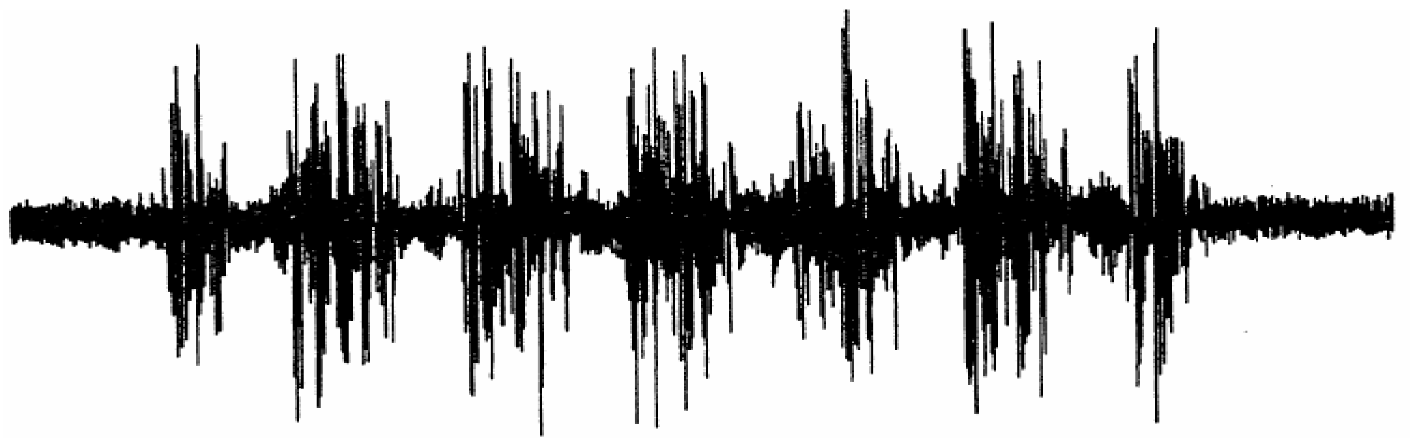
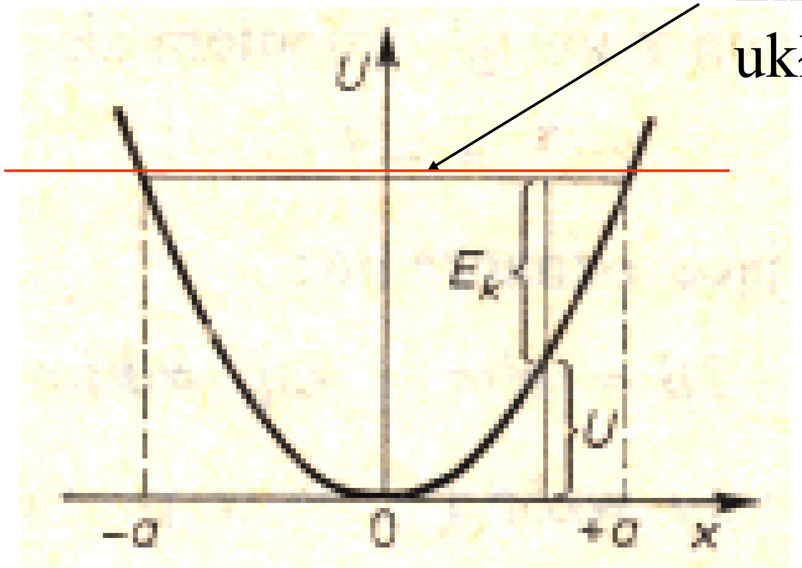
DRGANIA



Równanie oscylatora harmonicznego

Układ drgający (oscylator) o jednym stopniu swobody - x

Energia całkowita układu (zamkniętego)



Energia potencjalna układu: U = U(x)

lub (*szereg potęgowy Maclaurina*):

$U(x) = U(0) + U'(0)\, x + \frac{1}{2} U''(0)\, x^2 + ...$

Założenia:

-równowaga dla x=0, $\Rightarrow$ F = 0, $\Rightarrow$ dU/dx = 0,

{*t.zn*. U'(0) = 0}

-energia w równowadze równa zeru, $\Rightarrow$ U(0) = 0

-małe drgania $x \ll 1$

$\Downarrow$

$$U(x) = \cancel{U(0)} + \cancel{U'(0)\,x} + 1/2\; U''(0)\, x^2 + \ldots$$

t.zn. $U(x) = 1/2\,\{U''(0)\; x^2\}$

lub $U(x) = 1/2\; k\, x^2$, $\{k = U''(0)\}$

oraz $F(x) = -\mathrm{grad}U = -\,k\,x$

Równanie ruchu układu

bez tarcia i sił zewnętrznych

$$ma = F$$

$$m\,(d^2x/\,dt^{2)} = F$$

$$\boxed{m\,x'' = -\,k\,x}$$

z tarciem F_T i zewnętrzną siłą F_Z

gdzie: $F_T = -\,\varepsilon\,v = -\,\varepsilon\,x'$, $\quad F_Z = F(t)$

$$\boxed{m\,x'' + k\,x = F(t) - \varepsilon\,x'}$$

lub $\quad x'' + 2\beta\,x' + \omega_o{}^2\,x = f(t),$

gdzie : $2\beta = \varepsilon/m$, $\omega_o{}^2 = k/m$, $f(t) = F(t)/m$

Rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

niejednorodne $x'' + ax' + bx = f(t)$

jednorodne $x'' + ax' + bx = 0$

oznaczenia:

całka (rozwiązanie) **szczególna** r. **niejednorodnego**: $x(t)$

całka **ogólna** r. **niejednorodnego**: $x(t, C_1, C_2)$,

odpowiednie całki równania **jednorodnego**:

$x_j(t)$, $x_j(t, C_1, C_2)$,

Uwaga 1

Rozwiązanie równania różniczkowego II rzędu zawiera dwie dowolne stałe C_1 i C_2

Definicja 1

Pojedyńcze, konkretne rozwiązanie równania różniczkowego (funkcję spełniającą to równanie) nazywamy (całką) rozwiązaniem szczególnym

Definicja 2

Zbiór wszystkich rozwiązań szczególnych równania różniczkowego nazywamy (rozwiązaniem) całką ogólną równania

Twierdzenie 1

Całką **ogólną** równania różniczkowego **jednorodnego** jest dowolna kombinacja liniowa całek **szczególnych** liniowo niezależnych tego równania

$$x_j\,(t,C_1,C_2) = C_1\; x_{j1}(t) + \; C_2\; x_{j2}(t)$$

Twierdzenie 2

Rozwiązaniem **ogólnym** równania różniczkowego **niejednorodnego** jest suma **ogólnego** rozwiązania odpowiedniego równania **jednorodnego** i dowolnego rozwiązania **szczególnego** tego równania (niejednorodnego)

$$x\,(t,C_1,C_2) = x_j\,(t,C_1,C_2) + x(t)$$

Oscylator swobodny (bez tłumienia)

Równanie (*jednorodne*) oscylatora:

$$x'' + \omega_o^2 x = 0$$

dwie całki szczególne liniowo niezależne tego równania:

$$x_1 = \cos \omega_o t, \qquad x_2 = \sin \omega_o t$$

zatem rozwiązanie ogólne tego równania:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_o t + C_2 \sin \omega_o t,$$

Oscylator swobodny (bez tłumienia)

rozwiązanie ogólne :

$$x(t) = C_1 \cos \omega_o t + C_2 \sin \omega_o t,$$

niech $C_1 = ½\, x_m \cos \varphi$, $C_2 = ½\, x_m \sin\varphi$ (x_m, φ - *dowolne*)

$$x(t) = ½\, x_m \cos \varphi \cos (\omega_o t) + ½\, x_m \sin\varphi \sin (\omega_o t) ,$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x(t) = x_m \cos (\omega_o t + \varphi)}$ (d*rganie harmoniczne*)

$(\omega_o t + \varphi)$ = faza drgań, φ = faza początkowa

x_m= amplituda = *największe wychylenie z równowagi*,

ω_o= kołowa częstość własna oscylatora

Definicja 1

Okresem T drgania nazywamy taki odstęp czasu **t** , że:

$$x(t+T) = x(t)$$

Częstotliwość drgań $\nu = 1/T$ (*liczba drgań na sekundę*)

Wniosek 1

Dla drgań harmonicznych

$$\cos\{\omega_o (t+T) + \varphi\} \equiv \cos\{\omega_o t + \omega_o T + \varphi\} = \cos\{\omega_o t + \varphi\},$$

