Dynamika klasyczna

Zasady dynamiki Newtona

(Isaac Newton, 1687; duże ciała, małe prędkości)

$\boxed{\textbf{I.}}$ **Ciała odosobnione pozostają w spoczynku lub poruszają się ze stałą prędkością po linii prostej,**
(zasada bezwładności, za Galileuszem),

$\boxed{\textbf{II.}}$ **Szybkość zmiany pędu ciała równa jest sile zewnętrznej działającej na to ciało,**

$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ (równanie wektorowe!; $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$)

lub w postaci skalarnej

$$\left.\boxed{\begin{aligned} dp_x/dt &= F_x, \\ dp_y/dt &= F_y, \\ dp_z/dt &= F_z, \end{aligned}}\right\}$$

(*zasada niezależności ruchów*)

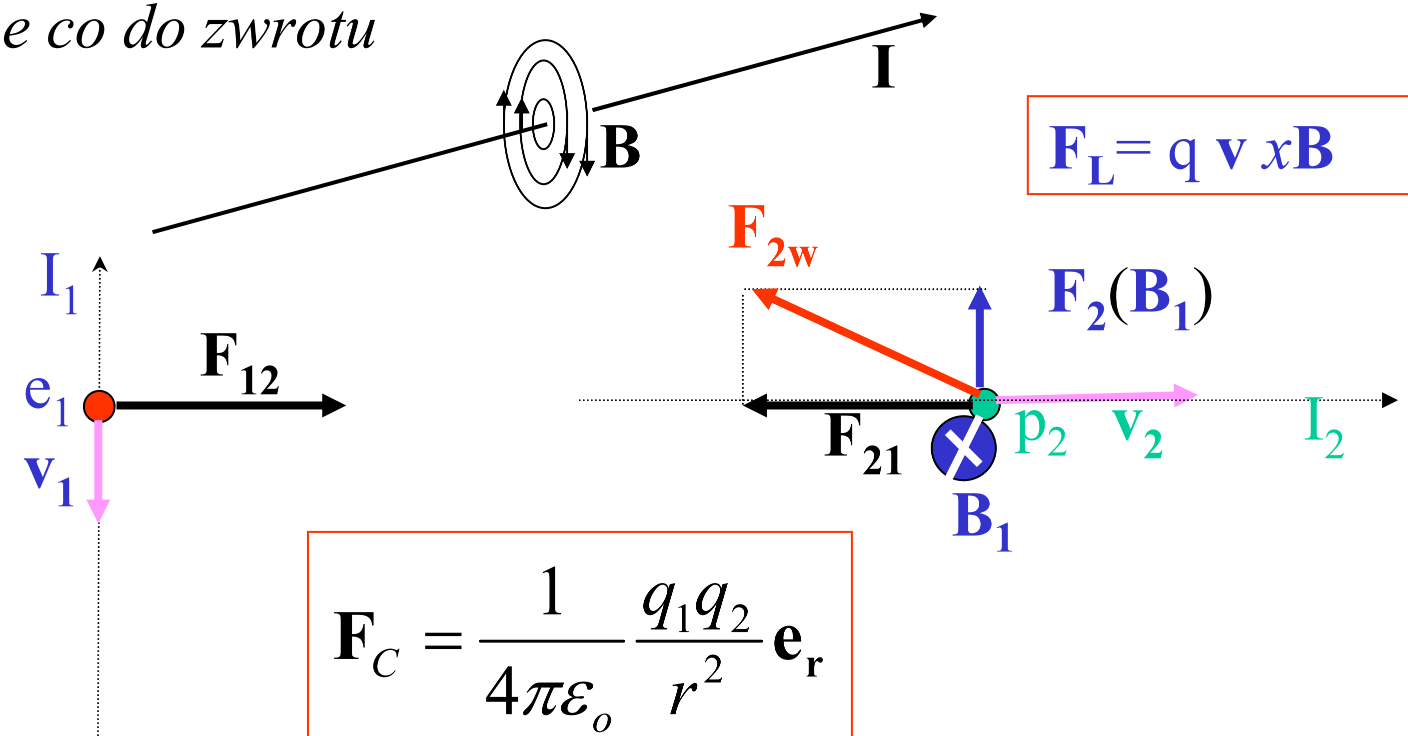
dla m=const ⟶ $m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}$

$\boxed{\textbf{III.}}$ **Każde działanie wywołuje równe przeciwdziałanie;**
Siły, którymi ciała działają na siebie, są równe co do wartości i kierunku, lecz przeciwne co do zwrotu

Czy prawa Newtona są zawsze spełnione?

III. Każde działanie wywołuje równe przeciwdziałanie;

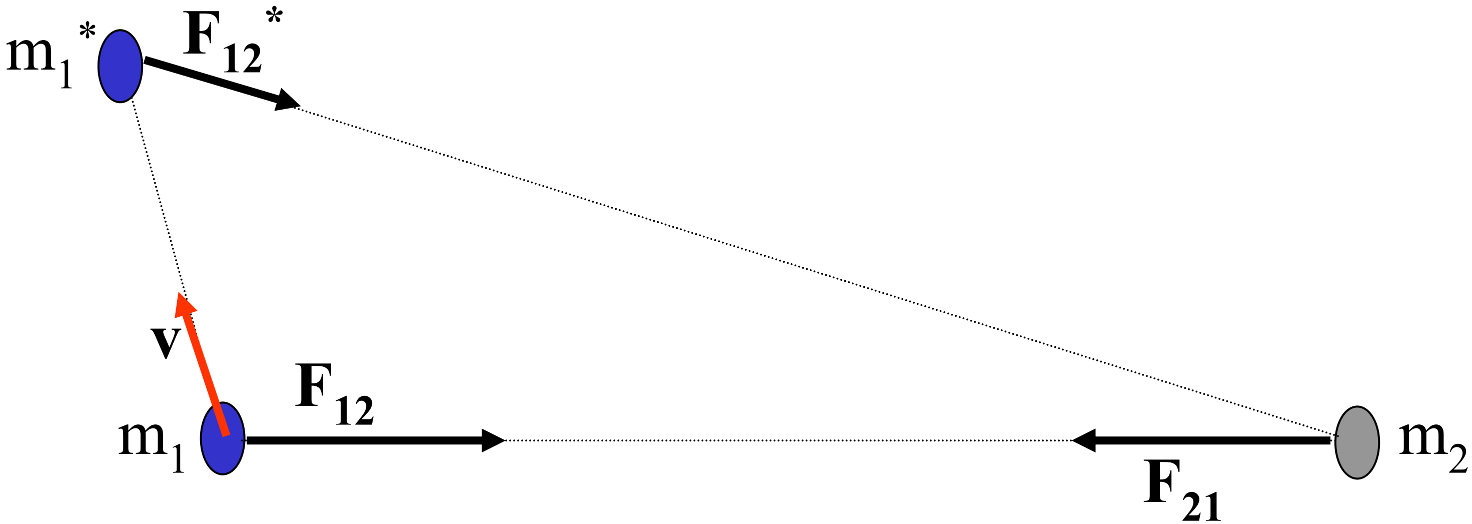
Siły, którymi ciała działają na siebie, są równe co do wartości i kierunku, lecz przeciwne co do zwrotu



$$\mathbf{F}_L = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{e_r}$$

jednak dla $v_{1,2} << c \Rightarrow F_2(B_1) << F_{21}$

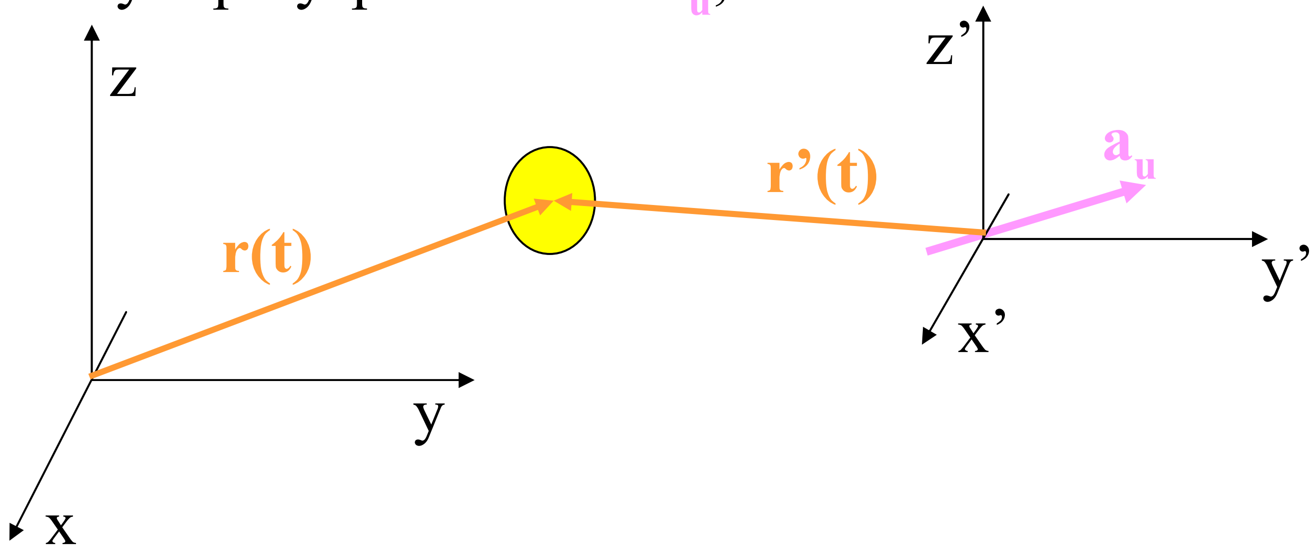


$$\boxed{\mathbf{F}_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{e_r}}$$

Jednak dla $v_{1,2} << c \Rightarrow \mathbf{F}_{12}{}^* = \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{21}$

I . Ciała odosobnione pozostają w spoczynku lub poruszają się ze stałą prędkością po linii prostej,

Dwa układy odniesienia poruszają się względem siebie z pewnym przyspieszeniem a_u;



jeśli **zasada bezwładności** spełniona jest w jednym z nich, to nie może być spełniona w drugim.

→ analogicznie II zasada dynamiki;

Zbiór układów odniesienia bez przyspieszenia → ukł. inercjalne $\boxed{\text{(II.) o.k.}}$	Zbiór układów z przyspieszeniem → ukł. nieinercjalne $\boxed{\text{(\cancel{II}.)}}$

II. Szybkość zmiany pędu ciała
równa jest sile zewnętrznej działającej na to ciało

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

?

Brak niezależnych sposobów określenia masy i siły

„...Jeśli odkryliśmy podstawowe prawo mówiące, że **siła** jest równa iloczynowi masy i przyspieszenia, a następnie **definiujemy siłę** jako iloczyn masy i przyspieszenia, to niczego właściwie nie odkryliśmy....Prawdziwą treścią praw Newtona jest to, że siła, poza tym, że spełnia równanie $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, ma jeszcze inne niezależne cechy, których jednak nie opisał Newton, ani nikt inny, i dlatego prawo fizyczne $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ nie jest pełne ....”

