminus A.^{14}$$

Bardzo istotne jest, by pamiętać, że dopełnienie jest *zawsze* do pewnej przestrzeni. Ponieważ z oznaczenia A^c nie wynika, jaka to jest przestrzeń, trzeba zawsze zadbać, by jasno wynikało to z kontekstu prowadzonych rozważań. Diagram Venna dla tego działania wygląda następująco:

[14] Spotyka się także oznaczenie A'.



Wiemy już, że elementami zbiorów mogą być zbiory. W szczególności możemy rozważać zbiór wszystkich podzbiorów danego zbioru.

Definicja *Niech A będzie dowolnym zbiorem.* ***Zbiorem potęgowym*** *zbioru A nazywamy zbiór wszystkich jego podzbiorów, czyli*

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Zauważyliśmy już, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru oraz że każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem. Zatem dla dowolnego zbioru A mamy

$$\{\emptyset, A\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Przykłady

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$;

2. $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

3. $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Trzeba zwrócić uwagę, że bez dobrego zrozumienia różnicy pomiędzy elementem a podzbiorem (czyli pomiędzy należeniem a zawieraniem) pojęcie zbioru potęgowego może sprawiać spore problemy. Faktycznie, być elementem zbioru potęgowego zbioru A oznacza być podzbiorem A. Czym innym natomiast jest np. bycie podzbiorem zbioru potęgowego.

Nieco wcześniej poznaliśmy parę nieuporządkowaną elementów a i b, którą oznaczaliśmy jako $\{a, b\}$. Istotne było, że kolejność zapisu jej elementów nie grała roli, czyli $\{a, b\} = \{b, a\}$. Teraz będziemy potrzebowali innego pojęcia pary, które będzie rozróżniało kolejność. W tym wypadku nie mówimy jednak o kolejności elementów, ale *współrzędnych*.

Definicja ***Parę uporządkowaną*** *elementów a i b oznaczamy przez $\langle a,b\rangle$.*[15] *Element a nazywamy* ***pierwszą współrzędną (poprzednikiem)****, zaś element b –* ***drugą współrzędną (następnikiem)*** *pary $\langle a,b\rangle$. Podstawowa własność określająca parę uporządkowaną to*

$$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \Leftrightarrow a=c \ \wedge \ b=d. \qquad (*)$$

Zauważmy, że nie jest to definicja *sensu stricto*, ponieważ nie powiedzieliśmy, *czym* jest para uporządkowana, tylko *jaką* ma własność. Jej zaletą jest jednak to, że uwypukla to, co w tym pojęciu jest najważniejsze, czyli rozróżnianie kolejności współrzędnych. Oczywiście, można parę uporządkowaną wprowadzić inaczej. Oto najczęściej spotykany sposób.

Definicja (Kuratowski) $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$.

Należałoby jeszcze sprawdzić, czy tak zdefiniowana para uporządkowana spełnia warunek $(*)$ z pierwszej definicji, co pozostawiamy jako ćwiczenie.

Analogicznie możemy zdefiniować trójkę uporządkowaną $\langle a,b,c\rangle$, czwórkę uporządkowaną $\langle a,b,c,d\rangle$ i ogólnie n-kę uporządkowaną $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$. Podobnie jak w wypadku pary uporządkowanej możemy to zrobić na dwa sposoby. I tak np. trójka uporządkowana $\langle a,b,c\rangle$ to albo obiekt rozróżniający swoje trzy kolejne współrzędne a, b i c, albo $\langle a,b,c\rangle = \langle\langle a,b\rangle,c\rangle$.

Pojęcie pary uporządkowanej jest nam potrzebne do zdefiniowania bardzo ważnego pojęcia iloczynu kartezjańskiego.

Definicja ***Iloczynem kartezjańskim*** *zbiorów A i B (mówimy też o* ***produkcie kartezjańskim*** *lub po prostu o* ***produkcie*** *zbiorów A i B) nazywamy zbiór*

$$A\times B = \{\langle a,b\rangle : a\in A \wedge b\in B\}.$$

Analogicznie określamy iloczyn kartezjański dowolnej skończonej ilości zbiorów:

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n = \{\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle : a_1\in A_1 \wedge a_2\in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n\in A_n\}.$$

Czyli iloczyn kartezjański zbiorów A i B to zbiór dokładnie tych par uporządkowanych, których pierwsza współrzędna jest elementem zbioru A, a druga współrzędna elementem zbioru B. Można stąd łatwo wywnioskować, że jeśli któryś ze zbiorów A lub B jest pusty, to $A\times B=\emptyset$. Istotnie, rozumując nie wprost, gdyby zbiór $A\times B$ był niepusty, to istniałaby para $\langle a,b\rangle \in A\times B$. Ale wtedy $a\in A$ i $b\in B$, czyli żadnych z tych zbiorów nie jest pusty, wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność kończy dowód

[15] Często spotyka się też oznaczenie (a,b).

Inną bardzo istotną cechą iloczynu kartezjańskiego jest jego nieprzemienność. Na ogół bowiem $A \times B \neq B \times A$.

Zbiór $A \times A$ oznaczamy w skrócie A^2 i nazywamy kwadratem (kartezjańskim) zbioru A. Analogicznie oznaczamy n-tą potęgę zbioru A ($n > 1$): $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$. Przyjmujemy też, że $A^1 = A$.

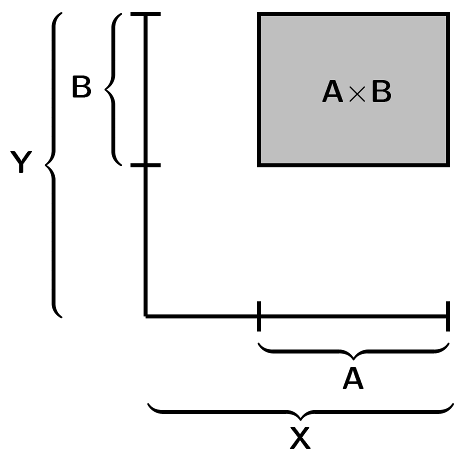
Przykłady

1. $$\begin{aligned}\{1,2,3\} \times \{1,2,3\} = \{&\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle,\\ &\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle,\\ &\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}.\end{aligned}$$

2. $\{\emptyset\} \times \{1,2\} = \{\langle \emptyset, 1\rangle, \langle \emptyset, 2\rangle\}$.

3. W szkole po wprowadzeniu na płaszczyźnie kartezjańskiego układu współrzędnych utożsamia się punkty płaszczyzny z parami (uporządkowanymi) liczb rzeczywistych. W ten sposób utożsamiamy płaszczyznę ze zbiorem $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Podobnie możemy powiedzieć, że przestrzeń trójwymiarowa to zbiór $\mathbb{R}^3$.

Diagramy Venna, które pomagały nam zobrazować intuicje w przypadku poprzednich działań na zbiorach, tu nie mają zastosowania. Ostatni z powyższych przykładów nasuwa nam jednak inną graficzną reprezentację iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów, polegającą na przedstawieniu jego elementów jako punktów płaszczyzny. Załóżmy, że $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$.



Powyższa metoda nie daje się, niestety, zastosować do iloczynu kartezjańskiego większej ilości zbiorów (teoretycznie dla trzech zbiorów można wykonać rysunek przestrzenny, wymaga to jednak sporej wyobraźni...)

2.2 Własności działań na zbiorach

W poprzednim rozdziale mówiliśmy o prawach rachunku zdań, które opisywały własności spójników logicznych. Analogicznie możemy badać własności działań na zbiorach. Okazuje się, że część z nich jest blisko związana ze wspomnianymi wyżej tautologiami. Ponieważ różnorodność własności, którymi chcemy się zająć, jest duża, wymienimy tylko najważniejsze z nich i przeprowadzimy przykładowe dowody. Reszta dowodów i inne własności zostaną pozostawione jako ćwiczenia.

Pierwsza seria własności dotyczy działań sumy i przekroju zbiorów.

Twierdzenie 2.3 *Dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są następujące równości:*

(a) $A \cup A = A$ *(idempotentność sumy);*
$A \cap A = A$ *(idempotentność przekroju);*

(b) $A \cup B = B \cup A$ *(przemienność sumy);*
$A \cap B = B \cap A$ *(przemienność przekroju);*

(c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(łączność sumy);*
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(łączność przekroju);*

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(rozdzielność przekroju względem sumy);*

(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(rozdzielność sumy względem przekroju);*

(f) $A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset.$

Dowód. Dla przykładu udowodnimy podpunkt (e). Mówi on o równości pewnych zbiorów. Zatem na mocy Zasady Ekstensjonalności wystarczy pokazać, że zbiory występujące po obu stronach znaku równości mają te same elementy. Niech zatem x będzie dowolnym elementem. Prawdziwe są następujące zależności.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

W powyższym rozumowaniu pierwsza i czwarta równoważność wynika z definicji sumy zbiorów, a druga i piąta z definicji przekroju zbiorów. Kluczowa jest trzecia równoważność, która wynika z prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji.

Pokazaliśmy zatem (bo równoważność jest przechodnia), że dla dowolnego elementu x mamy $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, czyli to, co chcieliśmy.

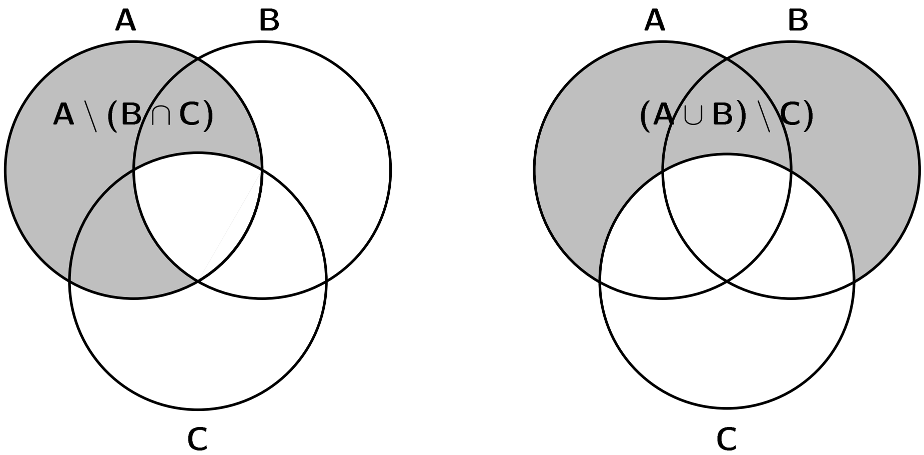
Pozostałe równości dowodzimy podobnie, korzystając z innych praw rachunku zdań. $\square$

Łączność sumy i przekroju pozwala nam (podobnie jak w przypadku spójników alternatywy i koniunkcji) na opuszczanie nawiasów, gdy mamy do czynienia z kilkoma kolejnymi sumami lub przekrojami.

Zastanówmy się, w jaki sposób rozstrzygnąć, czy dana zależność pomiędzy zbiorami (w której występują takie działania jak suma, przekrój, różnica czy różnica symetryczna), np.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \cup B) \setminus C,$$

jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów A, B i C, czy nie. Pomogą nam w tym diagramy Venna[16]. Wykonajmy je dla obu powyższych zbiorów.

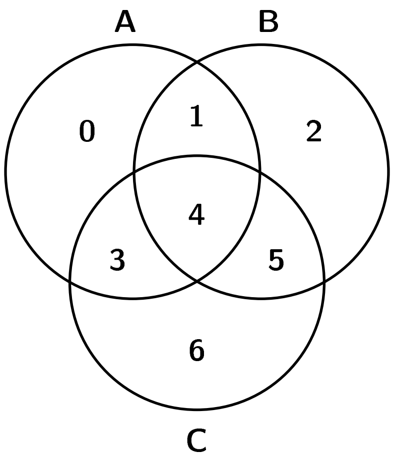


Widzimy zatem, że otrzymaliśmy różne zbiory. *Nie jest to jednak dowód, gdyż rysunku nie traktujemy jako dowód*, a tylko wskazówka dla nas, czy zależność jest prawdziwa, czy nie. Teraz musimy formalnie uzasadnić to, do czego doszliśmy przy pomocy obrazków.

[16]Metoda ta jest dobra, gdy mamy do czynienia z co najwyżej trzema zbiorami A, B i C. Przy większej ilości zbiorów narysowanie *poprawnego* diagramu Venna jest trudne i jest on dla praktycznych zastosowań mało przydatny.

Gdyby okazało się, że otrzymaliśmy takie same diagramy Venna dla obu zbiorów, skąd domyślamy się, że są one zawsze równe, to należałoby przeprowadzić rozumowanie o charakterze podobnym do tego z dowodu Twierdzenia 2.3. Jeśli zaś, tak jak w rozpatrywanym przez nas wypadku, dostaniemy różne diagramy i przypuszczamy, że rozpatrywana równość może nie zachodzić, to musimy wskazać *kontrprzykład*, czyli przykład trzech konkretnych zbiorów A, B i C, dla których nie ma równości.

Jak to zrobić? Na ogół jest dużo możliwych kontrprzykładów i każdy z nich jest z naszego punktu widzenia równie dobry. Najprościej znaleźć go znów korzystając z diagramu Venna. Mianowicie przypuśćmy, że w każdym widocznym obszarze jest dokładnie jeden element (np. liczba), jak na poniższym rysunku.



Wtedy zbiory $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ i $C = \{3, 4, 5, 6\}$ są dobrym kontrprzykładem, bo

$$A \setminus (B \cap C) = \{0, 1, 3\} \neq \{0, 1, 2\} = (A \cup B) \setminus C.$$

Zauważmy, że uważnie analizując powyższe obrazki można wskazać prostszy przykład: $A = C = \emptyset$, $B = \{2\}$.

W Twierdzeniu 2.1 pokazaliśmy pewną własność inkluzji. Teraz zajmiemy się innymi.

Twierdzenie 2.4 *Dla dowolnych zbiorów A, B, C i D prawdziwe są następujące zależności.*

(a) $A \subseteq A \cup B$;
$A \cap B \subseteq A$;

(b) $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;
$A \subseteq B \ \wedge \ A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$;

(c) $A \subseteq B \ \wedge \ C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$;
$A \subseteq B \ \wedge \ C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$.

Dowód. Najpierw pokażemy pierwszą część podpunktu (a). Z definicji zawierania wynika, że musimy pokazać, że każdy element zbioru A jest elementem zbioru $A \cup B$. Niech zatem x będzie dowolnym elementem. Mamy

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B,$$

co należało dowieść. Skorzystaliśmy z tautologii $p \Rightarrow p \vee q$ oraz definicji sumy zbiorów.

Zauważmy, że podpunkty (b) i (c) mają inną strukturę, dlatego też inaczej wygląda ich dowód – jest podobny do dowodu Twierdzenia 2.1. Dla przykładu uzasadnimy pierwszą część podpunktu (c). Jest to wynikanie, zatem korzystając z założenia $A \subseteq B \wedge C \subseteq D$ mamy pokazać, że $A \cup C \subseteq B \cup D$. Podobnie jak poprzednio, niech x będzie dowolnym elementem, takim że $x \in A \cup C$. Z definicji sumy wynika, że $x \in A$ lub $x \in C$. Z założenia wiemy, że jeśli $x \in A$, to $x \in B$, a jeśli $x \in C$, to $x \in D$. Zatem $x \in B$ lub $x \in D$ i ponownie z definicji sumy mamy $x \in B \cup D$, co należało dowieść. □

Twierdzenie 2.5 *Dla dowolnych zbiorów A i B następujące warunki są równoważne:*

(a) $A \subseteq B$;

(b) $A \cup B = B$;

(c) $A \cap B = A$.

Dowód. Zanim przystąpimy do dowodu, poczyńmy dwa spostrzeżenia. Po pierwsze, korzystając z logicznych praw pochłaniania możemy pokazać prawa pochłaniania dla zbiorów:

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad \text{i} \qquad A \cup (A \cap B) = A.$$

Po drugie, formalnie rzecz biorąc musimy pokazać, że (a)⇔(b)⇔(c). Korzystając z prawa sylogizmu wystarczy, że pokażemy (a)⇒(b)⇒(c)⇒(a).[17]

[17]„Oszczędzamy” w ten sposób jedną implikację. W wypadku pokazywania równoważności większej ilości warunków można w ten sposób „zaoszczędzić” jeszcze więcej.

(a)$\Rightarrow$(b) Z Twierdzenia 2.4(a) wiemy, że $B \subseteq A \cup B$. Wystarczy zatem pokazać, że $A \cup B \subseteq B$. Ale z założenia, Twierdzeń 2.4(d) i 2.3(a) mamy

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B \subseteq B \cup B = B,$$

co kończy dowód tej części.

(b)$\Rightarrow$(c) Z założenia wiemy, że $A \cup B = B$, czyli $A \cap (A \cup B) = A \cap B$. Korzystając z prawa pochłaniania dostajemy $A = A \cap B$.

(c)$\Rightarrow$(a) Z założenia i Twierdzenia 2.3(a) mamy $A = A \cap B \subseteq B$. $\square$

Na zakończenie podamy kilka własności związanych z iloczynem kartezjańskim.

Twierdzenie 2.6 *Dla dowolnych zbiorów A, B, C i D prawdziwe są następujące równości.*

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$;

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;

(c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
$(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$;

(d) $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$;
$(B \triangle C) \times A = (B \times A) \triangle (C \times A)$;

(e) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Dowód. Dla przykładu pokażemy pierwszą część podpunktu (a). Ponieważ jest to równość zbiorów, więc jak zwykle chcemy pokazać, że oba zbiory mają te same elementy. Zauważmy jednak, że oba te zbiory są iloczynami kartezjańskimi, zatem ich elementami są pary uporządkowane. Niech zatem $\langle x, y\rangle$ będzie dowolną parą uporządkowaną. Wtedy

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A \times B \vee \langle x, y\rangle \in A \times C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C).\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z definicji iloczynu kartezjańskiego (pierwsza i czwarta równoważność), definicji sumy (druga i piąta równoważność) oraz rozdzielności koniunkcji względem alternatywy. $\square$

Ważne jest, by nie kopiować bezmyślnie poznanych wcześniej dowodów. Gdybyśmy zaczęli automatycznie od „Niech x będzie dowolnym elementem. Wtedy $x \in A \times (B \cup C) \ldots$”, to do niczego byśmy nie doszli.

2.3 Zadania

1. Sprawdzić, które z poniżej zdefiniowanych zbiorów są sobie równe:
   $A_1 = \{1,2,3,4\}$, $A_2 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$, $A_3 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$,
   $A_4 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $A_5 = \{\{3,1\},\{4,2\}\}$, $A_6 = \{1,4,3,2\}$,
   $A_7 = \{\{2,1,3,4\}\}$, $A_8 = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$, $A_9 = \{\{4,3\},\{2,1\}\}$.

2. Podać elementy następujących zbiorów:
   $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\{a,b\},\{\{b,a\}\},\emptyset\}$,
   $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset,\emptyset\}\},\{\emptyset,\emptyset,\emptyset\}\}$, $\{1,2,\{\emptyset\},1\}$, $\{\{\{\{1\}\}\}\}$,
   $\{\psi,\{\psi,\psi\},\psi,\psi,\{\psi\}\}$, $\langle 7,10\rangle$, $\langle 3,3\rangle$, $\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 7\}$
   $\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 0\}$, $\{x \in \mathbb{N} : x \geq 0\}$, $\{x \in \mathbb{N} : x^2 = 4\}$,
   $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 4\}$, $\{x \in \mathbb{N} : |3-x| < 3\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x^2+4x+4 \leq 0\}$,
   $\{x \in \mathbb{Q} : (x+1)^2 \leq 0\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \geq 0\}$.

3. Niech $A = \{x,\{\emptyset\}\}$, $B = \{\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset\},\{\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset\}\}\}$.

   (a) Jakiemu zbiorowi musi być równe x, by zachodziło $A \in B$?

   (b) Jakiemu zbiorowi musi być równe x, by zachodziło $A \subseteq B$?

4. Niech $A = \{\{x\},\emptyset\}$, $B = \{\emptyset,\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset\}\}$.

   (a) Jakiemu zbiorowi musi być równe x, by zachodziło $A \in B$?

   (b) Jakiemu zbiorowi musi być równe x, by zachodziło $A \subseteq B$?

5. Niech x i y będą różne od zbioru pustego. Jakim zbiorom muszą być równe x i y, by zachodziły poniższe równości.

   (a) $\{\{x,y\},\{\emptyset\}\} = \{x,y,\{\{\emptyset\}\}\}$;

   (b) $\{\{x,\emptyset\},y\} = \{\{\emptyset\}\}$.

   Czy zawsze jest możliwe podanie odpowiedzi?

6. Podać przykład zbioru trójelementowego A takiego, że każdy jego element jest równocześnie jego podzbiorem (tzn. dla dowolnego x mamy $x \in A \Rightarrow x \subseteq A$).

7. Wyznaczyć zbiór $\{x \in \mathbb{Z} : \neg\varphi(x)\}$, gdzie

   (a) $\varphi(x) = \Big(x > 0 \Rightarrow (x^2 < 4 \wedge (x \leq 3 \Rightarrow x > 0))\Big)$.

   (b) $\varphi(x) = (x < 3 \Rightarrow (x \neq 7 \wedge x \leq 0))$.

8. Dla podanych funkcji zdaniowych $\varphi(x)$ opisać zbiory $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x)\}$ (stosując np. oznaczenia na przedziały, półproste itp.).

   (a) $x^2 = 1$,

   (b) $x = x$,

   (c) $x^2 - 1 \leq 0$,

   (d) $x < 7 \Rightarrow x = 0$,

   (e) $x^2 < 0 \Rightarrow x^2 = -1$,

   (f) $x^2 = -1 \Rightarrow x = 7$,

   (g) $x^2 < 0 \Leftrightarrow x > 0$,

   (h) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

9. Wyliczyć zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ i $A \triangle B$ dla następujących zbiorów A i B.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 3\}$,

   (b) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2\}$,

   (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 1\}$,

   (d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$,

   (e) $A = [0, 3]$, $B = (1, 2]$.

10. Niech przestrzenią będzie zbiór $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, a ponadto niech $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : \neg 2|x\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} : x < 20\}$. Opisać zbiory A^c, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \cap C$, C^c, $A \cap (B \setminus C)$, $A \triangle B$.

11. Pokazać, że $A \cup B$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym równocześnie zbiory A i B. Sformułować i udowodnić analogiczny fakt dla przekroju i różnicy.

12. Niech $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{1, 5\}$. Znaleźć zbiór X, taki że $(A \triangle X) \triangle B = C$.

13. Dla danego zbioru A opisać jego zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$.

    (a) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$,
    (b) $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$,
    (c) $A = \{\{\alpha, \beta\}, \emptyset\}$,
    (d) $A = \{b, bb, B\}$,
    (e) $A = \{\{\{\delta\}\}\}$,
    (f) $A = \{\{\sigma, \tau, \rho\}\}$.

14. Sprawdzić, czy zachodzi zawieranie $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$.

    (a) $A = \{\{a\}, a, \emptyset\}$, $\quad B = \{a\}$,
    (b) $A = \{\{\emptyset\}\}$, $\quad B = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$,
    (c) $A = \{\mu, \{\emptyset\}\}$, $\quad B = \{\mu, \emptyset\}$,
    (d) $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 2\}$, $\quad B = \{y \in \mathbb{N} : y > 2\}$,
    (e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\quad B = \{y \in \mathbb{N} : y > 0\}$,
    (f) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 0\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x^6 + 7x^5 - 3x = 0\}$.

15. Niech $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 7\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} : |1 - y| < 3\}$.

    (a) Wyznaczyć następujące zbiory:
        i. $A \triangle B$,
        ii. $((A \cap B) \times B) \setminus (B \times (A \cap B))$,
        iii. $\mathcal{P}((A \setminus B) \times (B \setminus A))$.
    (b) Czy istnieje zbiór $C \subseteq \mathbb{Z}$ taki, że $A \triangle C = B \triangle C$?

16. Niech $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x \wedge |x - 1| \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 9\}$.

    (a) Wyznaczyć następujące zbiory:
        i. $(B \setminus A) \times \mathcal{P}(A \setminus B)$,
        ii. $\mathcal{P}(A \triangle B) \cap \mathcal{P}(B)$.
    (b) Czy istnieje niepusty zbiór $C \subseteq \mathbb{Z}$ taki, że $A \times C = C \times B$?

17. Udowodnić pozostałe podpunkty Twierdzenia 2.3.

18. W przestrzeni $\mathbb{N}$ rozpatrzmy podzbiory

    $$A = \{1, 2, 6, 7, 8\}, \quad B = \{2, 3, 4, 7, 8\} \text{ i } C = \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

    Ile różnych zbiorów można zbudować za pomocą operacji $\cup, \cap,\ ^c$ ze zbiorów A, B i C? Czy jest wśród nich zbiór $\{8\}$?

19. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą następujące równości.

    (a) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$,

    (b) $A \cup (A \cap B) = A$,

    (c) $A \cap (A \cup B) = A$,

    (d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

    (e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

    (f) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$,

    (g) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

20. Jak najprościej pokazać, że $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$?

21. Udowodnić, że dla dowolnych podzbiorów A i B ustalone przestrzeni X zachodzą następujące równości.

    (a) $(A^c)^c = A$,

    (b) $A \setminus B = A \cap B^c$,

    (c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (prawo de Morgana),

    (d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (prawo de Morgana),

    (e) $\emptyset^c = X$,

    (f) $X^c = \emptyset$.

22. Udowodnić, że dla dowolnych podzbiorów A i B ustalone przestrzeni X mamy
$$A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c.$$

23. Sprawdzić, czy dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą poniższe równości. Jeśli nie, podać odpowiednie przykłady.

    (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

    (b) $A \cap (A \cup B) = B$,

    (c) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$,

    (d) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,

    (e) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$,

    (f) $(A \cup B) \times C = (A \cup C) \times (B \cup C)$,

24. Dane są zbiory A, B i C, takie, że $A \cup B = C$. Zdefiniować zbiory D i E takie, że $D \subseteq A$, $E \subseteq B$, $D \cap E = \emptyset$ i $D \cup E = C$.

25. Dane są zbiory A, B i C. Zdefiniować zbiór D taki, że $D \subseteq A$ i $D \cap B = D \cap C = \emptyset$.

26. Dane są zbiory A i B. Rozwiązać równanie $A \cup X = B$.

27. Udowodnić pozostałe podpunkty Twierdzenia 2.4.

28. Udowodnić, że

    (a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$,
    (b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

    Podać przykład, że w podpunkcie (b) może nie być zawierania w drugą stronę.

29. Sprawdzić, czy

    (a) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$,
    (b) $\mathcal{P}(A \triangle B) = \mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}(B)$.

30. Udowodnić, że

    (a) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$,
    (b) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

31. Pokazać, że dla dowolnego zbioru A mamy $A \neq \mathcal{P}(A)$.

32. Udowodnić pozostałe podpunkty Twierdzenia 2.6.

33. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D mamy

    (a) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \setminus D \subseteq B \setminus C$,
    (b) $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup (B \setminus A)$,
    (c) $A \setminus B = B \setminus A \Rightarrow A = B$,
    (d) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)$,
    (e) jeśli A, B, C i D są niepuste to $A \times B = C \times D \Rightarrow A = C \wedge B = D$. Pokazać, że założenie niepustości jest istotne.

34. Pokazać, że nie jest prawdą, że dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset \Rightarrow A \cap C = \emptyset.$$

35. Dla $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ wyprowadzić i udowodnić wzory na dopełnienia zbiorów $A \times Y$ i $A \times B$ względem przestrzeni $X \times Y$.

36. Czy $\mathcal{P}(X \times Y) = \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$?

37. Niech X będzie przestrzenią. Mówimy, że podzbiory A_1, A_2, A_3 i A_4 tej przestrzeni są w położeniu ogólnym, jeśli zawsze mamy

$$A_1^* \cap A_2^* \cap A_3^* \cap A_4^* \neq \emptyset,$$

gdzie $A_i^* = A_i$ lub $A_i^* = A_i^c$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Narysować cztery zbiory w położeniu ogólnym (tzn. poprawny diagram Venna dla czterech zbiorów).

38. Zauważmy, że iloczyn kartezjański dwóch zbiorów zdefiniowaliśmy przy pomocy pary uporządkowanej traktowanej jako operacja dwóch zmiennych. Pokazać, że można zdefiniować iloczyn kartezjański zbiorów A i B przy pomocy odpowiednio dobranej funkcji zdaniowej. (**Wskazówka:** Należy zauważyć, że jeśli $a \in A$ i $b \in B$, to $\langle a, b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$).

39. Czy iloczyn kartezjański jest operacją łączną?

Rozdział 3

Kwantyfikatory

Do tej pory poznaliśmy różne elementy języka matematycznego. Przy ich pomocy byliśmy w stanie zapisać formalnie różne matematyczne rozumowania. Pojawiały się jednak wyrażenia takie jak „dla każdego”, „dla wszystkich”, „dla dowolnego”, „dla pewnego”, „istnieje”, które nie miały swoich symbolicznych odpowiedników. Teraz uzupełnimy tę lukę.

Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową o zakresie zmiennej $x \in X$. Zakładamy też od tej pory, że X jest zbiorem niepustym. Brakujące nam symbole to

- *Kwantyfikator ogólny*[1] oznaczany symbolem $\forall$.[2] Napis

  $$(\forall x \in X)\, \varphi(x)$$

  czytamy „dla każdego $x \in X$ (zachodzi) $\varphi(x)$”, „dla dowolnego $x \in X$ (zachodzi) $\varphi(x)$” albo „dla wszystkich $x \in X$ (zachodzi) $\varphi(x)$”.

- *Kwantyfikator szczegółowy*[3] oznaczany symbolem $\exists$.[4] Napis

  $$(\exists x \in X)\, \varphi(x)$$

  czytamy „istnieje $x \in X$, dla którego (zachodzi) $\varphi(x)$” lub „dla pewnego $x \in X$ (zachodzi) $\varphi(x)$”.

Zakresem kwantyfikatora nazywamy zakres zmiennej funkcji zdaniowej, której on dotyczy. Mówimy, że kwantyfikatory $(\forall x \in X)$ i $(\exists x \in X)$ *kwantyfikują (wiążą)* zmienną x.

[1] Zwany też uniwersalnym.
[2] Jest to odwrócona litera A, od angielskiego „for All”.
[3] Zwany też egzystencjalnym.
[4] Jest to odwrócona litera E, od angielskiego „Exists”.

Zauważmy, że wyrażenie $(\forall x \in X)\, \varphi(x)$ jest już zdaniem. Jest ono prawdziwe, jeśli po podstawieniu dowolnego elementu zbioru X w miejsce zmiennej funkcji zdaniowej φ otrzymamy zdanie prawdziwe. Podobnie zdaniem jest wyrażenie $(\exists x \in X)\, \varphi(x)$. Jest ono prawdziwe, jeśli istnieje przynajmniej jeden element x_0 zbioru X (choć może być ich więcej), taki że zdanie $\varphi(x_0)$ jest prawdziwe.

W języku zbiorów można by to wyrazić tak:

- Zdanie $(\forall x \in X)\, \varphi(x)$ jest prawdziwe $\Leftrightarrow \{x \in X : \varphi(x)\} = X$,
- Zdanie $(\exists x \in X)\, \varphi(x)$ jest prawdziwe $\Leftrightarrow \{x \in X : \varphi(x)\} \neq \emptyset$.

Jeżeli z kontekstu jasno wynika, jaki jest zakres kwantyfikatora, to możemy uprościć nasz zapis pisząc

$$\forall x\, \varphi(x) \text{ (lub } (\forall x)\, \varphi(x)) \quad \text{i} \quad \exists x\, \varphi(x) \text{ (lub } (\exists x)\, \varphi(x)).$$

Wyjątkowo będziemy używać też powyższych zapisów w przypadku funkcji zdaniowych bez określonego zakresu zmienności zmiennej.

Przykłady

1. Zasadę Ekstensjonalności możemy zapisać formalnie następująco
$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$
2. Definicja zawierania zbiorów wygląda tak
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$
3. Zbiory A i B nie są rozłączne jeśli $\exists x (x \in A \wedge x \in B)$.
4. Zdanie „Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny” zapisujemy
$$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 \geq 0.$$
5. Fakt, że „Równanie $x^2 - 2x - 1$ ma rozwiązanie” możemy wyrazić następująco
$$\exists x (x^2 - 2x - 1 = 0).$$

Kwantyfikatory są uogólnieniami spójników alternatywy i koniunkcji. Istotnie, jeżeli zakres kwantyfikatora jest zbiorem skończonym, to można go zastąpić skończoną ilością koniunkcji i alternatyw, np.

- $(\forall x \in \{1,2,3\})\, \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(1) \wedge \varphi(2) \wedge \varphi(3)$,
- $(\exists x \in \{1,2,3\})\, \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(1) \vee \varphi(2) \vee \varphi(3)$.

Często zdarza się, że wybieramy zmienne tylko z pewnego podzbioru A zakresu kwantyfikatora X. Na przykład w Analizie Matematycznej (ciągłość, zbieżność) używamy $(\forall \epsilon > 0)$, czyli ograniczamy zakres kwantyfikatora do liczb rzeczywistych dodatnich. W takich sytuacjach wygodnie jest nam korzystać z *kwantyfikatorów ograniczonych (zrelatywizowanych).*

Definicja *Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową o zakresie zmiennej $x \in X$ i niech $A \subseteq X$. Wtedy*

- $(\forall x \in A)\, \varphi(x) \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow \varphi(x))$,
- $(\exists x \in A)\, \varphi(x) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \varphi(x))$.

Przykłady

1. Definicja zawierania zbiorów w wersji zrelatywizowanej to
$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A)\, x \in B.$$
2. Zbiory A i B nie są rozłączne jeśli $(\exists x \in A)\, x \in B$ (albo, równoważnie, $(\exists x \in B)\, x \in A$).
3. Znana definicja ciągłości funkcji rzeczywistej f w punkcie x_0 to
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) < \epsilon|).$$
W wersji bez kwantyfikatorów ograniczonych wyglądałaby tak
$$(\forall \epsilon)(\epsilon > 0 \Rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) < \epsilon|))),$$
czyli dużo gorzej.

Kwantyfikatory ograniczone należy rozumieć jako skrót, poprawiający czytelność zapisu wyrażenia matematycznego. Z formalnego punktu widzenia zarówno zapis z kwantyfikatorami ograniczonymi, jak i bez nich jest równie dobry i poprawny.

Należy zwrócić uwagę, że ogólny kwantyfikator ograniczony polega na „schowaniu" poprzednika implikacji, a szczegółowy kwantyfikator ograniczony na „schowaniu" pierwszego członu koniunkcji. Nie można zatem uprościć wyrażeń $\exists x(x \in A \Rightarrow \varphi(x))$ ani $\forall x(x \in A \wedge \varphi(x))$.

Zauważmy jeszcze jedną rzecz. Czasem zdarza się, że podzbiór $A \subseteq X$, do którego ograniczamy kwantyfikator, jest pusty. Wtedy zdanie $(\forall x \in A)\, \varphi(x)$ jest zawsze prawdziwe, gdyż jest skrótem zdania $\forall x(x \in A \Rightarrow \varphi(x))$, zaś implikacja $x \in A \Rightarrow \varphi(x)$ jest prawdziwa niezależnie od tego, co podstawimy w miejsce x, gdyż ma fałszywy poprzednik. W tej samej sytuacji zdanie $(\exists x \in A)\, \varphi(x)$ jest zawsze fałszywe.

W ostatnim przykładzie pojawiło się zdanie z większą ilością kwantyfikatorów. Istotnie, jeśli funkcja zdaniowa ma więcej zmiennych, to każdą z nich można zakwantyfikować.

Rozważmy funkcję zdaniową $\varphi(x, y) = (x < y), x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy wyrażenie

$$\forall x(x < y)$$

nie jest zdaniem, tylko nową funkcją zdaniową zmiennej y. Żeby otrzymać zdanie, trzeba przy pomocy kwantyfikatorów związać wszystkie zmienne, np.

$$\forall x \exists y(x < y).$$

W tym momencie będziemy potrzebowali kilku pojęć, ważnych dla poprawności językowej.

Każdy kwantyfikator dotyczy pewnej funkcji zdaniowej, stojącej za nim. Niejednokrotnie jest ona złożona i sama zawiera kwantyfikatory. Będziemy ją nazywali *zasięgiem* tego kwantyfikatora i ujmowali w nawiasy za każdym razem, gdy ich brak mógłby prowadzić do nieporozumień. Czyli

$$\forall x(\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{zasięg}}).$$

Jeśli zasięgiem kwantyfikatora jest prosta funkcja zdaniowa, nawiasy możemy opuścić. I tak w wyrażeniu

$$(\forall x)\, x^2 \geq 0 \lor (\exists x)\, x < 0$$

zasięgiem pierwszego kwantyfikatora jest $x^2 \geq 0$ (a drugiego oczywiście $x < 0$).

Jeśli kilka kwantyfikatorów następuje jeden za drugim, na ogół zamiast pisać

$$\forall x(\exists y(\forall z(\ldots\ldots\ldots\ldots)))$$

piszemy

$$\forall x \exists y \forall z(\ldots\ldots\ldots\ldots).$$

Należy pamiętać o tej zasadzie, gdy mamy do czynienia z kwantyfikatorami ograniczonymi. Nie można zapominać, że są one skrótami i np. w wyrażeniu

$$(\forall x)(\forall y > x)(\exists z)(x < z \land z < y)$$

zmienna x w $(\forall y > x)$ leży w zasięgu pierwszego kwantyfikatora. Istotnie, wyrażenie to w postaci niezrelatywizowanej ma postać

$$(\forall x)(\forall y)(y > x \Rightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y)).$$

Definicja *Zmienną w wyrażeniu nazywamy* ***związaną****, jeśli wiąże ją jakiś kwantyfikator, tzn. leży w zasięgu kwantyfikatora kwantyfikującego zmienną o tej nazwie. Zmienną, która nie jest związana nazywamy* ***wolną****.*

Zgodnie z powyższą definicją, „prawdziwymi" zmiennymi są zmienne wolne. Istotnie, zapis $\varphi(x, y)$ oznacza, że x i y są zmiennymi wolnymi funkcji zdaniowej φ – można za nie coś podstawić[5]. Jeśli wyrażenie nie ma zmiennych wolnych, to jest zdaniem.

Praktyczne przyswojenie tych pojęć jest bardzo ważne, bowiem duża część błędów popełnianych przy zapisywaniu wyrażeń matematycznych to błędy „składniowe". Do najbardziej typowych należy pomylenie zdania z funkcją zdaniową (nie będącą zdaniem) oraz niewłaściwe lub niejednoznaczne określenie zasięgu kwantyfikatorów, które powoduje wypaczenie znaczenia zapisanego wyrażenia.

