

STATYSTYCZNY CHARAKTER ROZPADU PROMIENIOTWÓRCZEGO PODSTAWY FIZYCZNE

Jolanta Gałązka Friedman

Spis treści

1. Podstawy fizyczne.....	2
A. Wstęp.....	2
B. Rozkład dwumianowy.....	7
C. Rozkład Poissona.....	7
D. Rozkład Gaussa.....	11
E. Test χ^2	12
2. Temat i cel ćwiczenia.....	15
3. Propozycja wykonania ćwiczenia.....	16
4. Opracowanie wyników.....	16
5. Pytania kontrolne.....	17
6. Literatura.....	18

02 lutego 2011

v. 2.0

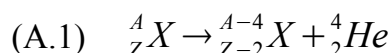
1 Podstawy fizyczne

A Wstęp

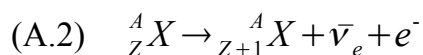
Promieniotwórczość naturalna została odkryta w 1896 roku przez Henryka Becquerela oraz małżeństwo Marię Skłodowską-Curie i Piotra Curie [1]. W przyrodzie znane są trzy podstawowe przemiany promieniotwórcze: rozpad alfa, beta i gamma (α , β i γ). Rozpad alfa polega na emisji z jądra macierzystego cząstki alfa, czyli podwójnie zjonizowanego jądra helu. Przemianie tej ulegają na ogół jądra ciężkie o liczbie masowej A większej od 200. W czasie przemiany beta z jądra emitowany jest elektron i antyneutrino elektronowe (przemiana beta minus) lub pozyton i neutrino elektronowe (przemiana beta plus). Emisja tych cząstek następuje w wyniku przemiany nukleonów (protonu lub neutronu) znajdujących się w jądrach macierzystych.

Schematy przemian alfa, beta minus i gamma wyglądają następująco:

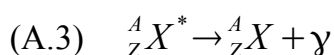
Przemiana alfa:



Przemiana beta



Przemiana gamma:



gdzie: A_ZX oznacza jądro o liczbie masowej A i liczbie porządkowej Z , e^- – elektron, $\bar{\nu}_e$ – antyneutrino elektronowe, 4_2He – cząstka alfa.

Przemianom alfa i beta towarzyszy zwykle promieniowanie elektromagnetyczne zwane promieniowaniem gamma. W czasie tej przemiany następuje wyzbycie się przez jądro nadmiaru energii (zwanej energią wzbudzenia). Liczba neutronów i protonów w jądrze w czasie przemiany gamma pozostaje nie zmieniona.

Kilka lat po odkryciu Becquerella stwierdzono, że liczba aktów rozpadu w jednostce czasu dla każdej z przemian jądrowych (α , β γ .) wykazuje identyczną zależność od czasu - liczba

rozpadów czystej substancji promieniotwórczej maleje wykładniczo z czasem. Dopiero w roku 1905 ten fakt doświadczalny zinterpretowano jako dowód na to, że rozpad promieniotwórczy ma charakter statystyczny.

Na drodze, jakiego rozumowania można dojść do takiego wniosku?

Otóż wiedząc, że jeśli w chwili $t = 0$ liczba jąder promieniotwórczych wynosiła N_0 , a po upływie czasu t zmalała do wartości:

$$(A.4) \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

można obliczyć prawdopodobieństwo rozpadu dowolnego jądra. Będzie ono równe - z definicji stosunkowi liczby rozpadów w obranej jednostce czasu:

$$(A.5) \quad \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

do liczby możliwych rozpadów, a więc liczby jąder promieniotwórczych, jakie istniały w danej próbce w chwili t .

