

Obwody rezonansowe

Wiesław Tłaczała

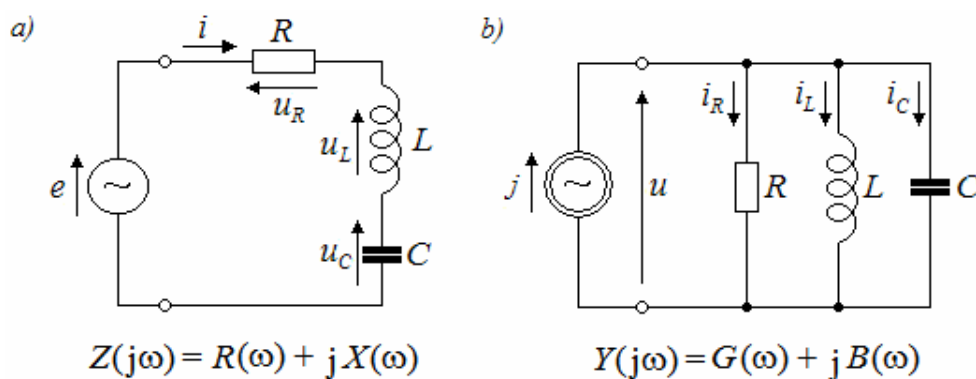
Celem ćwiczenia jest poznanie:

- właściwości obwodów rezonansowych, a w szczególności:
 - parametrów obwodów,
 - reakcji na sygnały harmoniczne,
 - reakcji na sygnały prostokątne,
- możliwości zastosowań obwodów rezonansowych.

Wprowadzenie

Obwód rezonansowy – obwód drgań elektrycznych zawierający elementy o reaktancjach (susceptancjach) indukcyjnych lub pojemnościowych, np. cewkę o indukcyjności L i kondensator o pojemności C , w którym może wystąpić zjawisko rezonansu elektrycznego, tzn. dla którego istnieje taka wartość pulsacji ω (częstotliwości f), nazywanej pulsacją rezonansową ω_0 (częstotliwością rezonansową f_0), przy której reaktancja $X(\omega)$ lub susceptancja $B(\omega)$ obwodu przyjmuje wartość równą zero

$$X(\omega_0) = 0 \quad \text{lub} \quad B(\omega_0) = 0. \quad (2)$$



Rys. 5 Obwody rezonansowe: a) szeregowy, b) równoległy

Obwody rezonansowe wyróżniają się bardzo wąską charakterystyką amplitudową (rys. 4e i f) w porównaniu z charakterystykami typowych filtrów elektrycznych (rys. 4a ÷ d).

Szeregowy obwód rezonansowy

Szeregowym obwodem rezonansowym nazywamy obwód z szeregowo połączonymi indukcyjnością L i pojemnością C oraz oporem R (rys. 5a). Impedancję $Z(j\omega)$ obwodu szeregowego w funkcji pulsacji opisuje równanie

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad (3)$$

gdzie: $R(\omega) = R = \text{const}$ – rezystancja (część rzeczywista impedancji),
 $X(\omega) = \omega L - 1/\omega C$ – reaktancja (część urojona impedancji),

natomiast moduł impedancji $|Z(j\omega)|$ opisuje zależność

$$|Z| = \frac{E_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (4)$$

Wykresy rezystancji, reaktancji i modułu impedancji w funkcji pulsacji dla szeregowego obwodu rezonansowego pokazano na rys. 6.

Jeżeli reaktancja $X(\omega)$ przyjmuje wartość równą zero, co zachodzi, kiedy jest spełniony warunek

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (5)$$

to obwód szeregowy RLC znajduje się w stanie rezonansu.

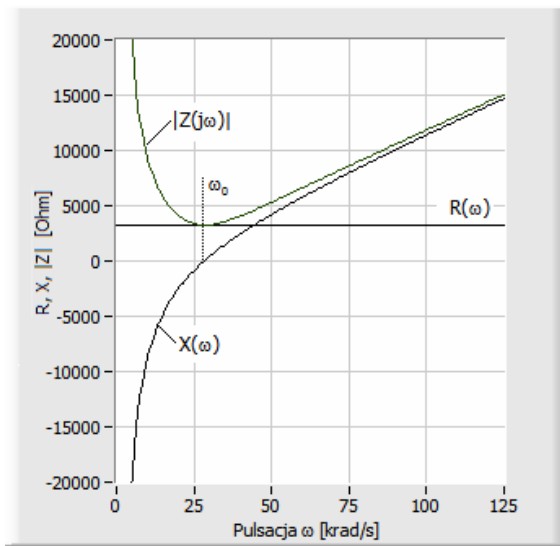
Z warunku (5) można wyznaczyć pulsację rezonansową ω_0 i częstotliwość rezonansową $f_0 = \omega_0/2\pi$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (6)$$

W stanie rezonansu ($\omega = \omega_0$) impedancja obwodu jest liczbą rzeczywistą i równa się R .

Dla pulsacji $\omega < \omega_0$ reaktancja obwodu jest ujemna ($X(\omega) < 0$) i ma charakter pojemnościowy.

Dla pulsacji $\omega > \omega_0$ reaktancja obwodu jest dodatnia ($X(\omega) > 0$) i ma charakter indukcyjny (rys. 6).



Rys. 6 Wykresy rezystancji, reaktancji i modułu impedancji w funkcji pulsacji dla szeregowego obwodu rezonansowego (dla $R = 1$ kOhm, $L = 124$ mH i $C = 10$ nF)

Dla obwodu pokazanego na rys. 5a można zapisać równanie

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t), \quad (7)$$

które po uwzględnieniu zależności $u_R(t) = i(t)R$, $u_L(t) = L \times di(t)/dt$ i $u_C(t) = Q_C/C$ można sprowadzić do postaci

$$e(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{Q_C}{C}, \quad (8)$$

gdzie: $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ – siła elektromotoryczna idealnego źródła napięciowego,

$i(t)$ – prąd w obwodzie,

Q_C – ładunek zgromadzony w pojemności C .

Po różniczkowaniu równania (8) i rozwiązaniu względem i zależność prądu w obwodzie od siły elektromotorycznej e można przedstawić w postaci

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi_S) = \frac{E_m}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi_S), \quad (9)$$

gdzie: amplituda prądu płynącego w obwodzie

$$I_m(\omega) = E_m/|Z|, \quad (10)$$

natomiast przesunięcie fazowe $\varphi_S(\omega)$, między prądem $i(t)$ a siłą elektromotoryczną $e(t)$ wymuszającą drgania w obwodzie, opisuje zależność

$$\varphi_S = -\arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (11)$$

Rezonans napięć

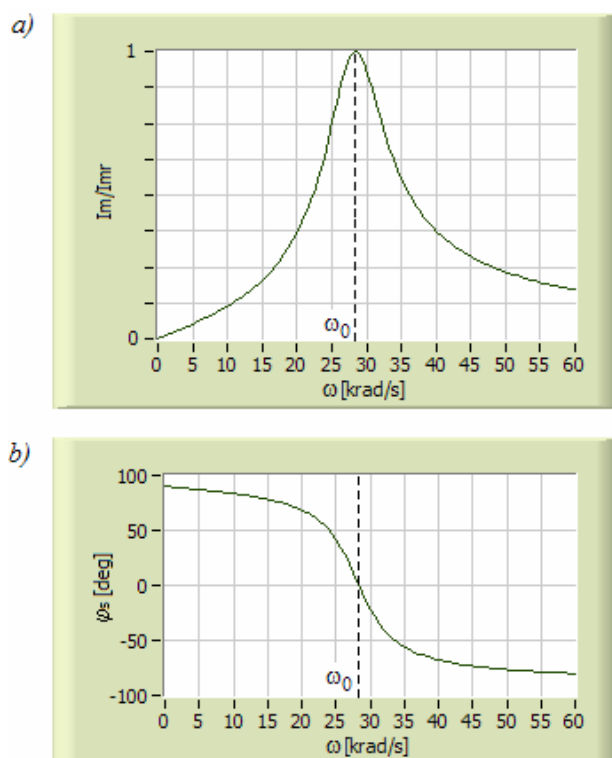
W stanie rezonansu napięcia u_L i u_C mają jednakowe amplitudy i są przeciwnie skierowane, a napięcie u_R na oporze R jest równe sile elektromotorycznej e . Fazy początkowe napięć u_L i u_C różnią się o π , z czego wynika, że ich suma w stanie rezonansu, przy równości amplitud, jest równa zero. Z tego względu mówi się, że w szeregowym obwodzie rezonansowym występuje *rezonans napięć*. Dwójnik LC zachowuje się jak zwarcie.

Krzywe rezonansowe

Zależności (4), (10) i (11) pokazują, że w stanie rezonansu, amplituda prądu $I_m(\omega)$ osiąga wartość maksymalną $I_{mr} = E_m/R$ a przesunięcie fazowe φ_{Sr} (faza początkowa prądu) jest równe zero, tzn. prąd $i_r(t)$ jest zgodny w fazie z wymuszającą siłą elektromotoryczną $e(t)$, czyli

$$i_r(t) = E_m/R \cos(\omega_0 t). \quad (12)$$

Wykresy funkcji $I_m(\omega)$ (10) (lub unormowanej względem I_{mr} funkcji $I_m(\omega)/I_{mr} = R/|Z|$) i $\varphi_s(\omega)$ (11) są nazywane *krzywymi rezonansowymi*, *amplitudową* i *fazową*. Wykresy krzywych rezonansowych dla szeregowego obwodu rezonansowego pokazano na rys. 7.



Rys. 7 Krzywe rezonansowe dla obwodu szeregowego: a) amplitudowa, b) fazowa

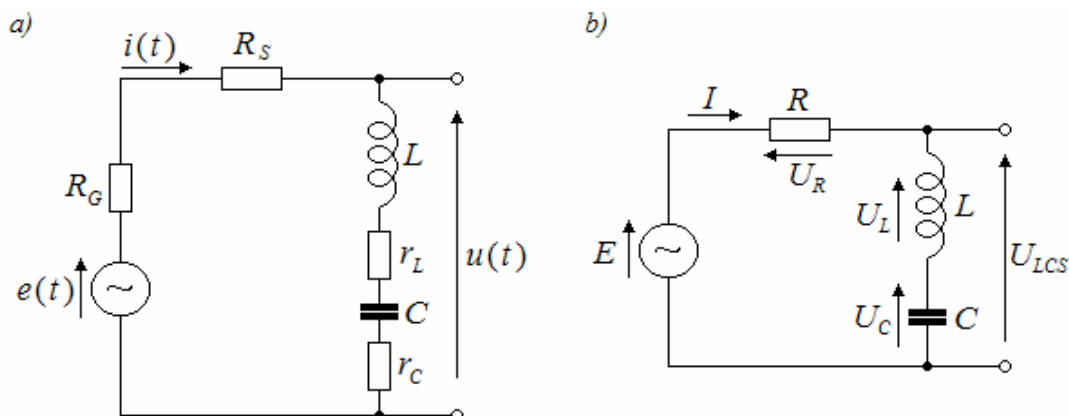
Rzeczywisty obwód rezonansowy

Model rzeczywistego obwodu RLC uwzględniającego wszystkie składowe o charakterze rezystancyjnym, które występują w obwodzie, pokazano na rys. 8a. W tym obwodzie L oznacza indukcyjność cewki, C pojemność kondensatora, r_C i r_L są szeregowymi oporami strat, odpowiednio, kondensatora i cewki, opór R_S jest oporem strat obwodu, R_G oporem wewnętrznym źródła, a $e(t)$ siłą elektromotoryczną idealnego źródła napięciowego pobudzającego obwód (wymuszającego drgania elektryczne w obwodzie). W schemacie zastępczym obwodu pokazanym na rys. 8b

$$R = R_G + R_S + r_L + r_C \quad (13)$$

(dla stosowanych w praktyce kondensatorów wartość r_C jest bardzo mała i można ją w czasie analizy obwodu zaniedbać).