Richard P. Feynman

Nie-inercjalne układy odniesienia

Oznaczenia:

Oxyz – inercjalny układ odniesienia

Ox’y’z’ – porusza się z przyspieszeniem $\mathbf{a}_u$ względem Oxyz

- nieinercjalny

Opis ruchu ciała poruszającego się w przestrzeni:

prędkość	$\mathbf{v}$	względem Oxyz;	$\mathbf{v}'$	względem Ox’y’z’
przyspieszenie	$\mathbf{a}$	”	$\mathbf{a}'$	”

Transformacja Galileusza wiąże oba układy:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}(t)} = \overrightarrow{\mathbf{v}'(t)} + \overrightarrow{\mathbf{v}_u(t)},$$

$$d\,\mathbf{v}/dt = d\,\mathbf{v}'/dt + d\mathbf{v}_{u-}/dt$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_u$$

W układzie inercjalnym Oxyz słuszne jest:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

W układzie nieinercjalnym Ox'y'z' :

$$m\,\mathbf{a}' = ?$$

Na podstawie Tr. Galileusza:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_u$$

$$\Longrightarrow \quad m\,\mathbf{a}' = m\,(\mathbf{a} - \mathbf{a}_u) = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_u$$

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_u$$

Przyjmując $\quad - m\,\mathbf{a}_u = \mathbf{F}_b,$ „siła bezwładności”

II prawo dynamiki Newtona uzupełnione o siłę bezwładności $\mathbf{F}_b$ można stosować także w układach nieinercjalnych:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_b\ ,$$

$$\{\mathbf{F}_b = -(m\,\mathbf{a}_u)\}$$

Siły [*jednostka:* 1 niuton = 1 kg* 1 m/s^2]

- -rzeczywiste
- -fikcyjne (pozorne, bezwładności)

Siły rzeczywiste =oddziaływania między ciałami (źródło materialne):

-grawitacyjne
-elektromagnetyczne (*tarcia, sprężystości*)
- jądrowe silne (krótkozasięgowe)
-słabe (krótkozasięgowe)

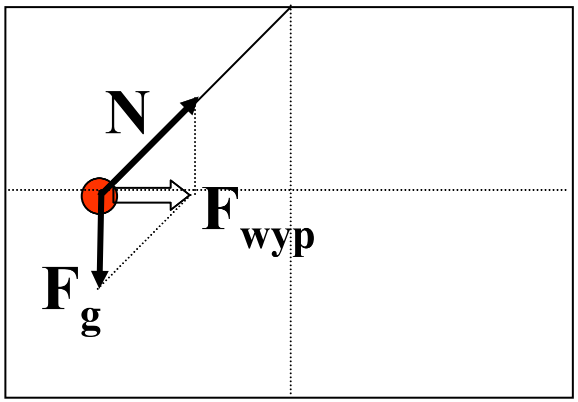
Siły fikcyjne = brak rzeczywistego źródła (oddziaływującego ciała);

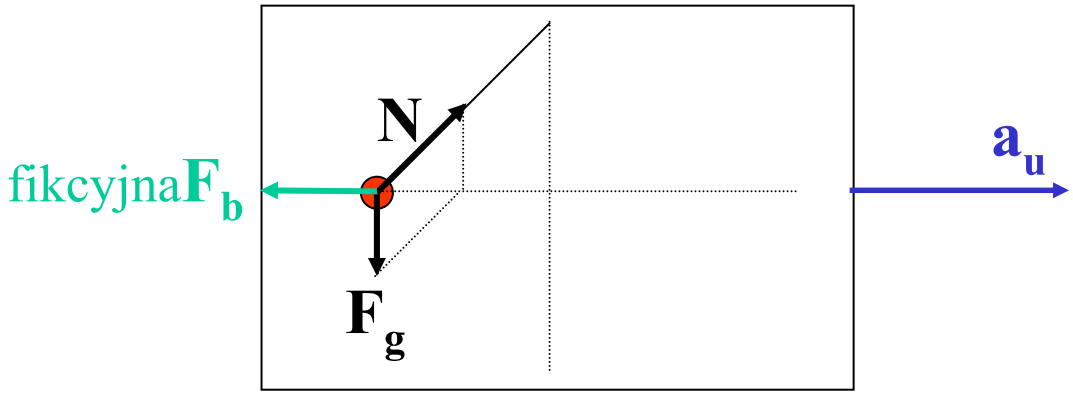
1. Siła bezwładności **nie jest siłą rzeczywistą** lecz tzw. fikcyjną, tj. umowną i **występuje wyłącznie w układach nieinercjalnych**
2. Podstawową cechą sił bezwładności (*jednak niespecyficzną*!) jest ich proporcjonalność do masy m ciał, na które działają
3. Siły fikcyjne są określone własnościami układu odniesienia, a nie oddziaływaniem wzajemnym ciał.

2-*ga*. cecha sił bezwładności jest wspólna także dla sił grawitacji

Siły bezwładności

1. Siła bezwładności w układzie Ox'y'z' **poruszającym się ruchem prostoliniowym** z przyspieszeniem a_u





Obserwator Oxyz („nieruchomy"):
kulka porusza się z $\mathbf{a_u}$;

Siła wypadkowa :
$\mathbf{F_{wyp}=N + F_{gr} = m\, a_u}$ $(\neq 0)$

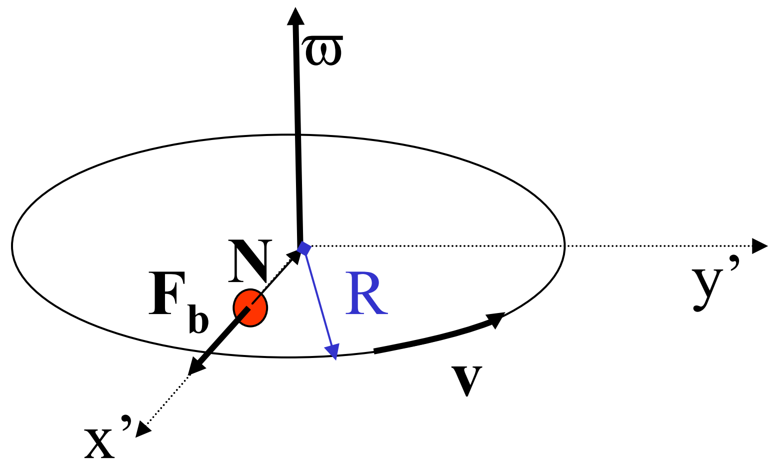
Obserwator Ox'y'z':
kulka nieruchoma, $\mathbf{a'} = 0$

Siła wypadkowa :
$\mathbf{F_{wyp}=N + F_{gr} + F_b = 0}$

W obu układach – po uwzględnieniu siły bezwładności - II prawo dynamiki jest spełnione !

2. Siły bezwładności w układzie Ox'y'z' **poruszającym się ruchem obrotowym** z prędkością kątową ϖ i przyspieszeniem dośrodkowym $\mathbf{a_u} = -\omega^2 \mathbf{R}$

2.1. **Odśrodkowa siła bezwładności**

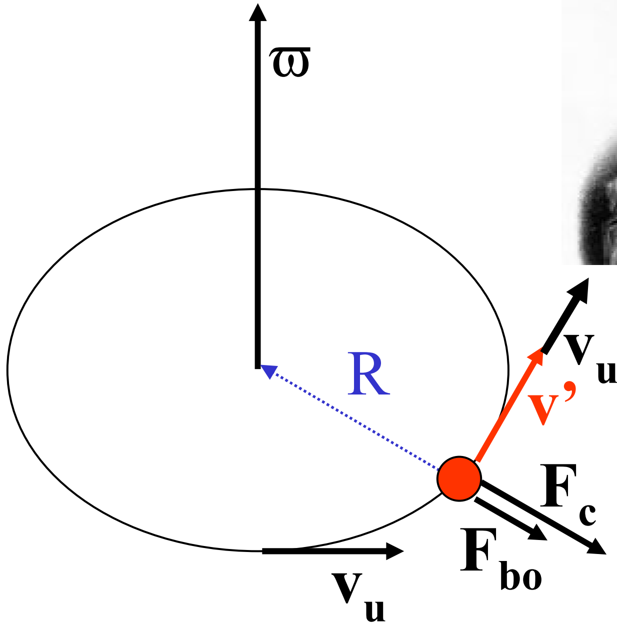


$$\mathbf{F_b} = -\,m\,\mathbf{a_u} = m\,\omega^2\,\mathbf{R}$$

Dla obserwatora w układzie wirującym Ox'y'z' (*nieinercjalnym*)
kulka pozostaje w spoczynku, jeśli $\mathbf{F_{wyp}} = \mathbf{N} + \mathbf{F_b} = 0$;
$\Rightarrow$ II prawo dynamiki (*po uwzględnieniu siły bezwł.*) jest spełnione.

Odśrodkowa siła bezwładności występuje także dla **kulki poruszającej się** w układzie wirującym

2.2. **Siła Coriolisa**



Gaspard-Gustave de Coriolis
(1792 – 1843)
francuski fizyk i matematyk.

W układzie Ox'y'z' poruszającym się ruchem obrotowym **ciało porusza się** z prędkością **v'**

Dla obserwatora Oxyz („*nieruchomego*"; *przypadek kolinearny*) :

Prędkość ciała	$v = v' + v_u = v' + \omega R$
Przyspieszenie normalne (*dośrodkowe*)	$a_n = v^2/R = (v' + \omega R)^2 /R$
	$a_n = (v')^2/R + 2v'\omega + \omega^2 R$

Dla obserwatora Ox'y'z' („*wirującego*") :

Prędkość ciała	v'
Przyspieszenie	$a' = (v')^2/R$

Różnica : $a_n - a_n' = 2v'\,\omega + \omega^2 R$

stanowi dodatkowe przyspieszenie (fikcyjne) obserwowane w układzie nieinercjalnym (wirującym) Ox'y'z , przy czym:

- przyspieszenie $\omega^2 R$ związane jest z odśrodkową siłą bezwładności

$F_{bo} = m\,\omega^2 R$ *dla ciała o masie m* ,

- przyspieszenie $2v'\,\omega$ związane jest z siłą Coriolisa

$F_C = 2m\,v'\,\omega$

Ogólnie przyspieszenie i siła Coriolisa

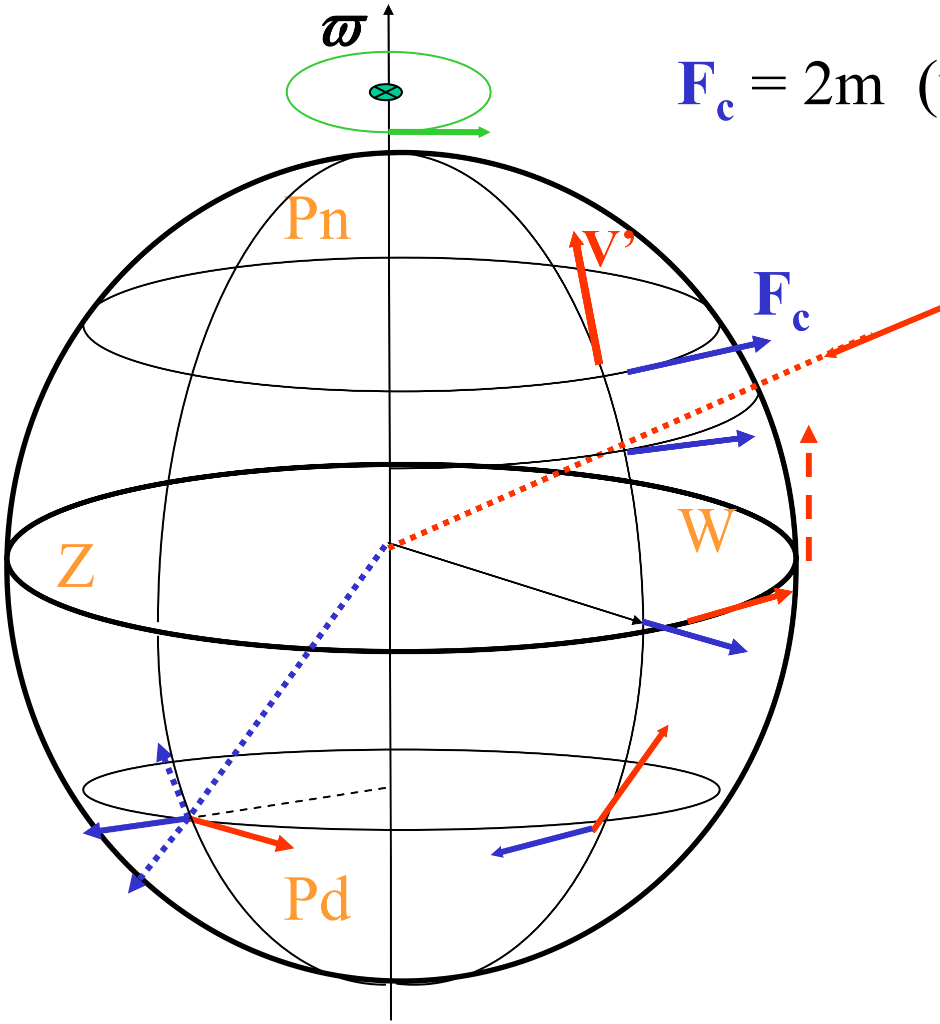
$$\mathbf{F_c} = 2m\,(\mathbf{v'} \times \boldsymbol{\omega})$$