$$\Downarrow$$

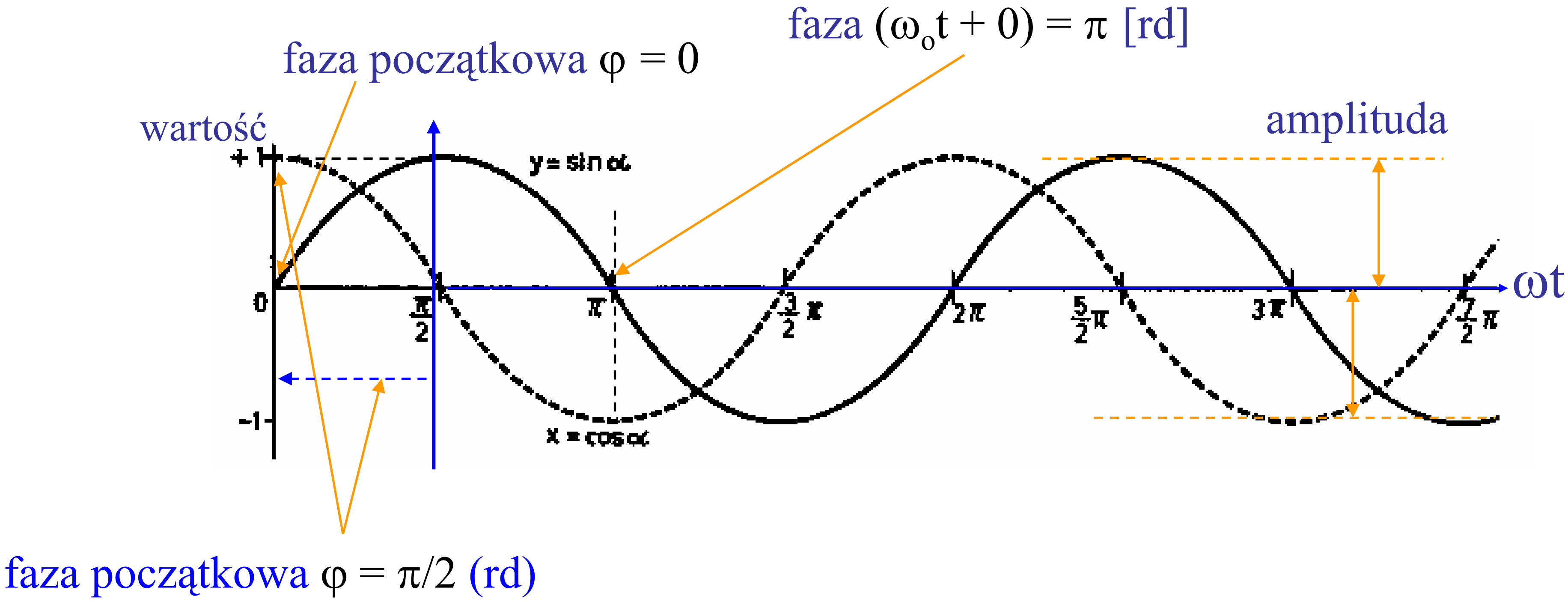
$$\omega_o T = 2\pi,$$

$\Rightarrow$ okres drgań własnych $T = 2\pi/\omega_o$

$\Rightarrow$ częstość własna $\omega_o = 2\pi (1/T) = 2\pi\nu$

$$x(t) = x_m \sin(\omega_o t + \varphi_s)$$ (*drganie harmoniczne*

lub $$x(t) = x_m \cos(\omega_o t + \varphi_c)$$ (-”-)



Parametry ruchu oscylatora

$$x = x_m \cos(\omega_o t + \varphi),$$

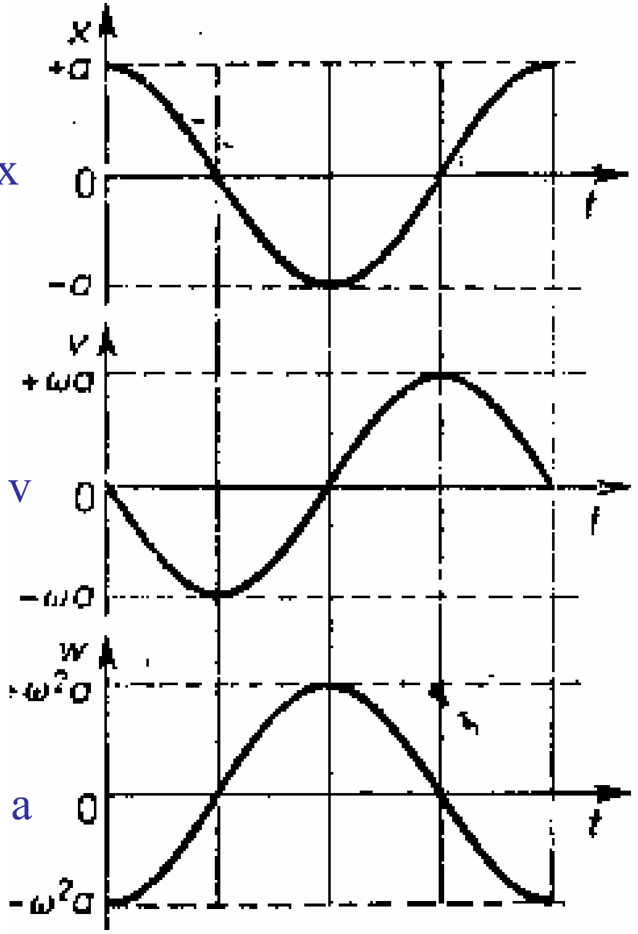
$$v = x'(t) = - x_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi) = + x_m \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi + \pi/2),$$

$$a = x''(t) = - x_m \omega^2_o \cos(\omega_o t + \varphi) = + x_m \omega^2_o \cos(\omega_o t + \varphi + \pi),$$

wychylenie x

prędkość v

przyspieszenie a



$$\begin{cases} x(t) = x_m \cos(\omega_o t + \varphi) \\ \\ v(t) = - x_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi) \end{cases}$$

$$|v_{max}| = x_m \omega_o$$

stałe x_m, φ (*rozwiązania szczególnego*) są określone warunkami początkowymi (x i v dla $t = 0$, tj. x_o i v_o):

$$\begin{cases} x(t = 0) = x_o = x_m \cos(\varphi), \\ v(t = 0) = v_o = - x_m \omega_o \sin(\varphi), \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x_m = \sqrt{x_o^2 + (v_o^2/\omega_o^2)}, \\ tg(\varphi) = - v_o/(x_o/\omega_o), \end{cases}}$$

Twierdzenie 3

Całkowita energia mechaniczna ruchu (oscylatora) **harmonicznego swobodnego** jest stała

$$E_{c\ osc} = U(x) + E_{kin} = \text{const},$$

Dowód

Siła $F = -kx$ jest siłą zachowawczą (jednowymiarowe pole centralne)

Wniosek 2

dla $v=0$ $(x = x_m)$ $\longrightarrow$ $E_{kin} = 0$, $U = U_{max} = 1/2\ k\, x_m^2$

dla $x=0$ $(v = v_{max})$ $\longrightarrow$ $U(0)=0$, $E_{kin} = (E_{kin})_{max} = 1/2\ k\, x_m^2$

$$\left\{\begin{array}{l} (E_{kin})_{max} = 1/2\ m\,(v_{max}^2) = 1/2\ m\,(\omega_o^2\, x_m^2) = 1/2\ k\, x_m^2 \\ \\ \{\omega_o^2 = k/m, \quad v = x_m\, \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)\ \} \end{array}\right\}$$

Dla oscylatora **harmonicznego swobodnego** *słuszne są zarazem następujące związki (w dowolnej chwili)*:

$$U(t) = 1/2\ k\ x^2(t) = 1/2\ k\ x_m^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi),$$

$$E_{kin}(t) = 1/2\ m\ v^2(t) = 1/2\ m\ \omega_o^2\ x_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi),$$

$$E_c(t) = U(t) + E_{kin}(t) = 1/2\ k\ x_m^2 = 1/2\ (m\ \omega_o^2)\ x_m^2 = \mathit{const}$$

$$(m\omega_o^2 = k)$$

Oscylator tłumiony (bez wymuszenia)

$$x'' + 2\beta\, x' + \omega^2 x = 0,$$

przewidywane rozwiązanie: $x(t) = \exp(\lambda\, t)$

$\Rightarrow$ $x' = \lambda \exp(\lambda\, t)$, $\quad x'' = \lambda^2 \exp(\lambda\, t)$.