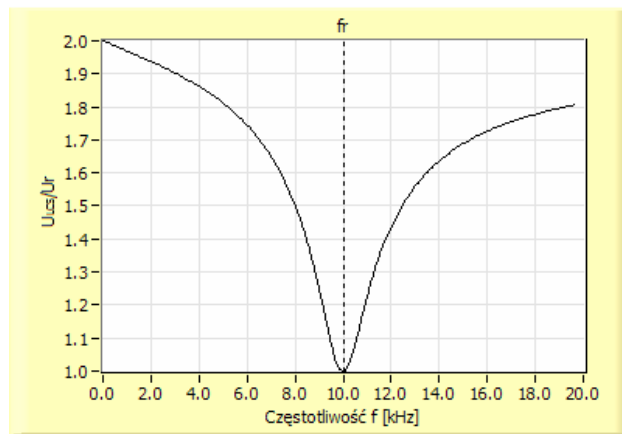
W praktyce szeregowy obwód rezonansowy konstruuje się z szeregowo połączonych elementów rzeczywistych – kondensatora i cewki, bez dołączania zewnętrznego opornika R . W takiej sytuacji na opór strat składają się opory strat r_C i r_L , odpowiednio, rzeczywistego kondensatora i rzeczywistej cewki. Tak skonstruowane obwody rezonansowe mogą mieć bardzo dobre właściwości selektywne umożliwiające odfiltrowanie sygnałów o bardzo szerokim zakresie częstotliwości, z wyjątkiem niewielkiego zakresu częstotliwości należących do otoczenia częstotliwości rezonansowej f_0 .



Rys. 8 Rzeczywisty szeregowy obwód rezonansowy: a) schemat ideowy, b) schemat zastępczy

Zależność napięcia U_{LCS} w funkcji częstotliwości f w rzeczywistym szeregowym obwodzie rezonansowym można wyznaczyć korzystając z równania

$$u_{LCS}(t) = e(t) - i(t)R \quad (14)$$



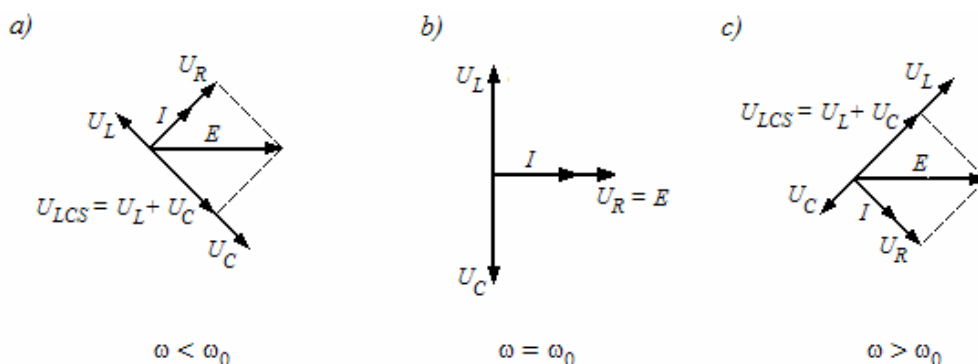
Rys. 9 Zależność unormowanego do U_r napięcia U_{LCS} w funkcji częstotliwości f

Na rysunku 9 pokazano zależność unormowanego do U_{mr} napięcia U_{LCS} w funkcji częstotliwości f w szeregowym obwodzie rezonansowym. W rzeczywistym obwodzie szeregowym dwójnik LC nie stanowi idealnego zwarcia a napięcie U_{mr} nie osiąga zera.

Wykresy wskazowe

Na rysunku 10a,b i c pokazano wykresy wskazowe napięć i prądów dla pulsacji mniejszej, równej i większej od pulsacji rezonansowej, charakterystyczne dla szeregowego obwodu rezonansowego. W każdym przypadku napięcia na cewce i kondensatorze są przeciwnie skierowane (mają przeciwne fazy), a w zależności od relacji między pulsacją wymuszającą i pulsacją rezonansową można zaobserwować różne właściwości obwodu, a mianowicie, kiedy:

1. $1/\omega C > \omega L$, a więc $\omega < \omega_0$
 - impedancja obwodu Z jest liczbą zespoloną i ma charakter pojemnościowy (reaktancja $X(\omega)$ jest ujemna),
 - amplituda napięcia na cewce U_L jest mniejsza od amplitudy napięcia na kondensatorze U_C ,
 - prąd $i(t)$ w obwodzie wyprzedza napięcie wymuszające $e(t)$,
2. $1/\omega C = \omega L$, a więc $\omega = \omega_0$ (w obwodzie ma miejsce rezonans napięć)
 - impedancja obwodu Z jest liczbą rzeczywistą i równa się R ,
 - amplituda napięcia na cewce U_L jest równa amplitudzie napięcia na kondensatorze U_C ,
 - prąd $i(t)$ w obwodzie jest w fazie z napięciem wymuszającym $e(t)$,
 - moduł prądu I_m osiąga wartość maksymalną $I_{mr} = E_m/R$,
3. $1/\omega C < \omega L$, a więc $\omega > \omega_0$
 - impedancja obwodu Z jest liczbą zespoloną i ma charakter indukcyjny, (reaktancja $X(\omega)$ jest dodatnia),
 - amplituda napięcia na cewce U_L jest większa od amplitudy napięcia na kondensatorze U_C ,
 - prąd w obwodzie $i(t)$ opóźnia się względem napięcia wymuszającego $e(t)$.



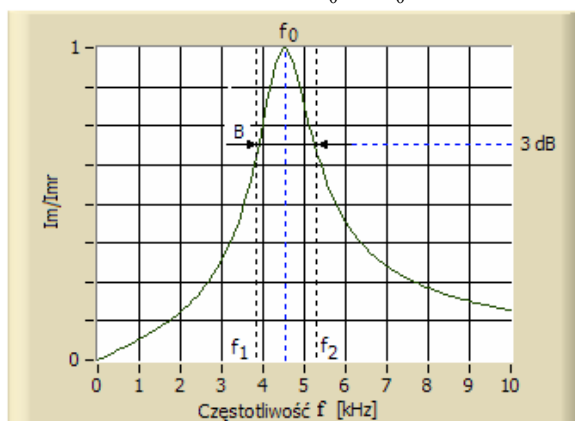
Rys. 10 Wykresy wskazowe napięć i prądów w szeregowym obwodzie rezonansowym dla: a) $\omega < \omega_0$, b) $\omega = \omega_0$ i c) $\omega > \omega_0$

Właściwości selektywne obwodu rezonansowego charakteryzują pasmo przepustowe B i dobroć Q_s . Selektywność obwodu rezonansowego jest tym lepsza, im mniejszy jest zakres częstotliwości przenoszonych przez obwód, a więc im węższa jest amplitudowa krzywa rezonansowa $I_m(\omega)/I_{mr}$ w otoczeniu pulsacji rezonansowej ω_0 .

Pasmo przepustowe B

Pasmo przepustowe B jest definiowane jako szerokość charakterystyki amplitudowej ($f_2 - f_1$) mierzonej w punktach 3 dB spadku, gdzie f_1 i f_2 są częstotliwościami (rys. 7), dla których

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (15)$$



Rys. 11 Definicja 3 dB pasma przepustowego w obwodzie szeregowym

a więc, B określa się jako różnicę częstotliwości, przy których moduł natężenia prądu w obwodzie szeregowym przyjmuje wartości mniejsze od wartości maksymalnej o 3 dB, czyli amplituda prądu maleje nie więcej niż $\sqrt{2}$ -krotnie w stosunku do amplitudy prądu w rezonansie $I_0 = I_{mr}$. Są to punkty połowy mocy, którym odpowiada moc czynna tracona w oporze R równa połowie mocy traconej w tym oporze przy częstotliwości rezonansowej.

Dobroć Q_s

Właściwości selektywne obwodu rezonansowego znacznie lepiej w porównaniu z B charakteryzuje dobroć Q_s

$$Q_s = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}, \quad (16)$$

którą można wyznaczyć z ogólnej definicji dobroci Q dowolnego obwodu rezonansowego – *definicji energetycznej*. Na podstawie tej definicji dobroć Q jest określana jako stosunek energii magazynowanej do szybkości strat energii w obwodzie rezonansowym.

Występująca we wzorze wielkość $\rho = \sqrt{L/C}$ jest nazywana *oporem charakterystycznym* obwodu rezonansowego.

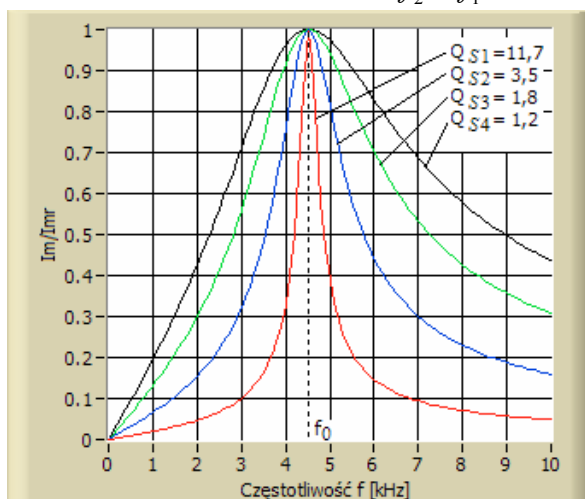
Dobroć szeregowego obwodu rezonansowego RLC jest więc ilorazem oporu charakterystycznego ρ i oporu strat R obwodu.

Między pasmem przepustowym B a dobrocią Q_s ma miejsce zależność

$$B = (f_2 - f_1) = \frac{f_0}{Q_s}, \quad (17)$$

którą można wyprowadzić z następującej definicji dobroci

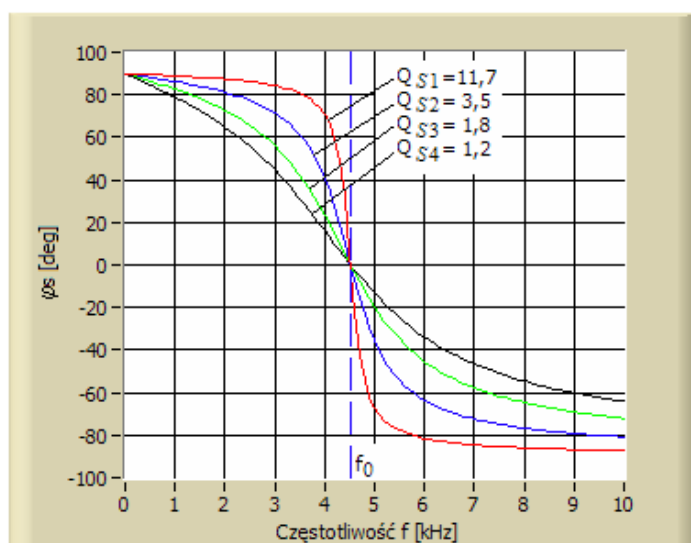
$$Q_s = \frac{f_0}{f_2 - f_1}. \quad (18)$$



Rys. 12 Wykresy amplitudowych krzywych rezonansowych dla różnych wartości Q_s , różnych wartości oporu strat R , i stałym ρ w szeregowym obwodzie rezonansowym

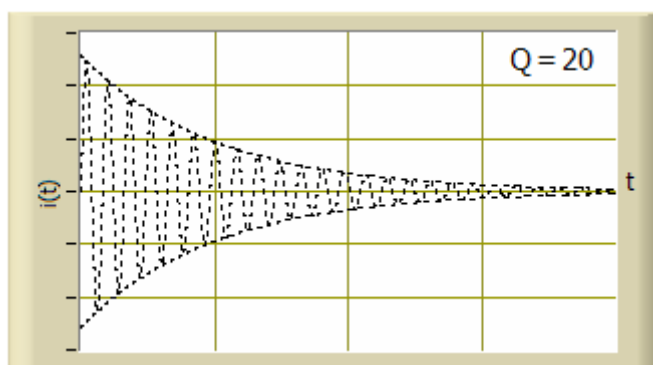
Amplitudowa krzywa rezonansowa jest tym “ostrzejsza” (rys. 12) im większa jest dobroć obwodu Q_S . W stanie rezonansu amplitudy napięć U_L i U_C są Q_S -krotnie większe od amplitudy E_m napięcia wymuszającego $e(t)$ i w przypadku dużych dobroci mogą być wielokrotnie większe od E_m . Efekt ten jest nazywany *przebiegiem rezonansowym*.

$$U_{Lmr} = U_{Cmr} = Q_S E_m \quad (19)$$



Rys. 13 Wykresy fazowych krzywych rezonansowych dla różnych wartości Q_S , różnych wartości oporu strat R , i stałym p w szeregowym obwodzie rezonansowym

Na rysunku 13 pokazano wpływ dobroci Q_S na przesunięcie fazowe $\varphi_S(\omega)$ w okolicy częstotliwości rezonansowej. Dla bardzo dużych dobroci można zaobserwować w okolicy częstotliwości rezonansowej raptowną zmianę fazy początkowej, od wartości bliskich $\pi/2$ do wartości bliskich $-\pi/2$.