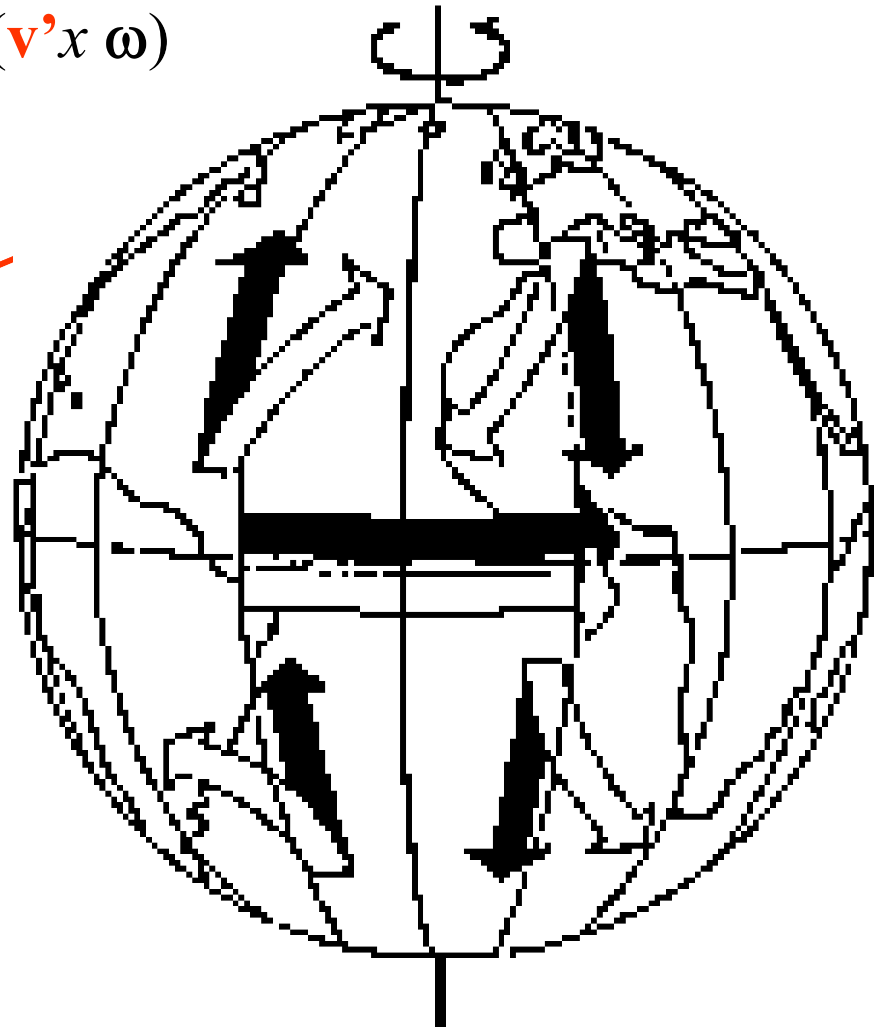
$$\mathbf{a_c} = 2\,(\mathbf{v'} \times \boldsymbol{\omega})$$

Siła Coriolisa działa w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu wyłącznie na ciała poruszające się ($v' \neq 0$) w układach wirujących.

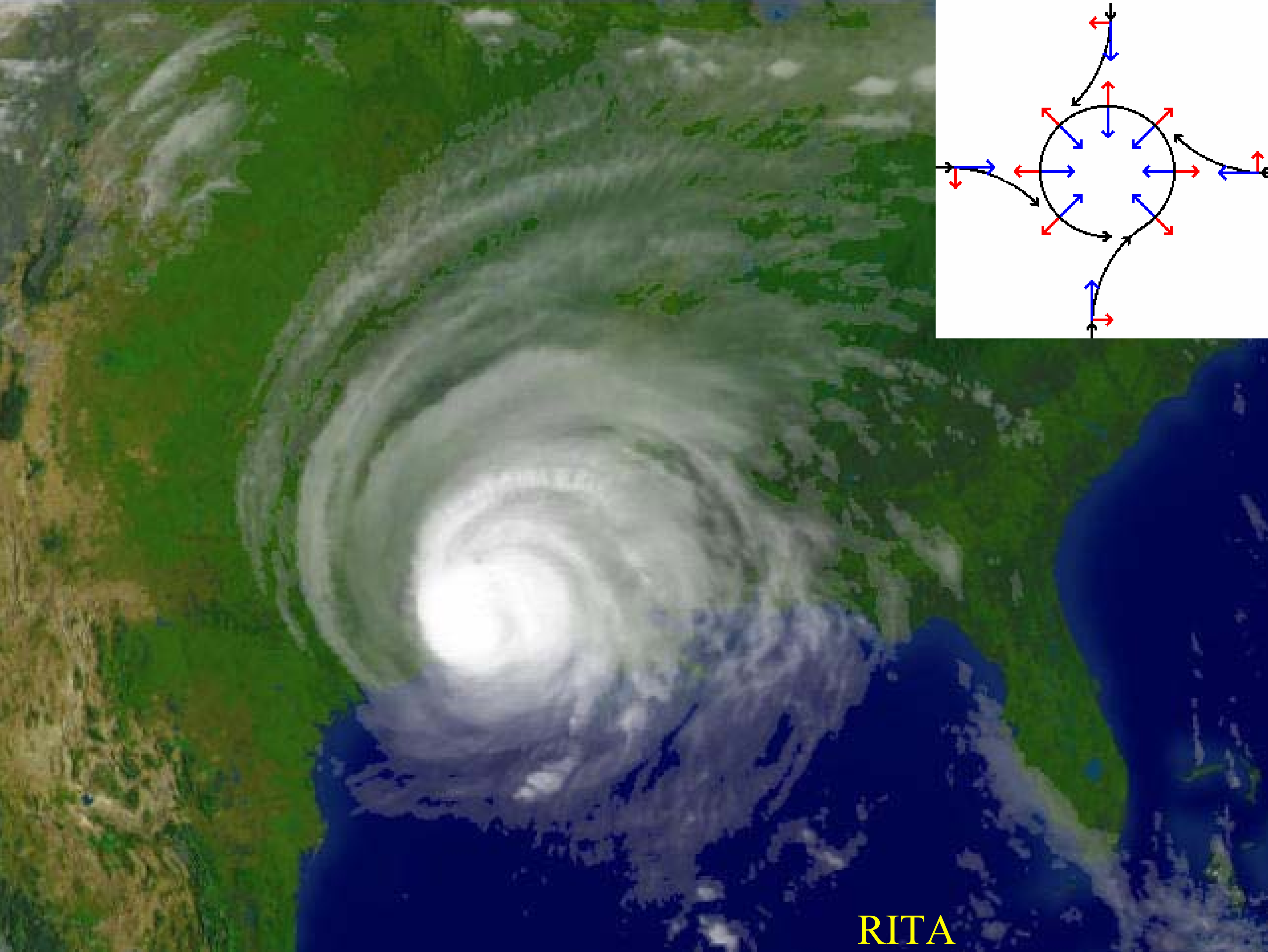
Siła Coriolisa w ziemskim układzie odniesienia

$$\mathbf{F_c} = 2m\ (\mathbf{v'} \times \omega)$$





Rzeki, tory, pasaty/antypasaty


RITA

Wahadło Foucault'a

Jean Bernard Leon FOUCAULT (1819-1868) francuski fizyk, eksperymentator i wynalazca

1850 - dowiódł, że światło porusza się wolniej w wodzie niż w powietrzu,

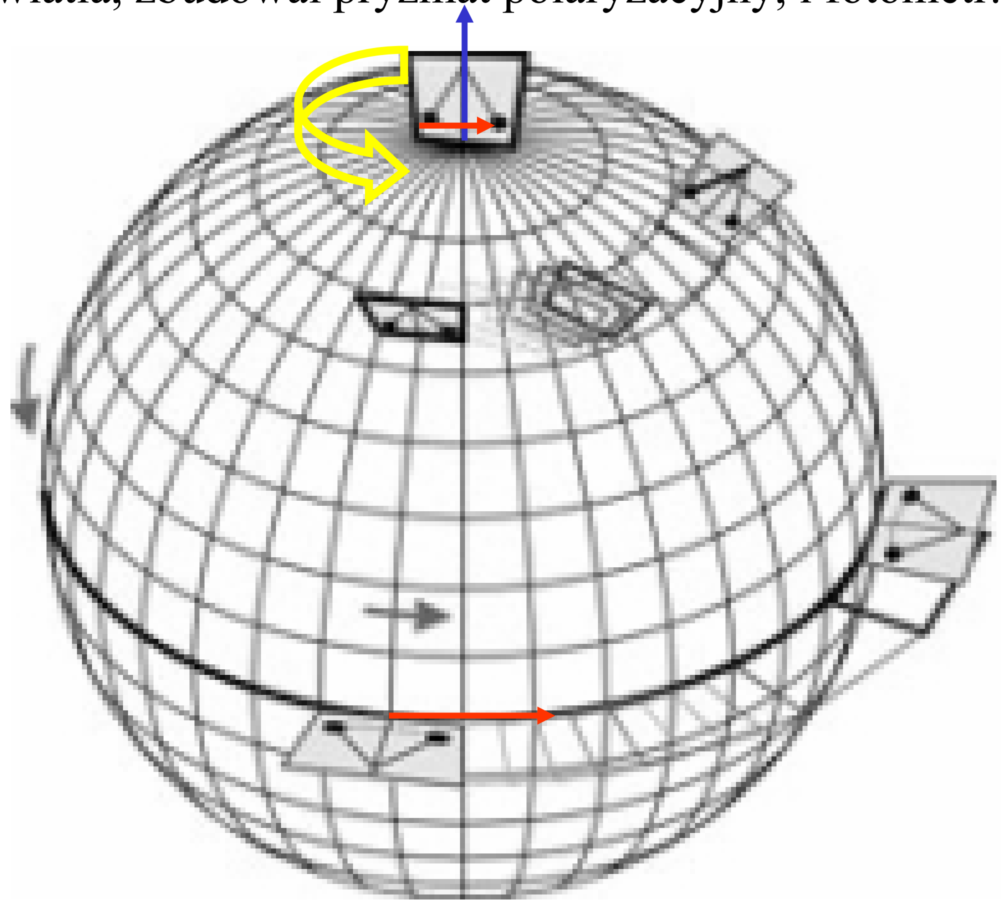
1851- zademonstrował obrót Ziemi przy pomocy wahadła,