Przykłady

1. W wyrażeniu
$$\forall x \exists y (x < y + z)$$
x i y są zmiennymi związanymi, a z zmienną wolną.

2. W wyrażeniu
$$\exists x \exists y (x > 5) \wedge y > 1$$
zmienna x jest związana, a zmienna y wolna, bo zasięgiem obu kwantyfikatorów jest $x > 5$.[6]

3. Rozważmy wyrażenie „Jeśli liczba x jest ujemna, to jej trzecia potęga też jest ujemna". Ponieważ mówi ono coś o własności x-a, to jest funkcją zdaniową tej zmiennej:
$$x < 0 \Rightarrow x^3 < 0.$$
Często popełnianą pomyłką jest następujący zapis tego wyrażenia:
$$\forall x (x < 0 \Rightarrow x^3 < 0).$$

[5] Za zmienną związaną „podstawia" kwantyfikator, który ją wiąże.

[6] W związku z tym kwantyfikator $\exists y$ jest w zasadzie zbędny, bo nic nie kwantyfikuje.

Tymczasem w tej postaci jest to zdanie, które mówi „Trzecia potęga każdej liczby ujemnej też jest ujemna”.

4. Chcemy zapisać funkcję zdaniową zmiennej x: „Dla dowolnej liczby rzeczywistej s, jeśli s jest nie większe od wszystkich liczb dodatnich, to $x \geq s$”. Zapis
$$(\forall s)(\forall t > 0)\, t \geq s \Rightarrow x \geq s$$
jest niepoprawny, bo niejednoznaczny. Nie wynika bowiem z niego, jaki powinien być zasięg kwantyfikatorów. Poprawny zapis to
$$(\forall s)\Big((\forall t > 0)(t \geq s) \Rightarrow x \geq s\Big).$$
Zauważmy, że wynika z niego, że poprzednikiem implikacji w dużym nawiasie jest $(\forall t > 0)(t \geq s)$.

Podstawową umiejętnością, którą każdy początkujący matematyk musi opanować jest umiejętność poprawnego zapisywania wyrażeń w języku matematycznym oraz odczytywania wyrażeń w tym języku zapisanych.

Problemem przy zapisywaniu jest przeformułowanie informacji podanej w języku potocznym do postaci, która nadaje się do formalnego zapisu (a następnie, o czym wspomnieliśmy wyżej, poprawne zapisanie). A tego nie da się zrobić automatycznie, bez zrozumienia.

Przykłady

1. Rozważmy najpierw przykład niematematyczny[7], czyli zdanie „Każdy dudek ma swój czubek”. Niech X oznacza zbiór dudków, Y zbiór czubków, zaś $\varphi(x, y), x \in X, y \in Y$ funkcję zdaniową „x ma y”. Nasze zdanie możemy przeformułować następująco:

   Dla każdego dudka x istnieje czubek y taki, że x ma y.

   Zatem w formie symbolicznej nasze zdanie ma postać
$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, \varphi(x, y).$$

2. Sformalizujmy teraz zdanie „Nie każda liczba naturalna parzysta jest potęgą dwójki”. Jest to negacja zdania „Każda liczba naturalna parzysta jest potęgą dwójki”, które można dokładniej wyrazić jako „Dla każdej liczby naturalnej n, jeśli n jest parzyste, to istnieje liczba naturalna k taka, że n jest k-tą potęga dwójki”. Ostatecznie dostajemy
$$\neg(\forall n \in \mathbb{N})(2|n \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 2^k).$$

[7] Jest on wzięty ze skryptu do Wstępu do Matematyki A.

3. Zapiszemy teraz funkcję zdaniową $\varphi(x)$ =„x jest liczbą pierwszą” o zakresie zmiennej $x \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że liczba jest pierwsza, jeżeli jest większa od 1 i jej jedynymi dzielnikami są 1 i ona sama. Jedna z formalizacji (choć nie jedyna) to

$$\varphi(x) = (x > 1 \wedge (\forall n)(n|x \Rightarrow n = 1 \vee n = x)).$$

Jeśli chodzi o odczytywanie języka matematycznego, to nie polega ono na przeczytaniu po kolei występujących znaczków, tylko zrozumieniu, jaką treść zawiera dane wyrażenie.

Przykład Wyrażenie

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\, k > n$$

odczytujemy nie jako „Dla każdego n naturalnego istnieje k naturalne, takie że $k > n$”, tylko jako „Nie istnieje największa liczba naturalna”.

3.1 Prawa rachunku kwantyfikatorów

W Rozdziale 1 zajmowaliśmy się prawami rachunku zdań, czyli zdaniami zawsze prawdziwymi. Prawdziwość ta nie wynikała z ich treści, tylko z ich struktury logicznej. Podobnie jest w przypadku zdań zapisanych z użyciem kwantyfikatorów.

Definicja *Zdanie (zapisane z użyciem kwantyfikatorów) nazywamy **prawem rachunku kwantyfikatorów**, gdy jest prawdziwe przy dowolnej interpretacji występujących w nim symboli funkcji zdaniowych.*

W przypadku rachunku zdań istniał algorytm (tabelka), który zawsze pozwalał sprawdzić, czy dane zdanie jest tautologią, czy nie. W rachunku kwantyfikatorów takiego algorytmu nie ma, jednak dowody prawdziwości praw rachunku kwantyfikatorów, które zaraz będziemy rozpatrywać, nie są trudne. Będziemy do nich potrzebowali dodatkowego pojęcia.

Definicja *Niech $\varphi(x)$ będzie funkcja zdaniową o zakresie zmiennej $x \in X$. **Diagramem (wykresem)** funkcji φ nazywamy zbiór D_φ tych elementów $x \in X$, po podstawieniu których w miejsce zmiennej funkcji φ otrzymamy zdanie prawdziwe. Czyli*

$$D_\varphi = \{x \in X : \varphi(x)\}.$$

Jeśli $\psi(x,y)$ jest funkcją zdaniową dwóch zmiennych i $x \in X, y \in Y$, to

$$D_\psi = \{\langle x,y\rangle \in X \times Y : \psi(x,y)\}.$$

Analogicznie możemy określić diagramy funkcji zdaniowych większej ilości zmiennych. Zauważyliśmy już, że zdanie $(\forall x)\,\varphi(x)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $D_\varphi = X$, zdanie $(\exists x)\,\varphi(x)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $D_\varphi \neq \emptyset$. Prostym spostrzeżeniem jest następujący lemat[8], którego dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Lemat 3.1 *Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą dowolnymi funkcjami zdaniowymi o zakresie zmiennej $x \in X$. Wtedy*

(a) $D_{\varphi\vee\psi} = D_\varphi \cup D_\psi$,

(b) $D_{\varphi\wedge\psi} = D_\varphi \cap D_\psi$,

(c) $D_{\neg\varphi} = D_\varphi^c$. □

Teraz jesteśmy już gotowi do przedstawienia pierwszej grupy praw rachunku kwantyfikatorów.

Twierdzenie 3.2 *Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą dowolnymi funkcjami zdaniowymi o zakresie zmiennej $x \in X$. Wtedy*

(a) $\forall x\,\varphi(x) \Rightarrow \exists x\,\varphi(x)$;

(b) $\neg(\forall x)\,\varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\,\neg\varphi(x)$,
$\neg(\exists x)\,\varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\,\neg\varphi(x)$ *(prawa de Morgana);*

(c) $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow \forall x\,\varphi(x) \wedge \forall x\,\psi(x)$
(rozdzielność kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji);

(d) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)$
(rozdzielność kwantyfikatora szczegółowego względem alternatywy);

(e) $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow \exists x\,\varphi(x) \wedge \exists x\,\psi(x)$;

(f) $\forall x\,\varphi(x) \vee \forall x\,\psi(x) \Rightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$.

[8] Lemat – twierdzenie pomocnicze.

Dowód. Uzasadnimy niektóre podpunkty, dowód pozostałych pozostawiając jako ćwiczenie.

(b) Z naszych wcześniejszych spostrzeżeń i Lematu 3.1(c) wynika, że poprawne jest poniższe rozumowanie.

$$\neg(\forall x)\,\varphi(x) \Leftrightarrow \neg(D_\varphi = X) \Leftrightarrow D_\varphi \neq X \Leftrightarrow D_\varphi^c \neq \emptyset \Leftrightarrow D_{\neg\varphi} \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists x)\,\varphi(x)$$

Dowód drugiej części wygląda identycznie.

(d) Tak jak poprzednio, korzystając z Lematu 3.1(a) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) &\Leftrightarrow D_{\varphi\vee\psi} \neq \emptyset \Leftrightarrow D_\varphi \cup D_\psi \neq \emptyset \Leftrightarrow D_\varphi \neq \emptyset \vee D_\psi \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x).\end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy jeszcze z prostego spostrzeżenia, że suma dwóch zbiorów jest niepusta dokładnie wtedy, gdy jeden z jej składników jest niepusty.

(f) Rozumując w ten sam sposób, co poprzednio, dostajemy

$$\begin{aligned}\forall x\,\varphi(x) \vee \forall x\,\psi(x) &\Leftrightarrow D_\varphi = X \vee D_\psi = X \Rightarrow D_\varphi \cup D_\psi = X \Leftrightarrow D_{\varphi\vee\psi} = X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)).\end{aligned}$$

Zauważmy, że implikacji w tym rozumowaniu nie da się odwrócić, bo oczywiście mogą istnieć dwa właściwe podzbiory przestrzeni X, które w sumie dają całe X. $\square$

Warto zauważyć, że powyższe prawa (i ich dowody) mają bardzo naturalną intuicyjną interpretację. I tak np. lewa strona podpunktu (d) oznacza, że jeśli funkcja zdaniowa $\varphi(x) \vee \psi(x)$ staje się zdaniem prawdziwym po podstawieniu pewnego konkretnego elementu $x_0 \in X$. To z kolei z własności alternatywy oznacza to dokładnie tyle, że prawdą jest $\varphi(x_0)$ lub $\psi(x_0)$, czyli że prawdziwe jest któreś ze zdań $\exists x\,\varphi(x)$ lub $\exists x\,\psi(x)$.

Praw de Morgana już „nieoficjalnie" używaliśmy, na przykład do uzasadnienia, co to znaczy, że dwa zbiory nie są sobie równe albo że jeden zbiór nie zawiera się w drugim.

Warto w tym momencie zauważyć, że kwantyfikatory ograniczone również spełniają prawa de Morgana.

Twierdzenie 3.3 *Niech $\varphi(x)$ będzie dowolną funkcją zdaniową o zakresie zmiennej $x \in X$ i niech $A \subseteq X$. Wtedy*

- $\neg(\forall x \in A)\,\varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x \in A)\,\neg\varphi(x)$,

- $\neg(\exists x \in A)\, \varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x \in A) \neg\varphi(x)$.

Dowód. Dowód wynika od razu z definicji kwantyfikatorów ograniczonych i Twierdzenia 3.2(b). $\square$

Zauważyliśmy już, że w dowodzie Twierdzenia 3.2(f) (podobnie jest też w podpunkcie (e)) nie da się odwrócić implikacji. Nie jest to jednak dowód, że w podpunktach tych nie ma równoważności, a tylko spostrzeżenie, że najprawdopodobniej tak jest. By otrzymać dowód, należy ponownie podać kontrprzykład.

W tym momencie warto dodać kilka słów o istocie kontrprzykładu. Ma on ścisły związek z prawem de Morgana. Otóż jeżeli przypuszczamy, że nie jest prawdą twierdzenie, które mówi „dla każdego $\heartsuit$ zachodzi $\square$[9]", to zgodnie z tym prawem powinno być prawdą twierdzenie „Istnieje $\heartsuit$, dla którego nie zachodzi $\square$". I właśnie ten obiekt, dla którego nie zachodzi warunek $\square$ nazywamy kontrprzykładem.

W naszym wypadku przypuszczamy, że nie jest prawdą prawo rachunku kwantyfikatorów, które mówiłoby „Dla dowolnych funkcji zdaniowych φ i ψ o wspólnym zakresie prawdziwe jest zdanie

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x)\text{”.}$$

Zatem znalezienie kontrprzykładu polega na wskazaniu dwóch, konkretnych funkcji zdaniowej, dla której powyższe zdanie nie jest prawdą. Czyli prawdą powinna być jego negacja:

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \neg(\forall x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x)),$$

która jest równoważna zdaniu

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge (\exists x) \neg\varphi(x) \wedge (\exists x) \neg\psi(x).$$

Czyli potrzebujemy funkcji zdaniowych, takich że dla każdego elementu z ich zakresu któraś staje się zdaniem prawdziwym, ale żadna z nich nie jest prawdziwa zawsze. A to już nie jest trudne. Weźmy na przykład

$$\varphi(x) = (x \leq 0), \qquad \psi(x) = (x \geq 0) \qquad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Rozważmy teraz następująca sytuację, która na pozór jest bardzo podobna do tej rozpatrywanej przed chwilą. Różni się jednak tym, że, mówiąc potocznie, kwantyfikator „nie dotyczy" jednego z wyrażeń, które występują w jego zasięgu.

[9]Gdzie $\heartsuit$ oznacza obiekt pewnego typu, a $\square$ jakikolwiek warunek.

Twierdzenie 3.4 *Niech $\varphi(x)$ będzie dowolną funkcją zdaniową o zakresie zmiennej $x \in X$ i niech ψ będzie zdaniem. Wtedy*

(a) $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi(x)) \wedge \psi$;

(b) $\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi(x)) \vee \psi$;

(c) $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \Leftrightarrow (\exists x\, \varphi(x)) \wedge \psi$;

(d) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\, \varphi(x)) \vee \psi$.

Dowód. Dla przykładu udowodnimy podpunkt (c). Wiemy, że $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest $x_0 \in X$, takie że zdanie $\varphi(x_0) \wedge \psi$ jest prawdziwe. Ale to oznacza dokładnie, że prawdziwe są oba zdania $\varphi(x_0)$ i ψ. To z kolei jest równoważne temu, że prawdziwe są zdania $\exists x\, \varphi(x)$ i ψ, zatem również zdanie $(\exists x\, \varphi(x)) \wedge \psi$, co kończy dowód. □

W praktyce twierdzenie powyższe można stosować do sytuacji, w której w zasięgu kwantyfikatora występuje funkcja zdaniowa, której żadna zmienna wolna nie jest tą, którą kwantyfikuje kwantyfikator. Mówiąc potocznie, kwantyfikator „nie dotyczy" tej funkcji zdaniowej.

Przykład Wyrażenia

$$\forall x(x > 7 \vee y < 3) \quad \text{i} \quad y < 3 \vee \forall x(x > 7)$$

są równoważne.

Przejdziemy teraz do praw dotyczących funkcji zdaniowych dwóch zmiennych.

Twierdzenie 3.5 *Niech $\varphi(x, y)$ będzie dowolną funkcją zdaniową o zakresie zmiennych $x \in X, y \in Y$. Wtedy*

(a) $\forall x \forall y\, \varphi(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, \varphi(x, y)$
(przemienność kwantyfikatorów ogólnych);

(b) $\exists x \exists y\, \varphi(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, \varphi(x, y)$
(przemienność kwantyfikatorów szczegółowych);

(c) $\exists x \forall y\, \varphi(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x\, \varphi(x, y)$.

Dowód. Bez problemu sprawdzamy, że prawdziwość obu zdań $\forall x \forall y\, \varphi(x,y)$ i $\forall y \forall x\, \varphi(x,y)$ jest równoważna temu, że $D_\varphi = X \times Y$, zaś prawdziwość obu zdań $\exists x \exists y\, \varphi(x,y)$ i $\exists y \exists x\, \varphi(x,y)$ jest równoważna temu, że $D_\varphi \neq \emptyset$. Do uzasadnienia pozostaje zatem podpunkt (c).

Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie $\exists x \forall y\, \varphi(x,y)$. Oznacza to, że istnieje $x_0 \in X$, takie że prawdziwe jest zdanie $\forall y\, \varphi(x_0,y)$. Stąd wynika, że dla dowolnego elementu $y \in Y$ zbiór $\{x \in X : \varphi(x,y)\}$ jest niepusty, gdyż należy do niego x_0. Zatem dla dowolnego elementu $y \in Y$ prawdziwe jest zdanie $\exists x\, \varphi(x,y)$, czyli prawdziwe jest też zdanie $\forall y \exists x\, \varphi(x,y)$, co było do udowodnienia. □

Dowód podpunktu (c) jest intuicyjnie dość oczywisty. Jeśli bowiem istnieje jeden ustalony x_0, który jest „dobry" dla każdego y, to każdy y ma swojego x, który jest dla niego „dobry" – za każdym razem jest nim x_0. Ta interpretacja pokazuje też, że implikacji nie można zastąpić równoważnością. Istotnie, jeśli każda studentka pierwszego roku kocha się w jakimś chłopaku, to nie znaczy to jeszcze, że wszystkie kochają się w tym samym. A oto bardziej matematyczny kontrprzykład.

Przykład Rozważmy funkcję zdaniową $\varphi(x,y) = (y \leq x)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy prawdziwe jest zdanie $\forall y \exists x\, \varphi(x,y)$, gdyż dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba od niej większa. Natomiast zdanie $\exists x \forall y\, \varphi(x,y)$ jest ewidentnie fałszywe, bo nie istnieje największa liczba rzeczywista. Zatem dla tej funkcji zdaniowej implikacja

$$\forall y \exists x\, \varphi(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y\, \varphi(x,y)$$

jest fałszywa. To pokazuje, że w Twierdzeniu 3.5(c) nie można zastąpić implikacji równoważnością.

Przemienność kwantyfikatorów pozwala nam nieco uprościć notację. Zamiast $\forall x \forall y$ możemy pisać $\forall x, y$, a zamiast $\exists x \exists y$ – $\exists x, y$.

Istotną uwagą jest, że przemienność kwantyfikatorów dotyczy również kwantyfikatorów ograniczonych, pod pewnym wszakże warunkiem. Otóż zmienne, po których kwantyfikujemy, nie mogą od siebie zależeć. I tak zdania

$$(\forall x > 1)(\forall n \in \mathbb{N})\, x^n > 1 \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 1)\, x^n > 1$$

są sobie równoważne, natomiast w wyrażeniu

$$(\exists x > 0)(\exists y > x)\, y - x \in \mathbb{N}$$

nie można zamienić kwantyfikatorów, gdyż straciłoby ono sens – stałoby się funkcją zdaniową o zmiennej wolnej y.

Przy analogicznym zastrzeżeniu jak powyżej prawdziwy jest również odpowiednik Twierdzenia 3.5(c) dla kwantyfikatorów ograniczonych.

3.2 Działania uogólnione na zbiorach

Na zakończenie tego rozdziału poznamy bardzo przydatne zastosowanie rachunku kwantyfikatorów.

W Rozdziale 2 nauczyliśmy się wyznaczać sumę i przekrój dwóch zbiorów, czyli także trzech, czterech, czy ogólnie – dowolnej skończonej ilości zbiorów[10]. Operacje sumy i przekroju można jednak wykonywać także dla większej ilości zbiorów.

Niech I będzie dowolnym zbiorem niepustym – będziemy go traktować jako zbiór indeksów (czyli „numerów”). W naszych zastosowaniach najczęściej będziemy spotykać się z sytuacją, gdy $I = \mathbb{N}$ lub $I = \mathbb{R}$, ale w ogólności I może być zupełnie dowolne.

Będziemy rozważać rodzinę zbiorów[11] $\{A_i : i \in I\}$. Interpretując ten zapis myślimy, że jest to zbiór, którego elementami są pewne zbiory „ponumerowane” (formalnie: indeksowane) elementami zbioru I. Takie podejście jest naturalne i na razie zupełnie wystarczające[12]. Pozwala nam bowiem wprowadzić następującą definicję.

Definicja ***Uogólnioną sumą*** *rodziny zbiorów* $\{A_i : i \in I\}$ *nazywamy zbiór*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : (\exists i \in I)\, x \in A_i\}.$$

Uogólnionym przekrojem *rodziny zbiorów* $\{A_i : i \in I\}$ *nazywamy zbiór*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : (\forall i \in I)\, x \in A_i\}.$$

O ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień, będziemy opuszczać przymiotnik „uogólniony”. Mamy

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I)\, x \in A_i,$$

[10] Intuicyjnie takie uogólnienie jest oczywiste, formalnie wymaga użycia rekursji – patrz Rozdział 8.

[11] *Rodzina zbiorów* jest nieco wygodniejszą i często używaną nazwą na zbiór zbiorów.

[12] Dokładna formalna definicję indeksowanej rodziny zbiorów będzie podana w następnym rozdziale.

czyli, analogicznie jak w przypadku dwóch zbiorów, być elementem sumy oznacza być elementem któregoś z jej składników. Podobnie,

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I)\, x \in A_i,$$

czyli być elementem przekroju oznacza być elementem każdego z jego składników. Zauważmy, że jeśli $I = \{1, 2\}$, to

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2.$$

Zatem pojęcia sumy i przekroju rodziny zbiorów uogólniają pojęcia sumy i przekroju dwóch zbiorów w ten sam sposób, w jaki pojęcia kwantyfikatorów szczegółowego i ogólnego uogólniają pojęcia alternatywy i implikacji.

Gdy $I = \mathbb{N}$ możemy używać też oznaczeń

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Przykłady

1. Niech $I = \mathbb{N}$ oraz $A_n = [-n, n]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{0\}.$$

2. Niech $I = \mathbb{N}^+$ oraz $B_n = (0, \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}^+$. Wtedy

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (0, 1) \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset.$$

3. Niech $I = \mathbb{N}$ oraz $C_n = (0, 2 - \frac{2}{n+2}]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = (0, 2) \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = (0, 1).$$

Na dowolne rodziny zbiorów możemy też uogólnić pojęcie rozłączności. Wbrew pozorom jednak, nie skorzystamy w tym wypadku z pojęcia uogólnionego przekroju.

Definicja *Rodzinę zbiorów $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy* ***rozłączną*** *(lub* ***parami rozłączną****), gdy dowolne dwa jej różne elementy są rozłączne, czyli gdy*

$$(\forall i, j \in I)(A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset).$$

W szczególności, rodzina $\{B_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ z drugiego przykładu na poprzedniej stronie nie jest rodziną rozłączną.

Podobnie jak w wypadku zwykłych operacji sumy i przekroju, możemy mówić o własnościach operacji uogólnionych.

Twierdzenie 3.6 *Niech $\{A_i : i \in I\}$ oraz $\{B_i : i \in I\}$ będą rodzinami podzbiorów ustalonej przestrzeni X. Wtedy*

(a) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

(prawa de Morgana dla działań uogólnionych);

(b) $\bigcup_{i \in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i \in I} A_i \cup \bigcup_{i \in I} B_i$;

(c) $\bigcap_{i \in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in I} B_i$;

(d) $\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{i \in I} B_i$;

(e) $\bigcap_{i \in I} A_i \cup \bigcap_{i \in I} B_i \subseteq \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B_i)$;

Dowód. Jest to standardowe rozumowanie oparte o Zasadę Ekstensjonalności, a wykorzystujące definicję działań uogólnionych (i zwykłych) oraz odpowiednie prawo rachunku kwantyfikatorów (Twierdzenie 3.2). □

Rozważa się również rodziny zbiorów indeksowane układami indeksów. Z naszego punktu widzenia najistotniejsze są podwójnie indeksowane rodziny zbiorów, takie jak $\{A_{i,j} : i \in I \wedge j \in J\}$ (gdzie I i J są ustalonymi niepustymi zbiorami indeksów)[13].

Na podwójnie indeksowanych rodzinach zbiorów możemy wykonywać podwójne działania uogólnione. Wymaga to jednak krótkiego wyjaśnienia. Niech

[13]Formalnie odpowiada to indeksowaniu iloczynem kartezjańskim $I \times J$. Wtedy rozważana rodzina to $\{A_{\langle i,j \rangle} : \langle i, j \rangle \in I \times J\}$. Oczywiście, taki zapis jest niewygodny, więc raczej nie jest używany. Czasem zamiast $A_{i,j}$ piszemy A_{ij}.

$\{A_{i,j} : i \in I \wedge j \in J\}$ będzie podwójnie indeksowaną rodziną zbiorów. Wtedy dla każdego $i \in I$ możemy zdefiniować zbiór

$$B_i = \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \{x : (\forall j \in J)\, x \in A_{i,j}\},$$

a następnie zbiór

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Zatem mamy

$$x \in \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} \Leftrightarrow (\exists i \in I)(\forall j \in J)\, x \in A_{i,j}.$$

W analogiczny sposób definiujemy inne podwójne działania uogólnione, czyli

$$\bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j}, \qquad \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} \quad \text{i} \quad \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}.$$

Przykład Niech $I = J = \mathbb{N}^+$ oraz $A_{n,m} = [\frac{1}{n}, m]$. Wtedy

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m} = (0, 1].$$

Istotnie, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$ mamy

$$B_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m} = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

i sumując wszystkie zbiory B_n otrzymujemy cały odcinek $(0, 1]$.

Także podwójne działania uogólnione mają pewne własności, blisko związane z prawami rachunku kwantyfikatorów.

Twierdzenie 3.7 *Niech $\{A_{i,j} : i \in I \wedge j \in J\}$ będzie rodziną zbiorów. Wtedy*

(a) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{i,j}$;

(b) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{i,j}$;

(c) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{i,j}$.

Dowód. Rozumowania są analogiczne do tych z Twierdzenia 3.6, tym razem jednak w kluczowym momencie korzystamy z Twierdzenia 3.5. $\square$

Gdy $I = J$, to korzystając z tego twierdzenia możemy uprościć notację (podobnie jak w przypadku kwantyfikatorów). Zamiast

$$\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} \quad \text{i} \quad \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j}$$

będziemy pisać

$$\bigcup_{i,j\in I} A_{i,j} \quad \text{i} \quad \bigcap_{i,j\in I} A_{i,j}.$$

Do tej pory mówiąc o działaniach uogólnionych, robiliśmy to w odniesieniu do indeksowanych rodzin zbiorów (bo tak jest wygodniej). Zdarza się jednak czasami, że mamy do czynienia z rodziną zbiorów, która nie jest indeksowana. Nie jest to duże utrudnienie, gdyż działania uogólnione można zdefiniować dla dowolnych rodzin zbiorów.

Definicja *Niech $\mathcal{A}$ będzie niepustą rodziną zbiorów. Wtedy*

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : (\exists A \in \mathcal{A})\, x \in A\}$$

oraz

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x : (\forall A \in \mathcal{A})\, x \in A\}.$$

Przykład Uzasadnimy, że

$$\bigcup \mathcal{P}(A) = A.$$

W tym celu udowodnimy, że zachodzą dwa zawierania.

($\subseteq$) Ustalmy dowolne $x \in \bigcup \mathcal{P}(A)$. Z definicji sumy uogólnionej oznacza to, że istnieje $B \in \mathcal{P}(A)$, taki że $x \in B$. Czyli mamy $x \in B \subseteq A$, zatem $x \in A$, co mieliśmy pokazać.

($\supseteq$) Weźmy teraz dowolne $x \in A$. Ponieważ $A \in \mathcal{P}(A)$, zatem podzbiorem zbioru A, świadczącym o tym, że $x \in \bigcup \mathcal{P}(A)$ jest samo A, co kończy dowód.

3.3 Zadania

1. Zapisać poniższe zdania i funkcje zdaniowe.

   (a) Jeśli liczby x i y są różne, to albo x jest mniejsze od y, albo x jest mniejsze od y.

   (b) Nie każda liczba nieparzysta jest podzielna przez 3.

   (c) Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą dodatnią.

   (d) Jeśli kwadrat liczby x nie jest liczbą dodatnią, to x jest zerem.

   (e) Jeśli n jest liczbą naturalną większą od 2, to nie istnieją liczby naturalne $x,\ y,\ z$ takie, że $x^n + y^n = z^n$.

   (f) Kwadrat żadnej liczby wymiernej nie jest równy 2.

   (g) Wartość bezwzględna każdej liczby rzeczywistej jest równa tej liczbie lub liczbie przeciwnej.

   (h) Jeśli n jest liczbą naturalną, to po podniesieniu jej do dowolnej potęgi naturalnej otrzymamy liczbę naturalną.

   (i) Istnieje liczba całkowita, która podzielona przez 3 daje resztę 1.

   (j) Każdy zbiór niepusty ma co najwyżej dwa elementy.

   (k) 1 jest elementem neutralnym mnożenia liczb rzeczywistych.

   (l) Istnieje element neutralny mnożenia liczb rzeczywistych.

   (m) Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.

   (n) Istnieje nieskończenie wiele liczb nieparzystych.

   (o) Istnieje liczba przeciwna do liczby rzeczywistej x.

   (p) Dla każdej liczby rzeczywistej różnej od zera istnieje liczba do niej odwrotna.

   (q) Jeśli A jest zbiorem niepustym, to ma podzbiór właściwy.

   (r) Każdy zbiór ma nadzbiór właściwy.

   (s) Jeśli x jest liczbą nieujemną, to x jest większe od każdej liczby ujemnej.

   (t) Nie istnieje największa liczba rzeczywista.

   (u) Dla każdego zbioru niepustego istnieje zbiór, który jest w nim zawarty lub jest z nim rozłączny.

   (v) Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma niepusty podzbiór właściwy.

(w) Istnieje największa niedodatnia liczba całkowita.

(x) Dowolny zbiór jest pusty lub ma pusty podzbiór.

Które z tych wyrażeń są zdaniami? Które są prawdziwe?

2. Znaleźć zmienne występujące jako wolne i związane w poniższych wyrażeniach.

   (a) $(\forall x\,(x > 3)) \Rightarrow y < 5$;

   (b) $(\exists x\,(x > 3)) \Rightarrow x > 3$;

   (c) $\exists x \forall y\,(x > 3 \Rightarrow y < 5) \Rightarrow \forall x\,(x \neq 7)$;

   (d) $\exists x \exists y\,(x \neq y \vee z \leq 0)$;

   (e) $\forall x\,(x + y = z)$;

   (f) $\forall x \forall y\,(x + y = z)$;

   (g) $\exists x \forall y\,(x + y = z) \Rightarrow x - y \neq z$;

   (h) $\forall x \forall y\,(x + y = z) \wedge \exists z\,(x - y \neq z)$;

   (i) $\forall x\,(x + y = z) \Rightarrow \exists z\,(\exists y\,(x - y \neq z) \wedge \forall z\,(x \cdot y \geq z))$;

   (j) $\exists x\,(x < y \vee x < z)$;

   (k) $\exists x \forall y\,(x < y \Rightarrow x < z \wedge z < y)$;

   (l) $\forall x \exists y\,(x < y) \vee x < z$.

3. Co **znaczą** poniższe zdania?

   (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\, x < n$;

   (b) $\neg(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, x \leq y$;

   (c) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, x \leq y$;

   (d) $(\forall k \in \mathbb{Z})(\exists l \in \mathbb{Z})\, k + l = 0$;

   (e) $(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R})\, x = y^2)$;

   (f) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})\, x < q < y)$.

4. Udowodnić Lemat 3.1.

5. Uzupełnić dowód Twierdzenia 3.2.

6. Podać przykład, że w Twierdzeniu 3.2(e) nie można zastąpić wynikania równoważnością.

7. Udowodnić Twierdzenie 3.3.

8. Zanegować poniższe wyrażenia (tzn. zapisać ich negacje bez użycia symbolu negacji).
   (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\, x < n$;
   (b) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, x \leq y$;
   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R})\, x = y^2)$;
   (d) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})\, x < q < y)$;
   (e) $\exists x \forall y (y > 0 \Rightarrow \exists z (x = y \cdot z))$;
   (f) $\exists x (x < 3 \vee \forall y (y > x \Rightarrow y \geq 3))$;
   (g) $\forall x (x \neq 2 \Rightarrow \forall z (z \geq x)) \vee \exists y (y = 2 \Rightarrow \exists t (y > t))$;
   (h) $\forall x (x \neq 0 \vee \exists y (x \cdot y \neq x))$.
9. Które z poniższych wyrażeń dadzą się uprościć przez użycie kwantyfikatorów ograniczonych?
   (a) $\forall x (x \geq 0 \Rightarrow \exists y (y^2 = x))$;
   (b) $\exists x \forall y (y \geq x \wedge \exists z (z > y))$;
   (c) $\forall x \exists y (y \neq 0 \Rightarrow y \geq x)$;
   (d) $\forall A \exists B (\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A) \wedge B \neq \emptyset)$.
10. Uzupełnić dowód Twierdzenia 3.4.
11. Przeprowadzić formalny dowód, że kwantyfikatory ograniczone, które kwantyfikują po niezależnych zmiennych są przemienne (Oczywiście chodzi o kwantyfikatory tego samego typu).
12. Podać przykłady funkcji zdaniowych $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ o zakresie zmiennej $x \in \mathbb{R}$ pokazujące, że poniższe zdania NIE są prawami rachunku kwantyfikatorów.
    (a) $\exists x (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \exists x\, \psi(x))$;
    (b) $(\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x)) \Rightarrow \forall x (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$;
    (c) $(\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \exists x\, \psi(x)) \Rightarrow \forall x (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$.
13. Podać przykłady funkcji zdaniowych $\varphi(x, y)$ o zakresie zmiennej $x, y \in \mathbb{R}$ pokazujące, że poniższe zdania NIE są prawami rachunku kwantyfikatorów.
    (a) $\exists x \exists y\, \varphi(x, y) \Rightarrow \exists x\, \varphi(x, x)$;

(b) $\forall\, \varphi(x, x) \Rightarrow \forall x \forall y \varphi(x, y)$.

14. Dla podanych rodzin indeksowanych $\{A_i : i \in I\}$ wyznaczyć

$$\bigcup_{i \in I} A_i \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i.$$

(a) $I = \mathbb{R}$, $\quad A_i = \{x \in \mathbb{R} : i \leq x\}$;

(b) $I = \mathbb{N}$, $\quad A_i = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < \frac{1}{i+1}\}$;

(c) $I = \mathbb{R}$, $\quad A_i = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{tg}(x) = i\}$;

(d) $I = \mathbb{N}$, $\quad A_i = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i+1} \leq x \leq 2 + \frac{1}{i+1}\}$;

(e) $I = \mathbb{N}^+$, $\quad A_i = (1 - \frac{2}{i}, 1 + \frac{1}{i})$;

(f) $I = \mathbb{N}^+$, $\quad A_i = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i} \leq x < i + \frac{1}{i}\}$;

(g) $I = \mathbb{N}^+$, $\quad A_i = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{(-1)^i}{i} < x \leq (2 + \frac{1}{i})^2\}$;

(h) $I = \mathbb{N}^+$, $\quad A_i = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i} \leq x < 2 - \frac{1}{i^2}\}$;

(i) $I = \mathbb{N}^+$, $\quad A_i = [i, i^2]$;

(j) $I = (0, +\infty)$, $\quad A_i = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \leq i \cdot x\}$;

(k) $I = (0, +\infty)$, $\quad A_i = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y = i \cdot x\}$.

15. Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie indeksowaną rodziną podzbiorów przestrzeni Y oraz $A \subseteq Y$. Udowodnić poniższe własności.

(a) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$;

(b) $(\forall i \in I)(A_i \subseteq A) \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \subseteq A$;

(c) $(\forall i \in I)(A \subseteq A_i) \Rightarrow A \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

16. Niech $\{A_i : i \in I\}$ i $\{B_i : i \in I\}$ będą indeksowanymi rodzinami zbiorów. Pokazać, że

(a) $(\forall i \in I)(A_i \subseteq B_i) \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} B_i$;

(b) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \cap \bigcup\limits_{i \in I} B_i = \bigcup\limits_{i \in I} \bigcup\limits_{j \in I} (A_i \cap B_j)$;

(c) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \cup \bigcap\limits_{i \in I} B_i = \bigcap\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in I} (A_i \cup B_j)$.

17. Pokazać, że jeśli $I = \{1, 2\}$, to

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = A_1 \cap A_2.$$

18. Pokazać, że $\bigcup_{i\in I} A_i$ jest najmniejszym (w sensie zawierania) zbiorem, w którym zawarte są wszystkie zbiory A_i. Podobnie, $\bigcap_{i\in I} A_i$ jest największym zbiorem, który zawiera się we wszystkich zbiorach A_i. Sformułować i udowodnić podobne twierdzenie dla sumy i przekroju dowolnych (niekoniecznie indeksowanych) rodzin zbiorów.

19. Zakładaliśmy, że działania uogólnione wykonujemy na niepustych rodzinach zbiorów. Uzasadnić, że w wypadku sumy uogólnionej to założenie nie jest konieczne. Dlaczego nie możemy rozpatrywać przekroju pustej rodziny zbiorów?

20. Niech P oznacza zbiór liczb pierwszych. Rozpatrzmy podzbiór liczb naturalnych $B = \{n \in \mathbb{N} : (\exists p \in P)(\exists q \in P)(p \neq q \wedge n = p \cdot q)\}$. Określmy następującą rodzinę zbiorów:

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(B) : (\exists p \in P)(\forall x \in A)\, p|x\}.$$

Udowodnić, że $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, ale $\mathcal{A}$ nie jest rodziną zbiorów parami rozłącznych. Co więcej, każde dwa zbiory należące do rodziny $\mathcal{A}$ mają niepusty przekrój, choć żadne trzy różne zbiory z tej rodziny nie mają elementu wspólnego.

Rozdział 4

Funkcje

Pojęcie funkcji jest jednym z najbardziej podstawowych pojęć w matematyce (i nie tylko w matematyce). Pierwsze zetknięcie z funkcją następuje już w szkole podstawowej. Zawsze jednak jest to *konkretna* funkcja, zadana konkretnym wzorem. Nikt nie zastanawia się, *czym* jest funkcja, bardzo słusznie zresztą, bo w szkole zupełnie nie ma takiej potrzeby. Na studiach jednak taka potrzeba się pojawia.

Czym zatem jest funkcja? Ze szkoły wynosimy intuicję, że jest to *przyporządkowanie*: każdemu elementowi jednego zbioru przyporządkowujemy dokładnie jeden element drugiego zbioru[1]. Jest to bardzo słuszna intuicja, której nie należy się wyzbywać. Dla naszych potrzeb nie jest ona jednak wystarczająca, gdyż pojęcie przyporządkowania, chociaż intuicyjnie oczywiste, nie jest precyzyjne. Postaramy się teraz sformalizować to pojęcie, by było ścisłe i jednoznaczne.

Główny pomysł, na którym się oprzemy, polega na utożsamieniu funkcji i jej wykresu.