$$(A.6) \quad p = \left| \frac{dN}{dt} \right| \frac{1}{N(t)} = \lambda$$

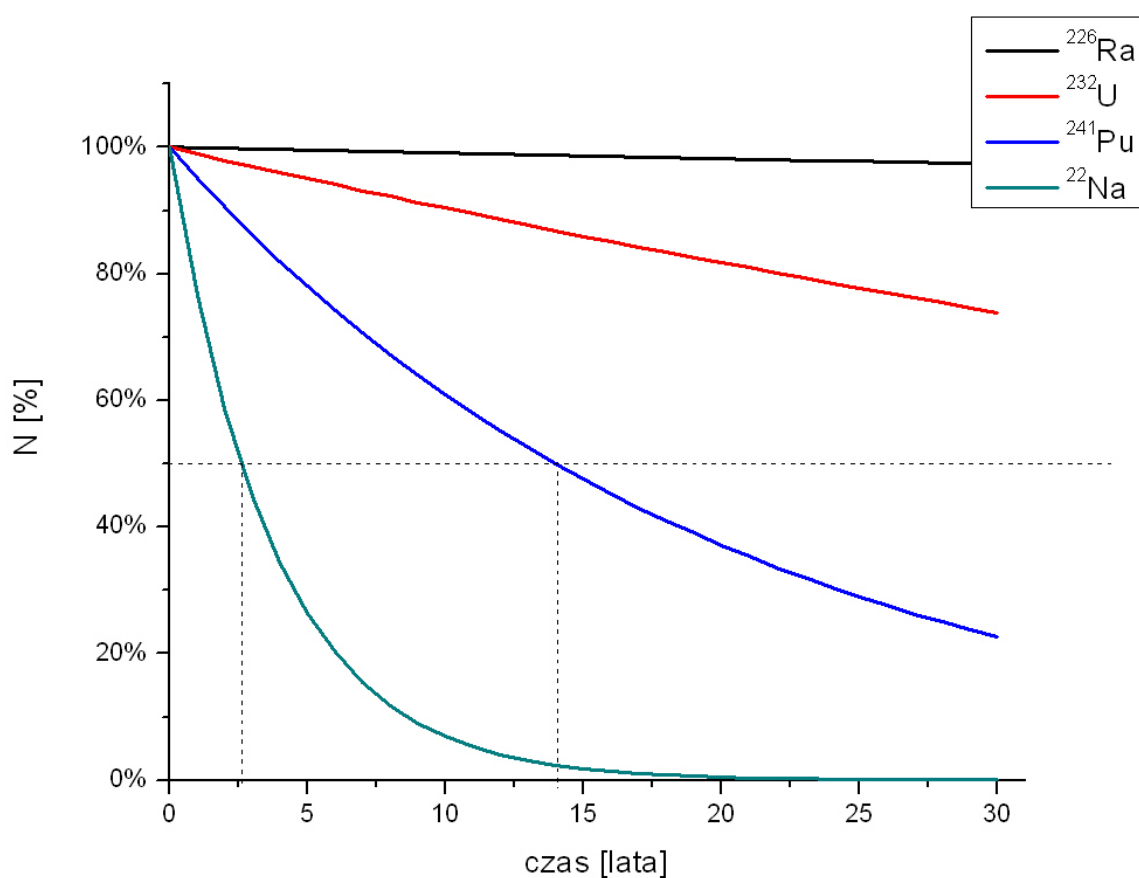
Wielkość λ , którą można interpretować jak prawdopodobieństwo rozpadu jądra danego izotopu nosi również nazwę stałej rozpadu promieniotwórczego. Jeśli prawdopodobieństwo zajścia jakiegoś zjawiska jest stałe w czasie, nie zależy od warunków zewnętrznych ani od historii danego obiektu, to mówimy, że zjawisko jest przypadkowe. Prostą konsekwencją przypadkowości rozpadu promieniotwórczego powinno być istnienie fluktuacji statystycznych, czyli rozrzutu zmierzonych wielkości wokół wartości średniej. Wyniki pomiarów rzeczywistej aktywności dowolnej próbki promieniotwórczej nie będą układały się idealnie na krzywej wykładniczej.

Na rysunku 1 umieszczono wykresy aktywności różnych izotopów promieniotwórczych zarejestrowane w ciągu 30 lat. Te cztery analizowane izotopy mają różne stałe rozpadu promieniotwórczego, a więc również różne okresy połowicznego zaniku¹. Dane liczbowe przedstawione są w tabeli 1.

¹ Okres połowicznego zaniku to czas po którym połowa jąder ulegnie rozpadowi. Porównaj z rysunkiem 1.