$\Rightarrow$ *r. charakterystyczne*: $\lambda^2 + 2\beta\,\lambda + \omega_o = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$, $\quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$

lub $\quad \lambda_1 = -\beta + \sqrt{-\omega^2}$, $\quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{-\omega^2}$

gdzie $\quad \omega^2 = (\omega_o^2 - \beta^2) > 0$ dla $\beta < \omega_o$ $\quad$ $\boxed{\text{uwaga: } \omega \neq \omega_o}$

$\lambda_1 = -\beta + j\,\omega$, $\quad \lambda_2 = -\beta - j\,\omega$,

zatem

$$x_1 = \exp[(-\beta + j\omega)t], \qquad x_2 = \exp[(-\beta - j\omega)t],$$

$$x(t, C_1, C_2) = C_1 \exp[(-\beta + j\omega)t] + C_2 \exp[(-\beta - j\omega)t],$$

$x(t, C_1, C_2)$ = rzeczywiste $\Longrightarrow$ $x = x^*$

$$x = C_1 \exp[(-\beta + j\omega)t] + C_2 \exp[(-\beta - j\omega)t],$$
$$x^* = C_1^* \exp^*[(-\beta + j\omega)t] + C_2^* \exp^*[(-\beta - j\omega)t],$$

$$C_1 \exp[(-\beta + j\omega)t] + C_2 \exp[(-\beta - j\omega)t] =$$
$$= C_1^* \exp[(-\beta - j\omega)t] + C_2^* \exp[(-\beta + j\omega)t] \qquad / \exp(-\beta)$$

$$C_1 \exp[(+j\omega)t] + C_2 \exp[(-j\omega)t] +$$
$$- C_1^* \exp[(-j\omega)t] - C_2^* \exp[(+j\omega)t] = 0$$
$$\Longrightarrow \quad C_1 = C_2^*,\ C_2 = C_1^*,$$
$$C_1 = (x_m/2) \exp(j\alpha), \qquad C_2 = (x_m/2) \exp(-j\alpha),$$

$$\Longrightarrow \quad x = (x_m/2) \exp(-\beta t)\{\exp[j(\omega t + \alpha)] + \exp[-j(\omega t + \alpha)]\},$$

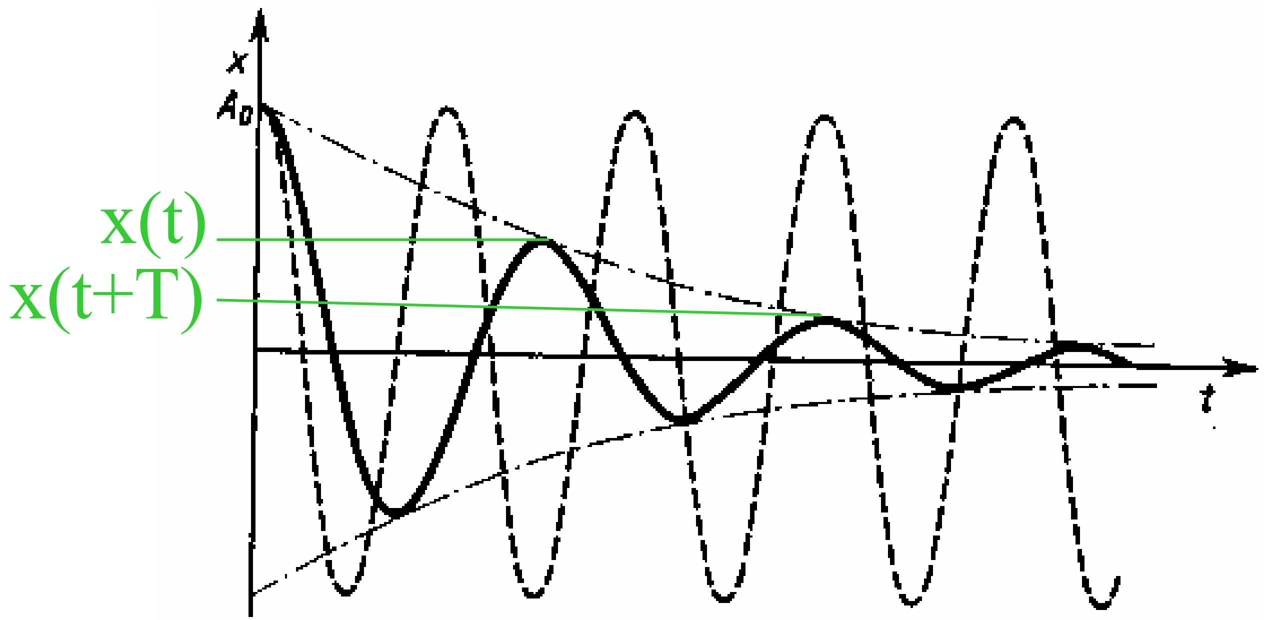
lub $\quad x = x_m \exp(-\beta\, t) \cos(\omega\, t + \varphi),$

$$x(t) = x_m \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi),$$
$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2},$$

częstość drgań tłumionych $\omega < \omega_o$,

lub

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}, \qquad T > T_o$$



$$x(t) / x(t+T) = \exp(\beta T),$$

Dyskusja równania oscylatora harmonicznego tłumionego $x(t) = x_m \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi)$

dekrement tłumienia $\lambda = \ln [x(t) / x(t+T)] = \beta T$,

dobroć oscylatora $Q = \pi/\lambda$, $Q = \pi/\beta T$

Skutki tłumienia

1. ogólne

   - zmniejszanie amplitudy drgań
   - wydłużenie okresu drgań
   - dysypacja energii