Rys. 14 Drgania tłumione w szeregowym obwodzie rezonansowym RLC

Od dobroci zależy również szybkość zanikania drgań swobodnych (rys.14) wzbudzonych w obwodzie rezonansowym. Dobroć jest równa liczbie drgań, zachodzących w przedziale czasu, w którym amplituda maleje $e\pi = 23,15$ razy.

Odpowiedź na pobudzenie skokiem jednostkowym $I(t)$

Za ilustrację odpowiedzi obwodu RLC na skokowe pobudzenie może posłużyć analiza przebiegu prądu w obwodzie pobudzonym skokiem napięcia (rys. 15). Ponieważ przebieg prądu w obwodzie jest identyczny z przebiegiem napięcia na oporze R to do jego wyznaczenia można się posłużyć transmitancją napięciową układu w zapisie operatorowym

$$K(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}, \quad (20)$$

gdzie: $U_{wy}(s) = U_R(s)$, $U_{we}(s) = 1/s$, $\omega_0^2 = 1/LC$ a $\alpha = R/2L$.

Ponieważ skokowej zmianie $I(t)$ odpowiada w dziedzinie operatorów $1/s$ to operatorowy przebieg prądu przyjmie postać

$$I(s) = \frac{U_{we}(s)K(s)}{R} = \frac{K(s)}{sR}. \quad (21)$$

Odpowiedzi $I(s)$ w dziedzinie operatorów odpowiada w dziedzinie czasu przebieg $i(t)$. W zależności od relacji między α i ω_0 można zaobserwować trzy sposoby dochodzenia układu do stanu ustalonego:

1. Przypadek aperiodyczny dla $\alpha > \omega_0$

$$i(t) = \frac{1}{AR} \{ \exp[-\alpha(1-A)t] - \exp[-\alpha(1+A)t] \} 1(t), \quad (22)$$

gdzie: $A = \sqrt{1 - 4Q_s^2}$ a $Q_s = \frac{\omega_0}{2\alpha}$,

2. Przypadek aperiodyczny krytyczny dla $\alpha = \omega_0$

$$i(t) = \frac{2\alpha}{R} t [\exp(-\alpha t)] 1(t), \quad (23)$$

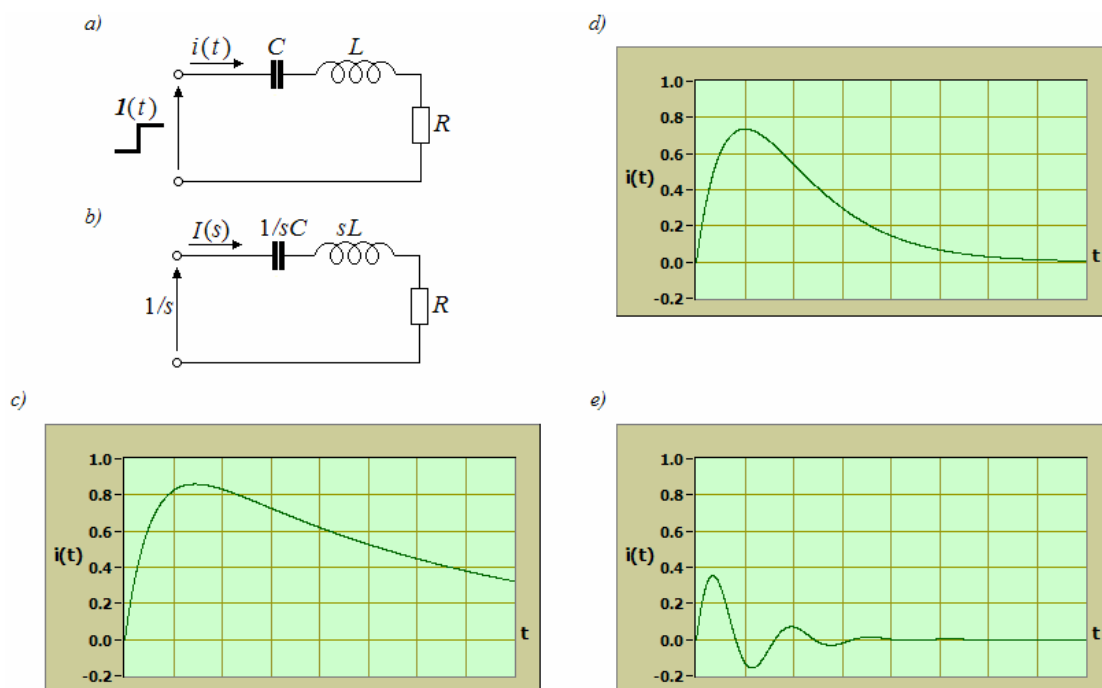
3. Przypadek oscylacyjny dla $\alpha < \omega_0$

$$i(t) = \frac{2\alpha}{R\omega_s} [\exp(-\alpha t)] 1(t) \sin(\omega_s t), \quad (24)$$

gdzie $\omega_s = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_s^2}}$ jest pulsacją drgań swobodnych.

Odpowiedź układu w postaci napięcia na cewce i kondensatorze $u_{LC}(t)$ można wyznaczyć korzystając z zależności

$$u_{LC}(t) = I(t) - i(t)R. \quad (25)$$



Rys. 15 Układ szeregowy RLC w stanie przejściowym w odpowiedzi na pobudzenie skokowe $I(t)$:
 b) schemat ideowy układu, b) operatorowy schemat zastępczy układu przy zerowych warunkach początkowych, c) odpowiedź aperiodyczna, d) odpowiedź aperiodyczna krytyczna, e) odpowiedź oscylacyjna

W praktyce badanie szeregowego obwodu rezonansowego sprowadza się do rejestracji natężenia prądu w obwodzie w funkcji częstotliwości f lub pulsacji ω przy stałej amplitudzie napięcia wymuszającego. Ponadto, bada się odpowiedź obwodu na pobudzenie skokową zmianą napięcia.

Równoległy obwód rezonansowy

Równoległym (trójgałęźnym) obwodem rezonansowym nazywamy obwód z równolegle połączonymi oporem R , indukcyjnością L i pojemnością C , pokazany na rys. 5b.

Admitancję równoległego obwodu rezonansowego $Y(j\omega)$ opisuje zależność

$$Y(j\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right), \quad (26)$$

natomiast moduł admitancji $|Y|$ obwodu równoległego równa się

$$|Y| = \frac{I_m}{U_m} = \sqrt{(G)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}, \quad (27)$$

a przesunięcie fazowe $\varphi_P(\omega)$ między napięciem $u(t)$ wymuszonym na obwodzie a prądem z idealnego źródła prądowego $j(t)$ opisuje zależność

$$\varphi_P = -\arctg \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \right). \quad (28)$$

gdzie: $G = 1/R$,

$j(t) = J_m \cos(\omega t)$ – wydajność prądowa idealnego źródła prądowego,

$u(t) = U_m \cos(\omega t - \varphi_P)$ – napięcie na obwodzie RLC .

Jeżeli susceptancja $B(\omega) = \omega C - 1/\omega L$ przyjmuje wartość równą zero, co zachodzi, kiedy jest spełniony warunek

$$\omega C = 1/\omega L, \quad (29)$$

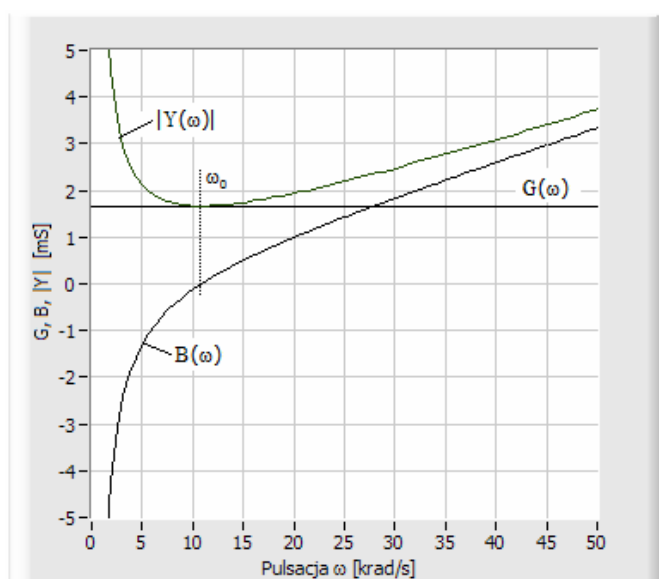
to obwód szeregowy RLC znajduje się w stanie rezonansu, co oznacza, że pulsacja rezonansowa obwodu jest określana takim samym wzorem, jak dla obwodu szeregowego

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (30)$$

W stanie rezonansu ($\omega = \omega_0$) admitancja obwodu jest liczbą rzeczywistą i równa się G .

Dla pulsacji $\omega < \omega_0$ susceptancja obwodu jest ujemna ($B(\omega) < 0$) i ma charakter indukcyjny.

Dla pulsacji $\omega > \omega_0$ susceptancja obwodu jest dodatnia ($B(\omega) > 0$) i ma charakter pojemnościowy (rys. 16).



Rys. 16 Wykresy konduktancji, susceptancji i modułu admitancji w funkcji pulsacji dla równoległego obwodu rezonansowego (dla $R = 0,6 \text{ k}\Omega$, $L = 121 \text{ mH}$ i $C = 70 \text{ nF}$)

Rezonans prądów

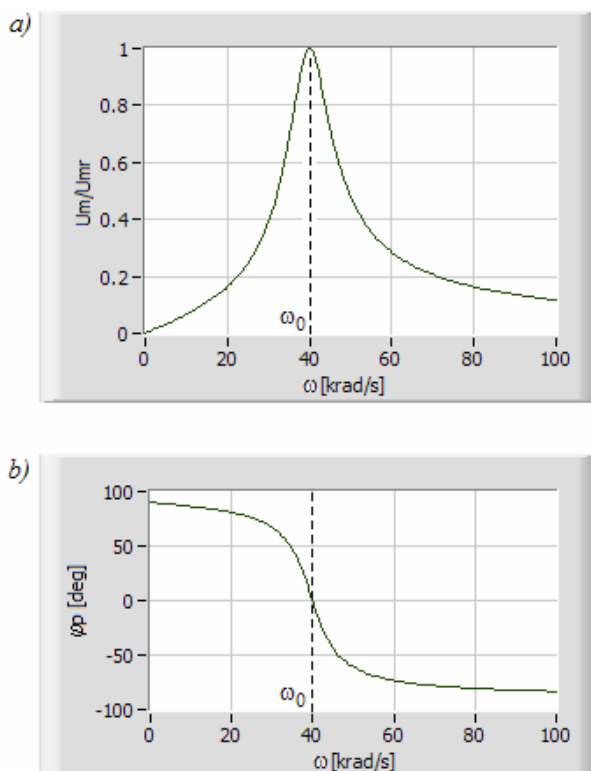
W stanie rezonansu prąd płynący przez opór R jest równy wydajności prądowej j , natomiast prądy i_L i i_C mają jednakowe amplitudy ale są przeciwnie skierowane. Fazy początkowe prądów i_L i i_C różnią się o π , z czego wynika, że ich suma w stanie rezonansu, przy równości amplitud, jest równa zero. Z tego względu mówi się, że w równoległym obwodzie rezonansowym występuje *rezonans prądów*. Dwójnik LC zachowuje się jak rozwarcie.