Izotop	$T_{1/2}$ [lata]
^{226}Ra	1620
^{232}U	68,9
^{241}Pu	14
^{22}Na	2,6

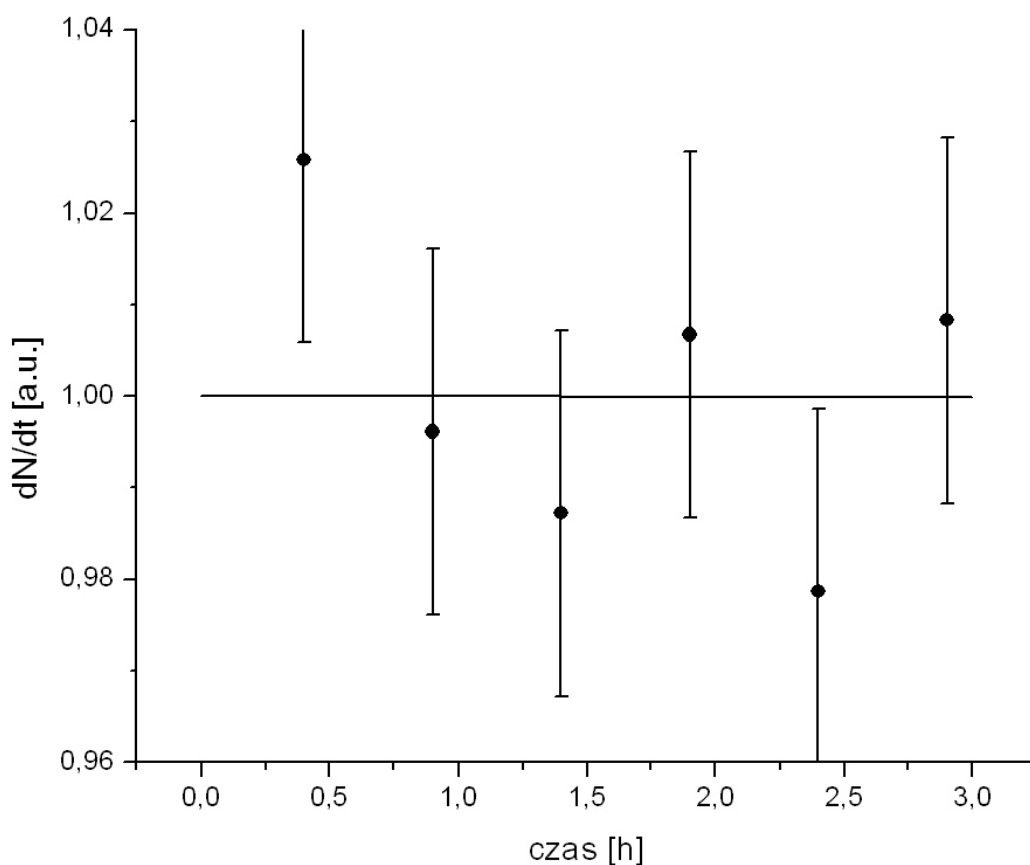
Tabela 1: Czasy połowicznego zaniku izotopów z rysunku 1.



Rysunek 1: Krzywe rozpadu czterech przykładowych izotopów promieniotwórczych o różnych czasach połowicznego rozpadu. Opis w tekście.

W przypadku jąder o dużym okresie połowicznego zaniku naszym laboratoryjnym badaniom dostępny jest mały wycinek krzywej wykładniczej, który możemy przybliżyć przez linię prostą o zerowym nachyleniu. Jest to równoważne z założeniem stałej aktywności preparatu. Na rysunku 2 pokazano symulacje wyników pomiarów aktywności preparatu ^{22}Na używanego w ćwiczeniu. Symulacja obejmuje przedział czasu równy 3h (a więc czas trwania zajęć laboratoryjnych w CLF). Rozrzut punktów pomiarowych wokół

krzywej wykładniczej² jest spowodowany nie tyle niepewnościami doświadczalnymi, (choć i one mogą występować), lecz statystycznym charakterem mierzonej wielkości.



Rysunek 2: Wyniki symulacji aktywności próbki promieniotwórczej ^{22}Na .

Statystyczny charakter rozpadu promieniotwórczego spowoduje, że aktywność preparatu o bardzo dużym okresie połowicznego zaniku będzie stała w granicy fluktuacji statystycznych. Tak, więc, jeśli rozpad promieniotwórczy jest procesem statystycznym, (czyli losowym), mamy prawo oczekiwać, że dla jąder o dostatecznie długim okresie połowicznego zaniku rozkład prawdopodobieństwa rejestracji danej liczby rozpadów w stałej jednostce czasu będzie zgodny z teoretycznym rozkładem prawdopodobieństwa zdarzeń przypadkowych.

Nie wszystkie procesy statystyczne mają jednak tą samą naturę. Zastanówmy się nad różnicą w statystycznym charakterze rozpadu promieniotwórczego i ruchów Browna. Ruchy zawiesiny ciała stałego w cieczy możnaby opisać przy pomocy równań ruchu choć

² Porównaj czas trwania eksperymentu z czasem połowicznego zaniku ^{22}Na .

rozwiązanie ich byłoby ekstremalnie skomplikowane. W próbkę jąder promieniotwórczych sytuacja jest zgoła odmienna. Nie możemy przewidzieć, które z jąder promieniotwórczych ulegnie w danej chwili rozpadowi. Fakt ten jest niezależny od żadnych ze znanych nam czynników zewnętrznych, ani od historii próbki. Większość fizyków skłonna jest przypuszczać, że nigdy nie będziemy w stanie podać przyczyny, dla której w danej chwili określone jądro rozpada się. Wyrażają oni przekonanie, że niezdeterminowanie pewnych zjawisk w mikroświecie jest ich nieodłączną i niezbywalną cechą. I to mamy na myśli mówiąc, że mechanika kwantowa (teoria opisująca zjawiska na poziomie mikroświata) ma charakter indeterministyczny [2].