Uwaga : Całkowita energia mechaniczna E_c oscylatora harmonicznego tłumionego **nie jest** zachowana wskutek siły tłumiącej (oporu)

2. dla małego tłumienia, $\beta \ll \omega_o$, $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$,

$\Rightarrow$ $\boxed{\omega \cong \omega_o. \quad T \cong T_o,}$

$\{(x_m)_{tł} \div \exp(-\beta\, t)$ oraz $E_c \div x_m^2\}$ $\Rightarrow$

$E_c \cong E_o \exp(-2\beta t)$,

$dE_c /dt = (-2\beta)\, E_o \exp(-2\beta t) = (-2\beta) E_c$

$dt \to T$, $dE_c \to \Delta E_c$

$\Rightarrow$ $\Delta E_c / T \cong (-2\beta) E_c$

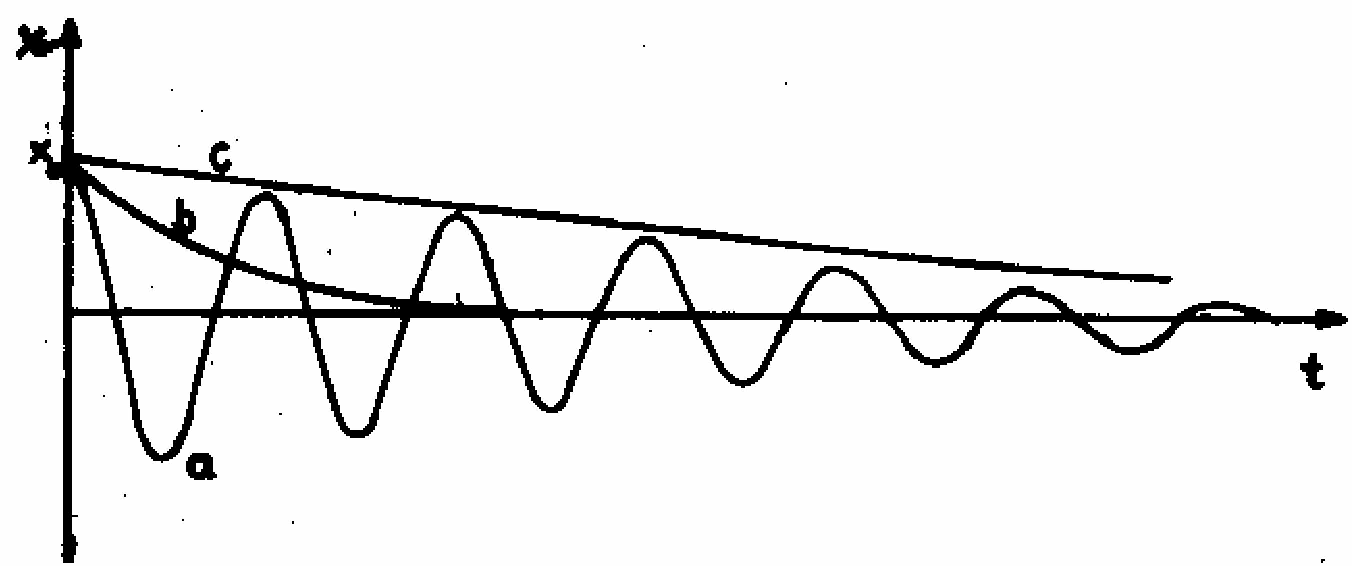
$\Delta E_c / E_c \cong (-2\beta T) = (-2\lambda) = (-2\pi/Q)$

$$\boxed{\frac{E_c}{-\Delta E_{cT}} = \frac{Q}{2\pi}}$$

3. dla $\boldsymbol{\beta = \omega_o}$ $\quad \omega \to 0, \quad T \to \infty, \qquad (\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2})$,
ruch przestaje być okresowy ($\Rightarrow$ r. aperiodyczny gasnący);
ta wielkość β nazywa się **tłumieniem krytycznym**

4. dla $\beta > \omega_o$ ruch jest aperiodyczny gasnący tym wolniej,
im większa wartość β :

$$x = C_1 \exp\{[-\beta + \sqrt{(\beta^2 - \omega_o^2)}]\, t\} + C_2 \exp\{[-\beta - \sqrt{(\beta^2 - \omega_o^2)}]\, t\},$$



a) okresowy gasnący, b) aperiodyczny krytyczny, c) aperiodyczny

Oscylator wymuszony z tłumieniem

$$x'' + 2\beta\, x' + \omega_o^2\, x = f(t),$$
$$2\beta = \varepsilon/m,\ \omega_o^2 = k/m,\ \ f(t) = F(t)/m$$

Niech

$$f(t) = f_o \cos \omega' t$$

Ogólne rozwiązanie równania **jednorodnego**

$$x(t) = x_{mj} \exp(-\beta\, t) \cos(\omega\, t + \alpha), \qquad \omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2},$$

Przewidywane rozwiązanie szczególne r-nia **niejednorodnego**

$$x(t) = x_{mn} \cos(\omega'\, t - \varphi),$$

uwaga: $\omega_o \neq \omega \neq \omega'$

z obliczeń dostaje się

$$x_{mn} = f_o / \sqrt{(\omega_o^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2 \omega'^2},$$
$$\operatorname{tg} \varphi = 2\beta\omega' / (\omega_o^2 - \omega'^2)$$