Definicja *Niech dane będą dwa zbiory X i Y.* ***Funkcją*** *f określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ o tej własności, że dla każdego $x \in X$ istnieje jedno i tylko jedno $y \in Y$, takie że $\langle x, y\rangle \in f$. Zbiór X nazywamy* ***dziedziną*** *funkcji f, a każdy jego element –* ***argumentem*** *funkcji f. Zbiór Y to* ***przeciwdziedzina*** *funkcji f. Zbiór $\mathrm{rng}(f) = \{y \in Y : (\exists x \in X)\langle x, y\rangle \in f\} \subseteq Y$ nazywamy* ***zbiorem wartości*** *funkcji f, a każdy jego element –* ***wartością*** *funkcji f.*

[1] Tak naprawdę w szkole prawie wyłącznie spotykamy się z funkcjami przekształcającymi pewien podzbiór zbioru liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste, czyli funkcjami rzeczywistymi. Trzeba sobie uświadomić, że pojęcie funkcji jest dużo szersze – jest mnóstwo funkcji nie będących funkcjami rzeczywistymi.

Jeśli f jest funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y (mówimy też, że funkcja f przekształca zbiór X w zbiór Y), to piszemy $f : X \to Y$. Jeżeli $\langle x, y\rangle \in f$ to piszemy $f(x) = y$. Mamy wtedy

$$f = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y : f(x) = y\},$$

co wyraźnie pokazuje na tożsamość funkcji i jej wykresu. Zbiór wszystkich funkcji przekształcających zbiór X w zbiór Y oznaczamy Y^X.

Powyższa definicja funkcji kładzie nacisk na obiekty przekształcane, czyli zbiory X i Y. Można nieco inaczej zdefiniować funkcję, kładąc nacisk na sam fakt przekształcania. Ta druga definicja jest nieco mniej naturalna i raczej nie będziemy jej używać. Warto ją jednak znać, gdyż czasami jest ona bardzo przydatna.

Definicja *Funkcją f nazywamy dowolny zbiór, którego elementami są wyłącznie pary uporządkowane, o tej własności, że nie ma w nim dwóch par o tym samym poprzedniku i różnych następnikach tzn.* $(\forall \langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \in f)$ $y_1 = y_2$. *Dziedziną funkcji f nazywamy zbiór* $\mathrm{dom}(f) = \{x : (\exists y)\langle x, y\rangle \in f\}$, *a zbiorem wartości funkcji f zbiór* $\mathrm{rng}(f) = \{y : (\exists x)\langle x, y\rangle \in f\}$.

Pewien opór w powyższej definicji może budzić fakt, że właściwie nie wiemy, co przekształcamy. Zauważmy jednak, że w istocie obie te definicje mówią dokładnie to samo, tylko inaczej rozkładają akcenty. Faktycznie, jeśli $\mathrm{dom}(f) = X$ i $\mathrm{rng}(f) \subseteq Y$, to sprawdzenie równoważności obu tych definicji nie powinno nastręczać większych problemów.

Wiemy już *co* to jest funkcja, wciąż jednak nie wiemy *jak* opisać konkretną funkcję. Zanim jednak przejdziemy do tego zagadnienia, zauważmy, że pojęcie dziedziny funkcji jest nierozerwalnie związane z pojęciem funkcji, innymi słowy, jeśli znamy funkcję, to znamy jej dziedzinę. Jest to istotne spostrzeżenie, jako że w szkole często rozdziela się te dwa pojęcia, co z formalnego punktu widzenia jest niepoprawne.

Przykład „Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$."
Tak sformułowane polecenie (częste w szkolnych zbiorach zadań) z punktu widzenia naszej definicji jest bezsensowne, bo my tej funkcji po prostu nie znamy. Samo zadanie oczywiście ma sens, ale poprawne polecenie powinno brzmieć: „Wyznaczyć maksymalny podzbiór liczb rzeczywistych $D \subseteq \mathbb{R}$, dla którego wyrażenie $f(x) = \frac{1}{x}$ (gdzie $x \in D$) ma sens liczbowy".

Jak w takim razie opisywać funkcję (wiemy już, że sam wzór nie wystarczy)? Najczęściej tak:

$$f : X \to Y, \qquad f(x) = przepis.$$

Jest to najczęściej wykorzystywany, choć nie jedyny sposób. Sam *przepis* na ogół jest wzorem, choć bywają bardziej skomplikowane sytuacje, na przykład funkcja jest opisana kilkoma warunkami. Niekiedy w związku z tym pojawia się konieczność sprawdzenia *poprawności definicji* funkcji, czyli upewnienia się, czy przypadkiem nie przypisaliśmy jednemu argumentowi dwóch różnych wartości.

Przykład Określmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jeśli } x \leq 0 \\ x+1 & \text{jeśli } x \geq 0 \end{cases} .$$

Zauważmy, że nie jest to poprawny opis, gdyż z pierwszego warunku wynika, że $f(0) = 0$ (czyli $\langle 0, 0\rangle \in f$), a z drugiego, że $f(0) = 1$ (czyli $\langle 0, 1\rangle \in f$), co jest sprzeczne z definicją funkcji. Poprawny opis mógłby wyglądać np. tak:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jeśli } x < 0 \\ x+1 & \text{jeśli } x \geq 0 \end{cases} .$$

Wtedy warunki te definiują funkcję na rozłącznych zbiorach $(-\infty, 0)$ i $[0, +\infty)$, więc sytuacja taka, jak poprzednio, nie może mieć miejsca.

Rozpatrzymy teraz kilka ważnych przykładów funkcji.

Przykłady

1. Funkcja identycznościowa.
   Dla dowolnego niepustego zbioru X możemy określić funkcję identycznościową na zbiorze X (identyczność na X) następująco:
   $$id_X : X \to X, \qquad id_X(x) = x.$$
2. Funkcja charakterystyczna.
   Niech X będzie ustaloną przestrzenią. Dla dowolnego podzbioru $A \subseteq X$ definiujemy funkcję charakterystyczną zbioru A następująco:
   $$\chi_A : X \to \{0, 1\}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in A \\ 0 & \text{jeśli } x \notin A \end{cases} .$$
3. Rzut.
   Dla dowolnych niepustych zbiorów X i Y możemy zdefiniować funkcję
   $$\pi_X : X \times Y \to X, \qquad \pi_X(\langle x, y\rangle) = x,$$
   którą nazywamy rzutem na X (rzutem na pierwsza oś). Oczywiście analogicznie możemy określić rzut na drugą oś.

4. Ciąg liczbowy.
   Okazuje się, że dobrze znany obiekt, czyli ciąg liczbowy też jest przykładem funkcji. Np. dowolna funkcja $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ to po prostu ciąg liczb rzeczywistych – wystarczy oznaczyć $a(n) = a_n$, by to zauważyć.

   Ciąg liczbowy oznaczamy na ogół $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ lub $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ (w Analizie Matematycznej używa się $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Definiując konkretny ciąg na ogół wystarczy podać definiujący go wzór (np. $a_n = \frac{1}{n}$) – domyślnie zakładamy, że jest on określony dla wszystkich liczb naturalnych.

   Warto jeszcze zauważyć, że ciąg $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ jest czym innym niż zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{rng}(a)$. Istotnie, rozważmy ciąg $a_n = (-1)^n$. Wtedy $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ jest obiektem „nieskończonym” (formalnie: nieskończonym zbiorem par uporządkowanych), podczas gdy $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

5. Indeksowana rodzina zbiorów.
   Oczywiście, rozważać możemy nie tylko ciągi liczbowe. Każda funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych jest ciągiem. Szczególnym przykładem mogą być ciągi zbiorów. Uogólnieniem zaś ciągów zbiorów są indeksowane rodziny zbiorów.

   W poprzednim rozdziale rozważaliśmy sumy i przekroje indeksowanych rodzin zbiorów, traktując to pojęcie intuicyjnie, co było zupełnie wystarczające. Do pewnych zastosowań trzeba je jednak sprecyzować.

   Niech I będzie zbiorem niepustym (nazywamy go zbiorem indeksów), a X dowolnym zbiorem. Indeksowaną rodziną podzbiorów zbioru X nazywamy dowolną funkcję $A : I \to \mathcal{P}(X)$ (intuicyjnie – „numerujemy” pewne podzbiory zbioru X elementami zbioru I). Podobnie jak w wypadku ciągu, indeksowaną rodzinę zbiorów zapisujemy jako $\langle A_i : i \in I \rangle$ lub $\langle A_i \rangle_{i \in I}$. Podobnie też jak wypadku ciągu czym innym jest indeksowana rodzina zbiorów $\langle A_i : i \in I \rangle$, a czym innym rodzina zbiorów $\{A_i : i \in I\}$. Zauważmy jednak, że różnica ta nie odgrywa roli przy definiowaniu uogólnionej sumy i przekroju rodziny zbiorów. Będzie ona istotna dopiero przy definiowaniu uogólnionego iloczynu kartezjańskiego.

W jednym z powyższych przykładów rozważaliśmy funkcję rzutu, określoną na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Jest to przykład funkcji dwóch zmiennych. Ogólnie, *funkcją dwóch zmiennych* nazywamy dowolną funkcję f określoną na iloczynie kartezjańskim dwóch zbiorów. Dla uproszczenia zamiast $f(\langle x, y \rangle)$ piszemy wtedy $f(x, y)$. W analogiczny sposób możemy zdefiniować funkcję trzech, czterech i ogólnie dowolnej skończonej ilości zmiennych.

Przykład Funkcją dwóch zmiennych jest funkcja $plus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $plus(x, y) = x + y$.

Wreszcie, zdarza się, że rozpatrujemy funkcje, których przeciwdziedziną jest iloczyn kartezjański dwóch (lub więcej) zbiorów. Pojawia się wtedy pojęcie składowej funkcji.

Definicja *Niech A, B oraz C będą dowolnymi zbiorami niepustymi, zaś $f : A \to B \times C$ dowolną funkcją. Wtedy dla każdego $a \in A$ istnieją elementy $f_1(a) \in B$ i $f_2(a) \in C$, takie że $f(a) = \langle f_1(a), f_2(a) \rangle$. W ten sposób określiliśmy funkcje $f_1 : A \to B$ i $f_2 : A \to C$. Nazywamy je* ***składowymi*** *(odpowiednio pierwszą i drugą) funkcji f.*

Na zakończenie tego podrozdziału uogólnimy pojęcie iloczynu kartezjańskiego.

Definicja *Niech $\langle A_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną podzbiorów zbioru X. Wtedy* ***uogólnionym iloczynem kartezjańskim*** *tej rodziny nazywamy zbiór*

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in X^I : (\forall i \in I) f(i) \in A_i\}.$$

Zauważmy, że jeśli dla każdego $i \in I$ mamy $A_i = X$, to wtedy otrzymujemy $\prod_{i \in I} A_i = X^I$, co zgadza się z potoczną interpretacją potęgowania i świadczy o tym, że przyjęte oznaczenia nie są przypadkowe.

4.1 Własności funkcji

W tym rozdziale podamy parę definicji zilustrowanych przykładami.

Definicja *Niech $f : X \to Y$.*

1. *Mówimy, że funkcja f jest* ***różnowartościowa*** *i piszemy $f : X \xrightarrow{1-1} Y$ jeśli różnym argumentom przyporządkowuje ona różne wartości, czyli*

   $$(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

   Funkcję taką nazywamy też ***injekcją*** *lub mówimy, że jest* ***1-1***.

2. *Mówimy, że funkcja f jest* ***„na"*** *i piszemy $f : X \xrightarrow{na} Y$ jeśli każdy element jej przeciwdziedziny jest wartością funkcji, czyli*

   $$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, y = f(x).$$

Funkcję taką nazywamy też ***surjekcją.***

3. *Jeśli funkcja f jest różnowartościowa i „na” to nazywamy ją* ***wzajemnie jednoznaczną*** *i piszemy $f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$. O takiej funkcji mówimy też, że jest* ***bijekcją.***

Zauważmy, że funkcja f jest „na” wtedy i tylko wtedy, kiedy jej zbiór wartości jest całą przeciwdziedziną. Jeśli mamy dowolną funkcję $f : X \to Y$, to funkcja $f' : X \to \mathrm{rng}(f)$ zadana warunkiem $f'(x) = f(x)$ jest „na” [2]. Jest to źródłem pewnych trudności w zrozumieniu tego pojęcia – nie jest ono tak naturalne jak pojęcie różnowartościowości. Poprawnie zdefiniowana funkcja (rozważamy funkcje w sensie pierwszej definicji) powinna mieć jednoznacznie określoną przeciwdziedzinę, co umożliwia sprawdzenie, czy jest ona surjekcją.

Przykłady

1. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = x^2$. Nie jest ona różnowartościowa, bo $f(1) = f(-1) = 1$. Nie jest ona też „na”, gdyż nie istnieje liczba rzeczywista $x \in \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = x^2 = -1$. Natomiast funkcja $f' : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f'(x) = x^2$ jest surjekcją, gdyż dla każdego $y \in [0, +\infty)$ istnieje $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$, takie że $f'(x) = (\sqrt{y})^2 = y$.

2. Niech funkcja $g : (0, 1) \to (0, 2)$ będzie zadana wzorem $g(x) = 2x$. Jest to funkcja różnowartościowa, bo dla dowolnych $x_1, x_2 \in (0, 1)$ jeśli $x_1 \neq x_2$ to $g(x_1) = 2x_1 \neq 2x_2 = g(x_2)$. Jest ona także „na”, gdyż dla dowolnego $y \in (0, 2)$ jest $x = \frac{y}{2} \in (0, 1)$, taki że $g(x) = 2 \cdot \frac{y}{2} = y$. Czyli g jest bijekcją.

3. Niech $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$ będzie rzutem na pierwszą oś. Jak łatwo sprawdzić jest to surjekcja, ale nie jest injekcja.

4. Rozważmy funkcję $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ opisaną wzorem $h(n, k) = n^2 + k^2$. Funkcja ta nie jest „na”, bo np. liczba 7 nie jest sumą dwóch kwadratów liczb naturalnych. Nie jest też $1 - 1$, bo np. $h(0, 1) = h(1, 0) = 1$.

Definicja *Niech $f : X \to Y$.*

1. *Niech $Z \subseteq X$.* ***Obcięciem*** *funkcji f do zbioru Z nazywamy funkcję $f{\restriction}Z : Z \to Y$, $(f{\restriction}Z)(x) = f(x)$.*

2. *Funkcję $g : Z \to Y$ nazywamy* ***przedłużeniem*** *funkcji f jeśli $X \subseteq Z$ oraz dla każdego $x \in X$ mamy $f(x) = g(x)$.*

[2] Z punktu widzenia drugiej definicji funkcji jest to *ta sama* funkcja.

Przykłady

1. Rozważmy ponownie funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = x^2$. Wtedy obcięcie tej funkcji do zbioru $[0, +\infty)$ jest funkcją różnowartościową. Funkcja f jest też przedłużeniem funkcji $f \restriction [0, +\infty)$.

2. Obcięcie funkcji $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadanej wzorem $h(n, k) = n^2 + k^2$ do zbioru $\{0\} \times \mathbb{N}$ jest już injekcją.

Definicja *Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. **Złożeniem** funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f : X \to Z$ zadaną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Przykłady

1. W szkole spotyka się czasem polecenie: „Wyznacz złożenie funkcji $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = \sqrt{x}$". Wiemy już, że jest to polecenie niepełne. Gdybyśmy przyjęli, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, to okazuje się, że w świetle powyższej definicji złożenie tych funkcji nie jest możliwe. Z tym problemem można sobie oczywiście poradzić, na przykład zakładając, że $f : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to [0, +\infty)$. Inną możliwością jest nieco inne zdefiniowanie złożenia, zgodnie z drugą definicją pojęcia funkcji, czym nie będziemy się zajmować[3].

2. Niech A, B i C będą zbiorami niepustymi, $f : A \to B \times C$ dowolną funkcją, a $f_1 : A \to B$ i $f_2 : A \to C$ jej składowymi (odpowiednio pierwszą i drugą). Ponadto niech $\pi_1 : B \times C \to B$ i $\pi_2 : B \times C \to C$ będą rzutami odpowiednio na pierwszą i drugą oś. Wtedy $f_1 = \pi_1 \circ f$ i $f_2 = \pi_2 \circ f$.

Warto zauważyć, że składanie funkcji jest łączne, czyli jeśli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to W$, to $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Dowód pozostawiamy jako nietrudne ćwiczenie.

Definicja *Jeśli $f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$, to **funkcję odwrotną** do funkcji f definiujemy następująco: $f^{-1} : Y \to X$ oraz $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.*

Poprawność powyższej definicji wynika z faktu, że funkcja f jest bijekcją. Można tę definicję rozszerzyć definiując funkcję odwrotną do funkcji

[3]Dla zainteresowanych: jeśli f i g są *dowolnymi* funkcjami, to

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle : \exists y(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g)\}.$$

różnowartościowej f. Wtedy będziemy mieli $f^{-1} : \mathrm{rng}(f) \to X$, warunek definiujący pozostaje bez zmian. Można też zdefiniować funkcję odwrotną do różnowartościowej funkcji f zgodnie z drugą definicją pojęcia funkcji[4].

Przykład Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^3$. Jak nietrudno zauważyć, jest to bijekcja. Istnieje zatem funkcja odwrotna $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana przez warunek $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow x^3 = y$. Ale $x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$. Czyli $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ lub, zamieniając oznaczenie zmiennej, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

4.2 Obrazy i przeciwobrazy

Definicja *Niech $f : X \to Y$ oraz $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$.*

1. ***Obrazem** zbioru A (względem funkcji f) nazywamy zbiór*

$$f[A] = \{y \in Y : (\exists x \in A) y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}.$$

2. ***Przeciwobrazem** zbioru B (względem funkcji f) nazywamy zbiór*

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

W tym miejscu konieczne jest kilka uwag o notacji. Na oznaczenie obrazu zbioru stosuje się w literaturze matematycznej różne symbole. Oprócz tego podanego powyżej najczęściej spotyka się $f(A)$ i $\vec{f}(A)$. Podobnie w wypadku przeciwobrazu zbioru pojawiają się symbole $f^{-1}(B)$ i $\vec{f}^{-1}(B)$. Ponieważ jednak przyjęte przez nas oznaczenia są z pewnych względów najwygodniejsze i nie prowadzące do nieporozumień, więc to one będą obowiązujące.

W wypadku przeciwobrazu zbioru nie należy mylić opisującego go symbolu z symbolem funkcji odwrotnej – są to różne rzeczy. Przyjęty sposób zapisu pozwala zresztą uważnemu Czytelnikowi na ich rozróżnienie. Jedyna sytuacja, która wydaje się budzić wątpliwości, to pytanie, czy $f^{-1}[B]$ oznacza przeciwobraz zbioru B względem funkcji f czy obraz zbioru B względem funkcji f^{-1}. Jest to jednak trudność pozorna. Okazuje się bowiem, że oba te znaczenia się pokrywają (wykazanie tego pozostawiamy jako proste ćwiczenie).

[4] Definicja ta wygląda następująco:

$$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in f\}.$$

Dla uproszczenia zamiast pisać $f[\{a\}]$ i $f^{-1}[\{a\}]$ będziemy pisać $f[a]$ i $f^{-1}[a]$. Oczywiście, $f[a] = \{f(a)\}$.

Przykłady

1. Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $f(x) = x^2$ oraz $A = [-1, 2]$ i $B = (1, 2)$, to $f[A] = [0, 4]$ i $f^{-1}[B] = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

2. Niech $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie opisana wzorem $g(n, k) = n^2 + k^2$ oraz niech $A = \mathbb{N} \times \{0\}$ i $B = \{0, 1, 2\}$. Wtedy

   $$g[A] = \{g(n,k) : \langle n,k\rangle \in \mathbb{N} \times \{0\}\} = \{n^2 + k^2 : n \in \mathbb{N} \wedge k = 0\} = \\ = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

   Z kolei

   $$g^{-1}[B] = \{\langle n,k\rangle \in \mathbb{N}^2 : g(n,k) \in \{0,1,2\}\} = \\ = \{\langle n,k\rangle \in \mathbb{N}^2 : n^2 + k^2 = 0 \vee n^2 + k^2 = 1 \vee n^2 + k^2 = 2\} = \\ = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}.$$

Przedstawimy teraz całą serię twierdzeń dotyczących obrazów i przeciwobrazów zbiorów.

Twierdzenie 4.1 *Niech $f : X \to Y$. Dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2 \subseteq X$ i dowolnej rodziny $\{A_i : i \in I\}$ podzbiorów X zachodzą wówczas następujące zależności.*

(a) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$*, ogólniej* $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$*;*

(b) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$*, ogólniej* $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$*;*

(c) $f[A_1] \setminus f[A_2] \subseteq f[A_1 \setminus A_2]$.

Dowód. Udowodnimy tylko dwie spośród powyższych zależności, resztę pozostawiając jako ćwiczenie.

(a) Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X. Ustalmy dowolne $y \in Y$. Wtedy mamy następujący ciąg równoważności:

$$y \in f[\textstyle\bigcup_{i \in I} A_i] \Leftrightarrow (\exists x)(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\exists x)(\exists i \in I)(x \in A_i \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\exists i \in I)(\exists x)(x \in A_i \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\exists i \in I) y \in f[A_i]) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y \in \textstyle\bigcup_{i \in I} f[A_i],$$

przy czym pierwsza i czwarta równoważność wynikają z definicji obrazu zbioru, druga i piąta równoważność z definicji uogólnionej sumy zbiorów, zaś trzecia (kluczowa) równoważność z Twierdzenia 3.5(b). Powołanie się na Zasadę Ekstensjonalności kończy dowód.

(b) Niech $A_1, A_2 \subseteq X$. Ustalmy dowolne $y \in Y$. Wtedy prawdziwe jest następujące rozumowanie:

$$\begin{aligned} y \in f[A_1 \cap A_2] &\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A_1 \cap A_2 \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge y = f(x)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists x)(x \in A_1 \wedge y = f(x)) \wedge (\exists x)(x \in A_2 \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in f[A_1] \wedge y \in f[A_2] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in f[A_1] \cap f[A_2], \end{aligned}$$

przy czym pierwsza i trzecia równoważność wynikają z definicji obrazu zbioru, druga i czwarta równoważność z definicji przekroju zbiorów, zaś wynikanie z Twierdzenia 3.2(e). Czyli zgodnie z definicją zawierania zbiorów dowód jest zakończony. □

Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu w podpunktach (b) i (c) nie da się zastąpić zawierania równością. Przyczyna tego jest bardzo podobna jak w wypadku rozpatrywanych w poprzednim rozdziale praw rachunku kwantyfikatorów. Istotnie, w drugiej części powyższego dowodu korzystaliśmy z częściowej rozdzielności kwantyfikatora egzystencjalnego względem koniunkcji. Wiemy, że pełna rozdzielność w tym wypadku nie zachodzi, a to jej wymagałby ewentualny dowód równości w podpunkcie (b).

Obserwacja ta wyjaśnia przyczynę, nie jest zaś dowodem faktu, że nie da się zastąpić zawierania równością. Dowód wymaga wskazania konkretnej funkcji i konkretnych zbiorów, np. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$, takich że $f[A_1] \cap f[A_2] \not\subseteq f[A_1 \cap A_2]$ (i analogicznie w wypadku pozostałych zawierań), jednym słowem wymaga wskazania kontrprzykładu, co pozostawiamy jako ćwiczenie.

Okazuje się jednak, że przy dodatkowym założeniu o funkcji f Twierdzenie 4.1 można wzmocnić.

Twierdzenie 4.2 *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją różnowartościową. Dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2 \subseteq X$ i dowolnej rodziny $\{A_i : i \in I\}$ podzbiorów X mamy wtedy*

(a) $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$, *ogólniej* $f[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f[A_i]$;

(b) $f[A_1] \setminus f[A_2] = f[A_1 \setminus A_2]$.

Dowód. Pokażemy tylko jedną równość, pozostałe pozostawiając do samodzielnego udowodnienia.

(a) Dzięki Twierdzeniu 4.1 wystarczy pokazać tylko $f[A_1] \cap f[A_2] \subseteq f[A_1 \cap A_2]$. Ustalmy dowolne $y \in Y$. Wtedy $y \in f[A_1] \cap f[A_2] \Leftrightarrow y \in f[A_1] \wedge y \in f[A_2]$. Czyli z definicji obrazu zbioru istnieją $x_1 \in A_1$ i $x_2 \in A_2$, takie że zachodzi $f(x_1) = y = f(x_2)$. Ale funkcja f jest różnowartościowa, czyli musi być $x_1 = x_2 = x$. Wtedy jednak $x \in A_1 \cap A_2$ i ponieważ $y = f(x)$, to $y \in f[A_1 \cap A_2]$, co kończy dowód. □

Następne twierdzenie dotyczy własności przeciwobrazów zbiorów.

Twierdzenie 4.3 *Niech $f : X \to Y$. Dla dowolnych zbiorów $B_1, B_2 \subseteq Y$ i dowolnej rodziny $\{B_i : i \in I\}$ podzbiorów Y zachodzą wówczas następujące zależności.*

(a) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$, *ogólniej* $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$;

(b) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$, *ogólniej* $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$;

(c) $f^{-1}[B_1 \setminus B_2] = f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2]$.

Dowód. Ponownie przykładowo udowodnimy jedną równość, pozostałe pozostawiając jako ćwiczenie.

(b) Niech $B_1, B_2 \subseteq Y$. Ustalmy dowolne $x \in X$. Wtedy mamy następujący ciąg równoważności:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[B_1 \cap B_2] &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[B_1] \wedge x \in f^{-1}[B_1] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2], \end{aligned}$$

przy czym pierwsza i trzecia równoważność wynikają z definicji przeciwobrazu zbioru zaś druga i czwarta równoważność z definicji przekroju zbiorów. Powołanie się na Zasadę Ekstensjonalności kończy dowód. □

Zauważmy istotną różnicę pomiędzy Twierdzeniem 4.1 a Twierdzeniem 4.3 – przeciwobrazy zbiorów „zachowują się” lepiej od obrazów zbiorów. Wynika to z faktu, że w definicji obrazu zbioru występuje kwantyfikator egzystencjalny, którego brak w definicji przeciwobrazu zbioru. Obecność tego kwantyfikatora „pogarsza” sytuację, co łatwo zobaczymy porównując dowody obu twierdzeń.

Zajmiemy się teraz wzajemnymi zależnościami pomiędzy obrazami a przeciwobrazami zbiorów.

Twierdzenie 4.4 *Niech* $f : X \to Y$ *oraz* $A \subseteq X$ *i* $B \subseteq Y$*. Wtedy*

(a) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$*;*

(b) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$*.*

Dowód. (a) Niech $A \subseteq X$. Ustalmy dowolne $x \in A$. Wtedy z definicji obrazu zbioru mamy $f(x) \in f[A]$. Ale z definicji przeciwobrazu zbioru mamy

$$f^{-1}[f[A]] = \{x \in X : f(x) \in f[A]\},$$

czyli $x \in f^{-1}[f[A]]$, co kończy dowód.

(b) Niech $B \subseteq Y$. Ustalmy dowolne $y \in Y$. Wtedy prawdziwe jest poniższe rozumowanie:

$$\begin{aligned} y \in f[f^{-1}[B]] &\Leftrightarrow (\exists x)(x \in f^{-1}[B] \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists x)(f(x) \in B \wedge y = f(x)) \Rightarrow y \in B, \end{aligned}$$

przy czym pierwsza równoważność wynika z definicji obrazu zbioru, druga z definicji przeciwobrazu zbioru, zaś implikacja jest oczywista (w formule $(\exists x)\, y \in B$ możemy opuścić kwantyfikator, gdyż niczego on nie kwantyfikuje). $\square$

Zauważmy, że z faktu $f(x) \in f[A]$ nie wynika, że $x \in A$. Może się bowiem zdarzyć, że $x \notin A$ oraz że jest $x' \in A$, takie że $f(x) = f(x')$. Czyli dowód podpunktu (a) nie da się poprawić, by otrzymać równość. Także w podpunkcie (b) nie da się odwrócić ostatniej implikacji, gdyż może nie istnieć $x \in X$ takie, że $y = f(x)$. Oczywiście, dowód, że w powyższym twierdzeniu nie ma równości wymaga (podobnie jak w przypadku Twierdzenia 4.1) podania kontrprzykładu.

Podobnie także jak w przypadku Twierdzenia 4.2, wzmocnienie założeń pozwala uzyskać więcej.

Twierdzenie 4.5 *Niech* $f : X \to Y$ *oraz* $A \subseteq X$ *i* $B \subseteq Y$*. Wtedy*

(a) Jeśli funkcja jest $1-1$ *to* $A = f^{-1}[f[A]]$*.*

(b) Jeśli funkcja jest „na” to $B = f[f^{-1}[B]]$*.*

Dowód. Ponieważ podane założenia pozwalają wyeliminować opisane powyżej problemy, dowód polegający na wzmocnieniu dowodu Twierdzenia 4.4 pozostawiamy Czytelnikowi. $\square$

4.3 Zadania

1. Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisać następujące zdania o funkcjach f i g.

   (a) Funkcja f jest okresowa.

   (b) Funkcja f jest ograniczona.

   (c) Do zbioru okresów funkcji f należą dowolnie małe liczby dodatnie.

   (d) Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których wartość funkcji f jest mniejsza od wartości funkcji g.

   (e) Począwszy od pewnego miejsca funkcja f przyjmuje tylko wartości nieujemne.

   (f) Zbiór miejsc zerowych funkcji f jest nieograniczony od dołu.

   (g) Począwszy od pewnego miejsca funkcja f jest stała.

2. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisać symbolicznie poniższe zdania (bez użycia symbolu negacji $\neg$).

   (a) Liczba 1 nie jest okresem funkcji f.

   (b) Liczba 1 nie jest ograniczeniem górnym funkcji f.

   (c) Funkcja f nie jest ograniczona z dołu.

   (d) Funkcja f nie jest funkcją rosnącą.

3. Zapisać następujące zdania o ciągu liczb rzeczywistych $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. Wolno używać symboli a_n na oznaczenie wyrazów ciągu.

   (a) Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony.

   (b) Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest monotoniczny.

   (c) Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

   (d) Nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest dodatnich.

   (e) Od pewnego miejsca ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnący.

4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisać symbolicznie poniższe zbiory.

   (a) Zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

   (b) Zbiór miejsc zerowych funkcji f.

   (c) Zbiór okresów funkcji f (Uwaga! Okres funkcji jest **dodatnią** liczbą rzeczywistą).

(d) Zbiór ograniczeń górnych funkcji f.

5. Rozważmy ciąg $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych oraz funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisać symbolicznie poniższe zdania oraz zbiory.

   (a) Każdy wyraz ciągu $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest wartością funkcji f.

   (b) Wartości funkcji f dla argumentów będących wyrazami ciągu $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ są dodatnie.

   (c) Zbiór miejsc zerowych funkcji f będących wyrazami ciągu $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Zbiór ograniczeń dolnych funkcji f nie będących ograniczeniami dolnymi ciągu $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Pokazać równoważność dwóch definicji pojęcia funkcji.

7. Sprawdzić, czy poniższe zbiory są funkcjami (w sensie drugiej definicji pojęcia funkcji). Jeśli tak – podać ich dziedzinę i zbiór wartości. Jeśli nie – uzasadnić dlaczego.

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})\, y = x^2\}$,

   (b) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$,

   (c) $\{\langle x, x^2 \rangle : x \in [0, +\infty)\}$,

   (d) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \vee y \geq x^2\}$,

   (e) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x < -1 \wedge y = x^2\}$.

8. Dla poniższych funkcji wyznaczyć ich zbiór wartości.

   (a) $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty), \quad f(x) = e^x$,

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$,

   (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = x^2$,

   (d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$,

   (e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n + 1$,

   (f) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = n + 1$,

   (g) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(q) = 2$,

   (h) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \backslash \{\emptyset\} \to \mathbb{N}, \quad f(A) = \min A$ (=najmniejszy element zbioru A),

   (i) $f : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad f(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$.

9. Uzasadnić, że $\prod_{i\in\{1,2\}} A_i$ i $A_1 \times A_2$ są formalnie różnymi obiektami. Pokazać, że można znaleźć bijekcję pomiędzy tymi zbiorami - ten fakt pozwala nam je ze sobą utożsamiać.

10. Niech $f : X \to Y$ będzie injekcją. Pokazać, że funkcja $f' : X \to \text{rng}(f)$ zadana wzorem $f'(x) = f(x)$ jest bijekcją.

11. Dla danej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbadać, czy f jest różnowartościowa i „na". Jeśli f nie jest $1-1$, wskazać x_1 i x_2 takie, że $x_1 \neq x_2$, ale $f(x_1) = f(x_2)$. Jeśli f nie jest „na", wyznaczyć $\text{rng}(f)$.

    (a) $f(x) = 2^x - 7$,

    (b) $f(x) = x^4 + 1$,

    (c) $f(x) = 2^x + x$,

    (d) $f(x) = x^3 - x^2$,

    (e) $f(x) = \sin x$,

    (f) $f(x) = |x| - 1$.

12. Niech $f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ będzie zadana wzorem $f(x) = x^2$. Udowodnić, że funkcja f jest różnowartościowa i „na".

13. Pokazać, że funkcja $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$ jest surjekcją, ale nie jest injekcją.

14. Pokazać, że funkcja $f : [0, 2\pi] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowana wzorem $f(\varphi, r) = \langle r\cos\varphi, r\sin\varphi\rangle$ jest surjekcją, ale nie jest injekcją.

15. Udowodnić, że jeśli funkcja $f : A \to B\times C$ jest surjekcją, to jej składowe $f_1 : A \to B$ i $f_2 : A \to C$ też są surjekcjami. Czy analogiczny fakt jest prawdziwy, gdy funkcja f jest injekcją?

16. Udowodnić, że jeśli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to W$, to

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

17. Znaleźć funkcje odwrotne do następujących funkcji.

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 + 1$,

    (b) $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$; $g(x) = \ln x$,

    (c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $h(n) = n + 5$.

18. Dla podanych poniżej funkcji sprawdzić, czy są różnowartościowe i „na" oraz wyznaczyć obraz $f[A]$ i przeciwobraz $f^{-1}[B]$.

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + 2$; $A = [-1, 2)$; $B = (2, 3]$,
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2^x$; $A = (-1, 1)$; $B = [1, 4]$,
    (c) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; $f(n, k) = n + k$; $A = \{1\} \times \mathbb{N}$; $B = \{3\}$,
    (d) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; $f(n, k) = nk$; $A = \mathbb{N} \times \{2\}$; $B = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$,
    (e) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$; $f(n, k) = n^2 k$; $A = \mathbb{Z} \times \{0, 1\}$; $B = \{0\}$,
    (f) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$; $f(n, k) = n^2 - k$; $A = \{1\} \times \mathbb{Z}$; $B = \{0\}$,
    (g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$; $f(n) = \langle 2n, -2n \rangle$; $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$; $B = \mathbb{N} \times \{0\}$,
    (h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = \langle x+y, x-y \rangle$; $A = \mathbb{R} \times \{0\}$; $B =$ oś OX.

19. Pokazać, że dla dowolnej bijekcji $f : X \to Y$ oraz zbioru $B \subseteq Y$ obraz zbioru B względem funkcji f^{-1} jest równy przeciwobrazowi zbioru B względem funkcji f.

20. Udowodnić pozostałe podpunkty Twierdzenia 4.1.

21. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takich, że

    (a) $f[A] \cap f[B] \not\subseteq f[A \cap B]$;
    (b) $f[A \setminus B] \not\subseteq f[A] \setminus f[B]$.

    Spróbować znaleźć przykłady innych funkcji (określonych na innych zbiorach, np. skończonych), mających powyższe własności.

22. Udowodnić pozostałe podpunkty Twierdzenia 4.2.

23. Niech $f : X \to Y$. Udowodnić, że

    (a) jeśli dla dowolnych $A, B \subseteq X$ mamy $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$, to funkcja jest różnowartościowa;
    (b) jeśli dla dowolnych $A, B \subseteq X$ mamy $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$, to funkcja jest różnowartościowa.

24. Udowodnić pozostałe podpunkty Twierdzenia 4.3.

25. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takich, że

    (a) $f^{-1}[f[A]] \not\subseteq A$;
    (b) $B \not\subseteq f[f^{-1}[B]]$.

Spróbować znaleźć przykłady innych funkcji (określonych na innych zbiorach, np. skończonych), mających powyższe własności.

26. Niech $f : X \to Y$. Udowodnić, że

    (a) jeśli dla dowolnego $A \subseteq X$ mamy $f^{-1}[f[A]] = A$, to funkcja jest różnowartościowa.

    (b) jeśli dla dowolnego $B \subseteq Y$ mamy $f[f^{-1}[B]] = B$, to funkcja jest „na".

27. Udowodnić Twierdzenie 4.5.

28. Niech $f : X \to Y$. Niech $A, A_1, A_2 \subseteq X$ i $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Sprawdzić, czy

    (a) $f[A_1 \triangle A_2] = f[A_1] \triangle f[A_2]$,

    (b) $f^{-1}[B_1 \triangle B_2] = f^{-1}[B_1] \triangle f^{-1}[B_2]$,

    (c) $f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B$.

29. Niech $f : X \to Y$ oraz $A \subseteq X,\ B \subseteq Y$. Udowodnić, że

$$A \cap f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[f[A] \cap B]$$

oraz podać przykład na to, że w powyższym wzorze może nie być równości.

30. Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ oraz $A \subseteq X$ i $B \subseteq Z$. Udowodnić, że

    (a) $(g \circ f)[A] = g[f[A]]$,

    (b) $(g \circ f)^{-1}[B] = f^{-1}[g^{-1}[B]]$.

31. Niech $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$. Udowodnić, że jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa i f jest „na", to g jest różnowartościowa.

32. Niech $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$. Udowodnić, że jeśli $g \circ f$ jest „na" i g jest różnowartościowa, to f jest „na".

33. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(x) = x^2 + x$.

    (a) Zdefiniować funkcję $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tak, by funkcja $f \circ g$ była różnowartościowa.

    (b) Czy istnieje funkcja $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, by funkcja $f \circ h$ była „na"?

34. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(n, k) = n^2 + k^2$.

    (a) Podać przykład nieskończonego zbioru $C \subseteq \mathbb{N}^2$ takiego, że funkcja $f \restriction C$ jest różnowartościowa.

    (b) Podać przykład zbioru $D \subseteq \mathbb{N}$ oraz funkcji $g : \mathbb{N} \to D$ takich, że funkcja $g \circ f$ jest „na”.

35. Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$. Pokazać, że jeśli $g \circ f = id_X$, to funkcja f jest różnowartościowa, a funkcja g jest „na”.