1852 - wynalazł żyroskop,

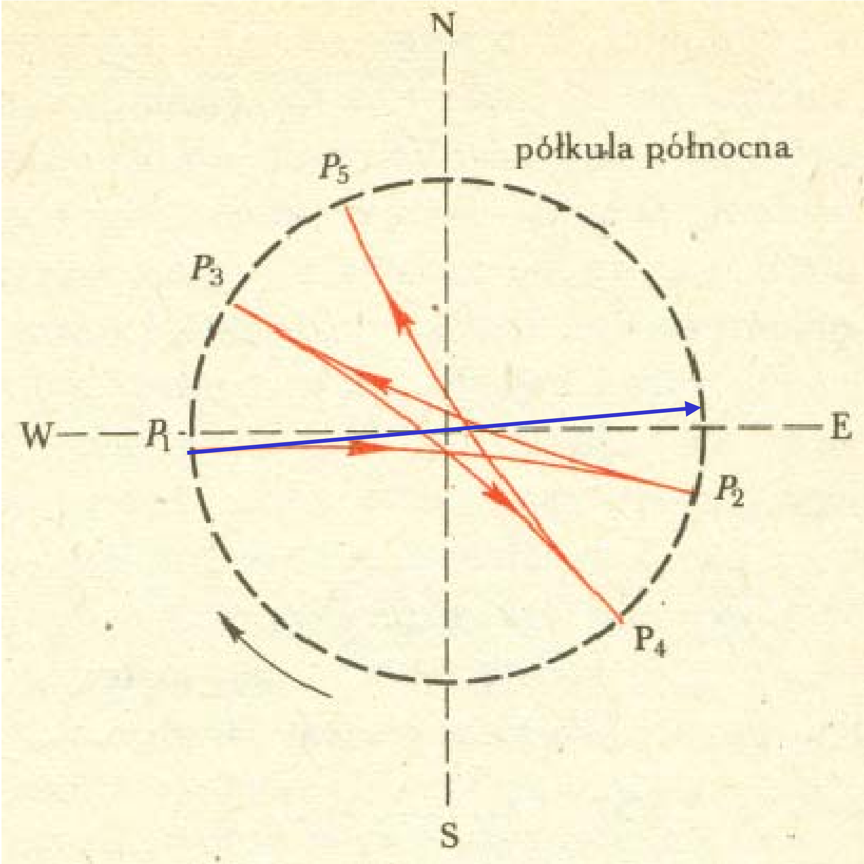
1855 - odkrył prądy wirowe, znane obecnie jako prądy Foucaulta,

1858 - ulepszył lustra dla teleskopów

ulepszył metodę pomiaru prędkości światła, zbudował pryzmat polaryzacyjny, i fotometr.



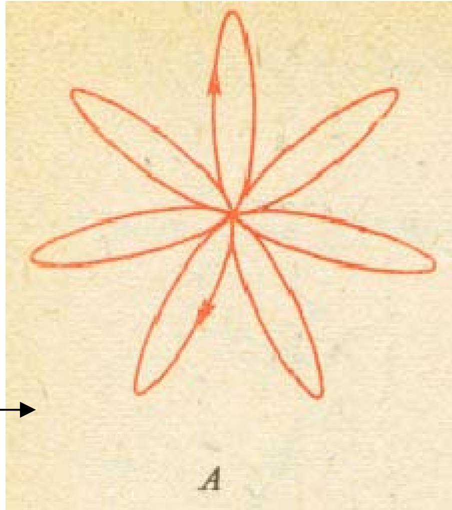
Wahadło Foucault'a (1851r.)

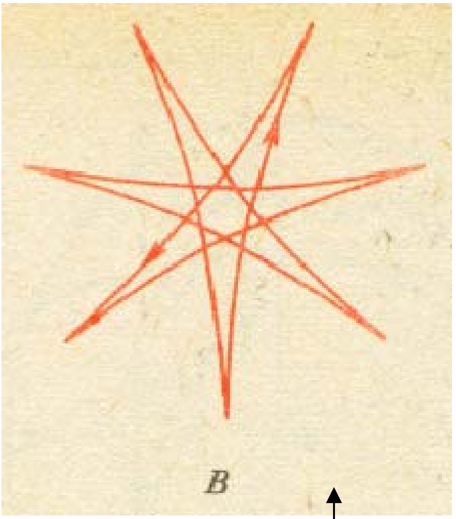


Dla obserwatora na Ziemi płaszczyzna ruchu wahadła obraca się z prędkością kątową:

$$\omega_1 = \omega \sin \phi$$

W Warszawie ($\phi = 52°$): $\omega_1 \approx 12°/h$



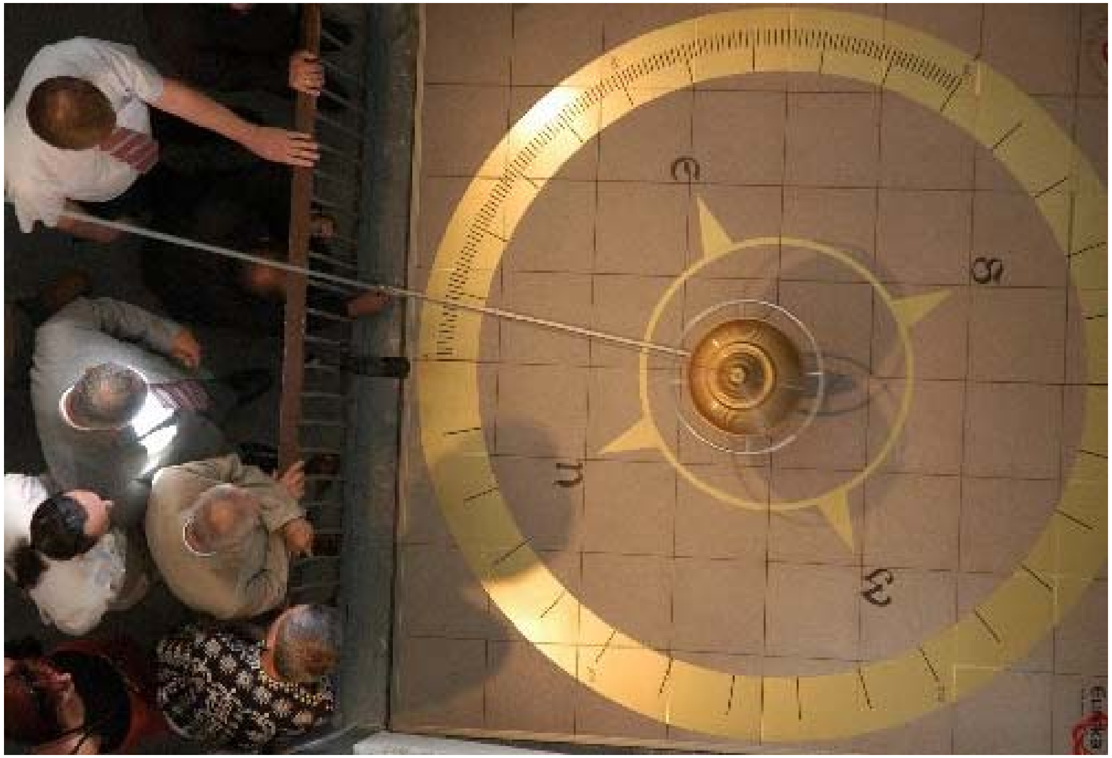


Dla startu z położenia równowagi (A)

Start z wychylenia maksymalnego (B)

Pokaz publiczny, głównie dla kolegów naukowców, odbył się w Obserwatorium Paryskim 3.02.1851 r. z wahadłem o długości 11 m

"Vous ętes invités a' venir voir tourner la terre..."



Pokaz wywołał ogromne wrażenie i książę Louis Napoleon Bonaparte, przyszły Napoleon III, poprosił Foucaulta o zademonstrowanie eksperymentu szerokiej publiczności. Miało to miejsce 26.III.1851 r. pod kopułą Pantheonu przy pomocy wahadła o długości 67 m z podwieszoną kulą armatnią o ciężarze 28 kg.

Pokaz wywołał później ogromną liczbę podobnych eksperymentów na całym świecie.

Wahadła Foucaulta obecnie

Miejsce (nazwa oryginalna)	Miejsce (nazwa polska)	Kraj	L (m)	M (kg)
Oregon Convention Center in Portland	Centrum Kongresowe w Portland	USA	27	408
University of Colorado	Uniwersytet Kolorado	USA	40	300
Museum of Science and Industry, Chicago	Muzeum Techniki i Przemysłu, Chicago	USA	20	300
National Museum of American History, Washington, DC	Muzeum Narodowe Historii Amerykańskiej, Waszyngton	USA	21	105
Indiana State Museum	Muzeum Stanowe w Indianie	USA	26	96
United Nations, New York, N.Y.	Siedziba ONZ, Nowy Jork	USA	23	91
Zamek Książąt Pomorskich w Szczecinie, Szczecin	Zamek Książąt Pomorskich w Szczecinie, Szczecin	Polska	28,5	76
Wydział Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań	Wydział Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań	Polska	10	52
Wieża Radziejowskiego- dawna dzwonnica, Frombork	Wieża Radziejowskiego- dawna dzwonnica, Frombork	Polska	28,5	46
Instytut Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń	Instytut Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń	Polska	16	29
Pantheon, Paris	Panteon w Paryżu	Francja	67	28
Kościół św. Piotra i Pawła w Krakowie, Kraków	Kościół św. Piotra i Pawła w Krakowie, Kraków	Polska	46,5	25

Wnioski z analizy praw Newtona

I. Inercjalne układy odniesienia;

Układy, w których I prawo Newtona (zasada bezwładności, *z uwzględnieniem tylko sił rzeczywistych*) jest spełnione nazywamy inercjalnymi.

Twierdzenie

Układem inercjalnym jest każdy układ poruszający się bez przyspieszenia (*ruchem jednostajnym po prostej*)

Dowód

Niech Oxyz będzie wybranym Układem Inercjalnym (U.I.);
transformacja Galileusza dla dowolnego innego układu Ox'y'z':

$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v_u}$; jeśli $\mathbf{a_u} = \mathbf{0}$, to $\mathbf{v_u} = \text{const}$

$d\,\mathbf{v}/dt = d\,\mathbf{v}'/dt + d\,\mathbf{v_u}/dt$

$\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}'$

II. Prawa dynamiki klasycznej w inercjalnych układach odniesienia są niezmiennicze względem transformacji Galileusza *t.zn. pozostają niezmienione we wszystkich układach inercjalnych*;

W układach inercjalnych: $\mathbf{a = a'}$

$\mathbf{m = m'}$

$\mathbf{F = F'}$ (*rzeczywista*)

$\Rightarrow \quad \mathbf{(m\,a = m'a') = inv}$

co potwierdza zasadę względności Galileusza

(tj. *nie można obiektywnie odróżnić układów U.I.* $\Rightarrow$ *ruch jest względny*)

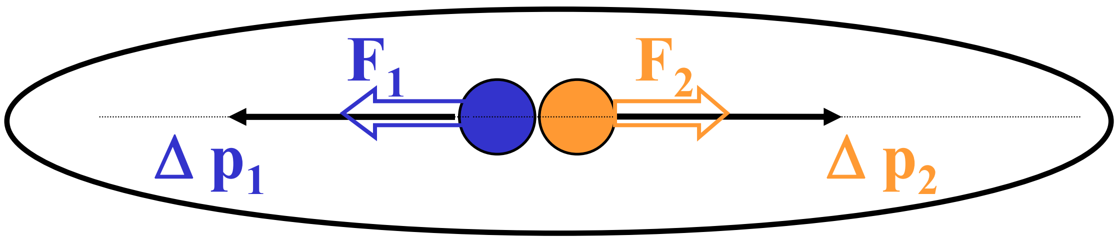
III. Mechanika klasyczna (Newtona) jest słuszna dla dużych mas i małych prędkości:

$$\begin{cases} \mathbf{m \gg (masa\ atomu),} \\ \mathbf{m = const, \quad (m_1) + (m_2) = (m_1 + m_2),} \\ \\ \mathbf{v \ll c} \end{cases}$$