Zatem ogólne rozwiązanie równania jednorodnego

$$x(t) = x_{mj} \exp(-\beta\, t) \cos(\omega\, t + \alpha) + x_{mn} \cos(\omega'\, t - \varphi),$$

Graficzne rozwiązanie równania oscylatora

$x'' + 2\beta x' + \omega_o^2 x = f(t)$ dla $f(t) = f_o \cos \omega' t$

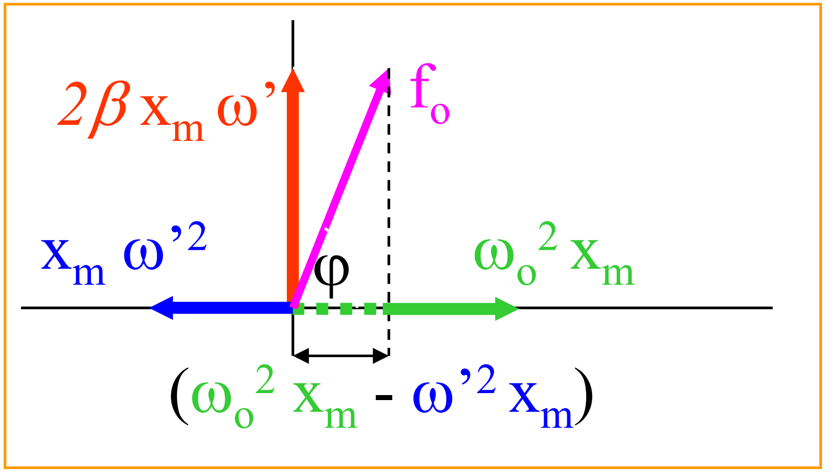
Przewidywane rozwiązanie: $x(t) = x_m \cos(\omega' t - \varphi)$,

Więc $x'(t) = - x_m \omega' \sin(\omega' t - \varphi) = +x_m \omega' \cos(\omega' t - \varphi + \pi/2)$,

$x''(t) = - x_m \omega'^2 \cos(\omega' t - \varphi) = +x_m \omega'^2 \cos(\omega' t - \varphi + \pi)$,

$$x_m \omega'^2 \cos(\omega' t - \varphi + \pi) + 2\beta x_m \omega' \cos(\omega' t - \varphi + \pi/2) +$$

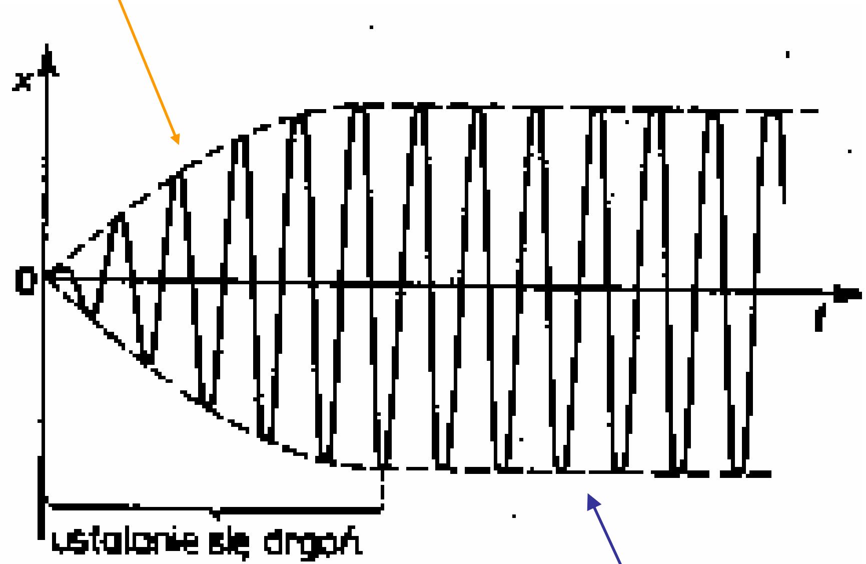
$$+ \omega_o^2 x_m \cos(\omega' t - \varphi) = f_o \cos \omega' t$$



$$x_m = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2 \omega'^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega'}{(\omega_o^2 - \omega'^2)}$$

$x(t) = x_{mj}\, \exp(-\beta\, t) \cos(\omega\, t + \alpha) + x_{mn} \cos(\omega'\, t - \varphi),$



$$x_m = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^{\,2} - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$$

dla $t \to \infty$, $x(t) \to \quad x_m \cos(\omega'\, t - \varphi), \Rightarrow$ rozwiązanie ustalone

Dyskusja rozwiązania dla oscylatora tłumionego z wymuszeniem

1. oscylator drga z częstotliwością siły wymuszającej (ω')

2. amplituda drgań wymuszonych x_m jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszenia f_o

3. amplituda drgań wymuszonych x_m zależy od częstotliwości siły wymuszającej (ω') $\Rightarrow$ **rezonans**

Rezonans

częstotliwość rezonansowa ω'_{rez} : $x_m(\omega'_{rez}) = max$

dla $\omega = \omega'_{rez}$ $d[x_m(\omega')] / d\omega' = 0$

$$d[f_o/\sqrt{(\omega_o^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2 \omega'^2}] \; / \; d\omega' = 0$$

$$-4\,(\omega_o^2 - \omega'^2)\,\omega + 8\beta^2 \omega' = 0$$

$$\omega'_1 = 0,$$
$$\omega'_2 = +\sqrt{(\omega_o^2 - 2\beta^2)}$$
$$\omega'_3 = -\sqrt{(\omega_o^2 - 2\beta^2)}$$