Rozdział 5

Relacje

W życiu codziennym często spotykamy się z pojęciem relacji rozumianym jako zależność pomiędzy pewnymi obiektami. Innymi słowy, mówiąc, że dwa obiekty są ze sobą w relacji mamy na myśli, że istnieje pomiędzy nimi jakiś związek. Na ogół są to obiekty tego samego typu. Np. w zbiorze wszystkich ludzi możemy rozważać zależność bycia bratem (tzn. fakt, że Iksiński pozostaje w relacji „być bratem” z Igrekowskim oznacza, że Iksiński jest po prostu bratem Igrekowskiego) albo zależność bycia tej samej płci (tzn. fakt, że Iksiński pozostaje w relacji „być tej samej płci” z Igrekowskim oznacza, że obaj są mężczyznami albo obaj są kobietami).

Nie inaczej jest w matematyce. Różnica polega tylko na tym, że w tym wypadku pojęcie relacji można i trzeba sprecyzować, tak jak to zrobiliśmy z pojęciem funkcji. Pomysł też jest podobny – wykorzystamy spostrzeżenie, że relacja to coś, co łączy obiekty w pary[1].

Definicja *Dane są dwa zbiory X i Y. **Relacją (dwuargumentową)** pomiędzy elementami zbioru X a elementami zbioru Y nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.*

Zatem R jest relacją pomiędzy elementami zbioru X a elementami zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy $R \subseteq X \times Y$. Mówimy, że $x \in X$ *jest w relacji* z $y \in Y$, gdy $\langle x, y\rangle \in R$. Fakt ten możemy także zapisywać inaczej: xRy.

Nic nie stoi na przeszkodzie, by rozpatrywać relacje o większej ilości argumentów niż dwa (definiując je jako podzbiory iloczynu kartezjańskiego większej ilości zbiorów). Nie będziemy się tym jednak zajmować. W związku z tym od tego momentu termin „relacja” będzie *zawsze* oznaczał relację dwuargumentową.

[1] Podobnie, jak w wypadku funkcji, definicję relacji można wysłowić na dwa sposoby, my jednak ograniczymy się do jednego z nich.

W dalszym ciągu tego wykładu będziemy się na ogół zajmowali relacjami pomiędzy elementami tego samego zbioru.

Definicja *Dany jest zbiór X. Jeśli R jest relacją pomiędzy elementami zbioru X a elementami zbioru X (czyli $R \subseteq X \times X$), to mówimy, że R jest **relacją na zbiorze** X (można też mówić o relacji w zbiorze X).*

Zauważmy, że formalnie rzecz biorąc każda funkcja $f : X \to Y$ jest relacją pomiędzy elementami zbioru X a elementami zbioru Y. A oto inne przykłady relacji.

Przykłady

1. Niech L oznacza zbiór ludzi. Relację $R \subseteq L \times L$ określamy warunkiem $xRy \Leftrightarrow$„x jest bratem y".

2. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Wtedy $R = \emptyset$ jest relacją na zbiorze X. Nazywa się ją relacją pustą.

3. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Na $\mathcal{P}(X)$ możemy określić relację R wzorem $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$.

4. Relacja mniejszości $<$ jest relacją na zbiorze $\mathbb{R}$. Formalnie zatem mamy $< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a dokładniej $< = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$. Zgodnie zaś z przyjętą przed chwilą konwencją $x < y$ jest inną formą zapisu $\langle x, y\rangle \in <$. Nie oznacza to oczywiście, że należy porzucić dotychczasowe myślenie o tym, czym jest nierówność między liczbami rzeczywistymi. Wręcz przeciwnie, nikt nie używa tego symbolu w opisany przed chwilą sposób. Pokazuje on tylko, że nasza definicja obejmuje różne znane wcześniej obiekty matematyczne.

Ostatni przykład pokazuje nam też, że możemy mówić o wykresie relacji. Mianowicie wykresem relacji $R \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór wszystkich par będących w relacji R. Wtedy jak łatwo zauważyć, podobnie jak w wypadku funkcji, nasza definicja utożsamia relację z jej wykresem.

5.1 Własności relacji

Podobnie, jak w przypadku funkcji, relacje można składać, odwracać i obcinać.

Definicja *Jeśli $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$ są relacjami, to ich złożeniem nazywamy relację $S \circ R \subseteq X \times Z$ zadaną następująco:*

$$S \circ R = \{\langle x, z\rangle \in X \times Z : (\exists y \in Y)(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S)\}.$$

Definicja *Jeśli $R \subseteq X \times Y$ jest relacją, to relacją do niej odwrotną nazywamy relację $R^{-1} \subseteq Y \times X$ zadaną następująco:*

$$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \in Y \times X : \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Zauważmy istotną różnicę pomiędzy relacjami a funkcjami. Otóż odwrócić można tylko niektóre funkcje, ale wszystkie relacje.

Przykład Niech L będzie zbiorem ludzi, a R relacją na L zadaną warunkiem $xRy \Leftrightarrow$„x jest rodzicem y". Wtedy $R\circ R$ jest relacją na L zadaną warunkiem $x\, R\circ R\, y \Leftrightarrow$„$x$ jest babcią lub dziadkiem y", zaś R^{-1} jest relacją na L zadaną warunkiem $x\, R^{-1}\, y \Leftrightarrow$„$x$ jest dzieckiem y".

Definicja *Jeśli R jest relacją na zbiorze X oraz $Y \subseteq X$ to relację $R \restriction Y$ zadaną warunkiem*

$$R \restriction Y = R \cap Y \times Y$$

*nazywamy **obcięciem** (lub **ograniczeniem**) relacji R do zbioru Y.*

Teraz podamy listę różnych własności relacji.

Definicja *Niech R będzie relacją na niepustym zbiorze X. Mówimy, że*

1. *R jest* **zwrotna** $\Leftrightarrow (\forall x \in X)\, xRx$.
2. *R jest* **przeciwzwrotna** $\Leftrightarrow (\forall x \in X)\, \neg xRx$.
3. *R jest* **przechodnia** $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in X)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.
4. *R jest* **symetryczna** $\Leftrightarrow (\forall x, y, \in X)(xRy \Rightarrow yRx)$.
5. *R jest* **słabo antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall x, y, \in X)(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$.
6. *R jest* **silnie antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall x, y, \in X)(xRy \Rightarrow \neg yRx)$.
7. *R jest* **spójna** $\Leftrightarrow (\forall x, y, \in X)(xRy \vee yRx)$.

Zauważmy, że dla relacji niepustych zwrotność i przeciwzwrotność wykluczają się, podobnie jak symetria i silna antysymetria (ale są relacje, które nie są ani zwrotne, ani przeciwzwrotne, podobnie jak są relacje, które nie są ani symetryczne, ani silnie antysymetryczne). Ponadto silna antysymetria pociąga przeciwzwrotność oraz słabą antysymetrię. Jedyną zwrotną, symetryczną i słabo antysymetryczną niepustą relacją na zbiorze X jest relacja równości.

Przykłady

1. Relacja R na zbiorze ludzi L zadana warunkiem $xRy \Leftrightarrow$„x jest rodzicem y" jest silnie antysymetryczna, bo nie można być rodzicem swojego rodzica (zatem jest przeciwzwrotna, słabo antysymetryczna i nie jest symetryczna ani zwrotna), nie jest też przechodnia, gdyż rodzice naszych rodziców nie są naszymi rodzicami, ani spójna, bo zdarzają się pary ludzi niespokrewnionych ze sobą.

2. Relacja R na zbiorze ludzi L zadana warunkiem $xRy \Leftrightarrow$„x jest tej samej płci co y" jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

3. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Relacja inkluzji na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ jest zwrotna, słabo antysymetryczna i przechodnia, ale nie jest spójna.

4. Relacja $\leq$ na zbiorze liczb rzeczywistych jest zwrotna, słabo antysymetryczna i przechodnia oraz spójna.

W powyższych przykładach pojawiły się dwie najważniejsze z naszego punktu widzenia typy relacji: relacja równoważności i relacja porządku, którymi zajmiemy się w dalszej części tego rozdziału.

5.2 Relacje równoważności

W podrozdziale tym opiszemy pewien proces (zwany procesem *abstrakcji*), które polega na wyznaczeniu istotnych i odrzuceniu nieistotnych cech rozpatrywanej kolekcji obiektów. Na przykład, gdy zajmujemy się barwą obiektów, pomijamy ich kształty i identyfikujemy dwa obiekty, gdy mają ten sam kolor. W ten sposób zajmujemy się tylko barwami i traktujemy je jako samodzielne obiekty. W arytmetyce utożsamiamy ze sobą ułamki $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$ – są to różne obiekty, ale mają tą samą wartość. W geometrii, podobieństwo trójkątów służy nam do wyróżnienia klas trójkątów prostokątnych, równobocznych czy równoramiennych. Na egzaminie, korzystając z abstrakcji, klasyfikujemy studentów względem ocen jakie otrzymali – wykładowcy nie interesuje wtedy, czy student jest chudym okularnikiem czy piękną dziewczyną.

Zasada abstrakcji, opierająca się na pojęciu *równoważności* jest kluczowa w matematyce (i dlatego bez jej zrozumienia można mieć później kłopoty. . .).

Potocznie myślimy, że dwa obiekty są równoważne, jeśli są z jakiegoś punktu widzenia *nierozróżnialne*. Tę intuicję oddaje następująca definicja.

Definicja *Relację R na niepustym zbiorze X nazywamy* ***relacją równoważności****, jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

Warunki te dobrze zgadzają się z naszymi oczekiwaniami: każdy obiekt powinien być nieodróżnialny od siebie samego, jeśli jeden obiekt nie różni się od drugiego, to drugi nie powinien różnić się od pierwszego, wreszcie jeśli pierwszy obiekt jest w pewnym sensie taki sam jak drugi, a drugi taki sam jak trzeci, to pierwszy i trzeci też powinny być takie same.

Poniżej podamy przykłady relacji równoważności. Sprawdzenie, że spełniają one definicję zostawiamy jako ćwiczenie.

Przykłady

1. Relacja równości $=$ na dowolnym niepustym zbiorze X.

2. Relacja R_1 na zbiorze ludzi L zadana warunkiem

$$x\,R_1\,y \Leftrightarrow \text{„}x \text{ jest tej samej płci co } y\text{”}.$$

3. Relacja R_2 na zbiorze $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ zadana warunkiem

$$A\,R_2\,B \Leftrightarrow \text{„}A \text{ ma tyle samo elementów co } B\text{”}.$$

4. Relacja R_3 na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ zadana wzorem

$$n\,R_3\,k \Leftrightarrow 3|(n-k)$$

(czyli n i k dają tę samą resztę z dzielenia przez 3).

5. Relacja R_4 na niepustym zbiorze X zadana wzorem

$$x\,R_4\,y \Leftrightarrow f(x) = f(y),$$

gdzie $f : X \to X$ jest ustaloną funkcją (jest to relacja bardzo ważna zwłaszcza w algebrze).

Zauważmy, że każda z powyższych relacji równoważności dzieli elementy zbioru, na którym jest określona, na grupy w ten sposób, że elementy w danej grupie są nieodróżnialne (ze względu na dana relację). I tak w przykładzie drugim zbiór wszystkich ludzi jest rozpada się na dwie grupy: kobiet i mężczyzn. W przykładzie trzecim każdej liczbie k pomiędzy 0 i n odpowiada grupa zbiorów k-elementowych, a w przykładzie czwartym mamy trzy grupy liczb całkowitych: tych które dają w dzieleniu przez 3 resztę odpowiednio 0,1 lub 2. W przykładzie piątym w jednej grupie znajdują się elementy „zlepiane" przez funkcję f.

Aby sprecyzować powyższe spostrzeżenie wprowadzimy najpierw pojęcie *podziału* zbioru.

Definicja *Niech X będzie zbiorem niepustym. Rodzinę $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ podzbiorów zbioru X nazywamy* ***podziałem*** *zbioru X jeśli spełnione są trzy warunki:*

1. $(\forall A \in \mathcal{S})\, A \neq \emptyset$,
2. $(\forall A, B \in \mathcal{S})(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset)$,
3. $\bigcup \mathcal{S} = X$, *(czyli $(\forall x \in X)(\exists A \in \mathcal{S})\, x \in A$).*

Innymi słowy, podział zbioru X (używa się także pojęć: rozbicie, partycja) to rozłączna rodzina jego niepustych podzbiorów, które w sumie dają cały zbiór X. Intuicyjnie zaś podział to „pokrojenie" zbioru X na rozłączne, niepuste „kawałki".

Przyjrzyjmy się teraz kilku przykładom podziałów (sprawdzenie, że są to podziały ponownie pozostawiamy Czytelnikowi).

Przykłady

1. X – dowolnym zbiór niepusty, $\mathcal{S} = \{\{x\} : x \in X\}$.
2. L – zbiór ludzi, $\mathcal{S}_1 = \{K, M\}$, gdzie K – zbiór kobiet, M – zbiór mężczyzn.
3. Zbiór $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$, $\mathcal{S}_2 = \{A_k : 0 \leq k \leq n\}$, gdzie
$$A_k = \{Y \in \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\}) : Y \text{ ma } k \text{ elementów}\}.$$
4. Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_3 = \{A_0, A_1, A_2\}$, gdzie
$$A_k = \{n \in \mathbb{Z} : (\exists m \in \mathbb{Z})\, n = 3m + k\} \text{ dla } k \in \{0, 1, 2\}.$$
5. X – dowolnym zbiór niepusty, $\mathcal{S}_4 = \{A_a : a \in X\} \setminus \{\emptyset\}$, gdzie
$$A_a = \{x \in X : f(x) = a\} = f^{-1}[a],$$
a $f : X \to X$ jest ustaloną funkcją.

Oczywiście, zbieżność przykładów relacji równoważności i powyższych przykładów podziałów nie jest przypadkowa – dobieraliśmy podziały w ten sposób, by w jednym „kawałku" podziału były dokładnie te elementy, które są nieodróżnialne względem odpowiedniej relacji równoważności. Okazuje się, że ta wzajemna odpowiedniość pomiędzy relacjami równoważności a podziałami ma charakter ogólny. Co więcej, jest ona kanoniczna (czyli naturalna, narzucająca się). By ją precyzyjnie opisać potrzebujemy jeszcze jednej definicji.

Definicja *Niech R będzie relacją równoważności na niepustym zbiorze X.* ***Klasą abstrakcji*** *elementu $x \in X$ (względem relacji R) nazywamy zbiór*

$$[x]_R = \{y \in X : yRx\}.$$

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji R, czyli zbiór

$$^{X}/_{R} = \{[x]_R : x \in X\}$$

nazywamy ***zbiorem ilorazowym*** *relacji R.*

Zatem klasa abstrakcji (używa się też pojęcia *warstwa*) elementu x to zbiór wszystkich elementów równoważnych x. Jeśli pomyślimy o klasie abstrakcji relacji R jako o podzbiorze zbioru X, to jest to zbiór elementów nieodróżnialnych względem relacji R, a każdy jej element nazywamy *reprezentantem* tej klasy abstrakcji (zatem x jest naturalnym – ale być może nie jedynym – reprezentantem klasy abstrakcji $[x]_R$).

Odpowiedniość pomiędzy relacjami równoważności w przykładach na stronie 89 a podziałami w przykładach na stronie 90 można teraz sformalizować.

Przykłady Przy oznaczeniach z ww. przykładów mamy

1. $^{X}/_{=} = \mathcal{S}$.
2. $^{L}/_{R_1} = \mathcal{S}_1$.
3. $^{\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})}/_{R_2} = \mathcal{S}_2$.
4. $^{\mathbb{Z}}/_{R_3} = \mathcal{S}_3$.
5. $^{X}/_{R_4} = \mathcal{S}_4$.

Są to szczególne przypadki ogólnej zależności, którą opisują poniższe twierdzenia. Przed ich sformułowaniem sprawdzimy jeszcze pewną intuicyjnie oczywistą zależność.

Lemat 5.1 *Niech R będzie relacją równoważności na niepustym zbiorze X i niech $x, y \in X$. Wtedy*

$$xRy \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$$

Dowód. Niech xRy. Jeśli $z \in [x]_R$ to z definicji mamy zRx. Korzystając z założenia i przechodniości relacji R dostajemy zRy. Zatem $z \in [y]_R$, czyli $[x]_R \subseteq [y]_R$. Drugie zawieranie pokazujemy analogicznie, korzystając dodatkowo z symetrii relacji R.

Załóżmy teraz, że $[x]_R = [y]_R$. Ponieważ R jest zwrotna, więc $x \in [x]_R$. Zatem $x \in [y]_R$, czyli xRy, co kończy dowód. □

Twierdzenie 5.2 *Jeśli R jest relacją równoważności na niepustym zbiorze X, to zbiór ilorazowy ${}^{X}/_{R}$ jest podziałem zbioru X. Ponadto jeśli $\mathcal{S}$ jest podziałem zbioru X, to relacja $R_\mathcal{S}$ na X określona warunkiem*

$$x\, R_\mathcal{S}\, y \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{S})(x \in A \wedge y \in A)$$

jest relacją równoważności.

Dowód. W celu udowodnienia pierwszej części twierdzenia musimy sprawdzić, że zbiór ilorazowy spełnia warunki definiujące podział, czyli

1. $(\forall x \in X)[x]_R \neq \emptyset$,
2. $(\forall x, y \in X)([x]_R \neq [y]_R \Rightarrow [x]_R \cap [x]_R = \emptyset)$,
3. $(\forall x \in X)(\exists y \in X)x \in [y]_R$.

Warunki 1 i 3 są spełnione, bo ze zwrotności relacji R mamy $x \in [x]_R$. Ponadto jeśli $[x]_R \neq [y]_R$ to z Lematu 5.1 dostajemy, że $\neg xRy$. Gdyby $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, to istniałoby $z \in [x]_R \cap [y]_R$. Ale to oznacza, że zRx i zRy. Korzystając z symetrii i przechodniości relacji R dostajemy xRy, co jest niemożliwe. Musi zatem być $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$, czyli warunek 2 też jest spełniony.

Sprawdzenie drugiej części twierdzenia, czyli pokazanie, że relacja $R_\mathcal{S}$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia pozostawiamy jako proste ćwiczenie (a raczej spostrzeżenie). □

Powyższe twierdzenie pokazuje nam zatem, jak mając relację równoważności na zbiorze X otrzymać jego podział i *vice versa*. Następne twierdzenie pokazuje, że te operacje są odwrotne względem siebie.

Twierdzenie 5.3 *Jeśli R jest relacją równoważności na niepustym zbiorze X, to*

$$R_{{}^{X}/_{R}} = R.$$

Jeśli $\mathcal{S}$ jest podziałem niepustego zbioru X, to

$${}^{X}/_{R_\mathcal{S}} = \mathcal{S}.$$

Dowód. Zgodnie z definicją sformułowaną w Twierdzeniu 5.2 mamy

$$x\, R_{{}^X/_R}\, y \Leftrightarrow (\exists A \in {}^X/_R)(x \in A \wedge y \in A).$$

Oznacza to, że x i y są w jednej klasie abstrakcji relacji R, co jest równoważne temu, że xRy, co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Z kolei, zgodnie z tą samą definicją, $A \subseteq X$ jest klasą abstrakcji relacji $R_{\mathcal{S}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest elementem podziału $\mathcal{S}$ (bo definicja mówi, że być równoważnym względem relacji $R_{\mathcal{S}}$ oznacza należeć do tego samego elementu podziału $\mathcal{S}$), co należało uzasadnić. □

Wniosek 5.4 *Funkcja F ze zbioru wszystkich relacji równoważności na niepustym zbiorze X w zbiór wszystkich podziałów zbioru X dana wzorem*

$$F(R) = {}^X/_R$$

jest bijekcją.

Dowód. Natychmiastowy z Twierdzenia 5.3 oraz ostatniego zadania z Rozdziału 4. □

Powyższy wniosek pokazuje nam, że relacje równoważności i podziały to dwa sposoby mówienia o tej samej rzeczywistości matematycznej, których możemy używać zamiennie.

Typowym zastosowaniem zasady abstrakcji jest konstrukcja liczb całkowitych (z liczb naturalnych), liczb wymiernych (z liczb całkowitych) i liczb rzeczywistych (z liczb wymiernych). Są to bardzo pouczające rozumowania, wykraczające, niestety, poza zakres tego skryptu.

5.3 Relacje porządku

Drugą bardzo ważną klasą relacji, którą będziemy rozważać, są relacje porządkujące.

Pojęcie uporządkowania w odniesieniu do zbiorów liczbowych (np. $\mathbb{N}$ lub $\mathbb{R}$) jest bardzo naturalne i dobrze znane. Od dzieciństwa fakt, że dwa złote to mniej niż dziesięć złotych jest istotny w naszym życiu. Stąd bierze się intuicja zbioru uporządkowanego jako zbioru, w którym każde dwa elementy da porównać (czyli mając dwa różne elementy tego zbioru da się stwierdzić, który jest „mniejszy”, a który większy”).

Okazuje się, że w matematyce słowo „porządek” ma szersze znaczenie – jeśli zbiór jest uporządkowany, to znaczy, że *pewne* jego elementy (ale być może nie wszystkie) dają się ze sobą porównać. Dlatego też, by być bardziej precyzyjnym, mówimy o *częściowym porządku* i formalizujemy to pojęcie jako specjalny rodzaj relacji.

Definicja *Relację R na zbiorze X nazywamy* ***częściowym porządkiem*** *zbioru X jeśli jest zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna.*

Jeśli R jest częściowym porządkiem zbioru X, to parę $\langle X, R\rangle$ nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym.* Mówimy wtedy też, że relacja R *częściowo porządkuje* zbiór X.

Przykład Rozważmy relację R na zbiorze $\mathbb{N}^+$ zadaną warunkiem

$$nRm \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\, m = kn \Leftrightarrow n|m,$$

czyli po prostu relację podzielności[2]. Jest to relacja zwrotna, bo zawsze $n|n$. Jest też przechodnia, bo jeśli nRm i mRp, to znaczy, że $m = k_1n$ i $p = k_2m$ dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Ale wtedy $p = k_1k_2n$ i liczba k_1k_2 też jest całkowita, zatem nRp. Jest wreszcie słabo antysymetryczna, bo jeśli $m = k_1n$ i $n = k_2m$ dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, to mamy $n = k_1k_2n$, czyli $k_1k_2 = 1$. Ale jeśli iloczyn dwóch liczb całkowitych wynosi 1, to znaczy, że albo $k_1 = k_2 = 1$, albo $k_1 = k_2 = -1$. Ta druga możliwość jest jednak wykluczona, bo znaczyłoby to, że $n = -m$, co jest niemożliwe, bo obie te liczby sa dodatnie. Zatem musi być $n = m$, co kończy dowód.

Zauważmy, że jeśli rozpatrzymy tak samo zdefiniowaną relację na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, to nie będzie ona częściowym porządkiem, gdyż nie będzie słabo antysymetryczna. Istotnie, mamy np. $1|-1$ i $-1|1$, ale $1 \neq -1$.

Przykładem częściowego porządku jest też „zwykła" nierówność $\leq$ na zbiorach liczbowych $\mathbb{N}$ czy $\mathbb{R}$. Zauważmy, że ze względu na warunek zwrotności w powyższej definicji relacjami częściowego porządku są właśnie nierówności *nieostre*. Częściowym porządkiem jest również wspomniana już wcześniej relacja inkluzji na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru X.

Relacje częściowego porządku często oznacza się symbolem $\leq$ lub symbolami podobnymi (np. $\preceq$, $\leq_X$ czy $\trianglelefteq$). Zatem $\leq$ może mieć inne znaczenie niż to, do którego się przyzwyczailiśmy. By nie prowadzić do nieporozumień, gdy będziemy rozważać zbiory liczbowe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (i ich podzbiory), to symbol $\leq$ będzie miał zawsze swoje standardowe znaczenie. W innych jednak sytuacjach jego znaczenie będzie zależało od przyjętej definicji.

[2] W tym wypadku moglibyśmy równoważnie zdefiniować $nRm \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\, m = kn$. Będziemy się jednak trzymać jednej definicji symbolu $|$ ustalonej w Rozdziale 0

Jeśli $\langle X, \leq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, $x, y \in X$ i $x \leq y$, to mówimy, że *x jest mniejszy (bądź) równy y* lub że *y jest większy (bądź) równy x*. Oczywiście, *w sensie porządku* $\leq$. Jeśli na zbiorze $\mathbb{N}$ zdefiniujemy porządek $\preceq$ warunkiem $x \preceq y \Leftrightarrow y \leq x$, to w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, \preceq \rangle$ mamy, że 2 jest mniejsze równe 1.

W naturalny sposób wprowadzamy *ostrą* nierówność. Mówimy mianowicie, że *x jest mniejszy* od y i piszemy $x < y$, gdy $x \leq y$ i $x \neq y$.[3]

Jeśli $x \leq y$ lub $y \leq x$ to mówimy, że x i y są *porównywalne*. Elementy, które nie są porównywalne nazywamy *nieporównywalnymi*. Jak już wspomnieliśmy, każde dwie liczby rzeczywiste są porównywalne w sensie zwykłego porządku. W ogólnej sytuacji nie jest to jednak regułą.

Przykłady

1. Niech zbiór X ma przynajmniej dwa elementy i rozważmy relację inkluzji na zbiorze $\mathcal{P}(X)$. Niech $x, y \in X$, $x \neq y$. Wtedy oczywiście $\{x\} \not\subseteq \{y\}$ i $\{y\} \not\subseteq \{x\}$. Czyli elementy $\{x\}$ i $\{y\}$ są nieporównywalne.

2. Rozważmy relację podzielności na zbiorze $\mathbb{N}^+$. W tym wypadku można wskazać dużo par elementów nieporównywalnych, np. 3 i 8. Istotnie, ani 3 nie jest dzielnikiem 8, ani na odwrót.

Jak widzimy, liczby rzeczywiste ze zwykłym porządkiem są przykładem specjalnego rodzaju porządków.

Definicja *Niech relacja $\leq$ będzie częściowym porządkiem zbioru X. Jeśli dowolne dwa elementy X są porównywalne względem relacji $\leq$, czyli jeśli $\leq$ jest spójna, to mówimy, że $\leq$ jest* ***liniowym porządkiem*** *zbioru X.*

Jeśli $\leq$ jest liniowym porządkiem zbioru X, to parę $\langle X, \leq \rangle$ nazywamy *zbiorem liniowo uporządkowanym* i mówimy, że relacja $\leq$ *liniowo porządkuje* zbiór X.

Dowód poniższego twierdzenia pozostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 5.5 *Jeśli $\leq$ częściowo (odpowiednio: liniowo) porządkuje zbiór X i $Y \subseteq X$ to relacja ograniczona $\leq\restriction Y$ częściowo (odpowiednio: liniowo) porządkuje zbiór Y.* $\square$

[3] Można sprawdzić, że zdefiniowana w ten sposób relacja $<$ jest przechodnia i silnie antysymetryczna. Prawdziwa jest również zależność w drugą stronę: jeśli $<$ jest przechodnią i silnie antysymetryczną relacją na X, to relacja $\leq$ zadana warunkiem $x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$ jest częściowym porządkiem na X. Daje to nam alternatywną metodę wprowadzania porządku jako ostrej nierówności.

Choć częściowe porządki często nie są liniowymi porządkami, to mogą fragmentami je przypominać.

Definicja *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Mówimy, że podzbiór $L \subseteq X$ jest* ***łańcuchem*** *(w X), jeśli relacja $\leq \restriction L$ liniowo porządkuje L, czyli gdy*

$$(\forall x, y \in L)(x \leq y \vee y \leq x).$$

Oczywiście, w częściowym porządku może być także wiele elementów, które nic o sobie nie wiedzą.

Definicja *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Mówimy, że podzbiór $A \subseteq X$ jest* ***antyłańcuchem*** *(w X), jeśli składa się z elementów parami nieporównywalnych, czyli gdy*

$$(\forall x, y \in A)(\neg x \leq y \wedge \neg y \leq x).$$

Zauważmy, że nie każdy podzbiór zbioru częściowo uporządkowanego musi być łańcuchem albo antyłańcuchem – na ogół jest dużo podzbiorów, które nie mają żadnej z tych własności.

Przykłady

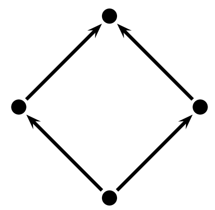
1. Zbiory $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ są liniowo uporządkowane.

2. Wiemy, że zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nie jest liniowo uporządkowany. Przykładem łańcucha w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ może być rodzina zbiorów $\mathcal{L} = \{\{0, 1, \ldots, n\} : n \in \mathbb{N}\}$, zaś przykładem antyłańcucha rodzina $\mathcal{A} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Natomiast rodzina $\mathcal{B} = \{B \subseteq \mathbb{N} : 0 \in B\}$ nie jest ani łańcuchem, ani antyłańcuchem. Istotnie, rozważmy następujące elementy tej rodziny: $B_1 = \{0, 1\}$, $B_2 = \{0, 2\}$, $B_3 = \{0, 1, 2\}$. Wtedy $B_1, B_2 \subseteq B_3$ (zatem $\mathcal{B}$ nie jest antyłańcuchem), ale B_1 i B_2 są nieporównywalne (czyli $\mathcal{B}$ nie jest łańcuchem).

3. Wiemy też, że relacja podzielności nie porządkuje liniowo zbioru $\mathbb{N}^+$. W tym wypadku łańcuchem jest np. zbiór $L = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$, a antyłańcuchem zbiór liczb pierwszych.

Omówimy teraz graficzną formę przedstawiania częściowych porządków na zbiorach skończonych (i nie tylko), która będzie nam bardzo przydatna w dalszej części tego podrozdziału.

Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq \rangle$. Odpowiada mu następujący rysunek.

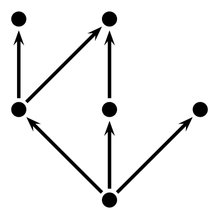


Na rysunku tym kropki odpowiadają elementom zbioru $\mathcal{P}(\{0,1\})$, strzałka zaś od kropki 1 do kropki 2 mówi, że element odpowiadający kropce 1 jest mniejszy od elementu odpowiadającego kropce 2 (elementy większe leżą wyżej od elementów mniejszych). Pomijamy strzałki wynikające z przechodniości relacji porządku (w tym wypadku pomijamy strzałkę od kropki dolnej do kropki górnej), gdyż ich istnienie można wywnioskować z istnienia narysowanych strzałek.

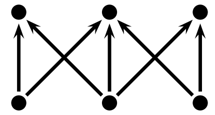
Poprawnie narysowany rysunek niesie pełną informację o pewnym typie zbioru częściowo uporządkowanego. Gdybyśmy chcieli mieć pełną informację o konkretnym zbiorze częściowo uporządkowanym, to w miejsce kropek powinniśmy wpisać konkretne elementy. W obu wypadkach rysunek (który nazywamy *diagramem Hassego*) jest uznawany za w pełni poprawny przykład.

Przykłady

1. Rozważmy zbiór $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ uporządkowany przez relację podzielności ograniczoną do zbioru X. Odpowiedni diagram to



2. Rysunek



opisuje zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}, \subseteq \rangle$, gdzie X jest dowolnym zbiorem trójelementowym.

5.3.1 Elementy wyróżnione

Widzieliśmy już, że częściowe porządki mogą się różnić pod względem liniowości. Często różnią się też elementami wyróżnionymi.

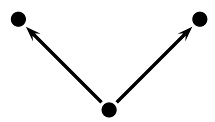
Definicja *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $a \in X$. Mówimy, że*

- *a jest elementem* $\leq$***-największym*** *jeśli* $(\forall x \in X)\, x \leq a$;
- *a jest elementem* $\leq$***-najmniejszym*** *jeśli* $(\forall x \in X)\, a \leq x$;
- *a jest elementem* $\leq$***-maksymalnym*** *jeśli* $\neg(\exists x \in X)\, a < x$;
- *a jest elementem* $\leq$***-minimalnym*** *jeśli* $\neg(\exists x \in X)\, x < a$.

Jeśli jest jasne, jaki porządek na zbiorze X rozważamy, to zamiast o elemencie $\leq$-największym mówimy po prostu o elemencie największym (i analogicznie w pozostałych przypadkach).

Różnica pomiędzy elementem największym a elementem maksymalnym nieodmiennie sprawia kłopot studentom [4]. Element największy to ten, który jest większy od wszystkich innych elementów zbioru X, zaś element maksymalny to taki, że w X nie istnieje element od niego większy. Oczywiście, element największy $a \in X$ jest maksymalny: gdyby tak nie było, to istniałby $x \in X$, taki że $a < x$ (czyli $a \leq x$ i $a \neq x$). Ale z definicji elementu największego mamy $x \leq a$ i ze słabej antysymetrii częściowego porządku otrzymujemy $a = x$, co jest niemożliwe.

Okazuje się, że nie zawsze jest na odwrót. Rozpatrzmy bowiem następujący zbiór częściowo uporządkowany.

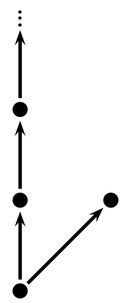


Ma on dwa elementy maksymalne i żadnego elementu największego (ma także element najmniejszy). Stąd wniosek, że nie każdy element maksymalny

[4] Wynika to z faktu, że intuicja porządku na zbiorach liczbowych wyniesiona za szkoły jest ściśle związana z pojęciem liniowości, a dla porządków liniowych element największy i maksymalny to to samo. Od strony formalnej problem ten objawia się w niedostrzeżeniu faktu, że wyrażenia $\neg(a < x)$ i $a \geq x$ *nie są równoważne*. Istotnie,

$$\neg(a < x) \Leftrightarrow (a \geq x \ \vee \ a \text{ i } x \text{ są nieporównywalne}).$$

jest największy. Łatwo też zauważyć, że jeśli istnieje element największy, to jest on jedynym elementem maksymalnym (zatem wskazanie przynajmniej dwóch elementów maksymalnych implikuje nieistnienie elementu największego). Zauważmy jednak, że nie jest prawdą stwierdzenie odwrotne. Mianowicie, z faktu, że w zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje tylko jeden element maksymalny nie wynika, że jest on elementem największym. Może bowiem zajść sytuacja, jak na poniższym rysunku.



Wiemy też, że zbiór częściowo uporządkowany może w ogóle nie mieć elementów maksymalnych (np. zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ ze zwykłym porządkiem). Znalezienie warunku zapewniającego istnienie elementu maksymalnego nie jest proste – przykładem jest Lemat Kuratowskiego-Zorna, którym zajmiemy się w Rozdziale 9.

Oczywiście, zbiory częściowo uporządkowane z powyższych przykładów są nieskończone. Okazuje się, że jeśli ograniczymy się do zbiorów skończonych, to sytuacja istotnie się zmienia.

Twierdzenie 5.6 *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie niepustym skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy w X istnieje element maksymalny.* □

Dowód tego twierdzenia, choć nietrudny, wymaga użycia indukcji matematycznej i dlatego przedstawimy go w Rozdziale 8. Nie da się także znaleźć wśród zbiorów skończonych przykładu analogicznego do tego z powyższego rysunku.

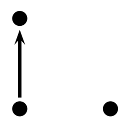
Twierdzenie 5.7 *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeśli $a \in X$ jest jedynym elementem maksymalnym, to a jest elementem największym.*

Dowód. Niech $a \in X$ będzie jedynym elementem maksymalnym. Załóżmy nie wprost, że a nie jest elementem największym, czyli istnieje $b \in X$ taki, że $\neg(b \leq a)$. Rozważmy zbiór $B = \{x \in X : b \leq x\}$. Ponieważ jest on skończony, to z Twierdzenia 5.6 wynika, że jest $c \in B$, który jest elementem maksymalnym w B. Z definicji zbioru B wynika, że c jest też elementem maksymalnym w X. Ale $b \leq c$, więc $a \neq c$, co przeczy jedyności elementu maksymalnego. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Wszystkie powyższe rozumowania w analogiczny sposób przenoszą się na elementy najmniejsze i minimalne.

Przykład Zbiór częściowo uporządkowany rozpatrywany w Przykładzie 1 na stronie 97 ma trzy elementy maksymalne $4, 5$ i 6 (zatem żadnego największego) oraz element najmniejszy 1 (który jest jedynym elementem minimalnym). Zbiór z Przykładu 2 na tej samej stronie ma trzy elementy maksymalne i trzy elementy minimalne.

Element maksymalny może być równocześnie elementem minimalnym. Jako przykład wystarczy wziąć zbiór $\{2, 3, 4\}$ uporządkowany przez relację podzielności, którego diagram Hassego wygląda następująco:



Zauważmy, że element, który jest równocześnie minimalny i maksymalny jest nieporównywalny z każdym innym elementem rozważanego zbioru częściowo uporządkowanego.

Zajmiemy się teraz innym rodzajem elementów wyróżnionych.

Definicja *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $A \subseteq X$ oraz $a \in X$. Mówimy, że*

- *a jest **ograniczeniem górnym** zbioru A jeśli $(\forall x \in A)\, x \leq a$;*
- *a jest **ograniczeniem dolnym** zbioru A jeśli $(\forall x \in A)\, a \leq x$;*
- *a jest **kresem górnym** lub **supremum** zbioru A (piszemy wtedy $a = \sup A$) jeśli a jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A;*
- *a jest **kresem dolnym** lub **infimum** zbioru A (piszemy wtedy $a = \inf A$) jeśli a jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A.*

Dokładniej, kres górny zbioru A jest elementem najmniejszym w zbiorze wszystkich ograniczeń górnych zbioru A (uporządkowanym przez ten sam porządek, co zbiór X)[5], a kres dolny zbioru A jest elementem największym w zbiorze wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A.

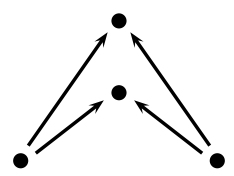
Mówimy, że zbiór A jest *ograniczony z góry (z dołu)*, jeśli istnieje ograniczenie górne (dolne) zbioru A. Jeśli zbiór A jest ograniczony z góry i z dołu, to mówimy, że jest *ograniczony.*

Oczywiście, ograniczenie górne zbioru A nie musi być elementem zbioru A. Jeśli tak jednak jest, to jest ono od razu supremum zbioru A.