Pęd: $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$

(*wektor pędu* **p** *ma kierunek wektora prędkości* **v**)

Niech będzie zamknięty układ dwóch cząstek:



Na podstawie II+III prawa Newtona:

$(F_1) \qquad d\mathbf{p}_1/dt = -\, d\mathbf{p}_2/dt \qquad (-F_2),$

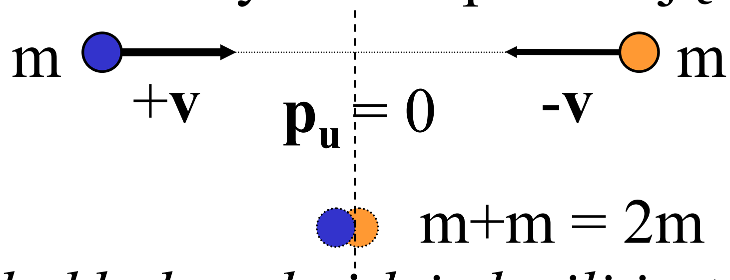
$d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/dt = 0,$

$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_c = \text{const}$

pęd układu zamkniętego jest stały

Zderzenia

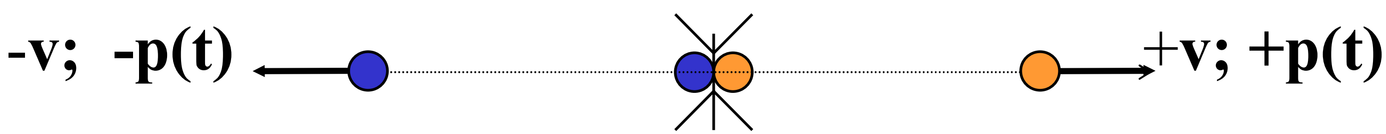
Zderzenie centralne niesprężyste (*bez zachowania energii kinetycznej*) jednakowych mas poruszających się z jednakowymi prędkościami



(z reguły symetrii: *symetria zagadnienia + symetria warunków = symetria wyniku*
→ $\underline{\mathbf{v} = 0}$ lub $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$;

(pęd układu w każdej chwili jest zerowy, energia kinetyczna jest tracona)

Zagadnienie odwrotne:

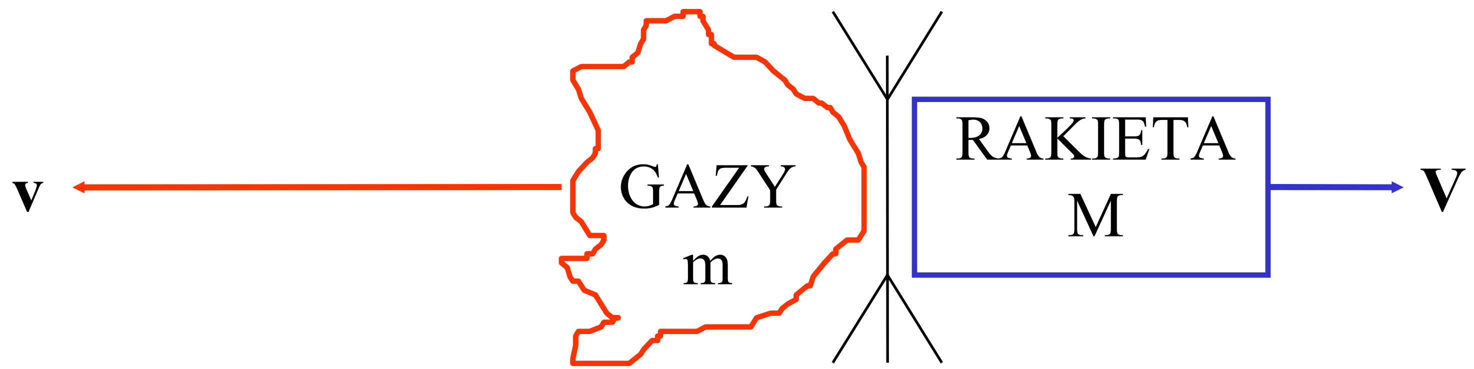


→ $\mathbf{p}_u(\mathbf{t}) = 0.$ $\quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$

Dla dowolnych mas i prędkości : $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v}$

przed — po

Napęd rakietowy



$$\mathbf{p_u}(t) = 0$$

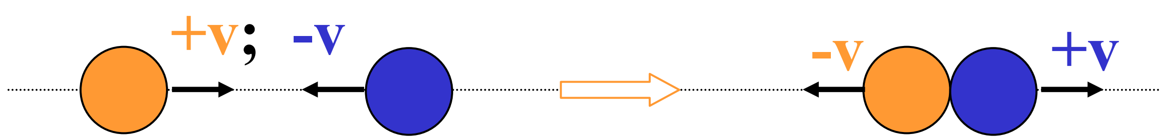
$$\Rightarrow \quad m(t)\, v(t) = M(t)\, V(t)$$

Zderzenie centralne sprężyste (*z zachowaniem energii kinetycznej*)

(z reguły symetrii: *symetria zagadnienia + symetria warunków = symetria wyniku*

$\mathbf{v} = 0$ lub $\underline{\mathbf{v_1} = -\mathbf{v_2}}$;

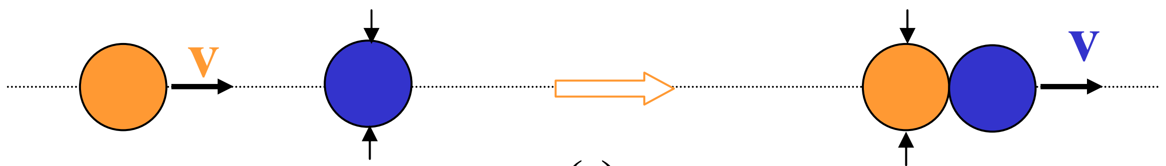
I. równe masy, równe prędkości



$$\mathbf{p_u}(t) = 0$$

$$E_u = 2E_1 = \text{const}$$

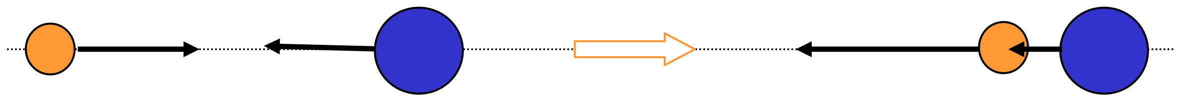
II. równe masy, poruszająca się i spoczywająca



$$\mathbf{p_u}(t) = \mathbf{p_1}$$

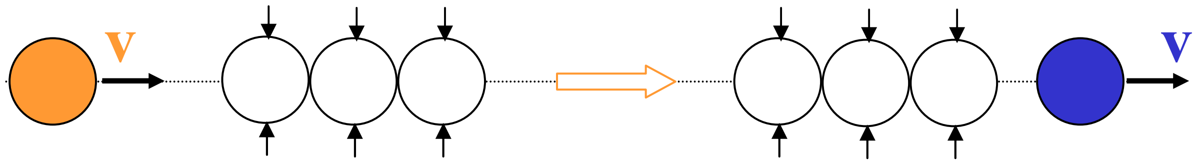
$$E_u = E_1 = \text{const}$$

III. w ogólnym przypadku różnych mas i prędkości



$$(\Sigma\, m\, \mathbf{v}) = (\Sigma\, m\, \mathbf{v})'$$
$$(\Sigma\, \tfrac{1}{2}\, m\, v^2) = (\Sigma\, \tfrac{1}{2}\, m\, v^2)'$$

Przekazywanie pędu



Eksperymentalny dowód na :

1. II prawo dynamiki (F ⟺ dp/dt)
2. zachowanie pędu i energii układu

Prawa zachowania

Definicja 1.

Układem mechanicznym zamkniętym (izolowanym) nazywamy zbiór ciał wydzielonych z otoczenia, na które nie działają siły pochodzące od ciał nie należących do układu (t.zw. siły zewnętrzne)

Definicja 2.

Całką ruchu układu mechanicznego jest taka funkcja stanu układu (*t.j. funkcja współrzędnych i prędkości ciał*), która zachowuje stałą wartość podczas ruchów układu

Twierdzenie:

W układzie mechanicznym zamkniętym istnieją 3 addytywne całki ruchu

1. pęd
2. energia
3. moment pędu

Wniosek 1

Oznacza to,
że istnieją 3 prawa zachowania: energii, pędu, i momentu pędu

Prawa zachowania są prawami ścisłymi -
w odróżnieniu np. od praw Newtona są spełnione nawet wtedy, gdy prawa Newtona są niespełnione.

I. Prawo zachowania pędu

W układzie zamkniętym (*t.zn. gdy na układ nie działają siły zewnętrzne***) całkowity pęd układu jest stały**

Dowód:

został podany wcześniej

Zasada zachowania energii

Niech układ składa się z 1 ciała, na które działa wypadkowa siła F:

(*II prawo dynamiki*) $\quad m(d\mathbf{v}/dt) = \mathbf{F}$

(*definicja prędkości*) $\quad \mathbf{v}\, dt = \mathbf{ds}$ *

$$m\,\mathbf{v}\,(d\mathbf{v}) = \mathbf{F}\,\mathbf{ds}$$

$$d(\tfrac{1}{2}mv^2) = \mathbf{F}\,\mathbf{ds} \quad // \int$$

$$\Delta(\tfrac{1}{2}m\,v^2) = \int \mathbf{F}\,\mathbf{ds}$$

Definicja 3.

Wielkość ($\frac{1}{2}m\,v^2$)

nazywamy energią kinetyczną E_k ciała o masie m i prędkości v

Definicja 4.

Wielkość **F ds** ($\int$ **F ds**)

nazywamy pracą dW (W) wykonywaną przez siłę **F** na drodze **ds**

$$\Longrightarrow \quad \Delta E_k = W$$

Jeśli układ jest zamknięty, F = 0, i :

$$\Delta(\tfrac{1}{2} m\, v^2) = \int F\, ds = 0$$

$$\Delta E_k = 0 \qquad (W=0)$$

Wniosek (zasada zachowania energii kinetycznej)

W układzie zamkniętym energia kinetyczna E_k jest zachowana

Pole sił

Definicja 5.

Pole sił nazywamy zachowawczym lub potencjalnym,

jeśli praca tych sił nad ciałem nie zależy od drogi, po której ciało się porusza, a tylko od punktu początkowego i końcowego ruchu;

siły takiego pola nazywamy siłami zachowawczymi.

Definicja 6.

Pole sił, w którym kierunek siły działającej w każdym punkcie

przechodzi przez wspólne nieruchome centrum,

a wartość siły zależy tylko od odległości punktu od tego centrum,

nazywamy polem centralnym: $\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{e}_r$

Definicja 7.

Pole sił, w którym w każdym punkcie siły są takie same co do wartości, kierunku i zwrotu (F=const) nazywamy jednorodnym

Definicja 8.