Krzywe rezonansowe

Z zależności (27) i (x28) wynika, że w stanie rezonansu, amplituda napięcia $U_m(\omega)$ osiąga wartość maksymalną $U_{mr} = J_m/G$ a przesunięcie fazowe φ_P (faza początkowa napięcia) jest równe zero, tzn. napięcie $u_r(t)$ jest zgodne w fazie z pobudzającym prądem $j(t)$, czyli

$$u_r(t) = J_m R \cos(\omega_0 t). \quad (31)$$

Wykresy krzywych rezonansowych dla równoległego obwodu rezonansowego, wykresy funkcji $U_m(\omega)/U_{mr}$ i $\varphi_P(\omega)$, pokazano na rys. 17.

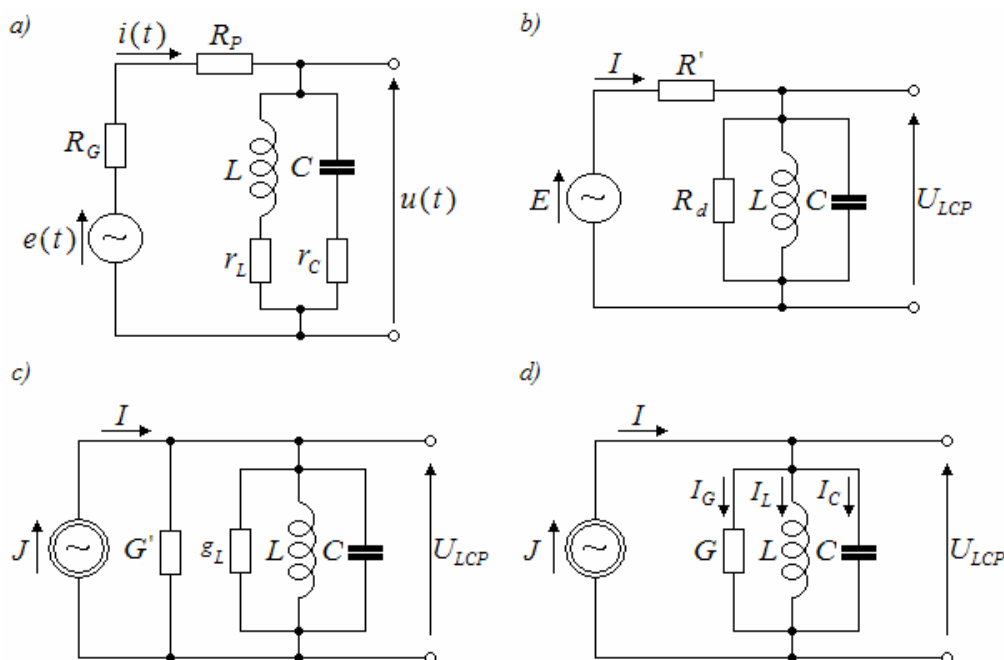


Rys. 17 Krzywe rezonansowe dla obwodu równoległego:
a) amplitudowa, b) fazowa (dla $R = 22 \text{ k}\Omega$, $L = 139 \text{ mH}$ i $C = 4,5 \text{ nF}$)

Rzeczywisty równoległy obwód rezonansowy

Pobudzanie równoległego obwodu RLC z idealnego źródła napięciowego w zasadzie nie ma sensu, bowiem taki obwód nie wykazuje cech obwodu rezonansowego. W praktyce na ogół mamy do czynienia z rzeczywistym źródłem napięciowym o oporze wewnętrznym R_G z dołączonym szeregowo oporem R_P o dużej oporności, które wykorzystuje się do pobudzania równoległego obwodu rezonansowego, a sam obwód konstruuje się z równoległe połączonych elementów rzeczywistych – kondensatora i cewki. W takiej sytuacji na opór strat składają się zarówno opory strat r_C i r_L , odpowiednio, rzeczywistego kondensatora i rzeczywistej cewki, jak również opory R_G i R_P .

W obwodzie pokazanym na rys. 18a L oznacza indukcyjność cewki, C pojemność kondensatora, r_L i r_C są ich oporami strat, R_P to opór włączony szeregowo ze źródłem, $e(t)$ jest siłą elektromotoryczną idealnego źródła napięciowego wymuszającego drgania w obwodzie a R_G jego oporem wewnętrznym. Schemat zastępczy obwodu pokazano na rys. 18b, w którym opór R' jest sumą oporów R_P i R_G ($R' = R_P + R_G$) a R_d jest oporem dynamicznym równoległego obwodu rezonansowego.



Rys. 18 Rzeczywisty równoległy obwód rezonansowy: a) schemat ideowy, b, c i d) równoważne schematy zastępcze

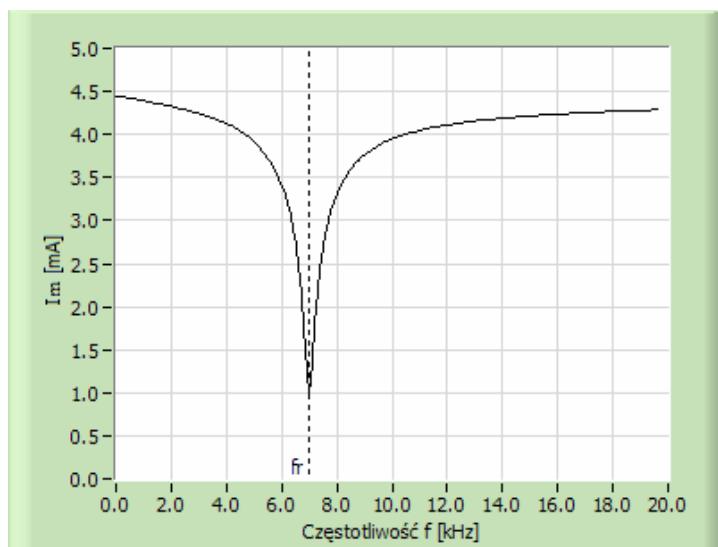
Opór dynamiczny R_d jest oporem, który reprezentuje dwugałęźny (składający się wyłącznie z L i C) obwód rezonansowy w stanie rezonansu, a jego wartość określa zależność

$$R_d = \frac{L}{(r_L + r_C)C} \quad (32)$$

Równoległy obwód rezonansowy pobudzany ze źródła napięciowego E (rys. 18b) można zastąpić równoważnym obwodem pobudzonym ze źródła prądowego J (rys. 18c). W obwodzie pokazanym na rys. 18c zaniedbano opór r_C (obwód składa się z rzeczywistej cewki i idealnego kondensatora).

Na rysunku 18d pokazano obwód, w którym opór $R = 1/G$ reprezentuje równoległe połączenie oporu dynamicznego dwugałęźnego obwodu LC (z rys. 18b) z oporem ekwiwalentnego źródła prądowego J .

Na rysunku 19 pokazano zależność prądu $I_m(\omega)$ w funkcji częstotliwości f w równoległym obwodzie rezonansowym zasilanym z rzeczywistego źródła napięciowego o oporze wewnętrznym R' (rys. 16b). W rzeczywistym obwodzie równoległym dwójnik LC nie stanowi idealnego zwarcia a prąd I_{mr} nie równa się zero.

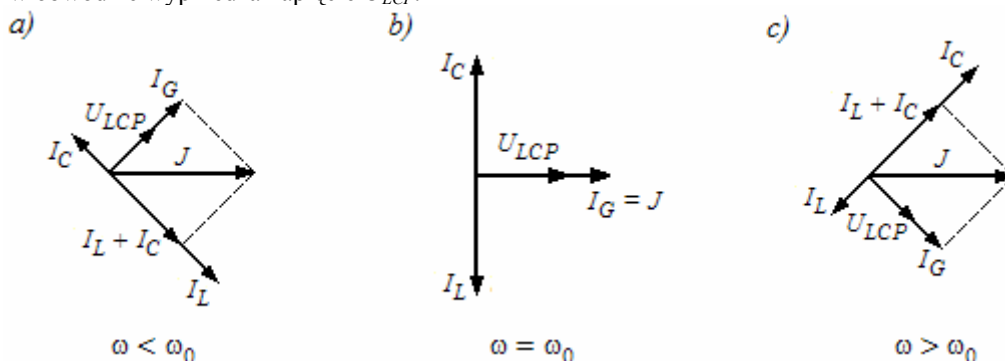


Rys. 19 Zależność prądu $I_m(\omega)$ w funkcji częstotliwości f w równoległym obwodzie rezonansowym zasilanym z rzeczywistego źródła napięciowego

Wykresy wskazowe

Na rysunku 20a, b i c pokazano wykresy wskazowe napięć i prądów dla pulsacji mniejszej, równej i większej od pulsacji rezonansowej, charakterystyczne dla równoległego obwodu rezonansowego. W każdym przypadku prądy płynące przez cewkę i kondensator są przeciwnie skierowane (mają przeciwne fazy), a w zależności od relacji między pulsacją wymuszoną i pulsacją rezonansową można zaobserwować różne właściwości obwodu, a mianowicie kiedy:

1. $1/\omega L > \omega C$, a więc $\omega < \omega_0$
 - admitancja obwodu Y jest liczbą zespoloną i ma charakter indukcyjny,
 - amplituda prądu I_C płynącego przez kondensator jest mniejsza od amplitudy prądu I_L płynącego przez cewkę,
 - napięcie U_{LCP} wyprzedza prąd I (J) w obwodzie,
2. $1/\omega L = \omega C$, a więc $\omega = \omega_0$ (w obwodzie ma miejsce rezonans prądów)
 - admitancja obwodu Y jest liczbą rzeczywistą i równa się G ,
 - amplituda prądu I_C płynącego przez kondensator jest równa amplitudzie prądu I_L płynącego przez cewkę,
 - napięcie U_{LCP} jest w fazie z prądem I w obwodzie,
 - moduł napięcia U_{LCP} osiąga maksimum, $|U_{LCP}| = J_m/G$,
3. $1/\omega L < \omega C$, a więc $\omega > \omega_0$
 - admitancja obwodu Y jest liczbą zespoloną i ma charakter pojemnościowy,
 - amplituda prądu I_C płynącego przez kondensator jest większa od amplitudy prądu I_L płynącego przez cewkę,
 - prąd I w obwodzie wyprzedza napięcie U_{LCP} .



Rys. 20 Wykresy wskazowe napięć i prądów w szeregowym obwodzie rezonansowym dla: a) $\omega < \omega_0$, b) $\omega = \omega_0$ i c) $\omega > \omega_0$

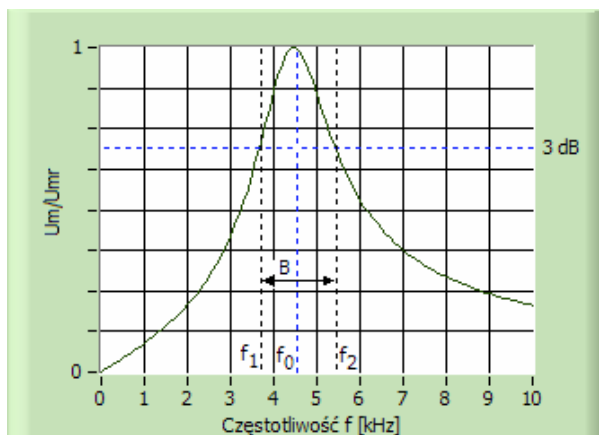
Pasmo przepustowe

Pasmo przepustowe B jest definiowane jako szerokość charakterystyki amplitudowej ($f_2 - f_1$) mierzonej w punktach 3 dB spadku, gdzie f_1 i f_2 są częstotliwościami (rys. 21), dla których

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{U_2}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (33)$$

a więc, B w równoległym obwodzie rezonansowym określa się jako różnicę częstotliwości, przy których moduł napięcia w obwodzie równoległym przyjmuje wartości mniejsze od wartości maksymalnej o 3 dB, czyli amplituda napięcia maleje nie więcej niż $\sqrt{2}$ -krotnie w stosunku do amplitudy napięcia w rezonansie U_{mr} .

Szerokość 3-dB pasma przepustowego obwodu równoległego jest więc określana w sposób analogiczny jak dla szeregowego obwodu po zastąpieniu prądu I napięciem U .