Twierdzenie 5.8 *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $A \subseteq X$. Jeśli $a \in X$ jest ograniczeniem górnym zbioru A i $a \in A$, to $a = \sup A$.*

Dowód. Aby pokazać, że $a = \sup A$, trzeba uzasadnić, że a jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz że jeśli b jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $a \leq b$. Pierwszy warunek jest w tym wypadku założony. By pokazać drugi warunek, załóżmy, że b jest ograniczeniem górnym zbioru A. Wtedy z definicji mamy, że $(\forall x \in A)\, x \leq b$. W szczególności, ponieważ z założenia $a \in A$, otrzymujemy $a \leq b$, co należało pokazać. $\square$

Kres górny może nie istnieć i mogą być po temu różne powody. Jeśli rozważymy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, to zbiór liczb parzystych nie ma kresu górnego, dlatego, że nie jest ograniczony z góry. Z kolei jeśli rozpatrzymy zbiór uporządkowany $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, to zbiór $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ jest ograniczony z góry, ale nie ma kresu górnego, gdyż zbiór jego ograniczeń górnych $\{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}$ nie ma elementu najmniejszego (bo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Wreszcie rozpatrzmy zbiór $\{2, 3, 12, 18\}$ uporządkowany przez relację podzielności. Jego diagram Hassego to



Wtedy zbiór $A = \{2, 3\}$ ma dwa ograniczenia górne: 12 i 18. Są one jednak nieporównywalne, zatem nie da się wybrać największego z nich, który byłby kresem górnym zbioru A.

[5]Formalnie możemy zapisać ten warunek następująco:

$$a = \sup A \Leftrightarrow (\forall x \in A)(x \leq a) \wedge (\forall b \in X)((\forall x \in A)(x \leq b) \Rightarrow a \leq b).$$

Mówi on, że a jest po pierwsze ograniczeniem górnym zbioru A, a po drugie, że a jest mniejsze od wszystkich innych ograniczeń górnych zbioru A.

Podobnie jak poprzednio, analogiczne zależności są prawdziwe dla ograniczeń dolnych i kresów dolnych.

Ważną własnością zbioru liczb rzeczywistych uporządkowanego w zwykły sposób jest to, że każdy jego niepusty podzbiór ograniczony z góry ma kres górny, a każdy niepusty podzbiór ograniczony z dołu ma kres dolny. To odróżnia je od zbioru liczb wymiernych, też uporządkowanego w zwykły sposób, który, jak widzieliśmy powyżej, nie ma tej własności. Bardziej formalnie możemy to opisać następująco.

Definicja *Niech $\langle X, \leq\rangle$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym i niech X ma przynajmniej dwa elementy. Mówimy, że porządek $\leq$ jest*

- ***gęsty*** *jeśli* $(\forall x, y \in X)(x < y \Rightarrow (\exists z \in X)(x < z \wedge z < y))$;
- ***ciągły*** *jeśli jest gęsty oraz każdy jego niepusty podzbiór ograniczony z góry ma kres górny i każdy niepusty podzbiór ograniczony z dołu ma kres dolny.*

Zatem zwykły porządek na zbiorze $\mathbb{Q}$ jest gęsty, ale nie jest ciągły, podczas gdy zwykły porządek na zbiorze $\mathbb{R}$ jest ciągły.

Zauważmy, że własność gęstości można równoważnie zdefiniować następująco: porządek liniowy $\leq$ na przynajmniej dwuelementowym zbiorze X jest gęsty jeśli dla każdego $a \in X$ w zbiorze $\{x \in X : x > a\}$ nie ma elementu najmniejszego[6]. Stąd można zauważyć, że następna bardzo ważna własność porządków, zdefiniowana poniżej, stoi w opozycji do gęstości[7].

Definicja *Niech $\langle X, \leq\rangle$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym. Mówimy, że porządek $\leq$ jest* ***dobry****, jeśli w każdym niepustym podzbiorze zbioru X jest element najmniejszy.*

Jeśli $\leq$ jest dobrym porządkiem zbioru X, to parę $\langle X, \leq\rangle$ nazywamy *zbiorem dobrze uporządkowanym* i mówimy, że relacja $\leq$ *dobrze porządkuje* zbiór X. Typowym przykładem zbioru dobrze uporządkowanego jest zbiór liczb naturalnych za zwykłym porządkiem[8]. Zbiory dobrze uporządkowane są ściśle związane z *liczbami porządkowymi* – bardzo ważnymi obiektami

[6]Jeśli $\langle X, \leq\rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i $A \subseteq X$ oraz $a \in X$, to mówimy, że a jest elementem najmniejszym zbioru A jeśli $a \in A$ i $(\forall x \in A)\, a \leq x$.

[7]Jeśli najmniejszy element zbioru $\{x \in X : x > a\}$ (o ile istnieje) nazwiemy ***bezpośrednim następnikiem*** elementu a, to w gęstym porządku żaden element nie ma bezpośredniego następnika, zaś w dobrym porządku każdy element (z wyjątkiem największego, o ile taki istnieje) ma bezpośredni następnik.

[8]Choć formalne uzasadnienie tego faktu jest mocno nietrywialne.

matematycznymi, którymi, niestety, nie będzie nam dane zająć się na tym wykładzie.

Przykład Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym. Rozważmy następujący porządek na zbiorze $X \times X$:

$$\langle x, y \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow x < a \vee (x = a \wedge y \leq b),$$

który nazywamy *porządkiem leksykograficznym* (ponieważ pary są uporządkowane podobnie jak słowa w słowniku). Jest on również liniowym porządkiem, czego sprawdzenie pozostawiamy jako ćwiczenie.

Jeżeli ponadto porządek $\leq$ jest dobry, to porządek $\trianglelefteq$ również jest dobry. Istotnie, ustalmy dowolny niepusty podzbiór $A \subseteq X \times X$. Wtedy zbiór $\{x \in X : (\exists y \in X) \langle x, y \rangle \in A\}$ jest niepustym podzbiorem zbioru X. Oznaczmy przez a jego $\leq$-najmniejszy element. Dalej, zauważmy, że również zbiór $\{y \in X : \langle a, y \rangle \in A\}$ jest niepustym podzbiorem zbioru X. Oznaczmy przez b jego $\leq$-najmniejszy element. Wtedy $\langle a, b \rangle$ jest $\trianglelefteq$-najmniejszym elementem zbioru A, co kończy dowód.

Czasem zdarza się, że dwa zbiory częściowo uporządkowane, choć różne, „wyglądają" tak samo, czyli mają te same własności. Te intuicję precyzuje poniższa definicja.

Definicja *Mówimy, że zbiory częściowo uporządkowane $\langle X, \leq_X \rangle$ i $\langle Y, \leq_Y \rangle$ są* ***porządkowo izomorficzne*** *(piszemy wtedy $\langle X, \leq_X \rangle \approx \langle Y, \leq_Y \rangle$ lub $\langle X, \leq_X \rangle \simeq \langle Y, \leq_Y \rangle$), jeżeli istnieje funkcja $h : X \to Y$, która jest bijekcją oraz spełnia warunek*

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \leq_X x_2 \Leftrightarrow h(x_1) \leq_Y h(x_2)).$$

Funkcję taką nazywamy ***izomorfizmem porządkowym*** *zbiorów $\langle X, \leq_X \rangle$ i $\langle Y, \leq_Y \rangle$.*

Na przykład, zbiory częściowo uporządkowane, które mają takie same diagramy Hassego, są porządkowo izomorficzne.

Poniższe twierdzenie, którego dowód pozostawiamy jako nietrudne ćwiczenie, pokazuje, że izomorfizm porządkowy zachowuje wszystkie rozważane własności częściowych porządków.

Twierdzenie 5.9 *Niech $h : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$ będzie izomorfizmem porządkowym zbiorów częściowo uporządkowanych $\langle X, \leq_X \rangle$ i $\langle Y, \leq_Y \rangle$. Niech $a \in X$ oraz $A \subseteq X$. Wtedy*

- *a jest elementem największym (odpowiednio: najmniejszym, minimalnym, maksymalnym) wtedy i tylko wtedy gdy $h(a)$ jest elementem największym (odpowiednio: najmniejszym, minimalnym, maksymalnym);*

- *a jest ograniczeniem górnym (odpowiednio: ograniczeniem dolnym, kresem górnym, kresem dolnym) zbioru A wtedy i tylko wtedy gdy $h(a)$ jest ograniczeniem górnym (odpowiednio: ograniczeniem dolnym, kresem górnym, kresem dolnym) zbioru $h[A]$;*

- *porządek $\leq_X$ jest liniowy (odpowiednio: gęsty, ciągły, dobry) wtedy i tylko wtedy, gdy porządek $\leq_Y$ jest liniowy (odpowiednio: gęsty, ciągły, dobry).* $\square$

A zatem by pokazać, że dwa zbiory częściowo uporządkowane nie są porządkowo izomorficzne wystarczy wskazać jedną z powyższych własności, która je od siebie różni.

5.4 Zadania

1. Niech R, S i T będą relacjami w zbiorze X. Udowodnić, że

   (a) $R \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow R = R^{-1}$;

   (b) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$;

   (c) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$;

   (d) R jest relacją przechodnią $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$;

   (e) R jest relacją symetryczną $\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$.

2. Pokazać, że

   (a) dla relacji niepustych zwrotność i przeciwzwrotność wykluczają się, podobnie jak symetria i silna antysymetria.

   (b) są relacje, które nie są ani zwrotne, ani przeciwzwrotne, podobnie jak są relacje, które nie są ani symetryczne, ani silnie antysymetryczne.

   (c) silna antysymetria pociąga przeciwzwrotność oraz słabą antysymetrię.

   (d) jedyną zwrotną, symetryczną i słabo antysymetryczną niepustą relacją na zbiorze niepustym jest relacja równości.

3. Podać przykład relacji (najprościej: na zbiorze skończonym), która
   (a) jest zwrotna, symetryczna i nie jest przechodnia;
   (b) jest zwrotna, słabo antysymetryczna i nie jest przechodnia;
   (c) jest symetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna;
   (d) jest słabo antysymetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna.
4. Niech T_1 i T_2 będą relacjami zwrotnymi na zbiorze $\mathbb{N}$. Czy $T_1 \setminus T_2$ jest relacją zwrotną?
5. Niech X będzie dowolnym zbiorem mającym co najmniej dwa elementy. Sprawdzić, że relacja inkluzji na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ jest zwrotna, słabo antysymetryczna i przechodnia, ale nie jest spójna.
6. Sprawdzić, że relacje z Przykładu na stronie 89 są relacjami równoważności.
7. Sprawdzić, że rodziny $\mathcal{S}, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ i $\mathcal{S}_4$ z Przykładu na stronie 90 są podziałami.
8. Pokazać, że relacja $R_\mathcal{S}$ z dowodu Twierdzenia 5.2 jest relacją równoważności.
9. Udowodnić Wniosek 5.4.
10. Dla podanych zbiorów X i relacji R w X sprawdzić, czy R jest relacją równoważności.
    (a) $X = \mathbb{N}; \quad xRy \Leftrightarrow 5|(x-y)$,
    (b) $X = \mathbb{Z}; \quad xRy \Leftrightarrow 2|(x+y)$,
    (c) $X = \mathbb{Z}; \quad xRy \Leftrightarrow 3|(x+y)$,
    (d) $X = \mathbb{R}; \quad xRy \Leftrightarrow x+y=1$,
    (e) $X = \mathbb{R}; \quad xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{N}$,
    (f) $X = \mathbb{R}^2; \quad \langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
    (g) $X = \mathbb{R}^2; \quad \langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 = y_2$,
    (h) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}; \quad ARB \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$,
    (i) $X = \mathbb{N}^2; \quad \langle x, y\rangle R \langle s, t\rangle \Leftrightarrow x+t = y+s$,
    (j) $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < |x| \leq 4\}; \quad xRy \Leftrightarrow xy > 0$.

    Dla tych relacji R, które są relacjami równoważności, opisać zbiór ilorazowy ${}^X/_R$.

11. Dla podanych zbiorów X i ich podziałów $\mathcal{S}$ podać relacje równoważności (w miarę konkretnym wzorem), których zbiory ilorazowe są równe tym podziałom.

    (a) $X = \mathbb{N}$; $\mathcal{S} = \{P, N\}$, gdzie P jest zbiorem liczb parzystych, a N zbiorem liczb nieparzystych,

    (b) $X = \mathbb{R}$; $\mathcal{S} = \{[k, k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$,

    (c) $X = \mathbb{R}^2$; $\mathcal{S}$ jest rodziną prostych postaci $y = x + b$ dla $b \in \mathbb{R}$,

    (d) $X = \mathbb{R}^2$; $\mathcal{S}$ jest rodziną okręgów postaci $x^2 + y^2 = b$ dla $b \geq 0$.

12. Dane są następujące relacje na zbiorze $\mathbb{N}^+$.

    - $xRy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\, x - y = 4k$,
    - $xSy \Leftrightarrow x|y \vee y|x$,
    - $xTy \Leftrightarrow x + 3 \geq y$.

    (a) Sprawdzić, czy są to relacje równoważności. Dla relacji będących relacjami równoważności opisać odpowiadające im zbiory ilorazowe.

    (b) Wyznaczyć następujące zbiory

      i. $\{x \in \mathbb{N}^+ : x\ T^{-1}\ 2\}$,

      ii. $\{x \in \{1, 2, \ldots, 20\} : x\ R \cap S\ 3\}$.

    (c) Sprawdzić, czy prawdą jest, że $2\ R \circ T\ 7$ (czyli czy 2 jest w relacji $R \circ T$ z 7).

13. Sprawdzić, czy dla dowolnych relacji równoważności R i S na zbiorze X relacje $R \cup S$ i $R \cap S$ są relacjami równoważności w X. Jeśli tak, to opisać ich zbiory ilorazowe.

14. Rozważmy relacje R i S na zbiorze $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$ zdefiniowane następująco:

$$xRy \Leftrightarrow 5|(x^2 - y^2), \qquad xSy \Leftrightarrow xy \neq 8.$$

    (a) Uzasadnić, że R jest, a S nie jest relacją równoważności.

    (b) Wyznaczyć $[2]_R$.

    (c) Wyznaczyć ${}^{A}/_{R}$.

    (d) Czy $R \cap S$ jest relacją równoważności?

15. Dla $a, b \in \mathbb{N}$ niech $\min(a, b)$ oznacza mniejszą z liczb a i b (tzn. jeśli $a \leq b$ to $\min(a, b) = a$). Rozpatrzmy relacje równoważności R i S określone na zbiorze $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ w następujący sposób.
$$\langle n, m\rangle R\langle k, l\rangle \Leftrightarrow \min(n, m) = \min(k, l); \qquad \langle n, m\rangle S\langle k, l\rangle \Leftrightarrow n = k.$$
    (a) Uzasadnić, że relacja R^{-1} jest relacją równoważności.
    (b) Uzasadnić, że relacja $R \cup S$ nie jest relacją równoważności.
    (c) Wyznaczyć $[\langle 2, 2\rangle]_R$.
    (d) Wyznaczyć ${}^{\{1,2,3,4\}^2}/_R$.

16. Czy istnieje spójna relacja równoważności na zbiorze $\mathbb{N}$, mająca dwie klasy abstrakcji?

17. Niech R i S będą relacjami równoważności odpowiednio w zbiorach X i Y. Niech
$$\langle x_1, y_1\rangle T\langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 R x_2 \wedge y_1 S y_2.$$
Sprawdzić, że T jest relacją równoważności w zbiorze $X \times Y$ i ustalić, jak wygląda zbiór ilorazowy ${}^{X\times Y}/_T$.

18. Niech T będzie relacją na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (=zbiór ciągów o wyrazach naturalnych) daną wzorem
$$\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle T\langle b_n : n \in \mathbb{N}\rangle \Leftrightarrow a_0 = b_0.$$
Udowodnić, że T jest relacją równoważności. Opisać zbiór ilorazowy ${}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}/_T$.

19. Sprawdzić, że jeśli $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ są podziałami zbioru X, to
$$\mathcal{T} = \{A \cap B : A \in \mathcal{S}_1 \wedge B \in \mathcal{S}_2\}$$
też jest podziałem X. Jeśli R i S są relacjami równoważności w X odpowiadającymi odpowiednio podziałom $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, to jak można opisać relację równoważności T w X odpowiadającą podziałowi $\mathcal{T}$?

20. Definiujemy relację $=^*$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ następująco: $A =^* B \Leftrightarrow A \triangle B$ jest zbiorem skończonym. Udowodnić, że $=^*$ jest relacją równoważności. Co można powiedzieć o klasie abstrakcji $[0]_{=^*}$?

21. Udowodnić Twierdzenie 5.5.

22. Dany jest zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \leq \rangle$ oraz $A, B \subseteq X$. Zapisać symbolicznie poniższe zdania (wolno użyć symboli $X, A, B, \leq$ i $<$).

    (a) W X nie ma elementu minimalnego.

    (b) Istnieje element największy w X.

    (c) Zbiór A jest ograniczony w X.

    (d) Każdy element A jest mniejszy od pewnego elementu B.

    (e) Żaden element B nie ogranicza z dołu zbioru A.

    (f) A jest zbiorem elementów ograniczających zbiór B z dołu.

    (g) B jest zbiorem elementów minimalnych w X.

23. Narysować podane poniżej zbiory częściowo uporządkowane $\langle X, \preceq \rangle$. Określić elementy minimalne i maksymalne (ew. najmniejsze i największe).

    (a) $X = \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset, Y\}$, gdzie $Y = \{1,2,3,4\}$, $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$,

    (b) $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 22\}$, $x \preceq y \Leftrightarrow x | y$,

    (c) $X = \{0,1,2\} \times \{0,1\}$, $\langle x, a \rangle \preceq \langle y, b \rangle \Leftrightarrow x \leq y \wedge a \leq b$.

24. Podać przykłady (mogą być diagramy, choć w przypadkach nieskończonych warto podać też opis wzorem) zbiorów częściowo uporządkowanych $\langle X, \preceq \rangle$ mających poniższe własności. W przypadkach, gdy zbiory te są skończone, postarać się, by relacja $\preceq$ traktowana jako zbiór miała jak najmniej elementów.

    (a) W X są dwa trójelementowe łańcuchy i jeden trójelementowy antyłańcuch.

    (b) X ma trzy elementy oraz w X są dwa elementy minimalne i dwa elementy maksymalne.

    (c) W X są dokładnie trzy elementy minimalne i dokładnie dwa elementy maksymalne oraz każdy element minimalny jest połączony z pewnym elementem maksymalnym czteroelementowym łańcuchem (tzn. jest łańcuch, do którego oba te elementy należą).

    (d) W X jest element najmniejszy, dokładnie dwa elementy maksymalne i w X istnieje czteroelementowy łańcuch oraz trójelementowy antyłańcuch.

(e) X ma pięć elementów oraz w X są dokładnie dwa elementy minimalne, dokładnie dwa elementy maksymalne i trójelementowy łańcuch.

(f) X ma sześć elementów oraz w X jest element największy i dwa rozłączne trójelementowe łańcuchy.

(g) W X jest tylko jeden element minimalny, ale nie ma elementu najmniejszego.

(h) W X jest nieskończony łańcuch i nieskończony antyłańcuch.

(i) W X jest nieskończenie wiele parami rozłącznych nieskończonych łańcuchów, z których każdy ma element najmniejszy.

25. Podać przykład zbioru częściowo uporządkowanego, którego diagram Hassego wygląda jak na rysunku na stronie 99.

26. Udowodnić, że

    (a) w zbiorze liniowo uporządkowanym element jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest największy.

    (b) zbiór elementów maksymalnych zbioru częściowo uporządkowanego jest antyłańcuchem.

27. Sformułować i udowodnić twierdzenia dla elementów minimalnych, elementów najmniejszych, ograniczeń dolnych i kresów dolnych, analogiczne do tych, które zostały sformułowane i udowodnione dla elementów maksymalnych, elementów największych, ograniczeń górnych i kresów górnych.

28. Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy relację częściowego porządku w następujący sposób. Niech $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wtedy

$$f \preceq g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\, f(n) \leq g(n).$$

    (a) Jakie są elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$ (jeśli istnieją – wskazać, jeśli nie istnieją – uzasadnić)?

    (b) Wskazać nieskończony łańcuch w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$.

29. Udowodnić, że porządek leksykograficzny zdefiniowany w Przykładzie na stronie 103 jest liniowy.

30. Udowodnić Twierdzenie 5.9.

31. Niech $\preceq$ będzie relacją zwrotną i przechodnią w zbiorze X (tzw. preporządkiem). Udowodnić, że relacja R zdefiniowana jako

$$xRy \Leftrightarrow x \preceq y \wedge y \preceq x$$

jest relacją równoważności w X oraz że relacja $\preceq^*$ w zbiorze ${}^{X}/_{R}$ określona następująco:

$$[x]_R \preceq^* [y]_R \Leftrightarrow x \preceq y$$

jest (dobrze zdefiniowanym) częściowym porządkiem.

Rozdział 6

Równoliczność

W tym rozdziale zastanowimy się, co to znaczy, że jeden zbiór jest większy od drugiego. Na przykład, który zbiór jest większy: studentów pierwszego roku czy studentów czwartego roku? Odpowiedź jest prosta – wystarczy policzyć. Ten zbiór, który ma więcej elementów jest większy. Rozważmy jeszcze jeden przykład. Który zbiór jest większy: liczb naturalnych $\mathbb{N}$ czy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$? I tu odpowiedź się narzuca. Zbiór liczb naturalnych jest właściwym podzbiorem zbioru liczb całkowitych, zatem jest mniejszy. Ale czy to oznacza, że liczb naturalnych jest mniej niż liczb całkowitych? Mogłoby się wydawać, że tak. Trzeba jednak zauważyć, że intuicja, która podpowiada nam taką odpowiedź, jest ściśle związana ze zbiorami skończonymi (z którymi stykamy się w życiu codziennym). Istotnie, jeśli zbiory A i B są skończone i zbiór A jest właściwym podzbiorem zbioru B, to ma od niego mniej elementów. W przypadku zbiorów nieskończonych ta intuicja jednak zawodzi. Żeby to zauważyć musimy najpierw odpowiedzieć na jeszcze jedno pytanie: co to znaczy, że jeden zbiór nieskończony ma mniej elementów od innego zbioru nieskończonego.

6.1 Zbiory równoliczne

Zanim odpowiemy na to pytanie, spróbujmy zrobić coś prostszego, a mianowicie opisać, co to znaczy, że dwa zbiory mają tyle samo elementów. W przypadku zbiorów skończonych wydaje się to proste, wystarczy policzyć elementy i porównać wyniki. Czasem jednak ta metoda może być trudna do realizacji w praktyce. Wyobraźmy sobie salę balową tuż przed rozpoczęciem studniówki i zastanówmy się, czy jest na niej więcej kobiet, czy mężczyzn. Policzyć się, oczywiście, nie da. Ale w tym momencie orkiestra zaczyna grać poloneza i pary ruszają do tańca. Jeśli okaże się, że wszyscy tańczą, to znaczy, że przedstawicieli obojga płci jest tyle samo, czyli, innymi słowy, że zbiory kobiet i mężczyzn mają taką samą liczbę elementów. Zauważmy, że do tej konkluzji doszliśmy bez liczenia.

Metoda łączenia w pary jest zatem dobrą metodą porównywania zbiorów pod względem ilości elementów. Wykorzystamy teraz to spostrzeżenie przy definiowaniu pojęcia równoliczności zbiorów (czyli posiadania tej samej ilości elementów) wiedząc, że łączeniu w pary elementów zbiorów A i B odpowiada znajdowanie bijekcji pomiędzy tymi zbiorami.

Definicja *Zbiory A i B nazywamy* ***równolicznymi****, jeśli istnieje funkcja f przekształcająca zbiór A wzajemnie jednoznacznie na zbiór B. Piszemy wtedy $A \sim B$, a o funkcji f mówimy, że ustala równoliczność zbiorów A i B.*

Jeśli zbiory A i B są równoliczne, mówimy też, że *mają tą samą moc.* W związku z tym wprowadzamy też symbol $|A|$ (dawniej używano symbolu $\overline{\overline{A}}$) na oznaczenie ilości elementów zbioru A, czyli *mocy* zbioru A. Nie będziemy jednak zastanawiać się nad tym, czym jest ilość elementów zbioru nieskończonego (dla zbiorów skończonych jest ona liczbą naturalną), samego zaś pojęcia mocy zbioru będziemy używali tylko dla porównywania ilości elementów dwóch zbiorów. A zatem

$$A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow (\exists f)\, f : A \xrightarrow[na]{1-1} B.$$

Równoliczność zbiorów ma pewne podstawowe własności, których byśmy od niej oczekiwali.

Twierdzenie 6.1 *Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy*

- $|A| = |A|$;
- $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$;
- $(|A| = |B| \wedge |B| = |C|) \Rightarrow |A| = |C|$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z faktów, że funkcja identycznościowa jest bijekcją, funkcja odwrotna do bijekcji jest bijekcją oraz złożenie bijekcji jest bijekcją. □

Powyższe twierdzenie mogłoby sugerować, że równoliczność zbiorów jest relacją równoważności. Pamiętajmy jednak, że dowolna relacja jest zawsze relacją pomiędzy elementami pewnego ustalonego zbioru X (czyli jest podzbiorem X^2). Tymczasem równoliczność dotyczy wszystkich zbiorów, a zbiór wszystkich zbiorów, jak wiemy, nie istnieje. Zatem w ogólnym przypadku nie możemy w ogóle mówić o równoliczności zbiorów jako o relacji w ścisłym sensie tego słowa. Jeśli jednak ograniczymy się do rozpatrywania podzbiorów pewnego ustalonego zbioru X, to Twierdzenie 6.1 stanowi, że równoliczność zbiorów jest relacją równoważności na $\mathcal{P}(X)$.

Rozważmy teraz pewną ilość przykładów zbiorów równolicznych, które przypominają też, jak poprawnie konstruować funkcje ustalające równoliczność (i jak sprawdzać poprawność tych konstrukcji).

Przykłady

1. Dla zbiorów skończonych definicja równoliczności zbiorów zgadza się z naturalną intuicją. Na przykład, $\{1,2,3\} \sim \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \pi\}$, a funkcję $f_1 : \{1,2,3\} \to \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \pi\}$ ustalającą równoliczność możemy określić warunkami $f_1(1) = \sqrt{2}$, $f_1(2) = \sqrt[3]{2}$ i $f_1(3) = \pi$.

2. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$.
Zdefiniujmy funkcję $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ wzorem $f_2(n) = n + 1$ i sprawdźmy, że ustala ona równoliczność. Faktycznie, jeśli $n \neq m$, to $n + 1 \neq m + 1$ zatem f_2 jest różnowartościowa. Ponadto jeśli $k \in \mathbb{N}^+$, to $k - 1 \in \mathbb{N}$ i $f_2(k-1) = k - 1 + 1 = k$, zatem f_2 jest „na".

3. $\mathbb{N} \sim \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}$.
Nietrudno sprawdzić, że funkcja $f_3 : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}$ zadana wzorem $f_3(n) = 2n$ ustala równoliczność. Zatem liczb naturalnych i liczb naturalnych parzystych jest tyle samo.

4. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.
Tutaj zadanie jest nieco trudniejsze. Intuicyjnie musimy „połowę" liczb naturalnych (np. liczby parzyste) przekształcić na wszystkie liczby naturalne, a drugą „połowę" na liczby całkowite ujemne. Formalnie funkcję $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ustalającą równoliczność możemy zapisać wzorem tak:
$$f_4(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{jeśli } 2|n \\ \frac{-n-1}{2} & \text{jeśli } \neg 2|n \end{cases}$$
Zauważmy, że jest to funkcja dobrze (jednoznacznie) zdefiniowana. Aby pokazać, że f_4 jest różnowartościowa, musimy rozpatrzyć dwa przypadki. Jeśli $f_4(n) = f_4(m) \geq 0$ to n i m muszą być parzyste, czyli $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$, a zatem $n = m$. Jeśli zaś $f_4(n) = f_4(m) < 0$ to n i m muszą być nieparzyste, stąd $\frac{-n-1}{2} = \frac{-m-1}{2}$ i także $n = m$. Pozostaje jeszcze pokazać, że f_4 jest surjekcją. W tym celu weźmy dowolne $z \in \mathbb{Z}$. Jeśli $z \geq 0$, to $2z$ jest parzystą liczbą naturalną i $f_4(2z) = \frac{2z}{2} = z$. Z kolei gdy $z < 0$, to $-2z - 1$ jest nieparzystą liczbą naturalną i mamy $f_4(-2z-1) = \frac{-(-2z-1)-1}{2} = z$, co kończy dowód.

5. $(0,1) \sim (a,b)$ (gdzie $a < b$).
   Funkcją $f_5 : (0,1) \to (a,b)$ ustalającą równoliczność jest w tym wypadku funkcja liniowa zadana wzorem $f_5(x) = (b-a)x+a$. Korzystając z Twierdzenia 6.1 wnioskujemy stąd, że dowolne dwa odcinki otwarte są równoliczne.

6. $(0,+\infty) \sim (-\infty,0)$.
   W oczywisty sposób funkcja $f_6 : (0,+\infty) \to (-\infty,0)$, $f_6(x) = -x$ ustala równoliczność.

7. $(0,1) \sim (1,+\infty)$.
   W tym wypadku funkcję $f_7 : (0,1) \to (1,+\infty)$ ustalającą równoliczność określamy wzorem $f_7(x) = \frac{1}{x}$. Korzystając z poprzednich przykładów i ponownie z Twierdzenia 6.1 dostajemy, że dowolny odcinek otwarty jest równoliczny z dowolną półprostą otwartą oraz że dowolne dwie półproste otwarte są ze sobą równoliczne.

8. $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$.
   Tym razem wykorzystamy dobrze znaną funkcję $f_8 : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f_8(x) = \mathrm{tg}(x)$. Jest ona rosnąca, a zatem różnowartościowa. Ponadto $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}(x) = -\infty$ oraz $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}(x) = +\infty$ i korzystając z własności Darboux otrzymujemy, że funkcja ta jest surjekcją. Podobnie jak poprzednio możemy stąd wywnioskować, że dowolny odcinek otwarty i zbiór liczb rzeczywistych są równoliczne.

Zauważmy, że wybór funkcji ustalającej równoliczność nie jest jednoznaczny, tzn. istnieje dużo różnych bijekcji pomiędzy zbiorami równolicznymi. Na przykład chcąc określić funkcję $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ wzajemnie jednoznaczną możemy użyć zarówno wzoru $f(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(x)$, jak i wzoru $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Na ogół wybieramy tę bijekcję, która jest dla nas w danym momencie najwygodniejsza.

Na zakończenie tego podrozdziału poznamy twierdzenie, które będzie nam się często przydawać w przyszłości.

Twierdzenie 6.2 *Dla dowolnych zbiorów A, B, C i D mamy:*

(a) Jeśli $A \sim B$ i $C \sim D$, to $A \times C \sim B \times D$.

(b) Jeśli $A \sim B$ i $C \sim D$ oraz $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap D = \emptyset$, to $A \cup C \sim B \cup D$.

(c) Jeśli $A \sim B$, to $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

Dowód. Udowodnimy tylko podpunkt (b), pozostałe pozostawiając jako ćwiczenie. Z założenia wiemy, że istnieją funkcje $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ i $g : C \xrightarrow[na]{1-1} D$. Zdefiniujemy teraz funkcję $h : A \cup C \to B \cup D$ następującym wzorem:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in A \\ g(x) & \text{jeśli } x \in C \end{cases}.$$

Zauważmy, że ponieważ zbiory A i C są rozłączne, to funkcja h jest dobrze (jednoznacznie) zdefiniowana. Sprawdzimy teraz, że jest injekcją. Weźmy w tym celu dowolne $x, y \in A \cup C$, takie że $x \neq y$. Są trzy możliwości:

- $x, y \in A$. Wtedy korzystając z różnowartościowości funkcji f otrzymujemy $h(x) = f(x) \neq f(y) = h(y)$.
- $x, y \in C$. Analogicznie jak poprzednio, tym razem wykorzystując różnowartościowość funkcji g.
- $x \in A$ oraz $y \in C$. Wtedy $h(x) = f(x) \in B$ i $h(y) = g(y) \in D$. Ale $B \cap D = \emptyset$, zatem $h(x) \neq h(y)$.

Pozostaje wykazać, że funkcja h jest „na”. Ustalmy w tym celu dowolne $z \in B \cup D$. Jeśli $z \in B$, to ponieważ funkcja f jest „na” mamy $x \in A$, takie że $f(x) = z$. Ale wtedy $x \in A \cup C$ i $h(x) = f(x) = z$. Jeśli $z \in D$, to rozumujemy podobnie, korzystając z tego, że funkcja g jest surjekcją. □

6.2 Zbiory nierównoliczne

Wiemy już, co to znaczy, że dwa zbiory są równoliczne, znamy też przykłady różnych par nieskończonych zbiorów równolicznych. Nadal nie wiemy jednak, czy wszystkie zbiory nieskończone mają tą samą moc. Okazuje się, że tak nie jest. Co więcej, można podać przykład nieskończonej rodziny zbiorów nieskończonych, takiej że każdy jej element ma inną moc. Jest zatem nieskończenie wiele różnych nieskończoności!

Zacznijmy jednak od zastanowienia się, co to znaczy, że dwa zbiory A i B *nie* są równoliczne. Z definicji jest to równoważne nieistnieniu funkcji wzajemnie jednoznacznej pomiędzy zbiorami A i B. Wynika stąd, że wykazanie, iż dwa zbiory nie są równoliczne jest dużo trudniejsze od pokazania, że są równoliczne. O ile bowiem w celu udowodnienia równoliczności wystarczy pokazać, że *istnieje* bijekcja pomiędzy danymi zbiorami, czyli wskazać konkretny obiekt, to by pokazać, że nie są one równoliczne trzeba uzasadnić, że *żadna* funkcja pomiędzy tymi zbiorami nie jest bijekcją, czyli wykonać ogólne rozumowanie. Jako przykład takiego rozumowania pokażemy, że przedział otwarty nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych dodatnich.

Przykład $(0,1) \not\sim \mathbb{N}^+$.
Przypuśćmy bowiem nie wprost, że istnieje funkcja $f : \mathbb{N}^+ \xrightarrow[na]{1-1} (0,1)$. O funkcji f możemy myśleć jako o ciągu liczb rzeczywistych. Założyliśmy więc, że każda liczba z odcinka $(0,1)$ występuje w tym ciągu. Wypiszmy kilka wyrazów tego ciągu:

$$f(1) = 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 \dots a_n^1 \dots$$
$$f(2) = 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \dots a_n^2 \dots$$
$$f(3) = 0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \dots a_n^3 \dots$$

i ogólnie

$$f(n) = 0, a_1^n a_2^n a_3^n a_4^n \dots a_n^n \dots,$$

gdzie a_m^k jest m-tą cyfrą po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym k-tego wyrazu naszego ciągu (dla uniknięcia niejednoznaczności rozważamy tylko rozwinięcia dziesiętne ze skończoną ilością cyfr 9). Zdefiniujemy teraz pewną liczbę $b \in (0,1)$ w następujący sposób:

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_n \dots,$$

gdzie b_m, czyli m-tą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby b wybieramy w taki sposób, by $b_m \neq a_m^m$ oraz $b_m \neq 0$ i $b_m \neq 9$. Możemy to oczywiście zrobić – zawsze mamy do dyspozycji jeszcze siedem cyfr. Zauważmy, że ostatnie dwa warunki zapewniają, że $b \neq 0$ i $b \neq 1$.

Ponieważ funkcja f jest „na", to istnieje $n \in \mathbb{N}^+$ takie, że $f(n) = b$. W szczególności mamy, że $a_n^n = b_n$, co pozostaje w sprzeczności z metodą konstruowania liczby b. Zatem nie istnieje funkcja $f : \mathbb{N}^+ \xrightarrow[na]{1-1} (0,1)$, co kończy dowód.

Metoda wykorzystana w powyższym przykładzie nosi nazwę *metody przekątniowej*. Jeśli bowiem pomyślimy o cyfrach a_m^k jako o elementach nieskończonej tablicy, to liczbę b konstruowaliśmy „idąc" po przekątnej tej tablicy i na każdym kroku odróżniając się od kolejnego wyrazu ciągu f. Metoda ta ma wiele zastosowań, jednym z nich jest następujące klasyczne twierdzenie.

Twierdzenie 6.3 (Cantor) *Dla dowolnego zbioru A mamy $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje funkcja

$$f : A \xrightarrow[na]{1-1} \mathcal{P}(A).$$

Jest to zatem funkcja, która każdemu elementowi zbioru A przyporządkowuje podzbiór zbioru A. Możemy więc zdefiniować następujący zbiór

$$Z = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Ponieważ Z jest podzbiorem zbioru A, a funkcja f jest „na”, istnieje zatem $a \in A$ taki, że $f(a) = Z$. Zastanówmy się, czy $a \in Z$. Są dwie możliwości:

- $a \in Z$. Wtedy z definicji zbioru Z mamy $a \notin f(a) = Z$. Sprzeczność.
- $a \notin Z$. Wtedy z definicji zbioru Z mamy $\neg a \notin f(a) = Z$, czyli $a \in Z$. Ponownie sprzeczność.

Otrzymane sprzeczności znaczą, że nie istnieje funkcja $f : A \xrightarrow[na]{1-1} \mathcal{P}(A)$. □

Z powyższego twierdzenia możemy wywnioskować, że istnieje nieskończenie wiele różnych nieskończoności, bo dla dowolnego zbioru (nieskończonego) jego zbiór potęgowy ma od niego więcej elementów i powtarzając operację brania zbioru potęgowego dostajemy zbiory „coraz bardziej nieskończone”. Jest to rozumowanie poprawne, żeby jednak dobrze je sformalizować musimy najpierw powiedzieć, co to znaczy „mieć więcej elementów”.

6.3 Porównywanie mocy zbiorów

Wiemy już, co to znaczy, że dwa zbiory mają tą samą moc, wciąż jednak nie potrafimy porównywać mocy zbiorów, czyli stwierdzać, który z nich ma więcej elementów. Wróćmy na chwilę do przytoczonego na początku tego rozdziału przykładu intuicyjnego porównywania zbiorów liczb naturalnych i całkowitych. Ponieważ $\mathbb{N}$ jest (właściwym) podzbiorem $\mathbb{Z}$, więc wydawało się, że ma mniej elementów. Już wiemy, że tak nie jest, ale ta intuicja nie była całkiem błędna. Zawarta w niej była bowiem prawdziwa informacja, że zbiór $\mathbb{N}$ ma moc *nie większą* od mocy zbioru $\mathbb{Z}$. Idąc tym tropem wprowadzamy następującą definicję.

Definicja *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Mówimy, że zbiór A ma moc* ***nie większą*** *od mocy zbioru B, jeśli jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru B. Symbolicznie piszemy*

$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists C (C \subseteq B \wedge A \sim C).$$

Wynika stąd oczywiście od razu, że jeśli $A \subseteq B$, to $|A| \leq |B|$. Aby móc skutecznie porównywać moce zbiorów potrzebne nam będzie następujące twierdzenie, podające warunki równoważne temu, że zbiór A ma nie większą moc niż zbiór B.