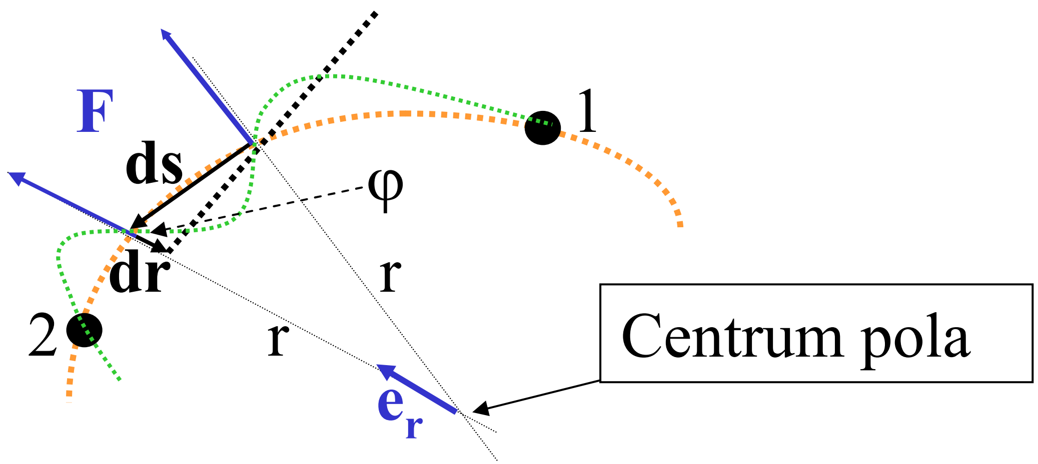
Pole sił, które nie zmienia się w czasie,

nazywamy polem stacjonarnym

Twierdzenie

Pole centralne jest polem zachowawczym

Dowód:



$\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{e_r}$

$dW = [\mathbf{F}]\,\mathbf{ds} = [f(r)\,\mathbf{e_r}]\,ds = f(r)\,1\,ds\cos\varphi = f(r)\,dr$

dla dowolnej ds W *zależy tylko od* dr;

dla ustalonych punktów 1 i 2 pola dr jest też ustalone.

$$W_{12} = \int_1^2 f(r)\,dr$$

Twierdzenie

Pole jednorodne jest polem zachowawczym

Energia potencjalna pola zachowawczego

Twierdzenie:

W polu zachowawczym dla każdego punktu tego pola istnieje jednoznaczna funkcja $F(x,y,z)$.

Dowód:

wystarczy podać tylko jedną

Niech $U = U(x,y,z)$, taka, że:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 - U_2 = W_{12}\,, \\ U(r\to\infty) = U_0 = 0 \end{array} \right\}$$

oraz

(*t.zn.* $-\Delta U = \Delta W$, *i podobnie:* $-dU = dW$)

Zatem $U(x,y,z) = U(x,y,z) - U_0 = W_{r,\infty}$

Definicja:

Funkcję $U(x,y,z)$ nazywamy energią potencjalną w polu zachowawczym

Przy tym dla pojedyńczego (każdego) ciała

$$\Delta E_k = W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$$\Delta E_k = W_{12} = U_1 - U_2$$

$$E_{k2} - E_{k1} = U_1 - U_2$$

$$E_{k2} + U_2 = E_{k1} + U_1$$

Definicja 9.

Wielkość $E_c = E_k + U$ nazywamy energią mechaniczną całkowitą ciała

Ogólnie (*dla dowolnego układu ciał - również otwartego*):

II. Prawo zachowania mechanicznej energii całkowitej

Całkowita energia mechaniczna układu ciał
w polu zachowawczym jest stała

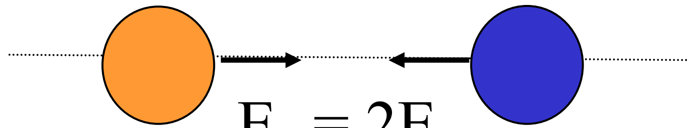
Wniosek 2

W polu zachowawczym przyrost energii kinetycznej ciała jest równy ubytkowi jego energii potencjalnej

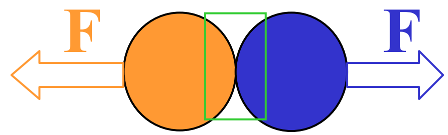
$$\Delta E_k = -\Delta U \qquad (\Delta U = U_2 - U_1)$$

Pole sił w zderzeniach

zderzenia sprężyste $\Longleftrightarrow$ niesprężyste



$E_k = 2E$

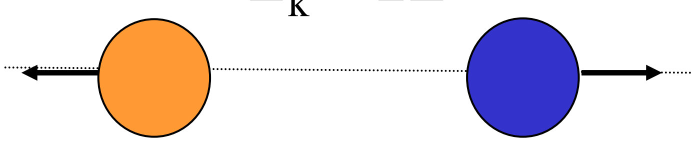


$E_k=0$

$\Delta E_k = -\Delta U$

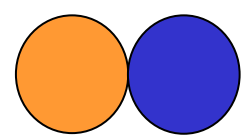
potencjalne pole sił: $U = 2E$

$E_k = 2E$



niezachowawcze pole sił: $\cancel{U}$

$E_k=0$



Energia potencjalna w polu sił

Praca dW przesunięcia na drodze ds w polu sił *na podst. definicji 4*:

$$dW = \mathbf{F}\, \mathbf{ds} \qquad (W = \int \mathbf{F}\, \mathbf{ds})$$

Podobnie, praca przemieszczenia ciała o **dx** (dy=0, dz=0),

w potencjalnym polu sił F(x,y,z), w którym określona funkcja

energii potencjalnej U = U(x,y,z):

Na podst. definicji 4 $\left\{ \begin{array}{l} dW = \mathbf{F_x}\, \mathbf{dx} \\ -\, dU = dW \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow -\, dU = \mathbf{F_x}\, \mathbf{dx}\ ,$$

$$F_x = -\, dU/dx$$

analogicznie $F_y = -\, dU/dy,\quad F_z = -\, dU/dz,$

ale $\mathbf{F} = F_x\mathbf{e_x} + F_y\mathbf{e_y} + F_z\mathbf{e_z}$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -\, (\delta U/\delta x\ \ \mathbf{e_x}\ ,\ \delta U/\delta y\ \ \mathbf{e_y}\ ,\ \delta U/\delta z\ \ \mathbf{e_z})$$

$$\mathbf{F} = -\ \mathrm{grad}\ U$$

Wniosek:

Każda z funkcji:

siła F(x,y,z)

i energia potencjalna ciała U = U(x,y,z)

jednoznacznie określa pole sił

Prawo zachowania momentu pędu

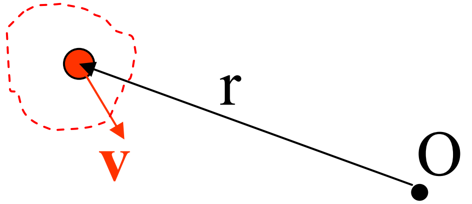
Definicja 1.

Momentem pędu **M** ciała* względem ustalonego punktu O nazywamy pseudowektor

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, **r**- promień względem O

Moment pędu układu ciał :

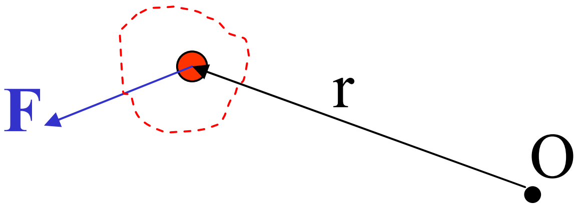
$\mathbf{M_u} = \Sigma\, \mathbf{M_i}$



Definicja 2.

Momentem siły **F** względem ustalonego punktu O jest pseudowektor

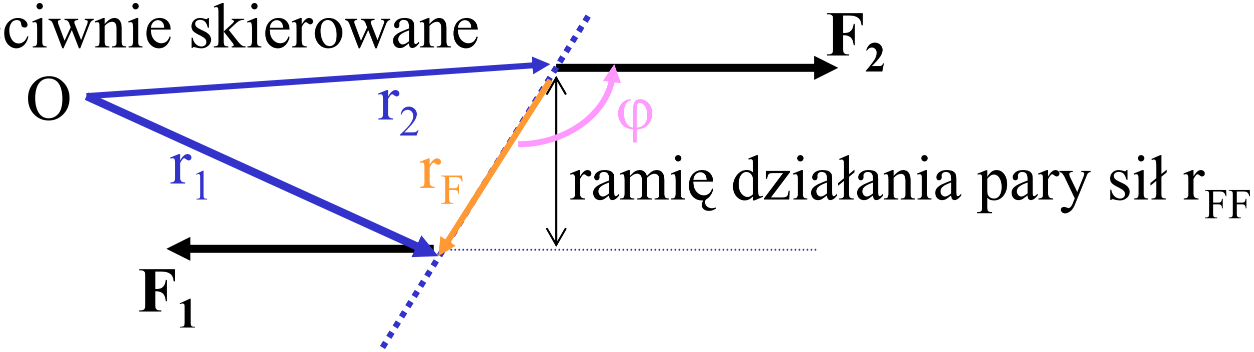
$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$,



Moment siły charakteryzuje zdolność siły do obracania ciała względem ustalonego punktu (osi)

Definicja 3.

Parą sił nazywamy dwie równoległe , niekolinearne siły, równe co do wartości i przeciwnie skierowane



Wniosek 1.

Moment pary sił jest równy iloczynowi jednej z nich przez ramię działania pary ($\mathbf{F}_1$=-$\mathbf{F}_2$=$\mathbf{F}$)

$$\mathbf{N} = \mathbf{r_1} \; x \; \mathbf{F_1} + \mathbf{r_2} \; x \; \mathbf{F_2} = (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \; x \; \mathbf{F} = \mathbf{r_F} \; x \; \mathbf{F} = F \, r_F \cos\varphi = F \, r_{FF}$$

Wniosek 2

Momenty sił wzajemnego oddziaływania ciał dla dowolnego układu równoważą się

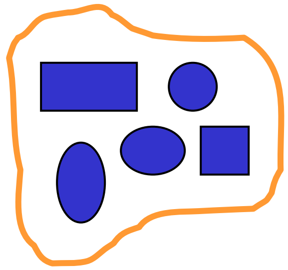
$r_{FF} = 0$

Twierdzenie

Moment pędu układu ciał jest stały

jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych jest równy zeru

Dowód:



$$d\,\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$$

$\mathbf{r}\ x/$

$$d\,(\mathbf{r}\ x\ \mathbf{p})/dt = \mathbf{r}\ x\ \mathbf{F}$$

$$d\mathbf{M}/dt = \mathbf{N} \qquad / \ \Sigma$$

$$d\,\mathbf{M}_{\mathbf{u}}/dt = \mathbf{N}_{\mathbf{wyp}}\,,$$ (*analog* II zas. dynamiki w r. obr.)

$$\mathbf{N}_{\mathbf{wyp}} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{u}} = \text{const}$$

III. Zasada zachowania momentu pędu:

Moment pędu <u>zamkniętego</u> układu cząstek jest stały

Elementy mechaniki bryły sztywnej

Definicja 1

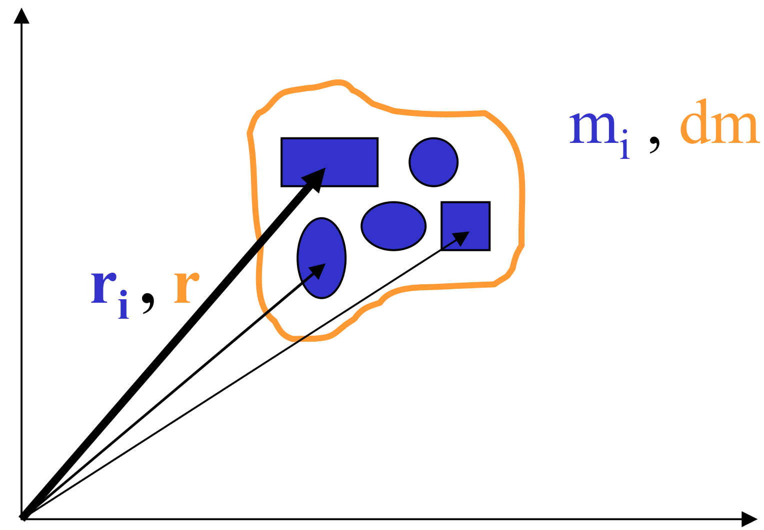
Środek masy układu ciał r_c

$$\Sigma\, m_i\, \mathbf{r_i} = m\, \mathbf{r_c}$$

Środek masy bryły sztywnej

$$\int \bar{r}\,dm = m\bar{r}_c$$

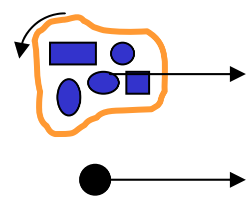
$$\bar{r}_c = \frac{1}{m}\int \bar{r}\,dm$$