Rys. 21 Definicja 3 dB pasma przepustowego w obwodzie równoległym

Dobroć Q_p

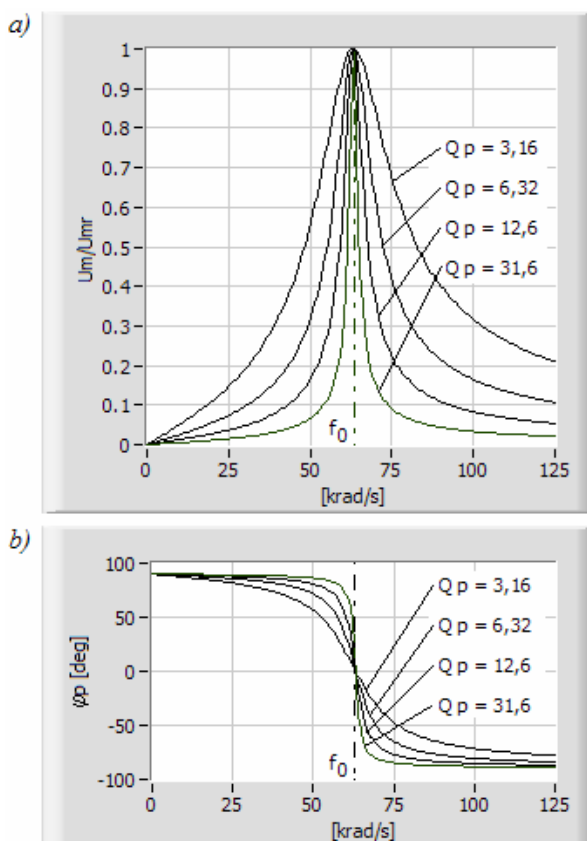
Dobroć równoległego obwodu rezonansowego Q_p definiuje się, podobnie jak w przypadku obwodu szeregowego, na podstawie ogólnej definicji dobroci, z której można wyprowadzić zależność

$$Q_p = \frac{R}{\rho} = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L}. \quad (34)$$

Dobroć Q_p jest więc ilorazem oporu strat obwodu R , oporu jaki charakteryzuje obwód w stanie rezonansu, i oporu charakterystycznego ρ .

W stanie rezonansu amplitudy prądów I_L i I_C są Q_p -krotnie (35) większe od amplitudy J_m wydajności prądowej j i w przypadku dużych dobroci mogą być wielokrotnie większe od J_m . Efekt ten jest nazywany *przepełnieniem rezonansowym*.

$$I_{Lmr} = I_{Cmr} = Q_p J_m \quad (35)$$



Rys. 22 Wykresy krzywych rezonansowych dla różnych wartości Q_p , różnych wartości oporu strat R' i stałym ρ w równoległym obwodzie rezonansowym

Podobnie jak w przypadku obwodu szeregowego amplitudowa krzywa rezonansowa obwodu równoległego jest tym “ostrzejsza” im większa jest dobroć obwodu Q_p . Również faza φ_p w otoczeniu częstotliwości f_0 zmienia się tym szybciej im większa jest dobroć obwodu. Dla dużych wartości Q_p obserwuje się raptowną zmianę fazy od wartości bliskich $\pi/2$ do wartości bliskich $-\pi/2$.

W rzeczywistych obwodach równoległych (rys. 18b), pobudzanych z rzeczywistego źródła napięciowego, dobroć obwodu Q_p' opisuje zależność

$$Q_p' = \{1/(1 - R_d/R')\} Q_p \quad (36)$$

Z zależności (36) wynika, że rzeczywisty obwód równoległy, pobudzany z rzeczywistego źródła napięciowego, ma tym lepsze własności selektywne im większy jest opór R' .

Badanie równoległego obwodu rezonansowego sprowadza się do zarejestrowania zależności napięcia U_{LCP} w funkcji częstotliwości f lub pulsacji ω przy stałej amplitudzie prądowej źródła. Ponadto, bada się odpowiedź obwodu na pobudzenie skokową zmianą napięcia.

Dualizm obwodów rezonansowych szeregowego i równoległego

Porównując wzory i wykresy, charakterystyczne dla obwodów rezonansowych szeregowego i równoległego, można zauważyć ich równokształtność wynikającą z występujących w nich wielkości dualnych, którymi są: napięcia i prądy w obwodzie, siła elektromotoryczna i wydajność prądowa idealnych źródeł, impedancja i admitancja elementów raz ich połączenia szeregowo i równoległe, a także stan zwarcia i rozwarcia.

O obwodach rezonansowych szeregowym i równoległym mówimy, że mają struktury dualne bowiem przy przejściu od obwodu szeregowego do równoległego:

- każdy element obwodu szeregowego przechodzi w element dualny w obwodzie równoległym,
- każde połączenie szeregowo (równoległe) elementów w jednym obwodzie przechodzi odpowiednio w połączenie równoległe (szeregowo) elementów dualnych w drugim obwodzie,
- zwarcie w obwodzie szeregowym przechodzi w rozwarcie w obwodzie równoległym,

- równania sieciowe obwodu równoległego można otrzymać z równań sieciowych obwodu szeregowego przez zamianę wszystkich prądów na odpowiadające im napięcia i zamianę wszystkich napięć na odpowiadające im prądy.

Uniwersalne krzywe rezonansowe

Na rysunku 23 pokazano uniwersalne krzywe rezonansowe charakterystyczne dla każdego szeregowego obwodu rezonansowego. Krzywe te opisują wyrażenia

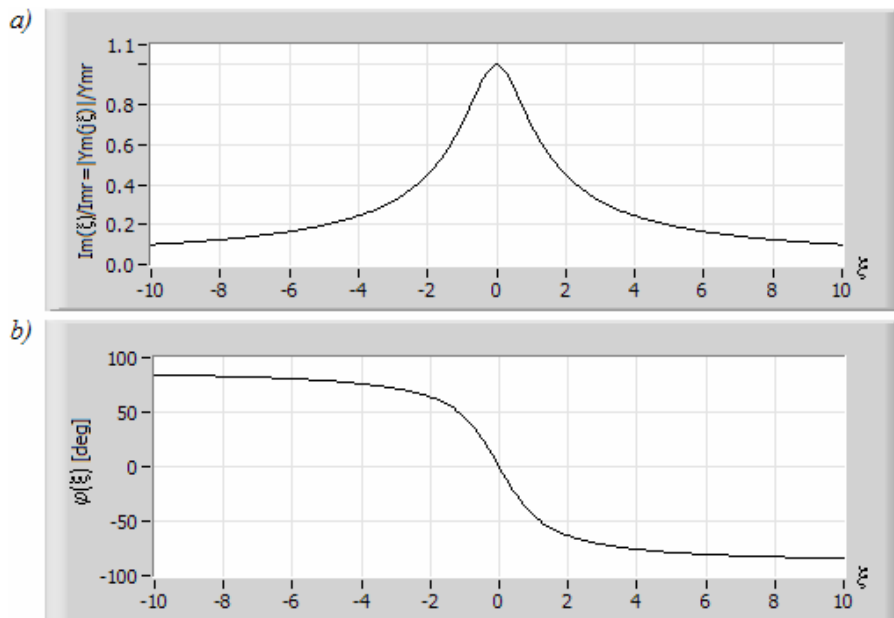
$$\frac{I_m(\xi)}{I_{mr}} = \frac{|Y(j\xi)|}{Y_r} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad \text{i} \quad \varphi(\xi) = -\arctg \xi, \quad (37)$$

$$\text{gdzie: } \xi = \frac{X}{R} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q\nu, \quad (Q = Q_S \text{ dla obwodu szeregowego}) \quad (38)$$

$$\text{a } \nu = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (39)$$

Wielkość ν jest nazywana *rozstrojeniem względnym* obwodu natomiast ξ *rozstrojeniem bezwzględnym*, które jest miarą rozstrojenia obwodu. Jeżeli $\xi = 0$ to mówimy, że obwód jest dostrojony do rezonansu (w obwodzie wystąpił rezonans) przy częstotliwości źródła.

Uniwersalne krzywe rezonansowe pokazują zachowanie się każdego szeregowego obwodu rezonansowego w otoczeniu pulsacji rezonansowej i w istotny sposób upraszczają analizę obwodów rezonansowych. Uniwersalna krzywa amplitudowa jest jednocześnie wykresem modułu admitancji obwodu, unormowanej względem admitancji w rezonansie, w funkcji zmiennej ξ , co jest konsekwencją proporcjonalności prądu w obwodzie szeregowym do admitancji obwodu.



Rys. 23 Uniwersalne krzywe rezonansowe dla obwodu szeregowego: a) amplitudowa, b) fazowa

Dzięki dualizmowi obwodów rezonansowych, szeregowego i równoległego, wykresy uniwersalnych krzywych rezonansowych dla obwodu równoległego są identyczne z wykresami dla obwodu szeregowego po zamianie odpowiednich wielkości zgodnie z zasadami obowiązującymi dla obwodów dualnych. Opisują je zależności

$$\frac{U_m(\xi)}{U_{mr}} = \frac{|Z(j\xi)|}{Z_r} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad \text{i} \quad \varphi(\xi) = -\arctg \xi \quad (40)$$

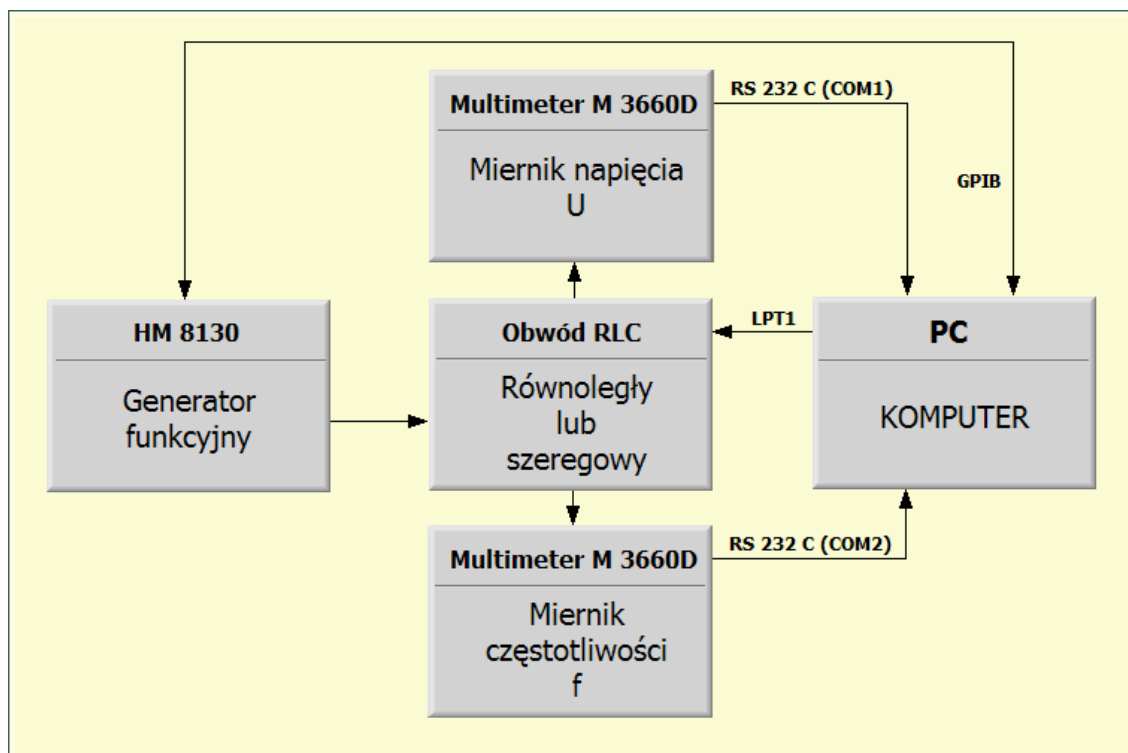
Wykonanie ćwiczenia

W ćwiczeniu rejestruje się zależność napięcia na elementach L i C połączonych szeregowo lub równoległe w funkcji częstotliwości f lub pulsacji ω przy stałej amplitudzie napięcia wymuszającego drgania w badanym obwodzie.