Ostatecznie

$$\omega_{rez} = +\sqrt{(\omega_o^2 - 2\beta^2)}$$

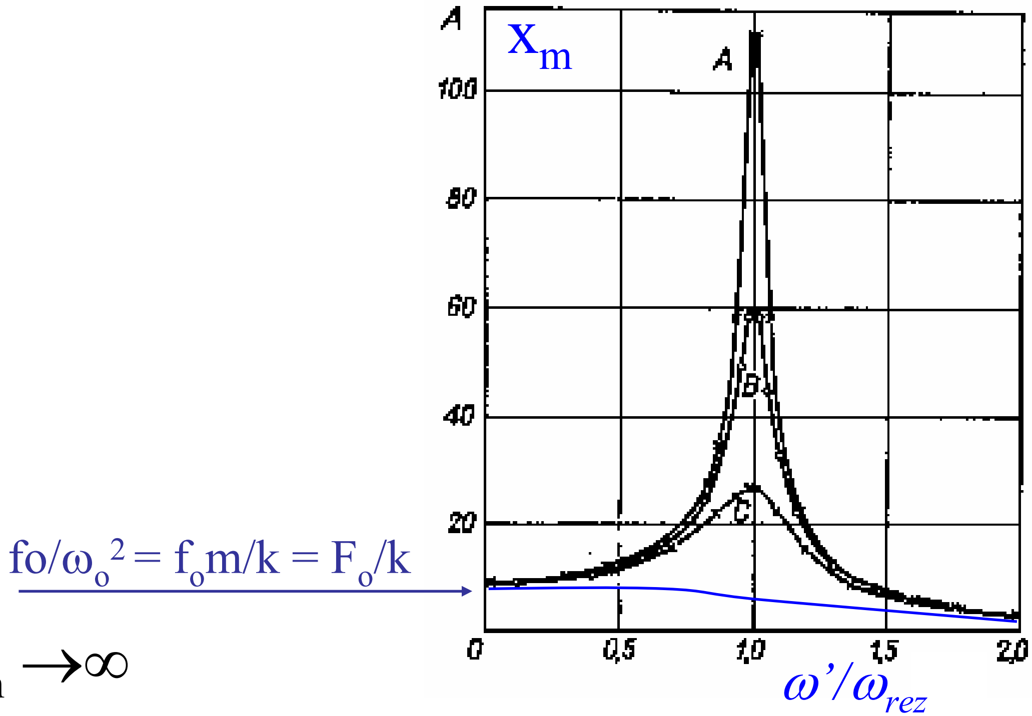
wtedy

$$x_{m-rez} = \frac{f_o}{2\beta\sqrt{(\omega_o^2 - \beta^2)}}$$

$$x_m = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$$

$$\omega_{rez} = +\sqrt{(\omega_o^2 - 2\beta^2)}$$

$$x_{m-rez} = \frac{f_o}{2\beta\sqrt{(\omega_o^2 - \beta^2)}}$$



Dyskusja wyniku

1. przy braku tłumienia $\beta=0$, $x_m \to \infty$
2. dla słabego tłumienia , $\beta<<\omega_o$

   $x_{rez} \cong f_o/[2\beta\,\omega_o)]$; $\omega_{rez} \cong \omega_o$

   $x_{rez}/x_o \cong \omega_o/2\,\beta = 2\pi/\,\beta T_o = \pi/\lambda = Q$ $(x_o = F_o/k = f_o/\omega_o^2)$
3. dla silnego tłumienia , $\sqrt{2}\,\beta>\omega_o$ $\omega_{rez} = \mathrm{Im}[\sqrt{(\omega_o^2 - 2\beta^2)}]$

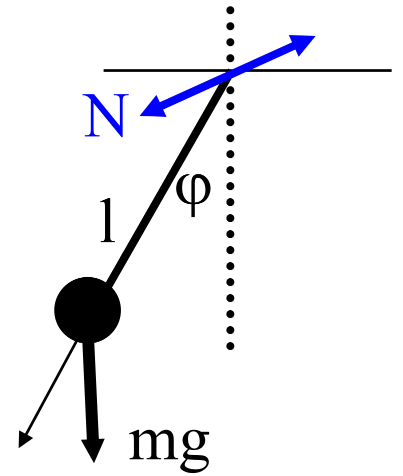
   rezonans znika
4. drgania wymuszone są opóźnione w fazie w stosunku do siły wymuszającej f_o: $0 \le \varphi \le \pi$ ($tg\ \varphi = 2\beta\omega'/(\omega_o^2 - \omega'^2)$);

   jeśli β maleje, to rezonans staje się wyraźniejszy $\Rightarrow$*selektywność*

Wahadło matematyczne

$\mathbf{N = I}\varepsilon$,

$N = -\,mgl \sin\varphi, \quad I = ml^2$



$$ml^2\, \varphi'' = -mgl \sin \varphi$$

$\varphi'' + (g/l) \sin \varphi = 0,$

małe drgania: $\sin \varphi \cong \varphi, \quad g/l = \omega_o^2$

$\varphi'' + \omega_o^2\, \varphi = 0,$

$\varphi = \varphi_o \cos(\omega_o t + \alpha), \quad \omega_o = 2\pi / T, \quad T = 2\pi \sqrt{l/g}$

dokładnie

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}\, [1 + (½)^2 \sin^2\varphi_o + (½\ ¾)^2 \sin^4\varphi_o + \ldots..]$$