Twierdzenie:

Środek masy r_c sztywnego układu ciał (bryły) porusza się pod wpływem sił zewnętrznych tak, jakby poruszał się punkt materialny o takiej samej masie pod wpływem tych samych sił

Dowód

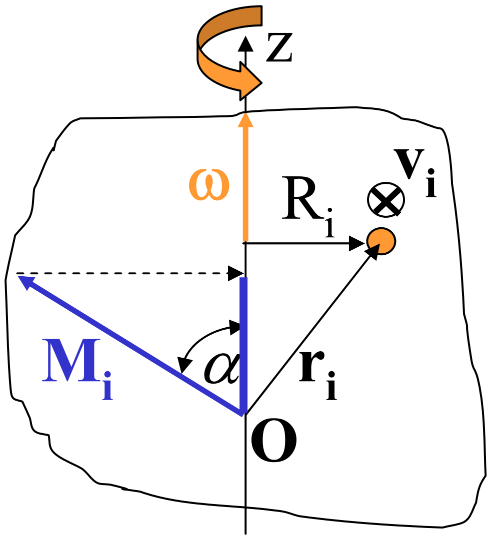


z definicji $(\Sigma\, m_i\, \mathbf{r_i} = m\, \mathbf{r_c})$ $/d^2/dt^2$

$$(\Sigma\, F_{zew} =)\ (\Sigma\, m_i\, \mathbf{a_i} = m\, \mathbf{a_c})$$

Ruch obrotowy bryły wokół nieruchomej osi

Moment bezwładności



Moment pędu elementu *i* wzgl .p. O:

$\mathbf{M}_i = m_i\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$; $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{v}_i$

$|\mathbf{M}_i| = M_i = m_i\, r_i\, (v_i) = m_i\, r_i\, (\omega R_i)$

rzut $\mathbf{M}_i$ na oś obrotu z :

$(M_i)_z = M_i \cos\alpha = m_i\, r_i \cos\alpha\, \omega R_i = m_i\, R_i\, \omega R_i = \omega\, m_i R_i^2$

rzut M_z momentu pędu całej bryły (*tj. moment pędu bryły wzgl.osi* z):

$M_z = \Sigma_i (M_i)_z = \Sigma_i\, \omega\, m_i R_i^2 = \omega\, \Sigma_i\, m_i R_i^2$

Definicja 2.

Wielkość $\Sigma\, m_i R_i^2$ ($\int R_i^2 dm$) jest momentem bezwładności I_z układu (bryły) względem ustalonej osi (z)

$M_z = I_z\, \omega$ (*analog* $p = m\, v$)

II prawo dynamiki w ruchu obrotowym bryły

$$d\,\mathbf{M}/dt = \Sigma\mathbf{N}_{\mathbf{zew}}\ ,$$

Równania dynamiki bryły sztywnej łącznie

$d\mathbf{p}_{\mathbf{c}}/dt = \mathbf{F}_{\mathbf{zew\ wyp}}$ (*r. postępowy*)

$d\mathbf{M}/dt = \mathbf{N}_{\mathbf{zew\ wyp}}$ (*r. obrotowy*)

Dla rzutu „z ” (*odpowiednik zasady niezależności ruchów*)

$$M_z = I_z\,\omega$$

$$\Rightarrow \quad d(I_z\,\omega)/dt = \Sigma N_{z\ zew}$$

$$I_z\,\varepsilon_z = \Sigma N_{z\ zew}\ ,$$

($\varepsilon_z = d\,\omega/dt$ - przyspieszenie kątowe)

Odpowiedniki energii i pracy w r. obrotowym:

energia kinetyczna $E_k = \Sigma\, E_{ki} = \Sigma\, \frac{1}{2}\, m_i\, (v_i^{\,2}) = \Sigma\, \frac{1}{2}\, m_i\, (\omega_i^{\,2}\, R_i^{\,2})$

$E_k = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$

praca

$dW = \Sigma\, dW_i = \Sigma\, \mathbf{F_i}\, \mathbf{ds} = \Sigma\, \mathbf{F_i}\, (\mathbf{v_i})\, dt = \Sigma\, \mathbf{F_i}\, (\omega\, x\, \mathbf{r_i})\, dt = \Sigma\, \omega\, (\mathbf{r_i}\, x\, \mathbf{F_i})\, dt$

$dW = \omega\, \mathbf{N}\, dt$

Energia kinetyczna bryły w ruchu płaskim łącznie

$E_k = \frac{1}{2}\, I_c\, \omega^2 + \frac{1}{2}\, m\, v_c^{\,2}$

Moment bezwładności

Z definicji: $I = \Sigma\, m_i\, R_i^{\,2}$ *układu ciał*

$I = \int (R_i^{\,2})\, dm$ *bryły*

R_i - *odległość elementu m_i od osi obrotu,*

Wniosek 1

Moment bezwładności jest wielkością addytywną *(z definicji)*

Wniosek 2

Moment bezwładności zależy od masy bryły i jej rozkładu ($R_i^{\,2}$); przy zmianie rozkładu masy i momentu bezwładności od I_1 do I_2 w układzie izolowanym ulega zmianie prędkość kątowa:

$$I_1\, \omega_1 = I_2\, \omega_2$$

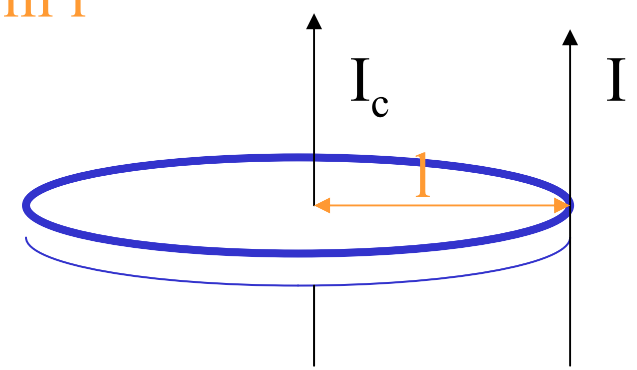
(z prawa zachowania **M**

$M_z = I_z\, \omega$)

Twierdzenie Steinera

Moment bezwładności bryły I względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności I_c względem osi równoległej i przechodzącej przez środek masy bryły oraz iloczynu masy bryły m i kwadratu odległości obu osi l :

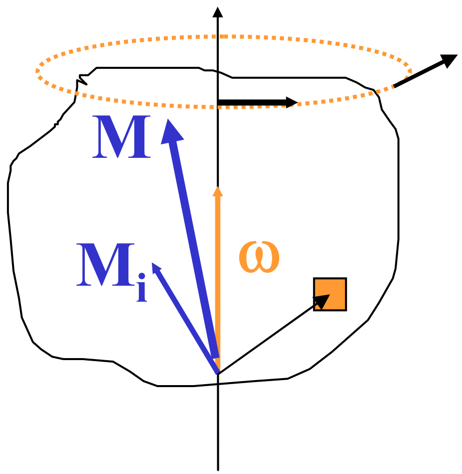
$$I = I_c + m\, l^2$$

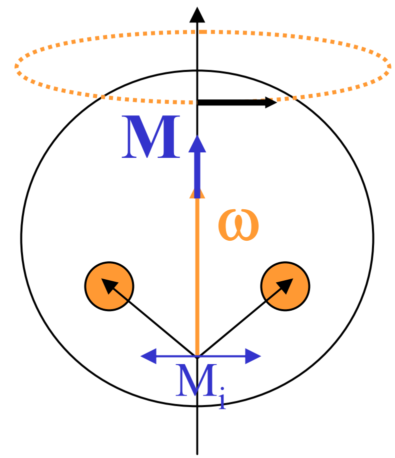


Przykłady: momenty brył względem osi symetrii

tarcza o promieniu R i masie m	$I = 1/2\ mR^2$,
cienki pręt o długości l i masie m (oś $\perp$)	$I = 1/12\ ml^2$,
walec o promieniu R i masie m (oś $\|\|$)	$I = 1/2\ mR^2$,
kula o promieniu R i masie m	$I = 2/5\ mR^2$

Żyroskopy





Uwaga 1

W ogólności wektor **M** nie pokrywa się z osią obrotu bryły (tj. z ω)

Jeśli oś obrotu jest osią symetrii to $\mathbf{M} = I\,\boldsymbol{\omega}$ (*reg. symetrii*)

Uwaga 2

Przy obrotach bryły wokół osi symetrii oś obrotu nie doznaje działania sił i jest stabilna ($d\,\mathbf{M_u}/dt = \mathbf{N_{wyp}}$)

Definicja 3

Oś obrotu, która w układzie izolowanym zachowuje stałe położenie nazywa się osią swobodną bryły

Definicja 4

Trzy wzajemnie prostopadłe osie swobodne bryły przechodzące przez jej środek masy są osiami głównymi bryły

Definicja 5

Głównymi momentami bezwładności bryły nazywamy momenty bezwładności $I_{\alpha,\beta,\gamma}$ względem jej osi głównych

Definicja 6

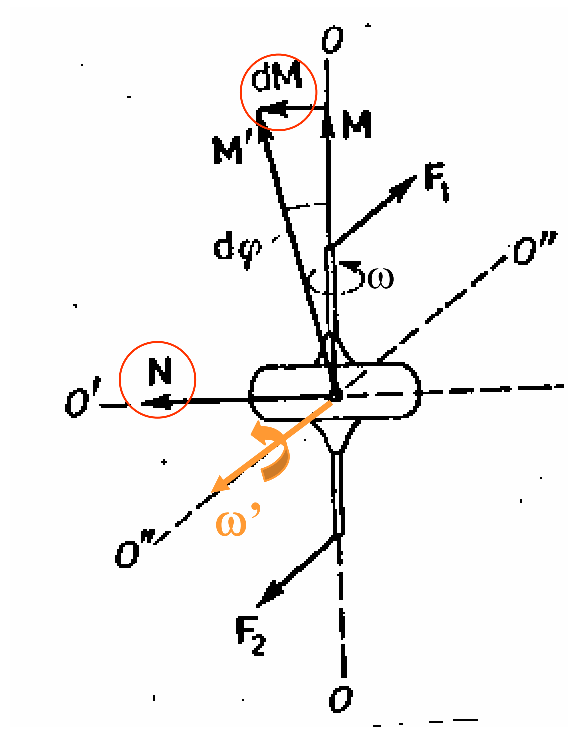
Bryły, dla których wszystkie trzy główne momenty bezwładności są równe, nazywają się bąkami (żyroskopami) kulistymi, a dla których dwa z trzech są równe nazywają się bąkami symetrycznymi

Uwaga 3

Przy obrotach bryły w układzie izolowanym ustalone są tylko te obroty, które odpowiadają ekstremalnym wartościom momentów głównych bryły;
w obecności sił zewnętrznych ustalone są obroty wokół osi głównej o maksymalnym momencie bezwładności

Moment sił żyroskopowych

1. klęska „zdrowego rozsądku”