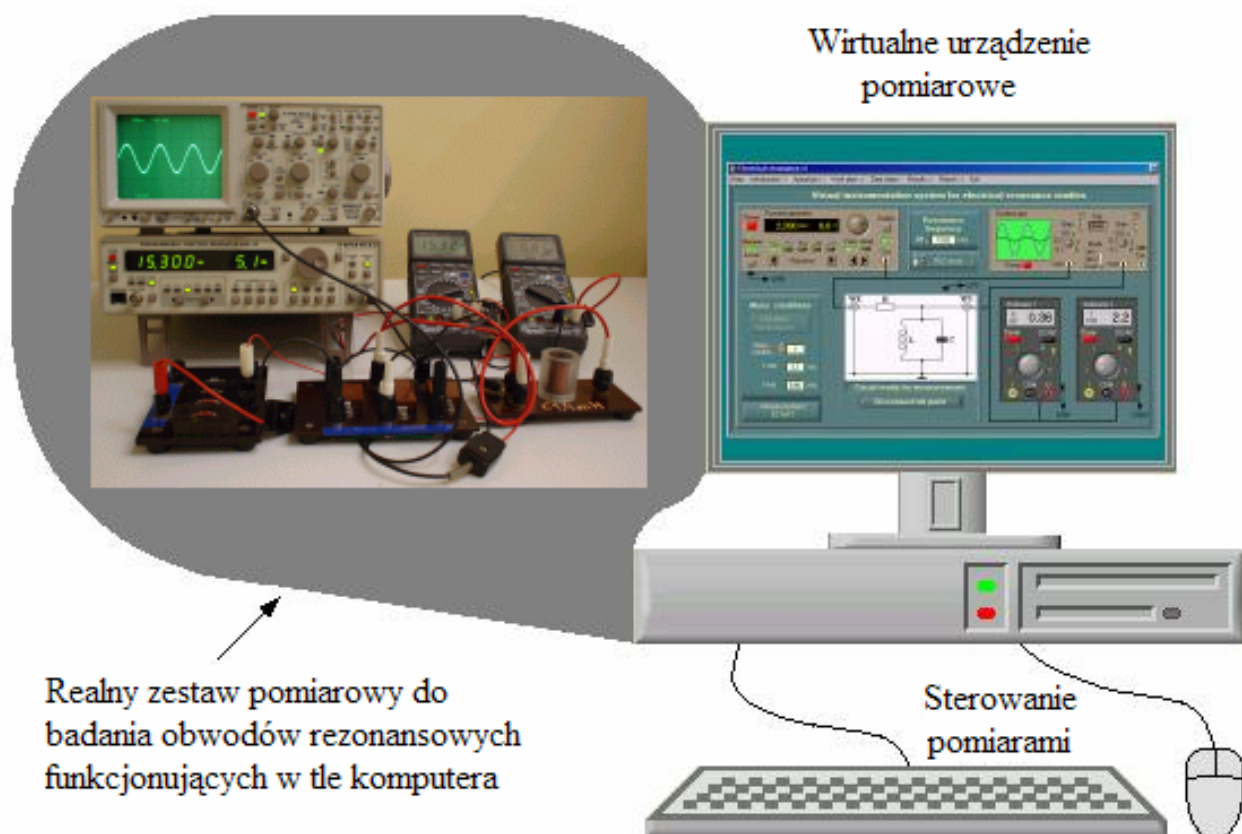
Pomiary można wykonać w sposób zdalny za pośrednictwem przeglądarki internetowej korzystając ze stanowiska pomiarowego zainstalowanego w oddległym laboratorium lub w sposób wirtualny.

Aparatura

Na rysunku 24 pokazano schemat blokowy aparatury pomiarowej, natomiast na rys. 25 widok realnego stanowiska pomiarowego.



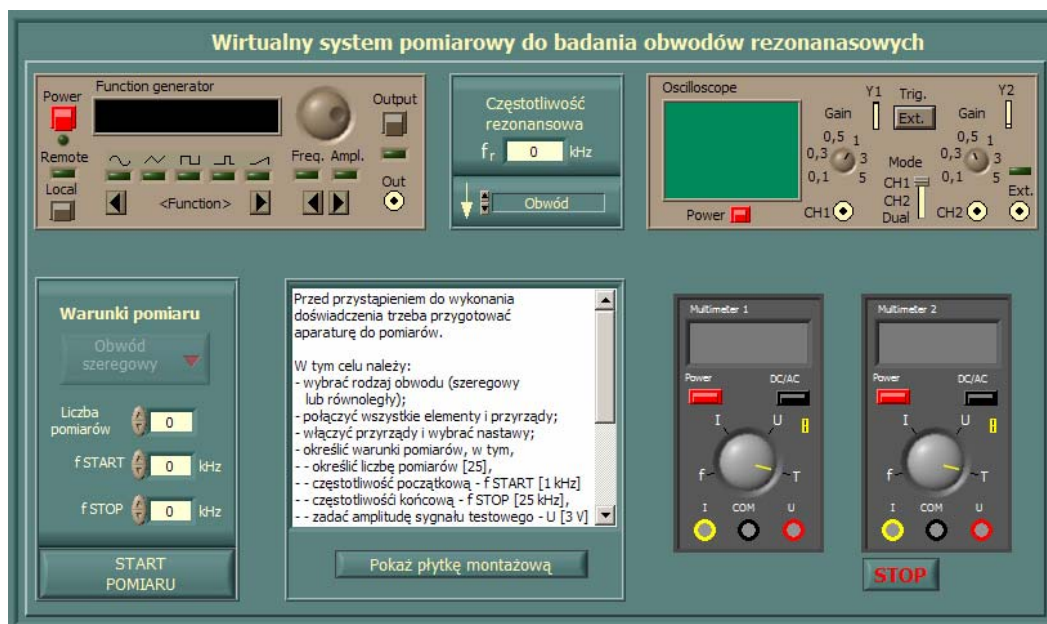
Rys. 24 Schemat blokowy aparatury do badania zjawisk rezonansowych w obwodach elektrycznych



Rys. 25 Stanowisko pomiarowe

Oprogramowanie

Do sterowania pomiarami wykonywanymi zarówno na odległość jak i w sposób wirtualny wykorzystuje się oprogramowanie umożliwiające kontrolowanie aparatury i wykonanie pomiarów za pośrednictwem specjalnie do tego celu skonstruowanego wirtualnego panelu sterowania, który w stanie tuż po uruchomieniu pokazano na rys. 26.



Rys. 26 Wirtualny panel sterowania systemem pomiarowym

Za pośrednictwem panelu sterowania można wybrać rodzaj obwodu, połączyć przyrządy, dokonać wyboru nastaw przyrządów i parametrów pomiaru, uruchomić pomiar, zarejestrować wyniki pomiarów i skompletować w postaci tabeli z wynikami, a także przedstawić na wykresie.

Instrukcja przygotowania aparatury do pomiarów

Przed przystąpieniem do wykonania ćwiczenia trzeba przygotować aparaturę do pomiarów.

W tym celu należy:

- wybrać rodzaj obwodu (szeregowy lub równoległy);
 - połączyć wszystkie elementy i przyrządy;
 - włączyć przyrządy i wybrać nastawy;
 - określić warunki pomiarów, w tym,
 - - określić liczbę pomiarów [25],
 - - częstotliwość początkową - f_{START} [1 kHz]
 - - częstotliwość końcową - f_{STOP} [25 kHz],
 - - zadać amplitudę sygnału testowego - U [3 V]
- (w trybie <Local>).

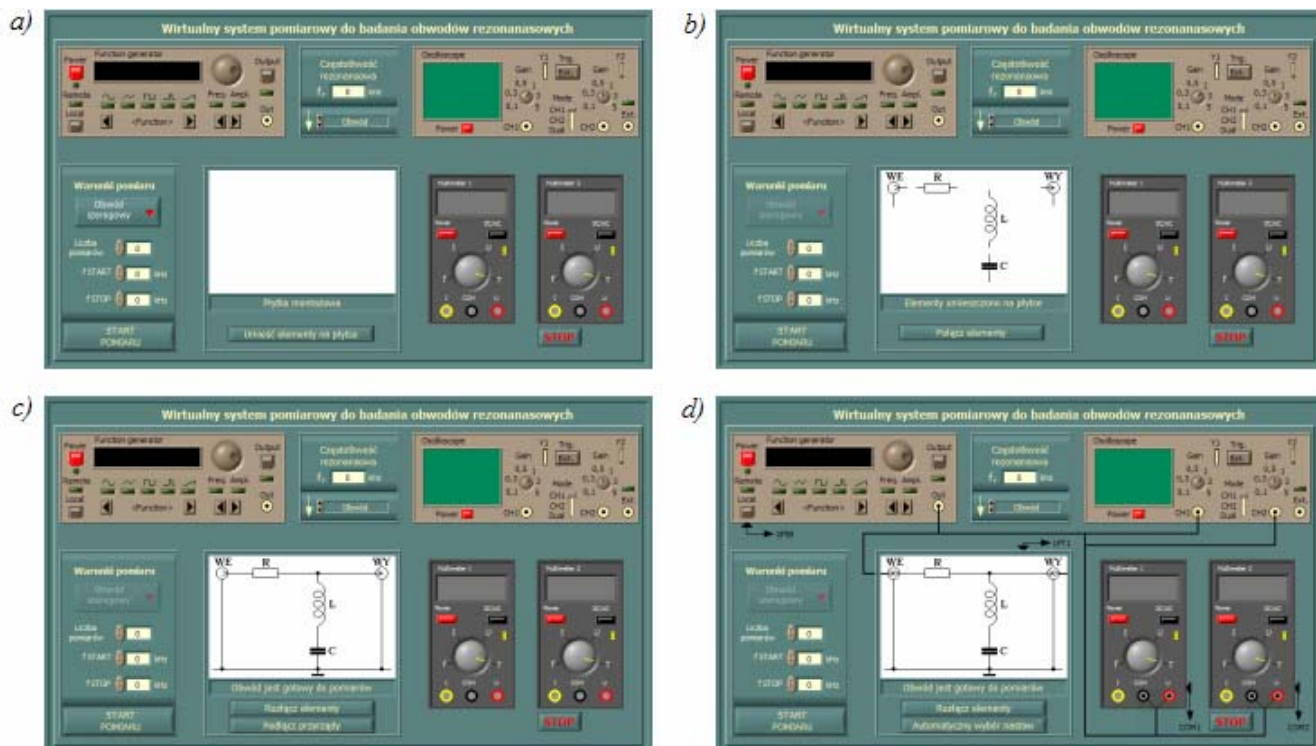
Wymienione operacje można wykonać selektywnie za pomocą przełączników i kontrolerek numerycznych dostępnych na panelu sterowania lub w sposób automatyczny klikając klawisz <Automatyczny wybór nastaw>.

Badanie szeregowego obwodu rezonansowego

Przygotowanie aparatury do pomiarów

Na rysunku 27 pokazano sekwencję operacji służących przygotowaniu aparatury do testowania obwodu szeregowego, która uwzględnia wybór obwodu, umieszczenie elementów na płytce montażowej, połączenie elementów zgodnie ze schematem ideowym obwodu szeregowego i podłączenie przyrządów.

Badanie obwodu szeregowego wymaga dostarczenia do jego wejścia sinusoidalnego sygnału testowego z amplitudą 3 V i częstotliwością zmieniającą się automatycznie z krokiem 1 kHz w przedziale $1 \div 25$ kHz. Sygnał o takich parametrach jest dostarczany przez programowalny generator funkcyjny kontrolowany przez komputer za pośrednictwem interfejsu GPIB. Zdalne sterowanie generatorem jest możliwe po wybraniu opcji *Remote*. Sygnał testowy jest dostarczany do badanego obwodu po wciśnięciu przełącznika <Output>. Parametry sygnału testowego po przejściu przez układ są mierzone za pomocą dwóch multimetrów, z których jeden mierzy wartość skuteczną napięcia na wyjściu układu, natomiast drugi częstotliwość tego sygnału. Praca multimetrów odbywa się również pod kontrolą komputera za pośrednictwem portów COM1 i COM2 obsługiwanych przez interfejsy RS 232C. W związku z tym należy przygotować multimetry do pracy wybierając za pomocą przełączników tryb pracy umożliwiający pomiar napięcia zmiennego (tryb U z AC, w przypadku multimetru służącego do pomiaru napięcia) oraz tryb pracy umożliwiający pomiar częstotliwości (tryb f w przypadku multimetru przewidzianego do pomiaru częstotliwości). W czasie trwania pomiarów możliwe jest monitorowanie zarówno testowego sygnału wejściowego jak i sygnału wyjściowego za pomocą oscyloskopu. Oscyloskop należy przygotować do pracy wybierając tryby pracy *Auto* i *Dual* oraz dobierając odpowiednie wzmocnienie w każdym kanale (CH1 i CH2), jak również położenie sygnałów na ekranie oscyloskopu za pomocą potencjometrów suwakowych <Y1> i <Y2>. Przed wyborem nastaw wszystkie przyrządy funkcjonujące w systemie należy włączyć wyłącznikiem <Power>.