Twierdzenie 6.4 *Dla dowolnych niepustych zbiorów A i B następujące warunki są równoważne:*

(a) $|A| \leq |B|$;

(b) istnieje funkcja $f : A \xrightarrow{1-1} B$;

(c) istnieje funkcja $g : B \xrightarrow{na} A$.

Dowód. Przypomnijmy, że dzięki przechodniości implikacji wystarczy pokazać, że (a)⇒(b)⇒(c)⇒(a).

(a)⇒(b). Ponieważ $|A| \leq |B|$, więc z definicji istnieje $C \subseteq B$ taki, że $A \sim C$. Oznacza to, że istnieje funkcja $f : A \xrightarrow[na]{1-1} C$. Możemy ją potraktować jako funkcję o przeciwdziedzinie B i wtedy $f : A \xrightarrow{1-1} B$.

(b)⇒(c). Z założenia wiemy, że istnieje $f : A \xrightarrow{1-1} B$. Oczywiście funkcja odwrotna $f^{-1} : \mathrm{rng}(f) \to A$ jest surjekcją (a nawet bijekcją), wystarczy ją zatem rozszerzyć do funkcji g określonej na całym zbiorze B. W tym celu wybierzmy dowolne $a_0 \in A$ (jest to możliwe, bo zbiór A jest niepusty) i dla dowolnego $b \in B$ określmy $g(b)$ następującym wzorem:

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{jeśli } b \in \mathrm{rng}(f) \\ a_0 & \text{jeśli } b \notin \mathrm{rng}(f) \end{cases} .$$

Prostym ćwiczeniem pozostaje sprawdzenie, że $g : B \xrightarrow{na} A$.

(c)⇒(a). Załóżmy, że $g : B \xrightarrow{na} A$. Szukamy teraz takiego podzbioru C zbioru B, by funkcja obcięta $g \restriction C$ była bijekcją. Ponieważ funkcja g jest „na", zatem dla każdego $a \in A$ zbiór $g^{-1}[a]$ (jest to zbiór tych elementów zbioru B, które przechodzą na a) jest niepusty. Jeśli więc weźmiemy taki zbiór $C \subseteq B$, który z każdym zbiorem $g^{-1}[a]$ ma dokładnie jeden punkt wspólny (taki zbiór nazywa się selektorem rodziny $\{g^{-1}[a] : a \in A\}$), to faktycznie $g \restriction C : C \xrightarrow[na]{1-1} A$ (jest to znów proste ćwiczenie – to, że do zbioru C wybieramy elementy z każdego zbioru $g^{-1}[a]$ powoduje, że jest to nadal funkcja „na", a wybieranie dokładnie jednego elementu zapewni nam różnowartościowość). Z definicji mamy zatem $|A| \leq |B|$, co kończy dowód. □

Przyjęte oznaczenie sugeruje, że zależność $\leq$ pomiędzy mocami zbiorów jest relacją porządku. Formalnie rzecz biorąc tak nie jest, ponieważ (podobnie jak równoliczność zbiorów) nie jest to relacja w ścisłym sensie tego słowa – przecież samo pojęcie mocy zbioru (czyli ilości jego elementów) nie zostało sformalizowane i pozostaje intuicyjne. Tym niemniej zależność ta ma własności, których oczekiwalibyśmy od relacji porządku.

Twierdzenie 6.5 *Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy*

- $|A| \leq |A|$;
- $(|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C|) \Rightarrow |A| \leq |C|$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z charakteryzacji podanej w Twierdzeniu 6.4(b) oraz faktów, że funkcja identycznościowa jest injekcją i złożenie injekcji jest injekcją. □

Jak widać, do pełnego podobieństwa z relacją porządku brakuje nam własności słabej antysymetrii. Chcielibyśmy, by z faktu, że moc zbioru A jest nie większa i równocześnie nie mniejsza niż moc zbioru B wynikało, że moce te są równe. Okazuje się, że tak faktycznie jest, jednak nie jest to żadną miarą fakt trywialny (jak mogłoby się wydawać). Jego dowód jest jednym z najtrudniejszych dowodów zawartych w tym skrypcie i w związku z tym zostanie zaprezentowany w Rozdziale 9.

Twierdzenie 6.6 (Cantor-Bernstein) *Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$, to $|A| = |B|$.* □

Twierdzenie Cantora-Bernsteina (często w połączeniu z Twierdzeniem 6.4) pozwala nam znacznie uprościć dowody, w których mamy wykazać równoliczność pewnych dwóch zbiorów. Faktycznie, w celu pokazania, że $A \sim B$ zamiast konstruowania bijekcji $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ wystarczy wskazać np. dwie injekcje $f_1 : A \xrightarrow{1-1} B$ i $f_2 : B \xrightarrow{1-1} A$, co w wielu wypadkach jest dużo prostsze.

Przykład $(0,1) \sim [0,1]$.
Wystarczy zauważyć, że $(0,1) \subseteq [0,1] \subseteq (-1,2)$. Ponadto w przykładzie na stronie 114 uzasadniliśmy, że dowolne dwa przedziały otwarte są równoliczne. Wiemy stąd, że

$$|(0,1)| \leq |[0,1]| \leq |(-1,2)| = |(0,1)|.$$

Zastosowanie Twierdzenia Cantora-Bernsteina kończy dowód.
Oczywiście, można bezpośrednio zdefiniować bijekcję $f : (0,1) \to [0,1]$, jednak jest to zdecydowanie bardziej uciążliwe niż wykonanie powyższego rozumowania.

Rozsądnym wydaje się również oczekiwanie, by zależność $\leq$ pomiędzy mocami zbiorów miała też własność spójności, tzn. by dla dowolnych zbiorów A i B albo A miał nie więcej elementów niż B, albo B nie więcej A. Także w tym wypadku okazuje się, że postulat ten jest spełniony, jednak tak samo, jak w przypadku Twierdzenia Cantora-Bernsteina intuicja, że jest to fakt oczywisty i banalny jest głęboko błędna. Podobnie jak poprzednio, dowód zostanie podany w Rozdziale 9.

Twierdzenie 6.7 *Dla dowolnych zbiorów A i B mamy*

$$|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|. \qquad \square$$

Wiedząc już dokładnie, co to znaczy, że zbiór A ma moc nie większą od mocy zbioru B, możemy powiedzieć, co to znaczy, że ma moc mniejszą.

Definicja *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Mówimy, że zbiór A ma moc* ***mniejszą*** *od mocy zbioru B, jeśli moc zbioru A jest nie większa od mocy zbioru B i zbiory te nie są równoliczne. Symbolicznie piszemy*

$$|A| < |B| \Leftrightarrow |A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|.$$

Zauważmy, że informacja, że zbiór A ma mniejszą moc niż zbiór B jest dużo silniejsza (i na ogół dużo trudniejsza do uzyskania) niż informacja, że zbiór A ma moc nie większą niż zbiór B. O ile bowiem do pokazania, że $|A| \leq |B|$ wystarczy np. znalezienie (jednej, konkretnej) funkcji $f : A \xrightarrow{1-1} B$, to by pokazać, że $|A| < |B|$ trzeba jeszcze udowodnić, że nie istnieje funkcja $g : B \xrightarrow{1-1} A$, co, jak już mówiliśmy, wymaga ogólnego rozumowania.

Przykłady

1. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
   Ponieważ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, więc $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$. Ponadto z przykładów na stronach 113 i 114 wiemy, że $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$ i $(0,1) \sim \mathbb{R}$, a z przykładu na stronie 116, że $|\mathbb{N}^+| \neq |(0,1)|$. Wynika stąd, że $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, co kończy dowód.

2. Dla dowolnego zbioru A mamy $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
   Z Twierdzenia Cantora wiemy, że $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. Z kolei nietrudno sprawdzić, że funkcja $f : A \to \mathcal{P}(A)$ zadana wzorem $f(a) = \{a\}$ jest injekcją, czyli z Twierdzenia 6.4 dostajemy, że $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$, co kończy dowód.

Bezpośrednio z Twierdzenia 6.7 wnioskujemy, że jeśli zbiory A i B nie są równoliczne, to albo $|A| < |B|$, albo $|B| < |A|$. Z kolei korzystając z Twierdzenia Cantora-Bernsteina można pokazać, że „relacja” $<$ jest przechodnia, czyli

$$(|A| < |B| \wedge |B| < |C|) \Rightarrow |A| < |C|,$$

co pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Wynika stąd w szczególności, że dla dowolnego zbioru A mamy

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))| < \dots$$

Czyli rozpoczynając od dowolnego zbioru nieskończonego możemy uzyskać ciąg nieskończonych zbiorów mających coraz więcej elementów. Nigdy jednak nie uzyskamy w ten sposób wszystkich możliwych „nieskończoności”, gdyż biorąc sumę wyrazów takiego ciągu otrzymamy nowy zbiór, mający więcej elementów niż każdy element ciągu. Od tego nowego zbioru możemy zacząć kolejny ciąg i tak dalej. Widać stąd, że nie jesteśmy w stanie opisać wszystkich możliwych „nieskończoności” – jest ich zbyt nieskończenie wiele...

6.4 Zadania

1. Dla podanych zbiorów A i B znaleźć funkcję ustalającą równoliczność między nimi oraz sprawdzić, że jest ona faktycznie bijekcją.
   (a) $A = \{3n+1 : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \mathbb{N}$;
   (b) $A = \mathbb{N}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 5k\}$;
   (c) $A = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}, \quad B = \{n \in \mathbb{Z} : \neg 2|n\}$;
   (d) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}, \quad B = \mathbb{R}$;
   (e) $A = [0,1], \quad B = [0,1)$.
2. Udowodnić Twierdzenie 6.2(a) i (c).
3. Stosując metodę przekątniową udowodnić, że $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
4. O zbiorach A i B wiemy, że $|A \cap B| = |A \cup B|$. Pokazać, że $A \sim B$.
5. Zbadać, czy dla dowolnych nieskończonych zbiorów A, B, C i D prawdziwe są poniższe zdania.
   (a) Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : A \xrightarrow{1-1} B$, która nie jest „na”, to $|A| < |B|$.
   (b) Jeśli $|A| < |C|$ i $|B| < |D|$ to $|A \cup B| < |C \cup D|$.
   (c) Jeśli $|A| < |C|$ i $|B| \leq |D|$ to $|A \cup B| < |C \cup D|$.
   (d) Jeśli $|A| < |C|$ i $|B| < |D|$ to $|A \times B| < |C \times D|$.
   (e) Jeśli $|A| < |C|$ i $|B| \leq |D|$ to $|A \times B| < |C \times D|$.
   (f) Jeśli $|A| < |B|$ i $C \neq \emptyset$, to $|A \times C| < |B \times C|$.

6. Dla dowolnych zbiorów A, B i C pokazać, że

$$(|A| < |B| \wedge |B| < |C|) \Rightarrow |A| < |C|.$$

7. Niech $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ będzie ciągiem zbiorów takim, że dla każdej liczby naturalnej n mamy $|A_n| < |A_{n+1}|$. Udowodnić, że suma wyrazów tego ciągu ma moc większą od każdego jego elementu, czyli

$$(\forall m \in \mathbb{N})\, |A_m| < |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n|.$$

Rozdział 7

Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne

Spośród zbiorów, z którymi się stykamy, najbliższe są nam zbiory liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Nic zatem dziwnego, że także w kwestii ilości elementów są one dla nas punktem odniesienia. Mając zatem pewien nieskończony zbiór A możemy zapytać, czy jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, czyli czy jest *przeliczalny*. Jeśli nie, to być może jest tej samej mocy, co zbiór liczb rzeczywistych, czyli *mocy continuum*[1]. Oczywiście, jak wiemy z poprzedniego rozdziału, żadna z tych możliwości może nie zachodzić, ale w codzienności matematycznej (np. w Analizie Matematycznej) są to sytuacje najczęściej spotykane.

Jako szczególnie ważne, moce tych zbiorów mają swoje osobne oznaczenia. O zbiorze liczb naturalnych mówimy, że jest mocy *alef zero*[2] i piszemy

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Natomiast o zbiorze liczb rzeczywistych mówimy, że jest mocy *continuum* i piszemy

$$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$ [3]

Ponieważ, jak już powiedzieliśmy, nie definiujemy precyzyjnie, czym jest moc zbioru, także te zapisy traktujemy jako skróty, czyli dla dowolnego zbioru A zapis $|A| = \aleph_0$ oznacza wyłącznie $|A| = |\mathbb{N}|$, a zapis $|A| = \mathfrak{c}$ oznacza $|A| = |\mathbb{R}|$. Analogicznie rzecz ma się w wypadku nierówności.

W tym rozdziale zajmiemy się przede wszystkim własnościami zbiorów przeliczalnych. Zaczniemy jednak od sprecyzowania pojęć, którymi będziemy się posługiwać.

---

[1] czyt. kontinuum

[2] alef – pierwsza litera alfabetu hebrajskiego

[3] Jest to litera c pisana po gotycku.

Definicja *Niech A będzie dowolnym zbiorem. Mówimy, że zbiór A jest*

1. ***skończony**, gdy jest on zbiorem pustym lub istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, taka że $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$.*
2. ***nieskończony**, gdy nie jest skończony.*
3. ***przeliczalny**, gdy jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.*
4. ***co najwyżej przeliczalny**, gdy jest przeliczalny lub skończony.*
5. ***nieprzeliczalny**, gdy nie jest co najwyżej przeliczalny.*

W tym miejscu trzeba zrobić istotną uwagę terminologiczną. Otóż w literaturze matematycznej zbiorem przeliczalnym nazywa się często (inaczej niż w powyższej definicji) zbiór, który jest skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych (czyli zbiór, który my nazywamy co najwyżej przeliczalnym). Z kontekstu jednak można na ogół łatwo wywnioskować, która konwencja jest stosowana.

Powyższą definicję można następująco przeformułować.

Twierdzenie 7.1 *Niech A będzie dowolnym zbiorem. Wtedy*

- *A jest skończony $\Leftrightarrow$ $|A| < \aleph_0$.*
- *A jest nieskończony $\Leftrightarrow$ $|A| \geq \aleph_0$.*
- *A jest przeliczalny $\Leftrightarrow$ $|A| = \aleph_0$.*
- *A jest co najwyżej przeliczalny $\Leftrightarrow$ $|A| \leq \aleph_0$.*
- *A jest nieprzeliczalny $\Leftrightarrow$ $|A| > \aleph_0$.*

Dowód. Większość warunków wynika wprost z definicji i Twierdzenia 6.7. Uzasadnienia wymaga tak naprawdę tylko (intuicyjnie oczywiste) stwierdzenie, że zbiór jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy ma mniej elementów niż zbiór wszystkich liczb naturalnych. To jest jednak zadanie wymagające użycia indukcji matematycznej, wrócimy zatem do niego w następnym rozdziale. $\square$

Ponieważ pojęcie skończoności jest na ogół zrozumiałe, nie będziemy się zagłębiać w rozważania na ten temat i skoncentrujemy się na zbiorach nieskończonych. Przedtem podamy tylko (bez dowodu) twierdzenie, które posłużyło w XIX wieku niemieckiemu matematykowi R. Dedekindowi do innego zdefiniowania pojęcia zbioru skończonego.

Twierdzenie 7.2 *Zbiór skończony nie jest równoliczny z żadnym swoim podzbiorem właściwym. Zbiór nieskończony jest równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym.* □

7.1 Zbiory przeliczalne

Zbiory przeliczalne są najmniejszymi zbiorami nieskończonymi. Z definicji zbiorem przeliczalnym jest zbiór liczb naturalnych. Z przykładów na stronie 113 wiemy też, że przeliczalne są zbiory liczb naturalnych dodatnich, liczb naturalnych parzystych i liczb całkowitych. W tym rozdziale zastanowimy się, jakie jeszcze zbiory są przeliczalne.

Zaczniemy od prostego spostrzeżenia, które dobrze oddaje intuicję przeliczalności. Otóż fakt, że A jest zbiorem przeliczalnym oznacza, że istnieje bijekcja $f : \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} A$. Innymi słowy, funkcja f numeruje elementy zbioru A liczbami naturalnymi, albo, mówiąc jeszcze inaczej, „ustawia je w ciąg". Możemy zatem bez specjalnego nadużycia pisać $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ (gdzie $a_n = f(n)$).

Przejdźmy teraz do pierwszego twierdzenia.

Twierdzenie 7.3 *Suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.*

Dowód. Niech A i B będą dowolnymi zbiorami przeliczalnymi. Istnieją zatem bijekcje $f : \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} A$ i $g : \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} B$. Zdefiniujmy funkcję $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ w następujący sposób:

$$h(n) = \begin{cases} f(k) & \text{jeśli } n = 2k \quad \text{dla pewnego } k \in \mathbb{N} \\ g(k) & \text{jeśli } n = 2k+1 \quad \text{dla pewnego } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja h jest surjekcją. Istotnie, niech $y \in A \cup B$. Wynika stąd, że $y \in A$ lub $y \in B$. Jeśli $y \in A$, to ponieważ funkcja $f : \mathbb{N} \to A$ jest surjekcją, więc jest $m \in \mathbb{N}$, takie że $f(m) = y$. Ale wtedy $h(2m) = f(m) = y$. Podobnie, jeśli $y \in B$, to korzystając z tego, że funkcja $g : \mathbb{N} \to B$ jest surjekcją znajdujemy $m \in \mathbb{N}$, takie że $g(m) = y$ i wtedy $h(2m+1) = g(m) = y$. Z Twierdzenia 6.4 wynika zatem, że $|A \cup B| \leq |\mathbb{N}|$.

Oczywiście, wiemy też, że $A \subseteq A \cup B$, czyli $|A| \leq |A \cup B|$. Korzystając z założenia dostajemy

$$|\mathbb{N}| = |A| \leq |A \cup B| \leq |\mathbb{N}|.$$

Stosując Twierdzenie Cantora-Bernsteina otrzymujemy $|A \cup B| = |\mathbb{N}|$, co kończy dowód. □

Odwołując się do intuicji „ustawiania w ciąg", powyższy dowód można by opisać następująco. Zbiory A i B ustawiamy w ciągi: $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$,

$B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ (odpowiadają za to funkcje f i g), a następnie „przeplatamy” je ze sobą (tak działa funkcja h) dostając

$$A \cup B = \{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}.$$

W tym ciągu pewne wyrazy mogą się powtarzać (bo zbiory A i B nie muszą być rozłączne), ale na pewno jest w nim nieskończenie wiele różnych wyrazów, co kończy dowód.

Wniosek 7.4 *Suma dwóch zbiorów co najwyżej przeliczalnych jest co najwyżej przeliczalna.*

Dowód. Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 6.4 zbiór jest co najwyżej przeliczalny, gdy istnieje surjekcja ze zbioru liczb naturalnych na ten zbiór. Ponieważ w dowodzie Twierdzenia 7.3 nie korzystaliśmy z tego, że funkcje f i g są różnowartościowe, zatem wystarczy opuścić ostatni akapit w dowodzie tego twierdzenia, by otrzymać dowód wniosku. □

Spostrzeżenie uczynione przed chwilą w dowodzie Wniosku 7.4 będziemy jeszcze wykorzystywać w tym rozdziale, by z udowodnionych twierdzeń o zbiorach przeliczalnych wyciągać wnioski o zbiorach co najwyżej przeliczalnych. Czytelnikowi pozostawiamy pokazanie innych wersji powyższego wniosku, np. suma zbioru przeliczalnego i zbioru co najwyżej przeliczalnego jest przeliczalna.

Udowodnimy teraz kolejny zaskakujący fakt, że par (uporządkowanych) liczb naturalnych jest tyle samo co liczb naturalnych. Stąd już łatwo wywnioskujemy, że liczb wymiernych też jest przeliczalnie wiele. Zanim przystąpimy do formalnego dowodu, zapiszmy pary liczb naturalnych w (nieskończonej) tablicy i spróbujmy ustawić je w ciąg.

$$\begin{array}{cccccccc}
\langle 0,0\rangle & \rightarrow & \langle 0,1\rangle & & \langle 0,2\rangle & \rightarrow & \langle 0,3\rangle & \ldots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\langle 1,0\rangle & \leftarrow & \langle 1,1\rangle & & \langle 1,2\rangle & & \langle 1,3\rangle & \ldots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\langle 2,0\rangle & \rightarrow & \langle 2,1\rangle & \rightarrow & \langle 2,2\rangle & & \langle 2,3\rangle & \ldots \\
 & & & & & & \downarrow & \\
\langle 3,0\rangle & \leftarrow & \langle 3,1\rangle & \leftarrow & \langle 3,2\rangle & \leftarrow & \langle 3,3\rangle & \ldots \\
\downarrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Nie jest trudno zauważyć, że idąc w ten sposób „odwiedzimy” każdy element tablicy i w dodatku zrobimy to tylko raz, czyli powyższa metoda opisuje pewną bijekcję pomiędzy zbiorami $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Oczywiście, nie jest to jedyna możliwa bijekcja, w dodatku trudno byłoby ją zapisać wzorem. Dlatego w poniższym dowodzie użyjemy bijekcji, która odpowiada ustawianiu po kolei bloków tych par, w których współrzędne dają tą samą sumę, tzn.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 0,3\rangle, \ldots\}.$$

Twierdzenie 7.5 $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Dowód. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadaną wzorem

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x.$$

Pokażemy, że jest ona wzajemnie jednoznaczna. Wykorzystamy w tym celu pomocniczą funkcję $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (czyli ciąg liczb naturalnych) zadaną wzorem $\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Zauważmy, że jest ona (ściśle) rosnąca i rozbieżna do nieskończoności oraz że $f(x,y) = \varphi(x+y) + x$.

Weźmy teraz dwie różne pary liczb naturalnych $\langle x,y\rangle$ i $\langle x',y'\rangle$. Są dwie możliwości.

1. $x + y = x' + y'$. Wynika stąd, że $x \neq x'$ (bo gdyby $x = x'$, to $y = y'$, co jest niemożliwe, gdyż $\langle x,y\rangle \neq \langle x',y'\rangle$). Ale wtedy

   $$f(x,y) = \varphi(x+y) + x \neq \varphi(x+y) + x' = \varphi(x'+y') + x' = f(x',y').$$

2. $x + y \neq x' + y'$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $x + y < x' + y'$, czyli $x + y + 1 \leq x' + y'$. Korzystając z tego, że φ jest rosnąca otrzymujemy

   $$f(x,y) < \varphi(x+y) + x + y + 1 = \varphi(x+y+1) \leq \varphi(x'+y') \leq f(x',y').$$

   Czyli i w tym wypadku mamy $f(x,y) \neq f(x',y')$.

Pokazaliśmy zatem, że funkcja f jest różnowartościowa.

Niech teraz $m \in \mathbb{N}$ będzie dowolną liczbą naturalną. Ponieważ funkcja φ jest rosnąca i rozbieżna do nieskończoności, więc jest $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\varphi(k) \leq m < \varphi(k+1)$. Przyjmijmy $x = m - \varphi(k)$ i $y = k - x$. Ponieważ $\varphi(k+1) - \varphi(k) = k + 1$, to $0 \leq x \leq k$, czyli $x, y \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy

$$f(x,y) = \varphi(x+y) + x = \varphi(k) + (m - \varphi(k)) = m.$$

Czyli funkcja f jest „na”, co kończy dowód. □

Dowód poniższego przydatnego wniosku pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Wniosek 7.6 *Iloczyn kartezjański dwóch (skończenie wielu) zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.* □

Mamy już teraz wszystkie potrzebne narzędzia do pokazania, że liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele, co może przeczyć intuicji, że jest ich „dużo" w porównaniu do liczb naturalnych. Zauważmy jednak, że intuicja ta bierze się z własności porządkowych – zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych (czyli pomiędzy dowolnymi różnymi liczbami rzeczywistymi znajdziemy liczbę wymierną), co jest w opozycji do „rzadkości" zbioru liczb naturalnych. Z poniższego twierdzenia wynika zatem, że zbiór „duży" w jednym sensie może być „mały" w innym.

Twierdzenie 7.7 $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Dowód. Zacznijmy od zdefiniowania funkcji $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \to \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$ wzorem $f(k,l) = \frac{k}{l}$. Ponieważ każda liczba wymierna jest ułamkiem, więc funkcja f jest „na". Z Twierdzenia 6.4 mamy zatem

$$|\{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+|.$$

Dalej, dzięki Twierdzeniu 6.2(a) mamy $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ (bo wiemy, że $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$). Ponadto oczywiście $\mathbb{N} \subseteq \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$. Korzystając z Twierdzenia 7.5 otrzymujemy

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+| \geq |\{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}| \geq |\mathbb{N}|.$$

Z Twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika zatem, że zbiór liczb wymiernych nieujemnych jest przeliczalny. W celu zakończenia dowodu zauważmy, że $\{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\} \sim \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0\}$. Ponieważ

$$\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0\},$$

więc na mocy Twierdzenia 7.3 zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny. □

Z powyższego twierdzenia wynika od razu interesujący wniosek, który mówi nam, że liczb niewymiernych jest więcej niż liczb wymiernych, co również może nie być intuicyjnie oczywiste, jako że z liczbami wymiernymi spotykamy się częściej. W dalszej części tego rozdziału pokażemy jeszcze inne wyniki przeczące tego typu intuicjom.

Wniosek 7.8 *Zbiór liczb niewymiernych jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest nieprzeliczalny, czyli jest co najwyżej przeliczalny. Ponieważ wiemy już, że zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny, zatem zgodnie z Wnioskiem 7.4 zbiór $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ jest przeliczalny. To jednak nie jest możliwe (patrz przykład na stronie 120). Uzyskana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Rozważmy teraz następujące dwa istotne przykłady, które pokażą nam, jak można uzasadniać przeliczalność pewnych zbiorów.

Przykłady

1. Zbiór $\mathcal{S}$ wszystkich przedziałów (otwartych) o obu końcach wymiernych jest przeliczalny.

   Rozpatrzmy funkcję $f : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^2$ zadaną wzorem $f((a,b)) = \langle a,b \rangle$. Jak łatwo zauważyć jest to injekcja, czyli na mocy Twierdzenia 6.4 mamy $|\mathcal{S}| \leq |\mathbb{Q}^2|$. Wiemy też dzięki Twierdzeniu 7.7 i Wnioskowi 7.6, że $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$.
   Z drugiej strony określmy funkcję $g : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ wzorem $g(n) = (n, n+1)$. I w tym wypadku łatwo pokazać, że funkcja g jest injekcją, czyli tak jak poprzednio mamy $|\mathcal{S}| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Teraz wystarczy zastosować Twierdzenie Cantora-Bernsteina, by otrzymać $|\mathcal{S}| = \aleph_0$.

2. Dowolny zbiór parami rozłącznych przedziałów (otwartych) jest co najwyżej przeliczalny.

   Niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem parami rozłącznych przedziałów otwartych. Dla każdego przedziału $I \in \mathcal{T}$ wybierzmy pewną konkretną liczbę wymierną z tego przedziału (wiemy, że takowa istnieje, a nawet, że jest ich bardzo dużo, ale my wybieramy tylko jedną) i nazwijmy ją q_I. Zdefiniujmy teraz funkcję $h : \mathcal{T} \to \mathbb{Q}$ wzorem $h(I) = q_I$. Zauważmy, że jest to funkcja różnowartościowa. Istotnie, jeśli mamy $I_1, I_2 \in \mathcal{T},\ I_1 \neq I_2$, to z założenia wiemy, że $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Ponieważ $h(I_1) = q_{I_1} \in I_1$ i $h(I_2) = q_{I_2} \in I_2$, to musi być $h(I_1) \neq h(I_2)$. Zatem z Twierdzenia 6.4 wynika $|\mathcal{T}| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, co kończy dowód.

Okazuje się, że Twierdzenie 7.3 można uogólnić na sumę większej ilości zbiorów.

Twierdzenie 7.9 *Suma co najwyżej przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.*

Dowód. Rozważmy rodzinę zbiorów $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ takich, że $|A_n| = \aleph_0$ dla każdej liczby naturalnej n. W związku z tym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy funkcję $f_n : \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} A_n$. Niech

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Zauważmy, że w tej sumie jest co najwyżej przeliczalnie wiele zbiorów. Nie można stwierdzić, że jest ich dokładnie przeliczalnie wiele, bo może się zdarzyć, że w rodzinie $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest tylko skończenie wiele różnych zbiorów, gdyż ten sam zbiór może się powtarzać wielokrotnie z różnymi indeksami.

Definiujemy teraz funkcję $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ wzorem $f(n,k) = f_n(k)$ (jeśli przyjmiemy, że funkcja f_n numeruje liczbami naturalnymi zbiór A_n, to $f(n,k)$ jest k-tym elementem zbioru A_n). Pokażemy, że f jest surjekcją. W tym celu weźmy dowolne $x \in A$. Wtedy istnieje liczba naturalna n_0, taka że $x \in A_{n_0}$. Ale funkcja f_{n_0} jest „na", zatem jest $k_0 \in \mathbb{N}$, takie że $x = f_{n_0}(k_0) = f(n_0, k_0)$, co należało pokazać.

Korzystając z Twierdzeń 6.4 i 7.5 oraz tego, że $A_0 \subseteq A$ otrzymujemy

$$|\mathbb{N}| = |A_0| \leq |A| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

i użycie Twierdzenia Cantora-Bernsteina kończy dowód. $\square$

Analogicznie jak w przypadku Twierdzenia 7.3, możemy wysnuć następujące wnioski, których uzasadnienie pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Wniosek 7.10 *Suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.* $\square$

Wniosek 7.11 *Suma co najwyżej przeliczalnie wielu zbiorów co najwyżej przeliczalnych jest co najwyżej przeliczalna.* $\square$

Wniosek 7.12 *Suma przeliczalnie wielu zbiorów co najwyżej przeliczalnych jest przeliczalna.* $\square$

Jako proste zastosowanie powyższych twierdzeń rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład Zbiór $\mathcal{W}$ wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych jest przeliczalny.

Niech $\mathcal{W}_n$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów stopnia n o współczynnikach całkowitych. Ponieważ każdy wielomian $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

można utożsamić z ciągiem liczb całkowitych $\langle a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\rangle$, zatem bez trudu możemy udowodnić, że $|\mathcal{W}_n| = \aleph_0$. Ale wiemy, że

$$\mathcal{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n,$$

więc stosując Wniosek 7.10 dostajemy $|\mathcal{W}| = \aleph_0$.

Przypomnijmy, że liczba rzeczywista a nazywa się *algebraiczną*, jeśli istnieje wielomian (stopnia co najmniej pierwszego) o współczynnikach całkowitych $W(x)$, taki że $W(a) = 0$. Liczbę rzeczywistą, która nie jest algebraiczna nazywamy *przestępną*. Liczbami algebraicznymi są zatem liczby wymierne, a także pierwiastki arytmetyczne dowolnego stopnia z liczb wymiernych. Innymi słowy, większość liczb, z którymi się na co dzień spotykamy to właśnie liczby algebraiczne. Okazuje się jednak, że ich też jest niewiele.

Przykład Zbiór liczb algebraicznych $\mathbb{A}$ jest przeliczalny.
Zauważmy, że

$$\mathbb{A} = \{a \in \mathbb{R} : (\exists W \in \mathcal{W})\, W(a) = 0\} = \bigcup_{W\in\mathcal{W}} \{a \in \mathbb{R} : W(a) = 0\},$$

gdzie $\mathcal{W}$ jest zbiorem wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych. W poprzednim przykładzie pokazaliśmy, że zbiór $\mathcal{W}$ jest przeliczalny, wiemy ponadto, że każdy wielomian ma skończenie wiele miejsc zerowych. Zatem na mocy Wniosku 7.12 dostajemy, że $|\mathbb{A}| = \aleph_0$.

Rozumując podobnie, jak we Wniosku 7.8 możemy pokazać, że zbiór liczb przestępnych jest nieprzeliczalny. Jest ich zatem więcej niż liczb algebraicznych. Ten fakt może też przeczyć intuicji, bo w zasadzie jedynymi liczbami przestępnymi częściej spotykanymi są e i π.

7.2 Zbiory mocy continuum

Do tej pory poznaliśmy kilka przykładów zbiorów nieprzeliczalnych. Zajmiemy się teraz pewną klasą zbiorów nieprzeliczalnych, a mianowicie zbiorami równolicznymi ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. O takich zbiorach mówimy, że są mocy continuum (jeśli A jest takim zbiorem, to piszemy $|A| = \mathfrak{c}$).

Najpierw jednak udowodnimy lemat.

Lemat 7.13 *Dla dowolnego zbioru A mamy $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$.*

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $F : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ wzorem $F(B) = \chi_B$ (przypomnijmy, że χ_B to funkcja charakterystyczna zbioru B). Sprawdzenie, że F jest bijekcją jest prostym ćwiczeniem, które pozostawiamy Czytelnikowi. □

Sformułujemy teraz główne twierdzenie tego podrozdziału.

Twierdzenie 7.14 $|\mathbb{R}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w punktach.

1. Z Lematu 7.13 wynika, że $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

2. Ponieważ każdy ciąg zer i jedynek jest ciągiem liczb naturalnych, więc $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ponadto jeśli $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, to z definicji funkcji wynika, że $f \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Czyli $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Z Twierdzeń 6.2(c) i 7.5 wnioskujemy, że $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$. A zatem mamy
$$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$
Dzięki podpunktowi pierwszemu i Twierdzeniu Cantora-Bernsteina dostajemy $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

3. Pokażemy teraz, że $|\mathbb{R}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Podobnie jak przed chwilą, dzięki wykorzystaniu Twierdzeń 6.2(c) i 7.7 wystarczy nam udowodnić, że $|\mathbb{R}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$. W tym celu zdefiniujmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ wzorem $f(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Zauważmy, że f jest różnowartościowa. Istotnie, niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Bez zmniejszenia ogólności mogę założyć, że $x < y$. Ponieważ pomiędzy dowolnymi dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi zawsze możemy znaleźć liczbę wymierną, więc istnieje $q_0 \in \mathbb{Q}$, takie że $x < q_0 < y$. Ale wtedy $q_0 \notin f(x)$ i $q_0 \in f(y)$, czyli $f(x) \neq f(y)$. Zastosowanie Twierdzenia 6.4 daje żądaną nierówność.

4. Do zakończenia dowodu brakuje nam jeszcze jednej nierówności, a mianowicie $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \le |\mathbb{R}|$. By to zrobić, każdemu ciągowi zer i jedynek przypiszemy liczbę rzeczywistą, której kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego zgadzają się z kolejnymi wyrazami naszego ciągu. Bardziej formalnie, definiujemy funkcję $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ wzorem
$$f(\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle) = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots.$$
Jest to dobrze określona funkcja różnowartościowa, bo różne ciągi zadają różne rozwinięcia dziesiętne, a te z kolei wyznaczają różne liczby

rzeczywiste (dwa różne rozwinięcia dziesiętne mogą wprawdzie zadawać tą samą liczbę rzeczywistą, ale tylko gdy w jednym z nich od pewnego miejsca występuje cyfra 9, co w naszym wypadku oczywiście nie ma miejsca). Korzystając z Twierdzenia 6.4 otrzymujemy żądany wynik.

Zastosowanie Twierdzenia Cantora-Bernsteina do wyników z podpunktów trzeciego i czwartego (przy wykorzystaniu wyniku z podpunktu drugiego) kończy dowód. □

Zaskakującym wnioskiem z tego twierdzenia jest fakt, że punktów na prostej jest tyle samo, co punktów na płaszczyźnie (obserwacja ta wywołała spore kontrowersje wśród matematyków pod koniec XIX wieku). Do jego dowodu będziemy potrzebować dwa lematy.

Lemat 7.15 *Dla dowolnych zbiorów A, B i C, jeśli $B \sim C$, to*

$$A^B \sim A^C.$$

Dowód. Niech $\varphi : B \xrightarrow[na]{1-1} C$ będzie funkcją ustalającą równoliczność. Zdefiniujemy funkcję $F : A^B \to A^C$ wzorem $F(f) = f \circ \varphi^{-1}$. Dla dowolnych funkcji $f_1, f_2 : B \to A$ takich, że $f_1 \neq f_2$ jest $x \in B$, dla którego $f_1(x) \neq f_2(x)$. Ale mamy $\varphi(x) = y \in C$ i dalej

$$f_1 \circ \varphi^{-1}(y) = f_1(x) \neq f_2(x) = f_2 \circ \varphi^{-1}(y),$$

czyli $F(f_1) \neq F(f_2)$. Zatem funkcja F jest różnowartościowa.

Jeśli teraz mamy dowolne $g : C \to A$, to definiując $f : B \to A$ wzorem $f(x) = g \circ \varphi$ dostajemy $F(f) = (g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = g$. Czyli funkcja F jest „na", co kończy dowód. □

Lemat 7.16 *Dla dowolnych zbiorów A, B i C, jeśli $B \cap C = \emptyset$, to*

$$A^B \times A^C \sim A^{B \cup C}.$$

Dowód. Rozpatrzmy funkcję $F : A^{B \cup C} \to A^B \times A^C$ zadaną wzorem

$$F(f) = \langle f \restriction B, f \restriction C \rangle.$$

Funkcja ta jest dobrze zdefiniowana, bo $\mathrm{dom}(f) = B \cup C$, więc możemy określić odpowiednie obcięcia. Pokażemy, że funkcja F jest bijekcją. Weźmy w tym celu dwie funkcje $f_1, f_2 : B \cup C \to A$, takie że $f_1 \neq f_2$. Oznacza to, że jest $x \in B \cup C$ taki, że $f_1(x) \neq f_2(x)$. Jeśli teraz $x \in B$, to mamy $f_1 \restriction B \neq f_2 \restriction B$, a jeśli $x \in C$, to wtedy $f_1 \restriction C \neq f_2 \restriction C$. W obu wypadkach mamy $F(f_1) \neq F(f_2)$, czyli funkcja F jest injekcją.

Ustalmy teraz dowolne $\langle g,h\rangle \in A^B \times A^C$. Mamy zatem $g : B \to A$ i $h : C \to A$. Zdefiniujmy teraz $f : B \cup C \to A$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{jeśli } x \in B \\ h(x) & \text{jeśli } x \in C \end{cases}.$$

Fakt, że jest to dobrze zdefiniowana funkcja wynika z rozłączności zbiorów B i C. Ponadto prostym rachunkiem możemy sprawdzić, że $F(f) = \langle g,h\rangle$. Czyli funkcja F jest surjekcją, co kończy dowód. □

Twierdzenie 7.17 $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Dowód. Oznaczmy przez P zbiór liczb naturalnych parzystych. Wiemy już, że $|P| = |\mathbb{N} \setminus P| = |\mathbb{N}|$. Z Lematu 7.15 i Twierdzenia 7.14 mamy zatem $|\{0,1\}^P| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}\setminus P}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Teraz dzięki Twierdzeniu 6.2(a) i Lematowi 7.16 dostajemy

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \{0,1\}^P \times \{0,1\}^{\mathbb{N}\setminus P} \sim \{0,1\}^{P\cup(\mathbb{N}\setminus P)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R},$$

co należało dowieść. □

Podobnie jak w wypadku Wniosku 7.6, także i ten poniższy ma natychmiastowy dowód.