Wahadło fizyczne

$N = I\varepsilon$

$N = -mgl \sin\varphi$

$\varepsilon = \varphi''$

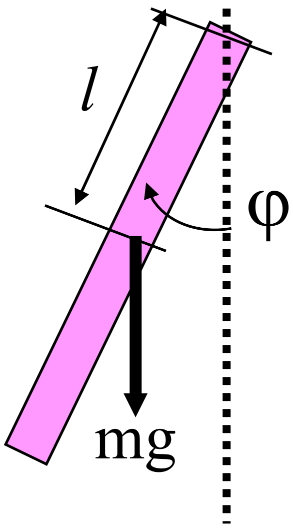
$-mgl \sin\varphi = I\varphi''$

$\varphi'' = -(mgl/I) \sin\varphi$

$mgl/I = \omega_o^2$, *małe drgania*,

$\varphi'' + \omega_o^2 \varphi = 0$,

$T = 2\pi / \omega_o = 2\pi \sqrt{I/mgl}$



$I/ml = l_{zr}$ (*dł. zredukowana*), $\Rightarrow$ $T = 2\pi \sqrt{l_{zr}/g}$

Drgania złożone

Drgania prostopadłe

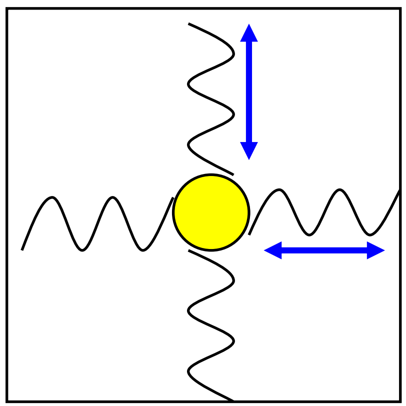
$x(t) = a \cos \omega t,$

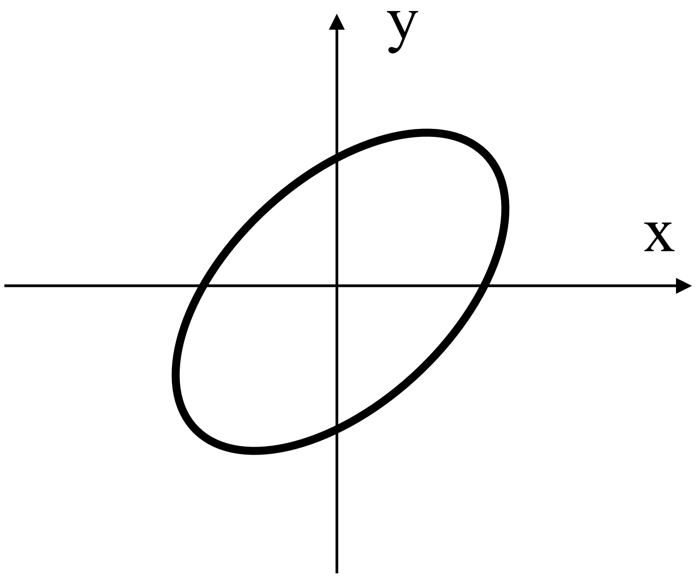
$y(t) = b \cos (\omega t + \varphi),$

równanie toru na Oxy w postaci parametrycznej

tor (postać zwykła)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - (2xy/ab)\cos\varphi = \sin^2\varphi$ *elipsa*

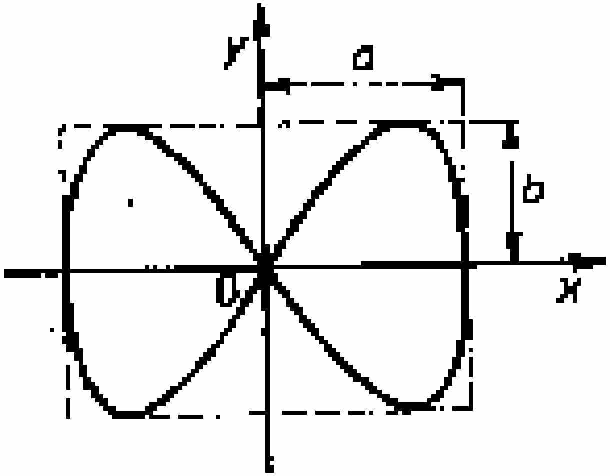




Przypadki szczególne $x^2/a^2 + y^2/b^2 - (2xy/ab)\cos\varphi = \sin^2\varphi$

$$\left.\begin{array}{l}
\textit{1. różnica faz } \varphi=0 \ (\pm n\pi) \\
\quad x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm (b/a)\, x \quad \Rightarrow \quad \textit{prosta} \\
\\
\textit{2. różnica faz } \varphi=\pm\pi/2 \\
x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \textit{elipsa wg Oxy} \\
\\
\textit{3. różnica faz } \varphi=\pm\pi/2, \quad \textit{oraz} \quad a = b, \\
x^2 + y^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \textit{okrąg}
\end{array}\right\} \omega_x = \omega_y$$

4. $\omega_x \neq \omega_y \quad \Rightarrow$ *figury Lissajou*



Drgania równoległe - dudnienia

$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, $\quad x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$,

a) $\boldsymbol{\omega_1 = \omega_2 = \omega}$

$$x_1 + x_2 = a_3 \cos(\omega t + \varphi_3),$$

b) $\boldsymbol{\omega_1 \neq \omega_2}$, $\quad \Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2) << \omega_1, \omega_2$, $\quad a_1 = a_2 = a$, $\quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$x_1 = a \cos(\omega t), \qquad x_2 = a \cos[(\omega + \Delta\omega) t],$$

$$x_1 + x_2 = 2a \cos[(\Delta\omega/2)\, t] \cos(\omega t)$$

amplituda = | [2a cos[(Δω/2)t] |; częstość pulsacji amplitudy (*dudnień*)

$\Rightarrow \qquad (\Delta\omega) = 2\,(\Delta\omega/2) = (\Delta\omega) = (\omega_1 - \omega_2)$