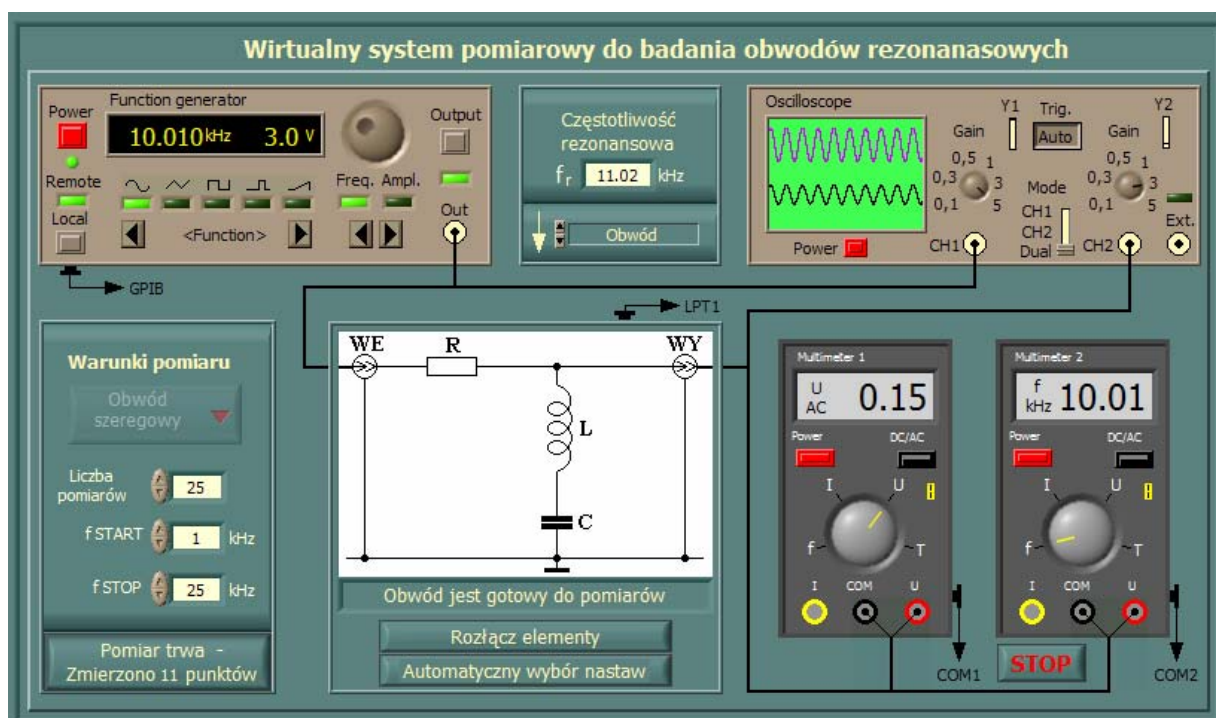
Rys. 27 Zestaw aparatury pomiarowej do testowania obwodu szeregowego: a) w stanie wyjściowym, b) po wybraniu obwodu i umieszczeniu elementów na płytce montażowej, c) po zmontowaniu szeregowego obwodu rezonansowego, d) po podłączeniu przyrządów pomiarowych

Testowanie obwodu szeregowego

Przed uruchomieniem pomiaru należy wybrać warunki pomiaru, a mianowicie częstotliwość początkową (f_{START}), częstotliwość końcową (f_{STOP}) i liczbę punktów pomiarowych. Po przygotowaniu aparatury można uruchomić pomiar klikając przycisk <Start pomiaru>.

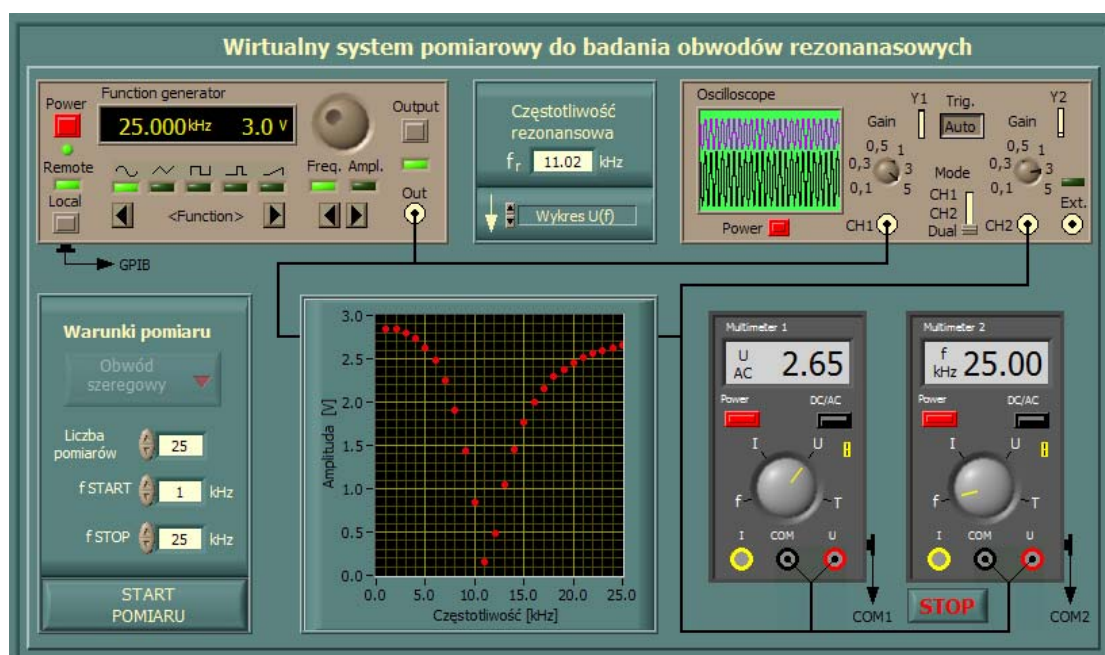
Jeżeli aparatura nie zostanie poprawnie przygotowana do pomiarów to program sterujący wyświetli komunikat informujący o możliwych nieprawidłowościach z propozycją usunięcia problemów. Osobom nie mającym doświadczenia w pracy z aparaturą pomiarową zaleca się przygotowanie zestawu do pomiarów w sposób automatyczny za pomocą kliknięcia przycisku <Automatyczny wybór nastaw>.

Na rysunku 28 pokazano panel sterowania w trakcie wykonywania pomiarów, po uprzednim przygotowaniu aparatury do wykonania testu.



Rys. 28 Panel sterowania w trakcie testowania obwodu szeregowego

Na rysunku 29 pokazano panel sterowania po zakończeniu pomiarów z wykreśloną zależnością napięcia zmierzonego na wyjściu obwodu szeregowego w funkcji częstotliwości. Wyniki pomiarów są również dostępne w postaci tabeli. Wyboru sposobu prezentacji wyników można dokonać za pomocą kontrolki tekstowej <Obwód/Wykres/Tabela>, umieszczonej na panelu sterowania.

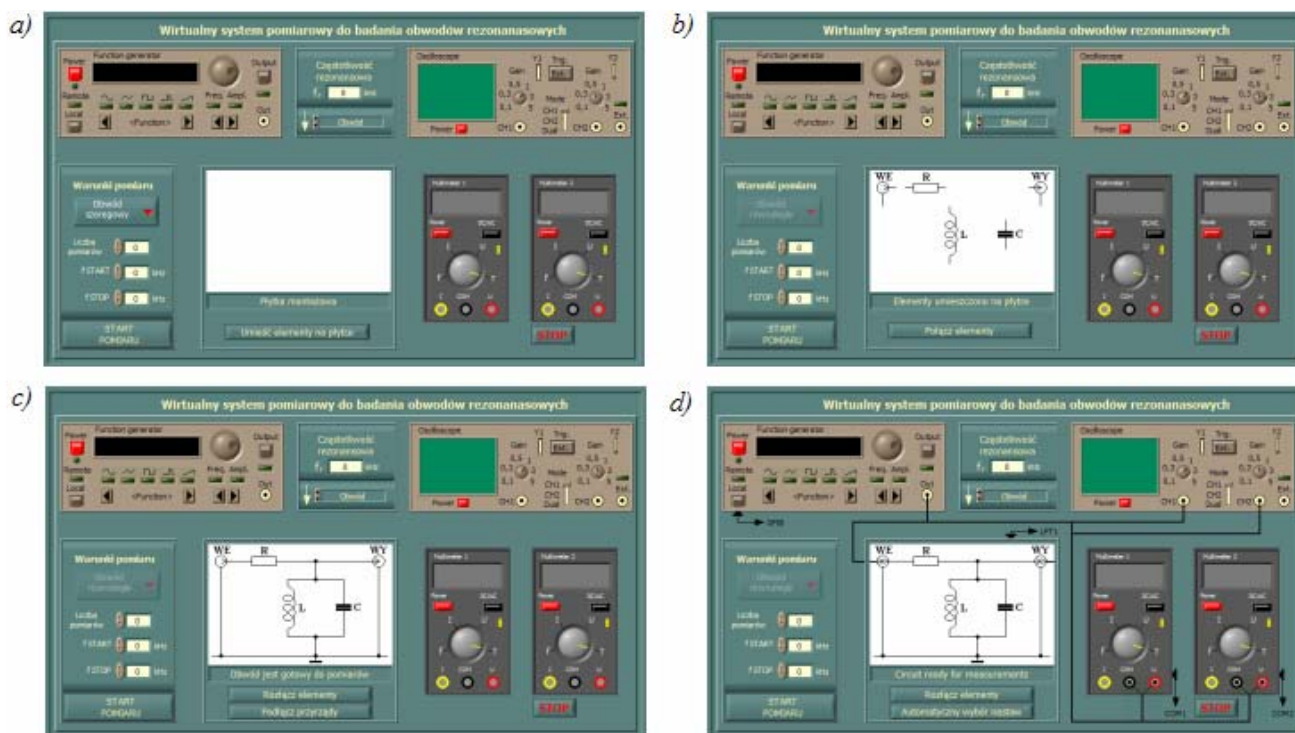


Rys. 29 Panel sterowania po zakończeniu testowania obwodu szeregowego

Badanie równoległego obwodu rezonansowego

Przygotowanie aparatury do pomiarów

Na rysunku 30 pokazano sekwencję operacji służących przygotowaniu aparatury do testowania obwodu równoległego, która uwzględnia wybór obwodu, umieszczenie elementów na płytce montażowej, połączenie elementów zgodnie ze schematem ideowym obwodu równoległego i podłączenie przyrządów.