Wniosek 7.18 *Iloczyn kartezjański dwóch (skończenie wielu) zbiorów mocy continuum jest zbiorem mocy continuum.* □

Wiemy już, że zbiór liczb niewymiernych jest nieprzeliczalny. Okazuje się, że można pokazać więcej, mianowicie, że jest on mocy continuum. Dowód jest jednak istotnie trudniejszy od dowodu nieprzeliczalności tego zbioru.

Twierdzenie 7.19 *Zbiór liczb niewymiernych jest mocy continuum.*

Dowód. Ustalmy najpierw dowolną bijekcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (istnieje ona na mocy Twierdzenia 7.17). Niech $A = f[\mathbb{Q}]$. Oczywiście $|A| = \aleph_0 < |\mathbb{R}|$ oraz $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |f[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]| = |(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A|$.

Rozważmy teraz funkcję rzutowania na pierwszą oś

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}, \quad \pi(x,y) = x.$$

Ponieważ $|\pi[A]| \leq |A| < |\mathbb{R}|$, więc $\pi[A] \neq \mathbb{R}$ i istnieje $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \pi[A]$. Wtedy $\{x_0\} \times \mathbb{R} \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A$. Czyli

$$\mathfrak{c} = |\{x_0\} \times \mathbb{R}| \leq |(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$

Dzięki Twierdzeniu Cantora-Bernsteina mamy $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A| = \mathfrak{c}$, co należało dowieść. $\square$

Dla kontrastu pokażemy, że inny bardzo często spotykany (zwłaszcza na wykładzie z Analizy Matematycznej) zbiór nieprzeliczalny nie jest mocy continuum. Chodzi o zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wszystkich funkcji rzeczywistych. Istotnie, zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.20 $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| > \mathfrak{c}$.

Dowód. Argumentując dokładnie tak samo, jak w dowodzie pierwszych dwóch podpunktów Twierdzenia 7.14 otrzymujemy

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|.$$

Zastosowanie Twierdzenia Cantora-Bernsteina (i Twierdzenia Cantora) kończy dowód. $\square$

A zatem funkcji rzeczywistych jest więcej niż liczb rzeczywistych. Jednak i tu czeka na nas pewna niespodzianka. Na Analizie Matematycznej bardzo często pojawiają się funkcje ciągłe, co może sugerować, że są one w większości wśród wszystkich funkcji rzeczywistych. Okazuje się, że i ta intuicja jest błędna – funkcji ciągłych jest tylko continuum, czyli tak naprawdę malutko w porównaniu do ilości wszystkich funkcji rzeczywistych. Dowód tego faktu pozostawimy jako zadanie dla zainteresowanych Czytelników.

Na zakończenie tego rozdziału postawmy sobie jeszcze jedno pytanie. Jak zauważyliśmy, wszystkie pojawiające się do tej pory zbiory nieprzeliczalne miały moc co najmniej continuum. Czy zatem można znaleźć zbiór nieprzeliczalny mocy *mniejszej* niż continuum? Zauważmy, że gdyby taki zbiór nie istniał, to każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych byłby co najwyżej przeliczalny albo miał moc continuum.

Hipotezę, że tak właśnie jest, czyli, że każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma moc continuum sformułował w XIX wieku Cantor i nazwał ją *Hipotezą Continuum*. Przez wiele lat próbowano jej dowieść albo ją obalić, znajdując nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych mocy mniejszej niż continuum. Wszystkie te próby okazały się bezowocne. Po latach okazało się, że przyczyny tych niepowodzeń są bardzo głębokie. Pokazano bowiem, że na gruncie powszechnie przyjętej formalizacji matematyki (o której na tym wykładzie nie mówimy) na to pytanie po prostu nie da się odpowiedzieć. Mówiąc obrazowo, są takie „światy matematyczne”, gdzie cała „zwykła” matematyka jest taka, jaką ją znamy i takie zbiory nie istnieją (czyli Hipoteza Continuum jest prawdziwa), ale są też inne, z naszego punktu widzenia równie dobre „światy”, gdzie takie zbiory są (czyli Hipoteza Continuum jest fałszywa). W związku z tym nie da się udzielić żadnej jednoznacznej odpowiedzi na pytanie o prawdziwość Hipotezy Continuum, która obowiązywałaby we wszystkich „światach”.

7.3 Zadania

1. Udowodnić, że funkcja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadana wzorem

$$f(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$$

   jest bijekcją.

2. Pokazać, że suma zbioru przeliczalnego i zbioru co najwyżej przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.

3. Udowodnić Wniosek 7.6.

4. Pokazać, że obraz zbioru przeliczalnego względem dowolnej funkcji jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Czy to samo można powiedzieć o przeciwobrazie?

5. Udowodnić Wniosek 7.10.

6. Udowodnić Wniosek 7.11.

7. Udowodnić Wniosek 7.12.

8. Niech $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Wskazać zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$, taki że

$$|P \cap X| = |X \setminus P| = |\mathbb{N} \setminus X| = \aleph_0.$$

9. Pokazać, że poniższe zbiory są co najwyżej przeliczalne.

   (a) Zbiór $\mathcal{S}$ wszystkich kół na płaszczyźnie o promieniach wymiernych i środkach w punktach o obu współrzędnych wymiernych.

   (b) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$.

   (c) Zbiór parami rozłącznych kół na płaszczyźnie.

   (d) Zbiór skończonych ciągów liczb naturalnych.

   (e) Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych stopnia 5.

   (f) Zbiór punktów nieciągłości monotonicznej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(g) Zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru przeliczalnego.

(h) Zbiór parami rozłącznych liter T narysowanych na płaszczyźnie.

Które z tych zbiorów sa przeliczalne? Które mogą być przeliczalne?

10. Pokazać, że zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych ustalonego stopnia n jest przeliczalny.

11. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pokazać, że $|\mathrm{rng}(f)| = \aleph_0$ lub istnieje taka liczba naturalna n, że $|f^{-1}[n]| = \aleph_0$.

12. Jak dużej mocy może być rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ taka, że
$$(\forall A, B \in \mathcal{A})(A \subseteq B \vee B \subseteq A)?$$

13. Jaka dużej mocy może być rodzina parami rozłącznych podzbiorów zbioru liczb naturalnych?

14. Czy istnieje zbiór A taki, że $|\mathcal{P}(A)| = \aleph_0$?

15. Udowodnić Lemat 7.13.

16. Udowodnić Wniosek 7.18.

17. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D mamy

(a) Jeśli $A \sim B$ i $C \sim D$, to $A^C \sim B^D$.

(b) $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.

(c) $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$.

18. Pokazać, że dla dowolnych zbiorów A i B jeśli $|A| = \mathfrak{c}$ i $|B| < \mathfrak{c}$, to $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

19. Udowodnić, że następujące zbiory mają moc continuum.

(a) Podzbiór zbioru liczb rzeczywistych zawierający przedział otwarty.

(b) $A \times B$, gdzie A ma moc continuum, a B jest przeliczalny.

(c) $\mathbb{R}^4$.

(d) $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

(e) Zbiór liczb przestępnych.

(f) Koło na płaszczyźnie o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1.

(g) Okrąg na płaszczyźnie o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1.

(h) Zbiór skończonych podzbiorów liczb rzeczywistych.

(i) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (czyli zbiór wszystkich ciągów liczb rzeczywistych).

20. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D jeśli $A \sim C$, $B \sim D$ oraz $B \subseteq A$, $D \subseteq C$, to $A \setminus B \sim C \setminus D$.

21. Pokazać, że zbiór $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ jest ciągła}\}$ ma moc continuum (**Wskazówka:** Każda funkcja ciągłą jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na zborze liczb wymiernych).

22. Udowodnić, że istnieje rodzina zbiorów przeliczalnych $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, która jest mocy continuum oraz taka, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{A}$ przekrój $A \cap B$ jest skończony.

23. Niech $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ będzie dowolną rodziną zbiorów przeliczalnych. Pokaż, że istnieje rodzina $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ zbiorów przeliczalnych parami rozłącznych, taka że $(\forall n \in \mathbb{N})\, B_n \subseteq A_n$.

Rozdział 8

Indukcja matematyczna i rekursja

Indukcja matematyczna jest bardzo ważną i często stosowaną metodą dowodzenia twierdzeń dotyczących szeroko rozumianych własności liczb naturalnych, zaś rekursja jest blisko z nią związaną metodą służącą do definiowania obiektów. Zarówno z indukcją, jak i z rekursją spotykamy się w matematyce często, choć niejednokrotnie nieświadomie. W wielu definicjach przeprowadzanych pozornie bez użycia indukcji jest ona jednak ukryta pod napisami typu „. . .” lub sformułowaniami typu „i tak dalej”. Podobnie bywa w sytuacji, gdy zastępujemy dowód używający jawnie indukcji matematycznej przez inny, jakoby się do tej zasady nie odwołujący – najczęściej jest ona po prostu „ukryta”.

8.1 Indukcja matematyczna

Kanoniczna postać Zasady Indukcji Matematycznej jest następująca.

Twierdzenie 8.1 (Zasada Indukcji Matematycznej) *Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową o zakresie zmiennej $x \in \mathbb{N}$. Wtedy jeśli*

(a) $\varphi(0)$ *oraz*

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$,

to $(\forall n \in \mathbb{N})\, \varphi(n)$. □

Formalny dowód pomijamy, ponieważ wymaga on użycia formalnej definicji liczb naturalnych, której nie będziemy wprowadzać. Inny dowód wykorzystuje fakt, że zbiór liczb naturalnych (ze zwykłym porządkiem) jest dobrze uporządkowany [1], którego dowód jednak też sprowadza się do formalnej definicji liczb naturalnych. Intuicyjnie natomiast zasada ta jest dość oczywista – jeśli chcemy pokazać, że dla dowolnego ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}$ prawdziwe jest $\varphi(n_0)$, to zaczynamy od $\varphi(0)$ (które jest prawdziwe) i po zrobieniu n_0 kroków (na każdym kroku korzystając z warunku drugiego) dostajemy prawdziwość $\varphi(n_0)$.

Zatem wykazanie, że pewna własność φ jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych polega na sprawdzeniu dwóch założeń Zasady Indukcji Matematycznej. Warunek (b) nazywamy często *krokiem indukcyjnym*.

Z Zasady Indukcji Matematycznej można wyprowadzić szereg jej wariantów (co powinno być dla nas dość oczywiste, jeśli zrozumieliśmy powyższą intuicyjną interpretację), takich jak

Jeśli $\varphi(c)$ *i* $(\forall n \geq c)(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$, *to* $(\forall n \geq c)\, \varphi(n)$.

Jeśli $\varphi(0) \wedge \varphi(1)$ *i* $(\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+2))$, *to* $(\forall n \in \mathbb{N})\, \varphi(n)$.

Jeśli $\varphi(0)$ *i* $(\forall n \in \mathbb{N})((\forall k < n)\, \varphi(k) \Rightarrow \varphi(n))$, *to* $(\forall n \in \mathbb{N})\, \varphi(n)$.[2]

Zdarzają się rozumowania oparte o bardziej skomplikowane schematy, np.

Jeśli $\psi(0,0)$ *oraz dla dowolnych* $m, n \in \mathbb{N}$ *z prawdziwości zdania* $\psi(m,n)$ *wynika prawdziwość zdań* $\psi(m+1,n)$ *i* $\psi(m,n+1)$, *to zdanie* $\psi(m,n)$ *jest prawdziwe dla wszystkich* $m, n \in \mathbb{N}$.

Przyjrzyjmy się teraz typowym zastosowaniom Zasady Indukcji Matematycznej.

Przykłady

1. (Nierówność Bernoulliego) Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $x > -1$ mamy $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

   W tym wypadku $\varphi(n) = (\forall x > -1)((1+x)^n \geq 1 + nx)$.

   (a) Niech n=0. Wtedy dla dowolnego $x > -1$ mamy

   $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x$, czyli $\varphi(0)$ zachodzi.

---

[1] Własność ta nazywana jest też Zasadą Minimum i tak naprawdę jest równoważna Zasadzie Indukcji Matematycznej.

[2] Ten wariant nazywa się czasem Zasadą Indukcji Porządkowej. W tym wypadku nietrudno pokazać, że założenie $\varphi(0)$ można opuścić, jest ono i tak „schowane” w drugiej części założenia.

(b) Krok indukcyjny. Przypuśćmy[3], że zachodzi $\varphi(n)$. Chcemy pokazać, że prawdą jest $\varphi(n+1) = (\forall x > -1)((1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x)$. Istotnie, dla dowolnego $x > -1$ mamy

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq \\ \geq 1 + (n+1)x,$$

przy czym pierwsza z nierówności to zastosowanie założenia indukcyjnego.

Z Zasady Indukcji Matematycznej wnioskujemy, że $\varphi(n)$ jest prawdziwe dla dowolnego naturalnego n, co należało dowieść.

2. Dla dowolnego zbioru skończonego X mamy $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Zastosujemy indukcję matematyczną względem ilości elementów zbioru X. Czyli $\varphi(n) = (\forall X)(|X| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n)$.

(a) Niech n=0. Ale $|X| = 0$ oznacza, że $X = \emptyset$, czyli $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ i $|\mathcal{P}(X)| = 1 = 2^0$, zatem $\varphi(0)$ zachodzi.

(b) Krok indukcyjny. Przypuśćmy, że dla dowolnego zbioru n-elementowego ilość jego podzbiorów wynosi 2^n. W celu pokazania $\varphi(n+1)$ weźmy dowolny zbiór X, taki że $|X| = n + 1$. Ustalmy dowolne $a \in X$. Niech $X' = X \setminus \{a\}$ (oczywiście, $|X'| = n$). Mamy

$$\mathcal{P}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : a \in X\} \cup \{A \in \mathcal{P}(X) : a \notin X\} = \\ = \{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}(X')\} \cup \mathcal{P}(X').$$

Ponieważ zbiory $\{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}(X')\}$ i $\mathcal{P}(X')$ są rozłączne oraz $|\{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}(X')\}| = |\mathcal{P}(X')|$, to

$$|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(X')| + |\mathcal{P}(X')| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

co należało pokazać.

Tak jak poprzednio, powołanie się na Zasadę Indukcji Matematycznej kończy dowód.

Wykorzystamy teraz indukcję matematyczną do dowodu twierdzenie z Rozdziału 5, który opuściliśmy.

[3] To przypuszczenie nazywamy *założeniem indukcyjnym* (co można uznać za skrót od „założenie kroku indukcyjnego”).

Twierdzenie 8.2 *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie niepustym skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy w X istnieje element maksymalny.*

Dowód. Zastosujemy indukcję matematyczną względem ilości elementów skończonego zbioru częściowo uporządkowanego. Dla uproszczenia, X będzie zawsze oznaczało zbiór częściowo uporządkowany przez relację $\leq$. Wtedy

$$\varphi(n) = (\forall X)(|X| = n \Rightarrow \text{ w } X \text{ istnieje element maksymalny}).^4$$

Ponieważ $X \neq \emptyset$, to indukcję zaczynamy od $n = 1$. Ale dla zbiorów jednoelementowych istnienie elementu maksymalnego jest trywialne. Pozostaje zatem krok indukcyjny.

Zakładamy, że $\varphi(k)$ jest prawdziwe dla wszystkich $k < n$. Weźmy dowolny porządek $\langle X, \leq \rangle$, taki że $|X| = n$. Ustalmy dowolne $a \in X$. Jeśli a jest elementem maksymalnym w X, to koniec. Jeśli nie, to rozważmy obcięcie porządku $\leq$ do zbioru $X' = \{x \in X : a < x\}$. Ponieważ $a \notin X'$, to mamy $|X'| < |X| = n$ i na mocy założenia indukcyjnego istnieje element maksymalny w X'. Z definicji zbioru X' wynika, że jest on elementem maksymalnym także w X.

Zatem na mocy Zasady Indukcji Porządkowej $\varphi(n)$ jest prawdziwe dla dowolnego naturalnego n. □

Przyjrzymy się teraz trzem pouczającym przykładom[5].

Przykłady

1. Pokażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110. \tag{$*$}$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

(a) Dla n=0 sprawdzamy bezpośrednio: $0 < 2^0 + 110 = 111$.

(b) Zakładamy teraz, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < \\ < 2^{n+1} + 110,$$

[4]Formalnie $\varphi(n) = (\forall X)(|X| = n \Rightarrow (\exists a \in X)(\forall x \in X)\neg(a < x))$.

[5]Pierwszy z nich pochodzi ze zbiorów dr. J. Wróblewskiego.

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geq 5$. Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geq 5$. Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 1$ mamy $30 < 2^1 + 110 = 112$,
dla $n = 2$ mamy $60 < 2^2 + 110 = 114$,
dla $n = 3$ mamy $90 < 2^3 + 110 = 118$,
dla $n = 4$ mamy $120 < 2^4 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność $(*)$ została udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n. W szczególności dla $n = 6$ otrzymujemy $180 < 174$.

2. Pokażemy, że każda liczba naturalna postaci $2n + 1$ jest parzysta.

   Załóżmy, że $2n + 1$ jest parzyste, czyli istnieje $k \in \mathbb{N}$, że $2n + 1 = 2k$. Pokażemy, że $2(n + 1) + 1$ jest parzyste. Istotnie,

   $$2(n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1),$$

   co kończy dowód indukcyjny.

3. Uzasadnimy, że wszystkie koty na świecie są tego samego koloru[6]. Najpierw sformalizujemy problem. Niech K oznacza zbiór kotów. Dla każdego kota $x \in K$ niech $k(x)$ oznacza jego kolor. Przyjmijmy

   $$\varphi(n) = (\forall X \subseteq K)(|X| = n \Rightarrow (\forall x, y \in X)\, k(x) = k(y)),$$

   czyli formuła $\varphi(n)$ stwierdza, że jeśli mamy dowolny zbiór n kotów, to są one tego samego koloru. Wystarczy zatem indukcyjnie pokazać, że $(\forall n \in \mathbb{N}^+)\, \varphi(n)$.

   (a) $\varphi(1)$ jest spełnione trywialnie.

   (b) Krok indukcyjny. Załóżmy, że zachodzi $\varphi(n)$. Niech $X \subseteq K$ będzie dowolnym zbiorem kotów, takim że $|X| = n+1$. Ustalmy dowolne $a \in X$ i niech $X' = X \setminus \{a\}$. Wtedy $|X'| = n$, zatem z założenia indukcyjnego wszystkie koty w zbiorze X' są tego samego koloru. Pozostaje sprawdzić kolor kota a. W tym celu weźmy $b \in X$, $b \neq a$ i niech $X'' = X \setminus \{b\}$. Podobnie jak poprzednio wszystkie koty w zbiorze X'' są tego samego koloru oraz $a \in X''$, zatem widzimy, że kot a ma taki sam kolor jak pozostałe koty w zbiorze X, co należało pokazać.

   Powołanie się na Zasadę Indukcji Matematycznej kończy dowód.

[6] Jest również dowód, że wszystkie koty są czarne, który jest podobny, ale nie identyczny.

Wszystkie powyższe „rozumowania indukcyjne” mają jedną wspólną cechę – są nieprawdziwe. Ilustrują one typowe błędy, wynikające z niezrozumienia istoty indukcji matematycznej.

W pierwszym przykładzie sprawdziliśmy, że nierówność jest prawdziwa dla $n \leq 4$ oraz, że krok indukcyjny da się wykonać dla $n \geq 5$. Niestety, te dwa prawdziwe fakty nie składają się w jedną całość. Nie da się bowiem „wykonać kroku” z 4 do 5 – do tego niezbędna jest prawdziwość kroku indukcyjnego dla $n \geq 4$.

W drugim przykładzie oczywiście nie sprawdzono, czy teza zachodzi dla n=0. A jak wiadomo, nie zachodzi.

W przewrotnym przykładzie trzecim (dobrze opowiedziany stanowi trudną zagadkę) nie da się wykonać kroku indukcyjnego dla $n = 2$. Istotnie, wtedy zbiory X' i X'' są rozłączne, czyli końcowy wniosek nie jest poprawny.

8.2 Rekursja

O ile indukcja matematyczna jest metodą dowodzenia twierdzeń, tak rekursja jest metodą definiowania obiektów. Najczęściej będą to funkcje, których dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, czyli ciągi. Definicja taka (zwana definicją rekurencyjną[7]) polega na podaniu początkowego wyrazu (lub kilku początkowych wyrazów) ciągu oraz określeniu, w jaki sposób otrzymywać wyrazy późniejsze znając wyrazy wcześniejsze.

Podstawowy schemat definiowania rekurencyjnego dla ciągu a_n wygląda zatem następująco.

- Określamy wartość a_0.
- Zakładając, że znamy już wartości $a_0, \ldots, a_n$ określamy metodę wyznaczenia wartości a_{n+1}.

Nie będziemy ściślej formalizować pojęcia definicji rekurencyjnej, tym bardziej, że podobnie jak w przypadku Zasady Indukcji Matematycznej ma ona różne warianty. Zamiast tego przyjrzymy się kilku przykładom, mając świadomość istnienia twierdzenia, które mówi, że ten sposób definiowania jest poprawny i otrzymany ciąg jest wyznaczony jednoznacznie.

Przykłady

1. Funkcję *silnia* definiujemy następująco:

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= (n+1) \cdot a_n \end{cases}.$$

[7] Lub definicją indukcyjną.

Wtedy $a_n = n!$.

2. Klasycznym przykładem obiektu definiowanego rekurencyjnie jest *ciąg Fibonacciego*, określony warunkami

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+2} & = & a_{n+1} + a_n \end{cases}.$$

3. Mając dane zbiory $A_0, \ldots, A_m$ możemy zdefiniować ich sumę korzystając z następującego schematu (oczywiście konstrukcja ma sens tylko dla $n < m$).

$$\begin{cases} a_0 & = & A_0 \\ a_{n+1} & = & a_n \cup A_{n+1} \end{cases}.$$

Wtedy $a_m = A_0 \cup \ldots \cup A_m$. W analogiczny sposób możemy zdefiniować przekrój skończonej ilości zbiorów.

Można się zapytać, po co tak udziwniać. Otóż w ten sposób kropki w napisie $A_0 \cup \ldots \cup A_m$ przestają być „machaniem rękami", a stają się porządnym bytem matematycznym. Oczywiście, w praktyce matematycznej „kropki" pojawiają się często, jednak zawsze, gdy się ich używa, powinno się umieć napisać odpowiednią „porządną" definicję rekurencyjną.

Oczywiście, indukcja matematyczna i rekursja mają ze sobą bardzo dużo wspólnego. Obiekty zdefiniowane rekurencyjnie są jakby „stworzone" do dowodów indukcyjnych. Przyjrzyjmy się poniższemu przykładowi.

Przykład Niech $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Fibonacciego. Pokażemy indukcyjnie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Łatwo sprawdzić, że dla $n = 0$ i $n = 1$ powyższa równość zachodzi. Załóżmy teraz, że zachodzi ona dla n i $n+1$. Pokażemy, że zachodzi także dla $n+2$.

Zauważmy najpierw, że liczby $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ są dwoma pierwiastkami równania $x^2 = x + 1$. Z definicji mamy

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \tfrac{\sqrt{5}}{2}(a^n - b^n) + \tfrac{\sqrt{5}}{2}(a^{n+1} - b^{n+1}) = \tfrac{\sqrt{5}}{2}(a^{n+1} + a^n) - \tfrac{\sqrt{5}}{2}(b^{n+1} + b^n) = \\ &= \tfrac{\sqrt{5}}{2}[a^n(a+1) - b^n(b+1)] = \tfrac{\sqrt{5}}{2}[a^n \cdot a^2 - b^n \cdot b^2] = \tfrac{\sqrt{5}}{2}(a^{n+2} - b^{n+2}), \end{aligned}$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego. Wystarczy już tylko powołać się na Zasadę Indukcji Matematycznej.

Na zakończenie przedstawimy dowód twierdzenia z Rozdziału 7, w którym użyjemy zarówno indukcji, jak i rekursji. Dowód ten może wydawać się dziwny. Przy bardziej dokładnym podejściu do matematyki jest on jednak niezbędny i może być przykładem na to, że udowodnienie faktu intuicyjnie oczywistego może być dość zawikłane i nietrywialne.

Twierdzenie 8.3 *Zbiór X jest skończony* $\Leftrightarrow |X| < |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Dowód. Wprowadźmy oznaczenie $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Udowodnimy dwa wynikania.

$(\Rightarrow)$ Załóżmy, że zbiór X jest skończony. Jeśli $X = \emptyset$, to teza jest oczywista. Możemy zatem przyjąć, że $X \neq \emptyset$, czyli istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $X \sim A_n$. Zauważmy najpierw, że wystarczy pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $|A_n| < |\mathbb{N}|$. Ponieważ $A_n \subseteq \mathbb{N}$, czyli $|A_n| \leq |\mathbb{N}|$, to (dzięki Twierdzeniu 6.4) wystarczy pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nie istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} A_n$. To zaś pokażemy indukcyjnie [8].

Dla $n = 1$ teza jest spełniona trywialnie (bo $\mathbb{N}$ ma więcej niż jeden element). Załóżmy teraz, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} A_n$ i przypuśćmy nie wprost, że istnieje $g : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} A_{n+1}$. Z założenia indukcyjnego wynika, że $n + 1 \in \mathrm{rng}(g)$. Niech $a \in \mathbb{N}$ będzie (jedyną) liczbą naturalną, taką że $g(a) = n + 1$. Rozważmy funkcję $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{a\}$ zadaną wzorem

$$h(n) = \begin{cases} n & \text{dla } n < a \\ n+1 & \text{dla } n \geq a \end{cases} .$$

Łatwo sprawdzić, że jest to bijekcja. Ponieważ funkcja $g' = g \restriction (\mathbb{N} \setminus \{a\})$ jest injekcją (jako obcięcie injekcji), to funkcja $g' \circ h : \mathbb{N} \to A_n$ jest injekcją (jako złożenie injekcji), co jest sprzeczne z założeniem indukcyjnym. Powołanie się na Zasadę Indukcji Matematycznej kończy dowód.

$(\Leftarrow)$ Załóżmy, że $|X| < |\mathbb{N}|$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $X \subseteq \mathbb{N}$, zatem zakładamy, że nie istnieje injekcja $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} X$. Przypuśćmy nie wprost, że X jest niepusty i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $X \not\sim A_n$. Zdefiniujemy rekurencyjnie funkcję $g : \mathbb{N} \to X$.

1. Ustalmy dowolne $a \in X$ (można, bo $X \neq \emptyset$) i połóżmy $g(0) = a_0$.

[8] Czyli $\varphi(n) = \neg(\exists f)(f : \mathbb{N} \to A_n \wedge f \text{ jest } 1-1)$.

2. Przypuśćmy, że $n > 0$ i wartości $g(0), \ldots, g(n-1)$ zostały już zdefiniowane oraz są one różne. Ponieważ $\{g(0), \ldots, g(n-1)\} \sim A_n$, zatem $X \neq \{g(0), \ldots, g(n-1)\}$. Ustalmy dowolne $b \in X \setminus \{g(0), \ldots, g(n-1)\}$ i połóżmy $g(n) = b$.

Otrzymana w ten sposób funkcja jest różnowartościowa, co pozostaje w sprzeczności z założeniem. □

8.3 Zadania

1. Udowodnić przez indukcję następujące twierdzenia.
   (a) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = n(2n-1)$;
   (b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ dla $n \geq 1$;
   (c) $6|(n^3 + 5n)$;
   (d) $100n < 2^n + 577$;
   (e) $10n < (3 + (-1)^n)^n + 23$.

2. Niech $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Fibonacciego. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

3. Niech B będzie dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{N}$, natomiast f – funkcją z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ taką, że dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi $f(X) \subseteq X$. Niech $\langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rekurencyjnie zdefiniowanym ciągiem zbiorów:
$$\begin{cases} A_0 &= B \\ A_{n+1} &= A_n \setminus f(A_n) \end{cases}.$$
   (a) Udowodnij, że ciąg $\langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępujący, czyli $(\forall n \in \mathbb{N})\, A_{n+1} \subseteq A_n$.
   (b) Załóżmy dodatkowo, że dla dowolnego niepustego $X \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi $f(X) \neq X$. Udowodnij, że $(\forall n \in \mathbb{N})\, A_n \neq \emptyset$.

4. Niech U będzie niepustym zbiorem, a $f : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ taką funkcją, że dla dowolnych $X, Y \subseteq U$ jeśli $X \subseteq Y$, to $f(X) \subseteq f(Y)$. Niech $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ będzie rekurencyjnie zdefiniowanym ciągiem zbiorów:
$$\begin{cases} A_0 &= \emptyset \\ A_{n+1} &= f(A_n) \end{cases}.$$
   Udowodnić, że $(\forall n \in \mathbb{N})\, A_n \subseteq A_{n+1}$.

5. Niech U będzie dowolnym zbiorem, niech $B \subseteq U$ oraz $f : U \to U$. Niech $\langle A_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rekurencyjnie zdefiniowanym ciągiem zbiorów:

$$\begin{cases} A_0 &= B \\ A_{n+1} &= A_n \cap f[A_n] \end{cases} .$$

   (a) Pokaż, że $(\forall n \in \mathbb{N})\, A_n \subseteq B$.

   (b) Udowodnij, że jeśli $x \in B$ oraz $f(x) = x$, to $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

   (c) Wykaż, że odwrotna implikacja do tej z punktu (b) nie musi zachodzić.

Rozdział 9

Kilka trudniejszych dowodów

Przedstawimy teraz kilka trudniejszych rozumowań, które opuściliśmy we wcześniejszych rozdziałach.

Zaczniemy od dowodu Twierdzenia Cantora-Bernsteina, o którym mówiliśmy w Rozdziale 6. Wykorzystamy w nim następujący lemat.

Lemat 9.1 (Banach-Tarski, o punkcie stałym) *Niech* $X \neq \emptyset$ *i niech* $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *będzie funkcją rosnącą, czyli*

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(X))(A \subseteq B \Rightarrow F(A) \subseteq F(B)).$$

Wtedy istnieje $A_0 \in \mathcal{P}(X)$ *takie, że*

$$F(A_0) = A_0.$$

Dowód. Rozważmy rodzinę $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(X) : F(A) \subseteq A\}$. Ponieważ $F(X) \subseteq X$, zatem rodzina $\mathcal{S}$ jest niepusta. Niech

$$A_0 = \bigcap \mathcal{S}.$$

Pokażemy, że jest to zbiór, którego szukamy, czyli że $F(A_0) = A_0$.

Z definicji przekroju uogólnionego wynika, że $(\forall A \in \mathcal{S})\, A_0 \subseteq A$. Ale funkcja F jest rosnąca, więc (korzystając też z definicji rodziny $\mathcal{S}$) mamy $(\forall A \in \mathcal{S})(F(A_0) \subseteq F(A) \subseteq A)$. Czyli

$$F(A_0) \subseteq \bigcap \mathcal{S} = A_0,$$

zatem $A_0 \in \mathcal{S}$, co oznacza, że $F(A_0) \subseteq A_0$.

Dalej, dla dowolnego $A \in \mathcal{S}$ mamy $F(A) \subseteq A$, zatem $F(F(A)) \subseteq F(A)$. Ale to oznacza, że $F(A) \in \mathcal{S}$. W szczególności mamy $F(A_0) \in \mathcal{S}$, co pociąga $A_0 = \bigcap \mathcal{S} \subseteq F(A_0)$, co było do udowodnienia. □

Twierdzenie 9.2 (Cantor-Bernstein) *Dla dowolnych zbiorów X i Y, jeśli $|X| \leq |Y|$ i $|Y| \leq |X|$, to $|X| = |Y|$.*

Dowód. Z założenia i Twierdzenia 6.4 wiemy, że istnieją funkcje $f : X \xrightarrow{1-1} Y$ i $g : Y \xrightarrow{1-1} X$. Naszym celem jest znalezienie bijekcji $h : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$.

Rozważamy funkcję pomocniczą $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ zadaną wzorem

$$F(A) = X \setminus g[Y \setminus f[A]].$$

Dla dowolnych $A, A' \subseteq X$ prawdziwe jest następujące rozumowanie:

$$\begin{aligned} A \subseteq A' &\Rightarrow f[A] \subseteq f[A'] \Rightarrow Y \setminus f[A] \supseteq Y \setminus f[A'] \Rightarrow \\ &\Rightarrow g[Y \setminus f[A]] \supseteq g[Y \setminus f[A']] \Rightarrow \\ &\Rightarrow X \setminus g[Y \setminus f[A]] \subseteq X \setminus g[Y \setminus f[A']] \Leftrightarrow F(A) \subseteq F(A'), \end{aligned}$$

zatem funkcja F jest rosnąca. Zgodnie z Lematem o punkcie stałym istnieje $A_0 \subseteq X$, takie że $F(A_0) = A_0$, czyli

$$A_0 = X \setminus g[Y \setminus f[A_0]].$$

Przyjmijmy

$$A_1 = X \setminus A_0 = g[Y \setminus f[A_0]]$$

oraz $B_0 = f[A_0]$ i $B_1 = Y \setminus B_0$. Łatwo spostrzec, że $g[B_1] = A_1$. Zdefiniujmy teraz

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A_0 \\ g^{-1}(x) & \text{dla } x \in A_1 \end{cases}.$$

Jest to funkcja dobrze określona, bo $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Ponadto jest bijekcją, co w prosty sposób wynika z faktu, że bijekcjami są funkcje $f \restriction A_0 : A_0 \xrightarrow[na]{1-1} B_0$ oraz $g \restriction B_1 : B_1 \xrightarrow[na]{1-1} A_1$. □

W Rozdziale 5 wspomnieliśmy o Lemacie Kuratowskiego-Zorna[1] jako o twierdzeniu zapewniającym istnienie (w pewnych warunkach) elementu maksymalnego w częściowym porządku. Nadszedł czas, by go sformułować.

Lemat 9.3 (Kuratowski-Zorn) *Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie niepustym zbiorem częściowo uporządkowanym. Załóżmy ponadto, że każdy łańcuch $A \subseteq X$ ma ograniczenie górne w X. Wtedy w zbiorze X istnieje element maksymalny.*

□

[1] Zwanym też Lematem Zorna.

Pomijamy dowód, ponieważ wykracza on poza ramy tego wykładu[2]. Jest on związany z jednym z aksjomatów[3] Teorii Mnogości[4] – Aksjomatem Wyboru. Można nawet udowodnić, że Lemat Kuratowskiego-Zorna i Aksjomat Wyboru są sobie równoważne.

Czym jest Aksjomat Wyboru? Jest to zdanie

$$(\forall \mathcal{A} \neq \emptyset)((\forall A, B \in \mathcal{A})(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (\exists S)(\forall A \in \mathcal{A})|A \cap S| = 1),$$

które mówi, że dla każdej niepustej rozłącznej rodziny zbiorów niepustych istnieje selektor, czyli zbiór, który z każdym elementem tej rodziny ma dokładnie jeden punkt wspólny. Wydaje się, że istnienie selektora jest postulatem jak najbardziej naturalnym. Istotnie, w wielu dowodach w matematyce korzysta się z Aksjomatu Wyboru – np. my użyliśmy go już w dowodzie Twierdzenia 6.4[5] oraz, dość niejawnie, w dowodzie Twierdzenia 8.3. Okazuje się jednak, że z drugiej strony ma on różne paradoksalne konsekwencje radykalnie przeczące „zdrowemu rozsądkowi", co powodowało, że długo budził on opory.

Aksjomat Wyboru ma jeszcze inne równoważne sformułowania, wśród których warto wymienić Zasadę Dobrego Uporządkowania:

Dla każdego zbioru X istnieje relacja R na X, taka że $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

Jednym z zastosowań Lematu Kuratowskiego-Zorna jest twierdzenie z Algebry Liniowej, mówiące, że każda przestrzeń liniowa ma bazę. My pokażemy jeszcze inne jego zastosowanie, do twierdzenia, które pojawiło się w Rozdziale 6.

Twierdzenie 9.4 *Dla dowolnych zbiorów A i B mamy*

$$|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|.$$

Dowód. Jeśli któryś ze zbiorów A i B jest pusty, to teza jest spełniona w oczywisty sposób. Załóżmy więc, że zbiory A i B są niepuste. Rozważmy zbiór

$$X = \{f : f \text{ jest funkcją}^{6} \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq A \wedge \mathrm{rng}(f) \subseteq B \wedge f \text{ jest } 1-1\},$$

[2] Choć przy pewnych dodatkowych założeniach nie jest on ekstremalnie trudny.

[3] Aksjomat – zdanie (wyrażające na ogół jakąś fundamentalną własność), o którym przyjmujemy *a priori*, że jest prawdziwe.

[4] Czyli Teorii Zbiorów.

[5] Można pokazać, choć jest to nieporównanie trudniejsze, że bez skorzystania z tego aksjomatu nie da się ww. dowodu przeprowadzić.

[6] Myślimy o funkcjach w sensie drugiej definicji pojęcia funkcji.

uporządkowany przez relację inkluzji (ma to sens, bo elementy zbioru X są podzbiorami zbioru $A \times B$). Oczywiście, X jest niepusty. Pokażemy, że zbiór uporządkowany $\langle X, \subseteq \rangle$ spełnia założenia Lematu Kuratowskiego-Zorna.

Niech rodzina funkcji $L \subseteq X$ będzie łańcuchem i niech $F = \bigcup L$. Z definicji sumy uogólnionej wynika od razu, że F jest ograniczeniem górnym rodziny L. Pozostaje zatem sprawdzić, czy $F \in X$, czyli, czy

- F jest zbiorem par uporządkowanych,
- F jest funkcją,
- funkcja F jest różnowartościowa,
- $\mathrm{dom}(F) \subseteq A$,
- $\mathrm{rng}(F) \subseteq B$.

Jeśli $x \in F$, to znaczy, że istnieje $f \in L$, taki że $x \in f$. Ale f jest funkcją, więc jej elementy są parami uporządkowanymi, co kończy dowód pierwszego podpunktu.