$\vec{\mathbf{N}} = \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{M}}/\mathrm{dt}$ ⇨ $\mathrm{d}\,\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{N}}\,\mathrm{dt}$ **(N=r*x*F)**

Prędkość kątowa **obrotu osi** żyroskopu:

$d\varphi = dM / M = N\,dt/M$,

$\omega' = d\varphi/dt = N / M$;

lub $N = \omega' M$

ale

(ω' ⊥ N ⊥ M)

$\mathbf{N} = \boldsymbol{\omega}' x\, \mathbf{M}$ (*moment działający na oś żyroskopu*)

(*z III zas. dynamiki* $\mathbf{N}_{\dot{z}} = -\,\mathbf{N}$)

⇨ *moment sił żyroskopowych (wywierany przez oś żyroskopu)*

$$\mathbf{N}_{\dot{z}} = \mathbf{M}\, x\, \boldsymbol{\omega}'$$

Precesja

moment sił **N** *działający*
na oś („pochylonego”) żyroskopu
w polu grawitacyjnym ***g****:*

$\mathbf{N} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{p} \times \mathbf{M},$

$N = \omega_p M \sin\alpha$

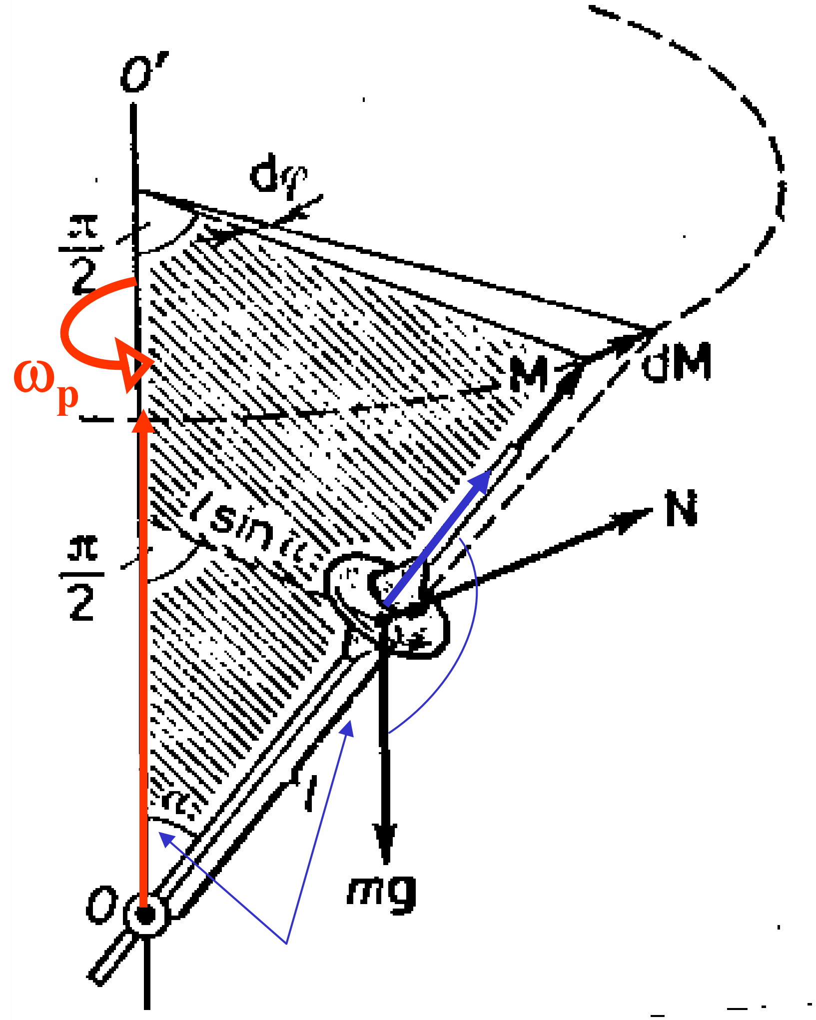
$\mathbf{N} = \mathbf{N}_\mathbf{g} \ (= l\, \mathbf{e}_l \times m\mathbf{g})$

$N_g = mg\, l \sin\alpha$

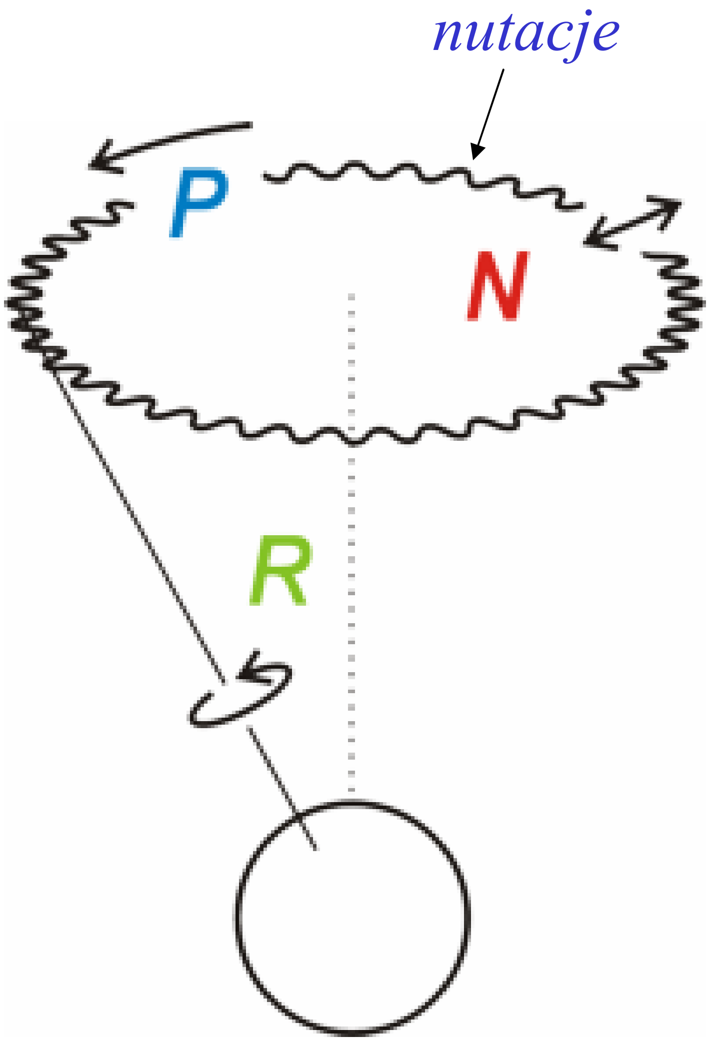
$mg\, l \sin\alpha = \omega_p M \sin\alpha$

częstość precesji

$\omega_p = mg\, l / M = mg\, l / I\omega$

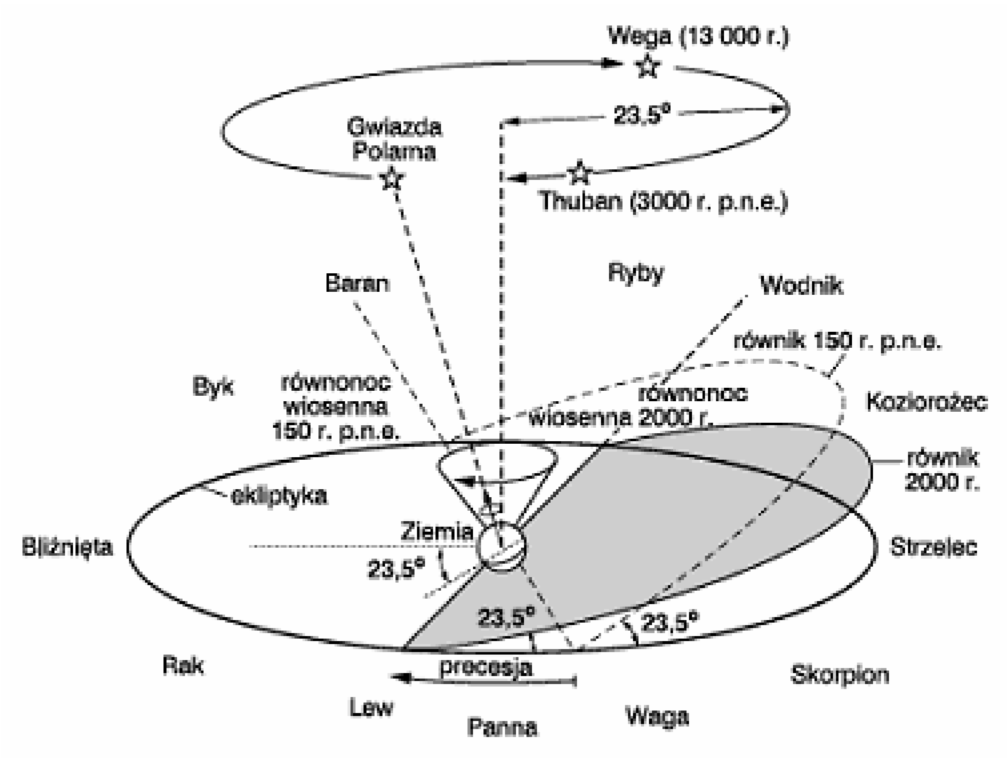


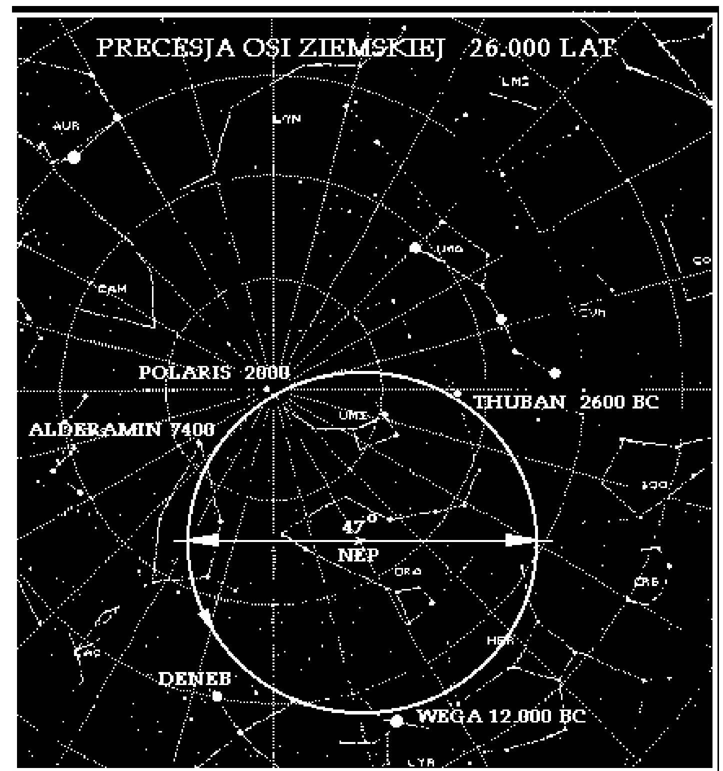
Nutacje



Precesja osi Ziemi została odkryta przez Hipparcha w 130 roku p.n.e.

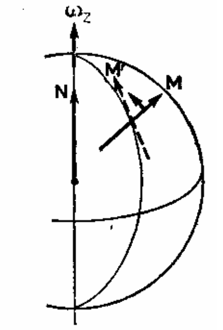
Stożek o kącie 47° zakreślany przez oś w ciągu 25 700 lat (t.zw. rok platoński)





Żyrokompas

Oś wirującego żyroskopu na Ziemi obraca się wraz z nią z prędkością kątową $\omega' = \omega_z = 2\pi/24h$



$$\boxed{\mathbf{N}_{\dot{z}} = \mathbf{M}\, x\, \omega'}$$