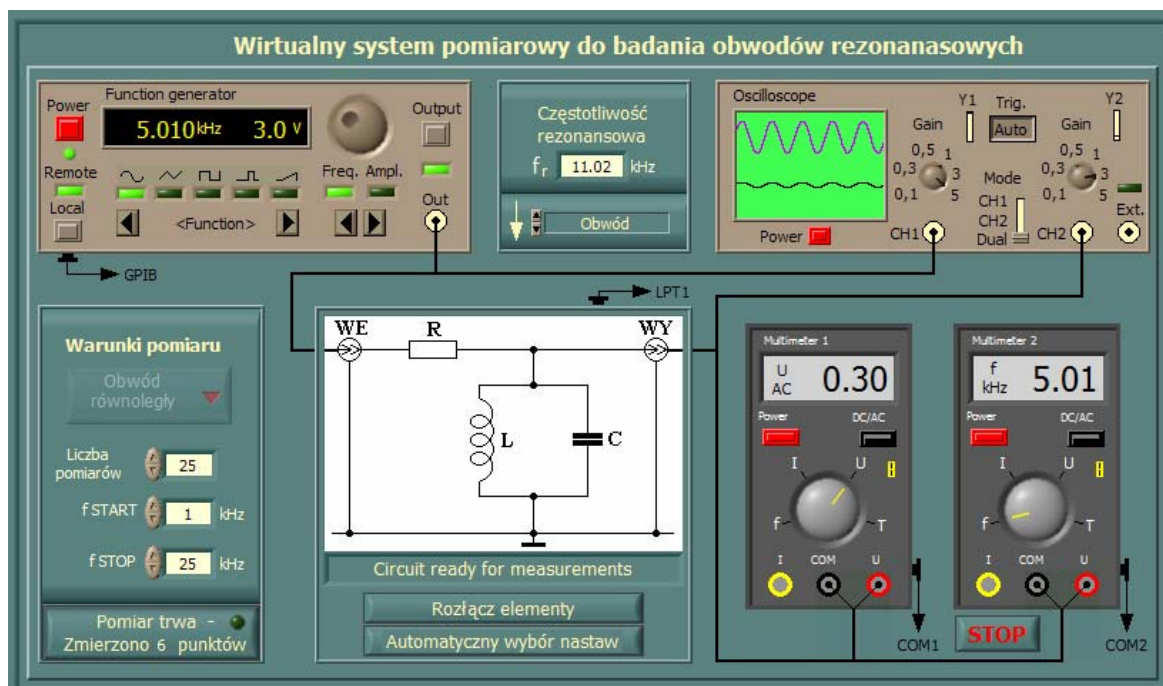
Rys. 30 Zestaw aparatury pomiarowej do testowania obwodu równoległego: a) w stanie wyjściowym, b) po wybraniu obwodu i umieszczeniu elementów na płytce montażowej, c) po zmontowaniu równoległego obwodu rezonansowego, d) po podłączeniu przyrządów pomiarowych (slajd 40 ÷ 43)

Po wybraniu obwodu równoległego pozostała sekwencja operacji związana z przygotowaniem aparatury do pomiarów jest identyczna jak w przypadku opisanej wcześniej procedury przygotowania aparatury do testowania obwodu szeregowego.

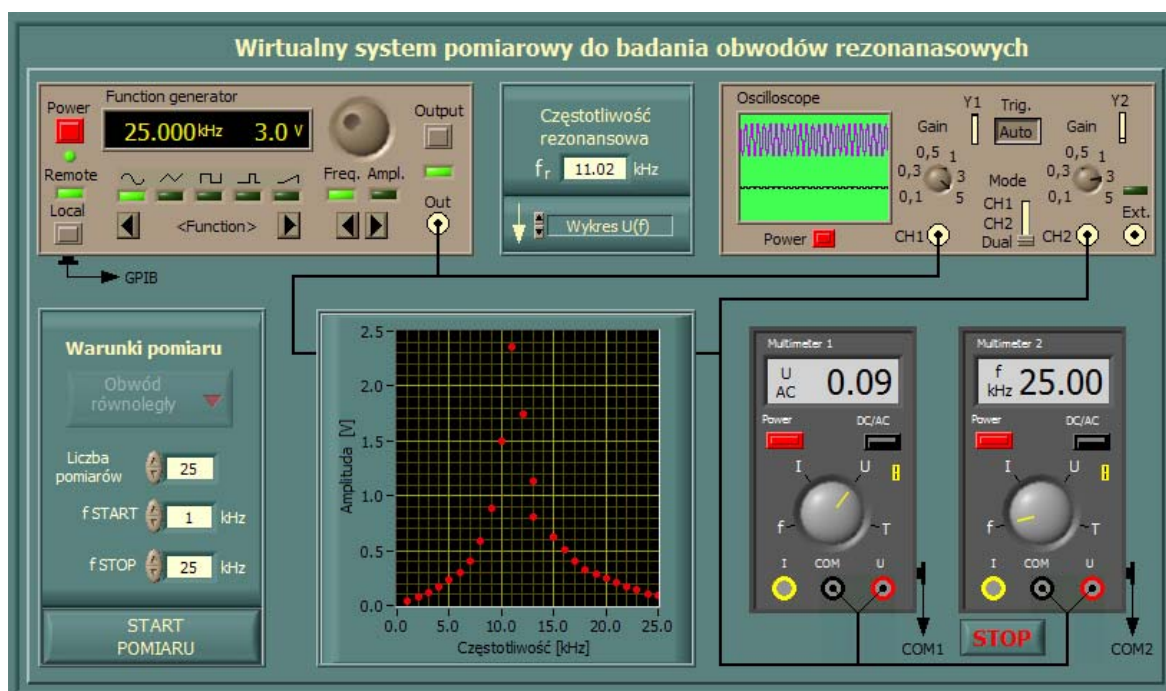
Testowanie obwodu równoległego

Badanie obwodu równoległego wykonuje się w sposób analogiczny jak to zostało opisane wyżej w przypadku obwodu szeregowego.

Na rysunku 31 pokazano panel sterowania w trakcie wykonywania pomiarów, po uprzednim przygotowaniu aparatury do wykonania testu.



Rys. 31 Panel sterowania w trakcie testowania obwodu równoległego



Rys. 32 Panel sterowania po zakończeniu testowania obwodu równoległego

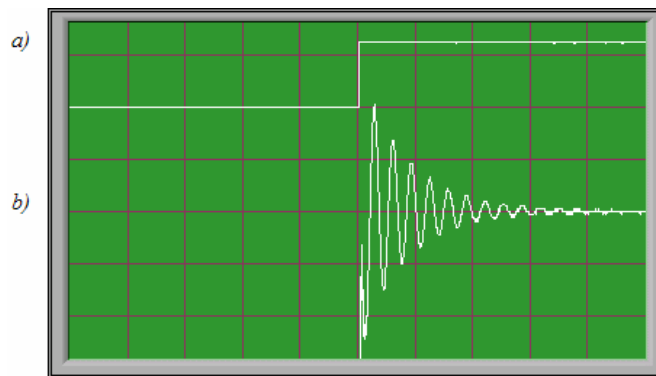
Na rysunku 32 pokazano panel sterowania po zakończeniu pomiarów z wykreśloną zależnością napięcia zmierzonego na wyjściu obwodu równoległego w funkcji częstotliwości.

Wyniki pomiarów, podobnie jak w przypadku obwodu szeregowego, są również dostępne w postaci tabeli. Wyboru sposobu prezentacji wyników w formie tabeli można dokonać za pomocą kontrolki tekstowej <Obwód/Wykres/Tabela>, umieszczonej na panelu sterowania.

Tabela 1 Wyniki pomiarów

L.p.	Częstotliwość [kHz]	Amplituda [V]
1	1.00	2.85
2	2.00	2.84
3	3.00	2.80
4	4.00	2.73
5	5.01	2.63
6	6.01	2.48
7	7.01	2.25
8	8.01	1.91
9	9.01	1.44
10	10.01	0.84
11	11.02	0.15
12	12.02	0.49
13	13.02	1.04
14	14.02	1.46
15	15.02	1.77
16	16.03	2.00
17	17.03	2.16
18	18.03	2.29
19	19.03	2.38
20	20.00	2.45
21	21.00	2.51
22	22.00	2.56
23	23.00	2.59
24	24.00	2.63
25	25.00	2.65

W tabeli 1 zestawiono wyniki pomiarów zarejestrowane w czasie testowania równoległego obwodu rezonansowego. Na rysunku 33 pokazano odpowiedź $u_{LC}(t)$ szeregowego obwodu rezonansowego na pobudzenie skokowe.



Rys. 33 Odpowiedź szeregowego układu rezonansowego na pobudzenie skokowe: a) pobudzenie, b) odpowiedź $u_{LC}(t)$

Bibliografia

1. Osowski J., Szabatin J., *Podstawy teorii obwodów*. T I. Warszawa, WNT 1992.
2. Osowski J., Szabatin J., *Podstawy teorii obwodów*. T II. Warszawa, WNT 1993.
3. Oliver B. M., Cage J. M.: *Pomiary i przyrządy elektroniczne*. Warszawa, WKiŁ 1978.
4. Horowitz P., Hill W.: *Sztuka elektroniki*. T.I. WKiŁ, Warszawa 1997.
5. Sydenham P.H.: *Podręcznik metrologii*. T.II. Warszawa, WKiŁ 1990.
6. Tłaczała W.: *Środowisko LabVIEW w eksperymencie wspomaganym komputerowo*. WNT, Warszawa 2002.

Pytania kontrolne

1. Jakie zjawisko fizyczne nazywamy rezonansem elektrycznym?
2. Co oznacza pojęcie *rezonans prądów*?
3. Co oznacza pojęcie *rezonans napięć*?
4. Jaki obwód elektryczny nazywamy szeregowym obwodem rezonansowym?
5. Jaki obwód elektryczny nazywamy równoległym obwodem rezonansowym?
6. W jakiego typu obwodzie rezonansowym może wystąpić *rezonans prądów*?
7. W jakiego typu obwodzie rezonansowym może wystąpić *rezonans napięć*?
8. Podaj wzór na impedancję szeregowego obwodu rezonansowego.
9. Podaj wzór na admitancję równoległego obwodu rezonansowego.
10. Jaki warunek musi być spełniony by w szeregowym obwodzie rezonansowym wystąpił rezonans elektryczny?
11. Jaki warunek musi być spełniony by w równoległym obwodzie rezonansowym wystąpił rezonans elektryczny?
12. Jakie jest przesunięcie fazowe między napięciem wymuszającym drgania elektryczne a prądem w szeregowym obwodzie rezonansowym w czasie rezonansu?
13. Jakie jest przesunięcie fazowe między napięciem na równoległe połączonych elementach LC a prądem w równoległym obwodzie rezonansowym w czasie rezonansu?

14. Co to jest dobroć obwodu rezonansowego?
15. Jak dobroć obwodu rezonansowego wpływa na właściwości selektywne obwodu rezonansowego?
16. Co to są krzywe rezonansowe amplitudowa i fazowa?
17. Podaj definicję pasma przepustowego B obwodu rezonansowego?
18. Podaj wzór na częstotliwość rezonansową.
19. Co to jest pulsacja rezonansowa?
20. Dla jakich częstotliwości impedancja szeregowego obwodu rezonansowego ma charakter pojemnościowy?
21. Dla jakich częstotliwości impedancja szeregowego obwodu rezonansowego ma charakter indukcyjny?
22. Jaki charakter ma admitancja równoległego obwodu rezonansowego w warunkach rezonansu?
23. Jaką wielkość nazywamy oporem charakterystycznym obwodu?
24. Jakie jest przesunięcie fazowe między napięciem na cewce a prądem w szeregowym obwodzie rezonansowym?
25. Jakie jest przesunięcie fazowe między napięciem na kondensatorze a prądem w szeregowym obwodzie rezonansowym?
26. Narysuj wykresy wskazowe dla napięć i prądów w szeregowym obwodzie rezonansowym dla pulsacji większych, mniejszych i równych pulsacji rezonansowej.
27. Narysuj wykresy wskazowe dla prądów i napięć w równoległym obwodzie rezonansowym dla pulsacji większych, mniejszych i równych pulsacji rezonansowej.
28. Jak rozumiesz pojęcie *przepięcie rezonansowe*?
29. Podaj zależność między pasmem przepustowym a dobrocią w szeregowym obwodzie rezonansowym?
30. Co to jest obwód dynamiczny R_d ?
31. W jaki sposób może przebiegać ustalanie się prądu w szeregowym obwodzie RLC , po pobudzeniu obwodu skokiem napięcia?
32. Wyjaśnij znaczenie uniwersalnych krzywych rezonansowych.
33. Jak rozumiesz pojęcie *przetężenie rezonansowe*?
34. Wyjaśnij pojęcie dualizmu obwodów rezonansowych.
35. Czy jest możliwe aby napięcie na cewce lub kondensatorze w obwodzie rezonansowym było większe od napięcia pobudzającego?
36. Czy jest możliwe aby prąd w cewce lub kondensatorze w obwodzie rezonansowym był większy od prądu pobudzającego?
37. Jak definiuje się rozstrojenie bezwzględne obwodu rezonansowego?
38. Jak definiuje się rozstrojenie względne obwodu rezonansowego?
39. Jaki wpływ ma na dobroć rzeczywistego obwodu rezonansowego ma opór wewnętrzny napięciowego źródła pobudzającego?
40. Jak rozumiesz drgania własne obwodu rezonansowego?