By pokazać drugi podpunkt trzeba sprawdzić, czy

$$(\forall \langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in F)\, y_1 = y_2.$$

Ustalmy zatem dowolne $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in F$. Ponownie z definicji sumy uogólnionej dostajemy $f_1, f_2 \in L$, takie że $\langle x, y_1 \rangle \in f_1$ i $\langle x, y_2 \rangle \in f_2$. Ale L jest łańcuchem, zatem $f_1 \subseteq f_2$ lub $f_2 \subseteq f_1$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że zachodzi pierwsza ewentualność. Ale wtedy $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f_2$ i ponieważ f jest funkcją, to $y_1 = y_2$, co kończy dowód drugiego podpunktu.

Dokładnie w ten sam sposób pokazujemy, że funkcja F jest różnowartościowa. W celu uzasadnienia dwóch ostatnich podpunktów wystarczy zauważyć, że

$$\mathrm{dom}(F) = \bigcup_{f \in L} \mathrm{dom}(f) \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{rng}(F) = \bigcup_{f \in L} \mathrm{rng}(f).$$

Zatem z Lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że istnieje element maksymalny h w zbiorze uporządkowanym $\langle X, \subseteq \rangle$. Ponieważ $h \in X$, więc mamy $\mathrm{dom}(h) \subseteq A \wedge \mathrm{rng}(h) \subseteq B$. Wynika stąd, że musi zachodzić któryś z trzech poniższych potencjalnych warunków[7].

- $\mathrm{dom}(h) = A$,

[7]Zauważmy, że warunek pierwszy i drugi nie wykluczają się, ale każdy z nich wyklucza się z warunkiem trzecim.

- $\mathrm{rng}(h) = B$,
- $\mathrm{dom}(h) \subsetneq A \wedge \mathrm{rng}(h) \subsetneq B$.

Pokażemy, że ostatni przypadek jest niemożliwy. Gdyby bowiem istniały $a \in A \setminus \mathrm{dom}(h)$ i $b \in B \setminus \mathrm{rng}(h)$, to zbiór $h' = h \cup \{\langle a, b \rangle\}$ byłby funkcją różnowartościową należącą do zbioru X. Ale $h \subsetneq h'$, co przeczy maksymalności funkcji h.

Czyli musi zachodzić przynajmniej jeden z dwóch pierwszych warunków. Jeśli $\mathrm{dom}(h) = A$, to $h : A \xrightarrow{1-1} B$ i z Twierdzenia 6.4 wynika, że $|A| \leq |B|$. Jeśli zaś $\mathrm{rng}(h) = B$, to $h^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$, czyli $|B| \leq |A|$, co należało dowieść. $\square$

Na zakończenie przedstawimy twierdzenie uogólniające Twierdzenia 7.6 i 7.18. Uzupełnienie jego dowodu na podstawie przedstawionego szkicu pozostawimy jako trudne, ale interesujące ćwiczenie.

Twierdzenie 9.5 *Jeśli A jest zbiorem nieskończonym, to $A \times A \sim A$.*

Szkic dowodu. Definiujemy zbiór X w następujący sposób.

$$X = \{f : f \text{ jest funkcją} \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq A \wedge \mathrm{rng}(f) = \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{dom}(f) \wedge \\ \wedge f \text{ jest bijekcją}\}.$$

Ponownie pokazujemy, że zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \subseteq \rangle$ spełnia założenia Lematu Kuratowskiego-Zorna. Zatem w zbiorze X istnieje element maksymalny g.

Pokażemy, że $\mathrm{dom}(g) \sim A$, co zakończy dowód. W tym celu skorzystamy z poniższego faktu (który wymaga osobnego dowodu).

Jeśli $A \subseteq B = \emptyset \wedge A \sim B \wedge A \sim A \times A$, to $A \cup B \sim (A \cup B) \times (A \cup B)$.

Teraz, gdyby $|\mathrm{dom}(g)| < |A|$, to wybieramy zbiór $B \subseteq A \setminus \mathrm{dom}(g)$, taki że $B \sim \mathrm{dom}(g)$ i korzystając z powyższego faktu dość prosto znajdujemy funkcję g' o dziedzinie $\mathrm{dom}(g) \cup B$, należącą do zbioru X i przedłużającą funkcję g, co przeczy maksymalności g. $\square$

Rozdział 10

Odpowiedzi i wskazówki do zadań

Rozdział 1

5. (a) tak (b) tak (c) tak (d) nie
   (e) tak (f) tak (g) nie (h) nie

6. (a) p (b) r

7. (a) $\Rightarrow$ (b) $\wedge$, $\Leftrightarrow$

8. (a) $p' \wedge q \wedge r$ (b) $p' \wedge q \wedge r'$ (c) $p \wedge q \wedge r'$
   (d) $(p \wedge q \wedge r') \vee ((p' \vee q') \wedge r)$

9. tak

10. (a) niepoprawne (b) niepoprawne (c) niepoprawne

11. Którą drogę wskazałaby mi Pani siostra, gdybym zapytał ją o drogę na bagna?

12. Te, w których jest parzysta ilość p (dowód jest indukcyjny).

14. Wynika to z idempotentności alternatywy i koniunkcji.

15. Wynika to z symetrii alternatywy i koniunkcji.

16. $\neg p \Leftrightarrow p|p, \qquad p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p|q) \Leftrightarrow (p|q)|(p|q)$, itd.

18. Gdy definiujemy spójnik dwuargumentowy (np. $\odot$), to dla dowolnych ustalonych wartości logicznych zmiennych zdaniowych p i q zdanie $p \odot q$ może potencjalnie przyjmować dwie wartości: 0 i 1. Różne kombinacje

wartości logicznych zmiennych zdaniowych p i q są cztery. A dwa spójniki $\odot$ i $\oslash$ są nierównoważne, gdy dla pewnych wartości logicznych zmiennych p i q jedno ze zdań $p \odot q$ i $p \oslash q$ jest prawdziwe, a drugie fałszywe.

19. Dla każdego z pozostałych 14 spójników należy uzasadnić, że albo negacja, albo alternatywa nie jest przez niego definiowalna.

Rozdział 2

1. $A_3 = A_9, \qquad A_4 = A_5$

3. (a) $x = \{\{\emptyset\}\}$

   (b) $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ lub $x = \{\emptyset\}$ lub $x = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

4. (a) $x = \{\emptyset\}$ (b) $x = \emptyset$

5. (a) $x = y = \{\emptyset\}$

   (b) Nie ma poprawnej odpowiedzi (bo $x = \emptyset, y = \{\emptyset\}$ nie spełnia warunków zadania).

6. Np. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

7. (a) $\{1, 2\}$ (b) $\{1, 2\}$

8. (d) $\{0\} \cup [7, +\infty)$ (e) $\mathbb{R}$ (c) $(-\infty, 0]$
   (h) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$

11. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego zbioru C, jeśli $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$, to $A \cup B \subseteq C$.

12. X={2,3,4}

14. (d) $A = B$ (f) $A \subseteq B$ i $B \not\subseteq A$

15. (a) i. $\{-2, -1, 3\}$ ii. $\{\langle 0, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$
    iii. $\{\emptyset, \{\langle -2, 3\rangle\}, \{\langle -1, 3\rangle\}, \{\langle -2, 3\rangle, \langle -1, 3\rangle\}\}$
    (b) nie

16. (a) i. $\{\langle 1, \emptyset\rangle, \langle 1, \{-2\}\rangle, \langle 1, \{4\}\rangle, \langle 1, \{-2, 4\}\rangle\}$ ii. $\{\emptyset, \{1\}\}$
    (b) nie

18. Można zbudować $2^8 = 256$ różnych zbiorów. Nie ma wśród nich zbioru $\{8\}$.

20. Korzystając z tabelki alternatywy wyłączającej.

23. (a) zachodzi (b) nie zachodzi (c) nie zachodzi
    (d) zachodzi (e) zachodzi (f) nie zachodzi

24. $D = A \setminus B,\ E = B$

25. $D = A \setminus (B \cup C)$

26. Jeśli $A \not\subseteq B$, to równanie nie ma rozwiązań. Jeśli $A \subseteq B$, to rozwiązaniem jest dowolny zbiór X, taki że $B \setminus A \subseteq X \subseteq B$.

28. (a) Dla dowolnego elementu x mamy

$$x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A \cap B)$$

    (b) Przykładem, że nie ma równości są dowolne dwa niepuste zbiory A i B takie, że żaden z nich nie zawiera się w drugim.

29. (a) nie (b) nie

30. (a) Weźmy dowolny element $x \in \mathcal{P}(A)$. Zatem $x \subseteq A$. Ale z założenia wiemy, że $A \subseteq B$, czyli (z przechodniości inkluzji) mamy $x \subseteq B$. Ale to znaczy, że $x \in \mathcal{P}(B)$, co, zgodnie z definicją inkluzji, kończy dowód.

    (b) Weźmy dowolny element $x \in A$. Wtedy $\{x\} \subseteq A$, czyli $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Z założenia wynika, że $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$, czyli $\{x\} \subseteq B$. To oznacza, że $x \in B$, co zgodnie z definicją inkluzji, kończy dowód.

31. Należy przypuścić nie wprost, że istnieje zbiór A, taki że $A = \mathcal{P}(A)$ i rozważyć zbiór $\{x \in A : x \in x\}$ (w formule $x \in x$ pierwsze x interpretujemy jako element A, a drugie, zgodnie z założeniem nie wprost, jako podzbiór A).

33. (d) ($\Rightarrow$) Załóżmy nie wprost, że $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ i $A \neq B$. Wtedy, bez zmniejszenia ogólności, możemy założyć, że istnieje element $x \in A$ i $x \notin B$. Ale $B \neq \emptyset$, zatem istnieje $b \in B$. Stąd, korzystając z założenia, mamy $\langle x, b\rangle \in A \times B = B \times A$. Czyli w szczególności $x \in B$, co daje sprzeczność, która kończy dowód.

34. Np. $A = C \neq \emptyset$ i $B = \emptyset$.

35. $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$

36. nie

38. $A \times B = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : (\exists a \in A)(\exists b \in B)\, x = \langle a, b\rangle\}$

39. Formalnie nie – jeśli korzystamy z definicji trójki uporządkowanej w duchu Kuratowskiego. Praktycznie tak – gdy myślimy o trójkach uporządkowanych jako obiektach rozróżniających swoje współrzędne. Te podejścia można pogodzić podobnie jak w zadaniu 9 z Rozdziału 4.

Rozdział 3

1. W niektórych wypadkach poniższe odpowiedzi nie są jedynymi poprawnymi.

   (a) $x \neq y \Rightarrow x < y \vee y < x$;

   (b) $\neg\forall n(\neg 2|n \Rightarrow 3|n)$;

   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 \geq 0$;

   (d) $x^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$;

   (e) $n \geq 2 \Rightarrow \neg(\exists x, y, z \in \mathbb{N})\, x^n + y^n = z^n$;

   (f) $(\forall x \in \mathbb{Q})\, x^2 \neq 2$;

   (g) $(\forall x \in \mathbb{R})(|x| = x \vee |x| = -x)$;

   (h) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})\, n^k \in \mathbb{N}$;

   (i) $(\exists x \in \mathbb{Z})(\exists k \in \mathbb{Z})\, x = 3k + 1$ lub $(\exists x \in \mathbb{Z})\, 3|(x - 1)$;

   (j) $(\forall A \neq \emptyset)(\neg(\exists x, y, z \in A)(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z))$;

   (k) $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \cdot 1 = x$;

   (l) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\, xy = x$;

   (m) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\, k > n$;

   (n) $\forall n(2 \not| n \Rightarrow \exists k(2 \not| k \wedge k > n))$;

   (o) $(\exists y \in \mathbb{R})\, x + y = 0$;

   (p) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists y \in \mathbb{R})\, xy = 1$;

   (q) $A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists B)\, B \subsetneq A$;

   (r) $(\forall A)(\exists B)\, A \subsetneq B$;

   (s) $x \geq 0 \Rightarrow (\forall y < 0)\, y < x$;

(t) $\neg(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, y \leq x$;

(u) $(\forall A \neq \emptyset)(\exists B)(B \subseteq A \vee A \cap B = \emptyset)$;

(v) $(\forall A \subseteq \mathbb{R})(A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists B \neq \emptyset)\, B \subsetneq A)$;

(w) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x \leq 0 \wedge (\forall y \in \mathbb{Z})(y \leq 0 \Rightarrow y \leq x))$;

(x) $\forall A(A = \emptyset \vee \emptyset \subseteq A)$.

3. (a) Dla każdej liczby rzeczywistej jest liczba naturalna od niej większa (Zasada Archimedesa).
   (b) Nie istnieje najmniejsza liczba rzeczywista.
   (c) Istnieje najmniejsza liczba naturalna.
   (d) Dla każdej liczby całkowitej istnieje liczba do niej przeciwna.
   (e) Z każdej liczby rzeczywistej nieujemnej można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.
   (f) Pomiędzy dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi zawsze można znaleźć liczbę wymierną.

6. Np. $\varphi(x) = (x = 0)$ i $\psi(x) = (x = 1)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

8. (d) $(\exists x, y \in \mathbb{R})(x < y \wedge (\forall q \in \mathbb{Q})(g \leq x \vee y \leq q))$
   (f) $(\forall x)(x \geq 3 \wedge (\exists y > x)\, y < 3)$
   (g) $(\exists x)(x \neq 2 \wedge (\exists z)\, z < x) \wedge (\forall y)(y = 2 \wedge (\forall t)\, y \leq t)$

9. (a) tak (b) nie (c) nie (d) tak

11. Należy skorzystać z definicji kwantyfikatorów ograniczonych i Twierdzenia 3.4.

12. Na przykład

    (a) $\varphi(x) = (x > 0)$ i $\psi(x) = (x^2 = -1)$,
    (b) $\varphi(x) = (x = 0)$ i $\psi(x) = (x \neq 0)$,
    (c) $\varphi(x) = (x = 0)$ i $\psi(x) = (x = 1)$.

13. Na przykład

    (a) $\varphi(x, y) = (x \neq y)$ (b) $\varphi(x, y) = (x = y)$

14. Niech $S = \bigcup_{i \in I} A_i$ i $P = \bigcap_{i \in I} A_i$. Wtedy

    (a) $S = \mathbb{R}$ $P = \emptyset$

(b) $S = (2, 4)$ $P = \{3\}$

(c) $S = \mathbb{R}$ $P = \emptyset$

(d) $S = [0, 3]$ $P = [1, 2]$

(e) $S = (-1, 2)$ $P = \{1\}$

(f) $S = [0, +\infty)$ $P = [1, 2)$

(g) $S = (\frac{1}{2}, 9]$ $P = (2, 4]$

(h) $S = [0, 2)$ $P = \emptyset$

(i) $S = \{1\} \cup [2, +\infty)$ $P = \emptyset$

(j) $S = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \vee y < 0\} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$
$P = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \wedge y \leq 0\}$

(k) $S = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$
$P = \{\langle 0, 0\rangle\}$

18. Podobnie jak w zadaniu 11 z Rozdziału 2.

19. Mamy $\bigcup\emptyset = \emptyset$, bo

$$x \in \bigcup\emptyset \Leftrightarrow (\exists A \in \emptyset)\, x \in A,$$

co, jak wiemy, nie zachodzi dla żadnego x.

Natomiast $\bigcap\emptyset$ byłby zbiorem wszystkich zbiorów (o którym wiemy, że nie istnieje), bo

$$x \in \bigcap\emptyset \Leftrightarrow (\forall A \in \emptyset)\, x \in A,$$

co z kolei jest prawdą dla dowolnego x.

20. Niech $A_p = \{x \in B : p|x\}$ dla $p \in P$. Wtedy można pokazać, że

$$\mathcal{A} = \{A_p : p \in P\}.$$

Rozdział 4

W niektórych podpunktach zadań 1–5 podane odpowiedzi nie są jedynymi poprawnymi.

1. (a) $(\exists t > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\, f(x + t) = f(x)$

   (b) $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\, |f(x)| \leq M$

   (c) $(\forall s > 0)(\exists t > 0)(t < s \wedge (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x + t) = f(x))$

(d) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \geq x)\, f(y) < g(y)$

(e) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \geq x)\, f(x) \geq 0$

(f) $(\forall M \in \mathbb{R})(\exists x < M)\, f(x) = 0$

(g) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y_1, y_2)(y_1 \geq x \,\wedge\, y_2 \geq x \Rightarrow f(y_1) = f(y_2))$
lub $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists c \in \mathbb{R})(\forall y \geq x)\, f(y) = c$

2. (a) $(\exists x \in \mathbb{R})\, f(x) \neq f(x+1)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R})\, f(x) > 1$

(c) $(\forall M \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\, f(x) < M$

(d) $(\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R})(x_1 < x_2 \,\wedge\, f(x_1) > f(x_2))$

3. (a) $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\, |a_n| \leq M$

(b) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m < n \Rightarrow a_m < a_n) \vee$
$\vee\, (\forall m, n \in \mathbb{N})(m < n \Rightarrow a_m > a_n)$

(c) $(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\, a_n \geq M$

(d) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \geq n)\, a_m > 0$

(e) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m, k \in \mathbb{N})(n \leq m \,\wedge\, m < k \Rightarrow a_m < a_k)$

4. (a) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$

(c) $\{t \in \mathbb{R} : t > 0 \,\wedge\, (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x+t) = f(x)\}$

(d) $\{M \in \mathbb{R} : (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) \leq M\}$

5. (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{R})\, f(x) = a_n$

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\, f(a_n) > 0$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0 \,\wedge\, (\exists n \in \mathbb{N})\, x = a_n\}$

(d) $\{M \in \mathbb{R} : (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) \geq M \,\wedge\, (\exists n \in \mathbb{N})\, a_n < M\}$

7. (a) nie (b) tak (c) tak (d) nie (e) tak

8. (a) $(0, +\infty)$ (b) $(0, +\infty)$ (c) $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$

(d) $(0, +\infty)$ (e) $\mathbb{N}^+$ (f) $\mathbb{Z}$

(g) $\{2\}$ (h) $\mathbb{N}$ (i) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

9. Należy rozpatrzyć funkcję

$$F : \prod_{i \in \{1,2\}} A_i \to A_1 \times A_2$$

zadaną wzorem $F(f) = \langle f(1), f(2) \rangle$.

11. (a) jest $1-1$, nie jest „na”, $\mathrm{rng}(f) = (7, +\infty)$
    (b) nie jest $1-1$, nie jest „na”, $\mathrm{rng}(f) = [1, +\infty)$
    (c) jest $1-1$ (bo jest (ściśle) rosnąca), jest „na” (bo ma własność Darboux)
    (d) nie jest $1-1$, jest „na” (bo ma własność Darboux)
    (e) nie jest $1-1$, nie jest „na”, $\mathrm{rng}(f) = [-1, 1]$
    (f) nie jest $1-1$, nie jest „na”, $\mathrm{rng}(f) = [-1, +\infty)$

15. Z faktu, że funkcja $f : A \to B \times C$ jest injekcją nie wynika, że jej składowe też są injekcjami.

18.

	$1-1$	„na”	$f[A]$	$f^{-1}[B]$
(a)	nie	nie	$[2, 6)$	$[-1, 1] \setminus \{0\}$
(b)	tak	nie	$(\frac{1}{2}, 2)$	$[0, 2]$
(c)	nie	tak	$\mathbb{N}^+$	$\{\langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\ \langle 3, 0\rangle\}$
(d)	nie	tak	$\{2n : n \in \mathbb{N}\}$	$\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}^2$
(e)	nie	tak	$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$	$\mathbb{Z} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{Z}$
(f)	nie	tak	$\mathbb{Z}$	$\{\langle n, n^2\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$
(g)	tak	nie	$\{\langle 4n, -4n\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$	$\{0\}$
(h)	tak	tak	$\{\langle x, x\rangle : x \in \mathbb{R}\}$	$\{\langle x, x\rangle : x \in \mathbb{R}\}$

21. Należy rozważyć np. funkcję zadaną wzorem $f(x) = x^2$ lub dowolną inną, która nie jest injekcją (np. $f : \{1, 2\} \to \{1\}$).

25. Należy rozważyć np. funkcję zadaną wzorem $f(x) = x^2$ lub dowolną inną, która nie jest injekcją ani surjekcją (np. $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, taką że $f(1) = f(2) = 1$).

26. Należy wykonać rozumowanie nie wprost.

28. (a) nie (b) tak (c) tak

29. Dla dowolnego elementu x mamy

$$x \in A \cap f^{-1}[B] \Leftrightarrow x \in A \wedge f(x) \in B \Rightarrow f(x) \in f[A] \wedge f(x) \in B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in f[A] \cap B \Leftrightarrow x \in f^{-1}[f[A] \cap B].$$

Znalezienie przykładu pokazującego, że może nie być równości wymaga rozpatrzenia funkcji nie będącej injekcją.

31. Niech $y_1, y_2 \in Y$ i $y_1 \neq y_2$. Ponieważ funkcja f jest „na”, to istnieją $x_1, x_2 \in X$, takie że $f(x_1) = y_1$ i $f(x_2) = y_2$. Oczywiście, $x_1 \neq x_2$. Skoro funkcja $g \circ f$ jest $1-1$, to $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$. Ale to oznacza dokładnie, że $y_1 \neq y_2$, co należało dowieść.

32. Należy wykonać podobne rozumowanie, jak w poprzednim zadaniu.

33. (a) Ponieważ funkcja $f \restriction \mathbb{N}$, więc wystarczy rozpatrzyć taką funkcję $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, która jest $1-1$ i $\mathrm{rng}(g) \subseteq \mathbb{N}$.

    (b) nie

34. (a) Np. $\mathbb{N} \times \{0\}$. (b) Np. $D = \{0\}$.

35. Niech $x_1, x_2 \in X$ i $x_1 \neq x_2$. Gdyby było $f(x_1) = f(x_2)$, to wtedy $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Ale to jest niemożliwe, bo identyczność jest różnowartościowa. Zatem funkcja f jest $1-1$.

    Niech teraz $x \in X$. Wtedy $x = g(f(x))$ i $f(x) \in Y$, czyli funkcja g jest „na”.

Rozdział 5

3. Można posłużyć się metodą opisu relacji na zbiorze skończonym przy pomocy tabelki, np.

    (a) $X = \{a, b, c\}$

$R =$

	a	b	c
a	×	×	
b	×	×	×
c		×	×

czyli $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}$.

4. Nie, $T_1 \setminus T_2$ jest relacją przeciwzwrotną.

10. (a) tak (b) tak (c) nie (d) nie (e) nie

    (f) tak (g) nie (h) nie (i) tak (j) tak

    Zbiory ilorazowe.

    (a) $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$, gdzie $A_i = \{x \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, x = 5k + i\} = [i]_R$ dla $i \in \{0,1,2,3,4\}$;

    (b) $\{P, N\}$, gdzie $P = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x\}$, $N = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \nmid x\}$;

(f) $\{A_c : c \in \mathbb{R}\}$, gdzie $A_c = \{\langle c, y\rangle : y \in \mathbb{R}\}$;

(i) $\{A_z : z \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $A_z = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 : n - m = z\}$;

(j) $\{A_1, A_2\}$, gdzie $A_1 = \{-4, -3, -2, -1\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$.

11. (b) $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowita z liczby x;

    (c) $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle \Leftrightarrow y - x = t - z$;

    (d) $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + t^2$.

12. (a) R – tak, S, T – nie

    (b) i. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ii. $\{3, 15\}$

    (c) tak

13. $R \cap S$ zawsze jest relacją równoważności, a $R \cup S$ może nie być relacją równoważności.

14. (b) $\{2, 3, 7, 8\}$

    (c) $\{A_0, A_1, A_2\}$, gdzie
    $A_0 = \{0, 5, 10\}$, $A_1 = \{1, 4, 6, 9\}$, $A_2 = \{2, 3, 7, 8\}$

    (d) tak

15. (a) $R = R^{-1}$

    (c) $\{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$

    (d) $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, gdzie
    $A_i = \{\langle x, y\rangle : \min(x, y) = i\}$ dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

16. nie

17. ${}^{X\times Y}/_{T} = \{[x]_R \times [y]_S : x \in X \ \wedge\ y \in Y\}$

18. ${}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}/_{T} = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$, gdzie $A_k = \{\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} : a_0 = k\}$ dla $k \in \mathbb{N}$

19. $T = R \cap S$

20. $[0]_{=^*} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A –$ skończony$\}$

22. W niektórych wypadkach poniższe odpowiedzi nie są jedynymi poprawnymi.

    (a) $(\forall x \in X)(\exists y \in X)\, y < x$

    (b) $(\exists a \in X)(\forall y \in X)\, y \leq a$

    (c) $(\exists a \in X)(\forall x \in A)(a \leq x) \wedge (\exists a \in X)(\forall x \in A)(x \leq a)$

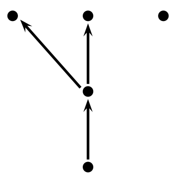
(d) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\, x < y$

(e) $\neg(\exists x \in B)(\forall y \in A)\, x \leq y$

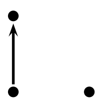
(f) $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\, x \leq y$

(g) $(\forall x \in B)(\forall y \in X)(y \leq x \Rightarrow y = x)$

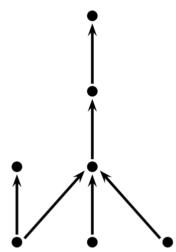
24. (a)



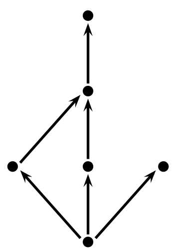
(b)



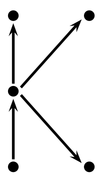
(c)



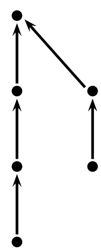
(d)



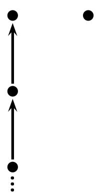
(e)



(f)



(g)



$\langle \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\}, \preceq \rangle$,
$x \preceq y \Leftrightarrow y | x$

(h) $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle, \quad x \preceq y \Leftrightarrow x | y$

(i) $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq \rangle$,
$\langle x, y \rangle R \langle z, t \rangle \Leftrightarrow x = z \wedge y \leq t$

25. $\langle \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{6\}, \preceq \rangle, \quad x \preceq y \Leftrightarrow x | y$

28. (a) Element najmniejszy to funkcja $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zadana wzorem $f(n) = 0$ (czyli funkcja stale równa zero). Elementy maksymalne nie istnieją.

(b) $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$, gdzie funkcja f_k jest zadana wzorem $f_k(n) = k$ (czyli jest to rodzina funkcji stałych).

Rozdział 6

1. (a) $f : B \to A, \quad f(n) = 3n + 1$

(b) $f : A \to B, \quad f(n) = 5n$

(c) $f : A \to B, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{gdy } 4|n \\ -\frac{n}{2} & \text{gdy } 4|(n-2) \end{cases}$

(d) $f : B \to A, \quad f(x) = \langle x, 1-x \rangle$

(e) $f : A \to B, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{gdy } x = (\frac{1}{2})^n \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$

2. (a) Jeśli $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ i $g : C \xrightarrow[na]{1-1} D$, to funkcja $h : A \times C \to B \times D$ zadana wzorem $h(a,c) = \langle f(a), g(c) \rangle$ jest bijekcją.

   (c) Jeśli $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$, to funkcja $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ zadana wzorem $F(A) = f[A]$ jest bijekcją.

4. Wystarczy skorzystać z tego, że $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ i $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ oraz z Twierdzenia Cantora-Bernsteina.

5. (a) nie (b) tak (c) nie

   (d) tak (e) nie (f) nie

7. Oznaczmy $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Oczywiście, dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi $|A_m| \leq |A|$. Załóżmy nie wprost, że jest $m_0 \in \mathbb{N}$, takie że $|A_{m_0}| = |A|$. Ale wiemy, że $|A_{m_0}| < |A_{m_0+1}|$, czyli $|A| < |A_{m_0+1}|$. Sprzeczność.

Rozdział 7

1. Jeśli $f(x,y) = f(x',y')$, to znaczy, że $2^x(2y+1) = 2^{x'}(2y'+1)$. Ale wtedy $2^x | 2^{x'}(2y'+1)$ i $2^{x'} | 2^x(2y+1)$, czyli $2^x = 2^{x'}$.[1] Stąd już szybko dostajemy, że $x = x'$ i $y = y'$. Zatem funkcja f jest injekcją.

   Ustalmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$. Niech x będzie największą liczbą naturalną taką, że $2^x | (n+1)$. Niech $y = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{2^x} - 1)$. Ponieważ $\frac{n+1}{2^x}$ musi być liczbą nieparzystą, to $y \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzić, że $f(x,y) = n$, czyli funkcja f jest surjekcją.

8. Np. $X = \{4n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$.

9. (a) Należy rozważyć funkcję $f : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^3$ zadaną wzorem

$$f(K(\langle a,b \rangle, r)) = \langle a, b, r \rangle.$$

[1] Wynika to z twierdzenia, które mówi, że jeśli p jest liczbą pierwszą, x i y względnie pierwszymi liczbami naturalnymi i $p|xy$, to $p|x$ lub $p|y$.

(c) Niech $\mathcal{S}$ będzie rozważanym zbiorem. Dla każdego $K \in \mathcal{S}$ ustalamy punkt $\langle a_K, b_K \rangle \in K$, taki że $a_K, b_K \in \mathbb{Q}$. Teraz rozważamy funkcję

$$f : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^2, \qquad f(K) = \langle a_K, b_K \rangle.$$

(d) Niech $\mathcal{S}$ będzie rozważanym zbiorem. Wtedy

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n,$$

gdzie $\mathcal{S}_n$ jest zbiorem ciągów liczb naturalnych o długości n. Ale $\mathcal{S}_n = \mathbb{N}^n$, co wystarcza do skończenia dowodu.

(f) Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że funkcja f jest (ściśle) rosnąca. Oznaczmy przez D_f zbiór jej punktów nieciągłości. Wtedy dla każdego $a \in D_f$ istnieją dwie granice

$$d_a = \lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{i} \quad g_a = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

i mamy $d_a < g_a$. Niech $I_a = (d_a, g_a)$. Wtedy funkcja

$$F : D_f \to \{I_a : a \in D_f\}, \qquad F(a) = I_a$$

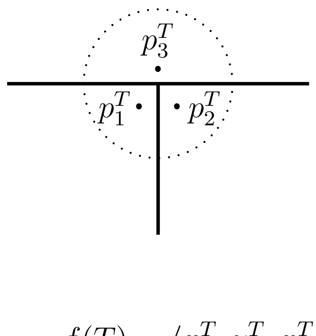
jest bijekcją, a $\{I_a : a \in D_f\}$ jest rodziną parami rozłącznych przedziałów otwartych.

(g) Niech $|A| = \aleph_0$ i $S = \{X \subseteq A : |X| < \aleph_0\}$. Wtedy

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n, \qquad \text{gdzie } S_n = \{X \subseteq A : |X| = n\} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Ale $|S_n| \leq |A^n|$.

(h) Niech $\mathcal{S}$ będzie rozważanym zbiorem. Z każdą literą $T \in \mathcal{S}$ wiążemy trzy punkty p_1^T, p_2^T i p_3^T, każdy o obu współrzędnych wymiernych, w sposób opisany na poniższym rysunku



Wtedy funkcja

$$f : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^6, \qquad f(T) = \langle x_1^T, y_1^T, x_2^T, y_2^T, x_3^T, y_3^T \rangle,$$

gdzie $p_i^T = \langle x_i^T, y_i^T \rangle$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$, jest injekcją.

11. Ponieważ
$$\mathbb{N} = \mathrm{dom}(f) = \bigcup_{n \in \mathrm{rng}(f)} f^{-1}[n],$$
to z założenie, że $|\mathrm{rng}(f)| < \aleph_0$ i $(\forall n \in \mathbb{N})\, |f^{-1}[n]| < \aleph_0$ prowadzi do sprzeczności.

12. $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$ (zauważmy, że $\mathcal{A}$ jest łańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$).

13. Co najwyżej przeliczalna.

14. nie

17. (a) Jeśli $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ i $g : C \xrightarrow[na]{1-1} D$, to funkcja
$$F : A^C \to B^D, \qquad F(\varphi) = f \circ \varphi \circ g^{-1}$$
jest bijekcją.
    (b) Funkcja $F : (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ zadana wzorem $F(\varphi) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, gdzie φ_i jest i-tą składową funkcji φ, jest bijekcją.
    (c) Funkcję $F : (A^B)^C \to A^{B \times C}$ definiujemy następująco.
$$F(\varphi)(b, c) = \varphi(c)(b) \qquad \text{dla } b \in B \ \text{ i } \ c \in C.$$
Zauważmy, że definicja jest poprawna, bo $F(\varphi) : B \times C \to A$, a $\varphi(c) : B \to A$. Funkcja F jest bijekcją.

18. Podobnie jak Twierdzenie 7.19.

19. (i) $\mathbb{R}^\mathbb{N} \sim (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$

20. Jeśli $f : A \xrightarrow[na]{1-1} C$, to
$$f \restriction (A \setminus B) : A \setminus B \xrightarrow[na]{1-1} f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B] = C \setminus f[B].$$
Ale $f[B] \sim B \sim D$, czyli $C \setminus f[B] \sim C \setminus D$ (bo $f[B], D \subseteq C$).

21. Korzystamy z faktu, że jeśli funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są ciągłe i takie, że $f \restriction \mathbb{Q} = g \restriction \mathbb{Q}$, to $f = g$. Oznacza to, że funkcja $F : A \to \mathbb{R}^\mathbb{Q}$ zadana wzorem $F(f) = f \restriction \mathbb{Q}$ jest injekcją. Ale $\mathbb{R}^\mathbb{Q} \sim \mathbb{R}^\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$.

22. Istnieje wiele konstrukcji rodziny o tych własnościach. Oto jedna z nich.

Wiemy już z zadania 9(d), że zbiór $\mathcal{S}$ skończonych ciągów liczb naturalnych jest przeliczalny. Ustalmy dowolną bijekcję $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} \mathcal{S}$. Zauważmy, że skoro $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest (nieskończonym) ciągiem liczb naturalnych, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jego obcięcie $f \restriction \{0, 1, \ldots, n\}$ jest skończonym ciągiem liczb naturalnych (jest to $n + 1$ pierwszych wyrazów ciągu f).

Dla każdego $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ rozważmy zbiór

$$A_f = \{f \restriction \{0, 1, \ldots, n\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Oczywiście, A_f jest przeliczalny oraz jeśli $f \neq g$, to $A_f \neq A_g$. Co więcej, jeśli $k \in \mathbb{N}$ jest najmniejszą liczbą taką, że $f(k) \neq g(k)$, to

$$A_f \cap A_g = \{f \restriction \{0, 1, \ldots, n\} : n < k\}$$

(jeśli $k = 0$, to $A_f \cap A_g = \emptyset$), zatem $A_f \cap A_g$ jest zbiorem skończonym.

Zdefiniujmy teraz

$$\mathcal{A} = \{\varphi^{-1}[A_f] : f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}.$$

Ponieważ

$$f \neq g \Rightarrow A_f \neq A_g \Rightarrow \varphi^{-1}[A_f] \neq \varphi^{-1}[A_g] \quad \text{(bo } \varphi \text{ jest bijekcją)},$$

to $|\mathcal{A}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Ponadto $|\varphi^{-1}[A_f]| = |A_f| = \aleph_0$ oraz

$$|\varphi^{-1}[A_f] \cap \varphi^{-1}[A_g]| = |\varphi^{-1}[A_f \cap A_g]| = |A_f \cap A_g| < \aleph_0,$$

co kończy konstrukcję.

23. Dowód tego faktu wykorzystuje konstrukcję rekurencyjną[2].

Ustalmy dowolną bijekcję $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Zauważmy najpierw, że jeśli $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest pierwszą składową funkcji φ, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $|\varphi_1^{-1}[n]| = \aleph_0$ (bo φ jest bijekcją). Zdefiniujemy teraz rekurencyjnie ciąg liczb naturalnych $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

Niech $a_0 \in A_0$ będzie dowolne. Załóżmy teraz, że mamy już wybrane liczby a_i dla $i \leq n$. Wtedy wybieramy

$$a_{n+1} \in A_{\varphi_1(n+1)} \setminus \{a_i : 0 \leq i \leq n\}.$$

[2]Więcej o takich konstrukcjach jest w Rozdziale 8.

Jest to zawsze możliwe, bo zbiór z którego wybieramy a_{n+1}, jako różnica zbioru nieskończonego i skończonego, jest zawsze niepusty (a nawet nieskończony).

Zdefiniujmy teraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$B_n = \{a_i : i \in \varphi_1^{-1}[n]\}.$$

Zauważmy, że z konstrukcji wynika, że wyrazy ciągu $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ są parami różne. Zatem, ponieważ $|\varphi_1^{-1}[n]| = \aleph_0$, to $|B_n| = \aleph_0$. Dalej, dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$, jeśli $n \neq m$, to $B_n \cap B_m = \emptyset$, bo $\varphi_1^{-1}[n] \cap \varphi_1^{-1}[m] = \emptyset$. Wreszcie, jeśli $a_i \in B_n$, to $\varphi_1(i) = n$, czyli (z konstrukcji) $a_i \in A_n$. Zatem $B_n \subseteq A_n$.

Rozdział 8

1. (e) Skorzystać ze schematu

$$\begin{aligned}&\varphi(0) \wedge \varphi(1) \wedge \varphi(2) \wedge \varphi(3) \wedge \\ &\wedge (\forall n \geq 1)(\varphi(2n) \Rightarrow \varphi(2n+2) \wedge \varphi(2n+1) \Rightarrow \varphi(2n+3)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\, \varphi(n).\end{aligned}$$

2. Dla $n = 0$ i $n = 1$ jest dobrze. Załóżmy że $a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Chcemy pokazać, że $a_{n+3} \cdot a_{n+1} - a_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$. Ale z założenia indukcyjnego wynika, że

$$\begin{aligned}&a_{n+3} \cdot a_{n+1} - a_{n+2}^2 = -(a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+1}^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_{n+3} \cdot a_{n+1} - a_{n+1}^2 = a_{n+2}^2 - a_{n+2} \cdot a_n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_{n+1}(a_{n+3} - a_{n+1}) = a_{n+2}(a_{n+2} - a_n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_{n+1} \cdot a_{n+2} = a_{n+2} \cdot a_{n+1},\end{aligned}$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego (ostatnia równoważność wykorzystuje definicję ciągu Fibonacciego).

5. (c) Wystarczy, by $B = U$ oraz funkcja f była bijekcją, ale nie identycznością. Wtedy mamy $(\forall n \in \mathbb{N})\, A_n = U$, czyli $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = U$, ale istnieje $x \in U$, taki że $f(x) \neq x$.