Chcąc scharakteryzować próbkę jąder promieniotwórczych możemy mówić tylko o średnim czasie życia jądra do chwili rozpadu. Związek między średnim czasem życia τ jądra a stałą rozpadu λ , jest dosyć prosty do wyprowadzenia. Korzystając z wykładniczego prawa zaniku jąder promieniotwórczych można znaleźć liczbę jąder, jaka ulegnie przemianie w ciągu odstępu czasu pomiędzy chwilą t a $(t+dt)$

$$(A.7) \quad -dN = N(t)\lambda dt$$

Do tej chwili każde z jąder przeżyło czas t , łącznie, więc przeżyły one czas $tN(t)\lambda dt$. Całkowity czas życia wszystkich jąder, jakie istniały w chwili $t = 0$, będzie więc równy:

$$(A.8) \quad N_0 \tau = \int_0^{\infty} tN(t)\lambda dt = \frac{N_0}{\lambda}, \quad \text{czyli } \tau = \frac{1}{\lambda}$$

Powyższe wzory opisują również rozpady cząstek elementarnych; rozpady te mają także charakter statystyczny - i tak na przykład średni czas życia neutronów swobodnych (tzn. takich, które nie wchodzą w skład jąder atomowych) wynosi $(1.12 \pm 0.32) \times 10^{-3} s$, natomiast średni czas życia mezonu $\pi_0 = 0.89 \times 10^{-16} s$.

Średnie czasy życia jąder promieniotwórczych mogą się zmieniać w bardzo szerokim przedziale wartości - od milionowej części sekundy do miliardów lat.

W dalszej części tego opracowania będą omówione zagadnienia matematyczne, z którymi studenci powinni się zapoznać przed przystąpieniem do sprawdzania hipotezy, że rozpad promieniotwórczy ma charakter statystyczny. Będzie to omówienie trzech rozkładów prawdopodobieństwa obserwacji zdarzeń przypadkowych: rozkładu dwumianowego,

rozkładu Poissona oraz rozkładu Gaussa. Na zakończenie będzie omówiony test χ^2 , który służy sprawdzeniu czy dany rozkład prawdopodobieństwa dobrze opisuje rozkłady doświadczalne częstości rozpadów promieniotwórczych zarejestrowane w czasie wykonywania ćwiczenia.

B Rozkład dwumianowy

Wyprowadzenia rozkładu dwumianowego nie będziemy przytaczać, jako że stanowi to materiał szkoły średniej [3]. Przypomnijmy tylko, że zmienną losową X o rozkładzie dwumianowym otrzymujemy w następującym schemacie doświadczeń, zwanym schematem Bernoulliego [4]. Dokonujemy n doświadczeń losowych. W rezultacie każdego doświadczenia może zajść zdarzenie A z prawdopodobieństwem p i zdarzenie przeciwne do A z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Przyporządkujmy zdarzeniu A liczbę 1 i zdarzeniu przeciwnemu liczbę 0. W rezultacie n doświadczeń losowych zdarzenie A może nastąpić 0, 1, 2, ..., n razy. Wobec tego zmienna losowa X może przybierać wartości $k = 0, 1, 2, \dots, n$, przy czym równość $X = k$ oznacza, że w n doświadczeniach zdarzenie A zaszło dokładnie k razy. Funkcja prawdopodobieństwa tej zmiennej dana jest wzorem:

$$(B.1) \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

i nosi nazwę rozkładu dwumianowego. Nazwa ta wynika z faktu, że współczynniki $\binom{n}{k}$ w powyższym wzorze pokrywają się ze współczynnikami przy z^k w rozwinięciu na szereg dwumianu $(1+z)^n$.

C Rozkład Poissona

Rozkład Poissona otrzymujemy jako przybliżenie rozkładu dwumianowego przy przejściu do granicy z liczbą prób n i założeniu, że prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia p jest małe (co implikuje warunek $k \ll n$).

Zastanówmy się, co dzieje się wówczas ze współczynnikiem przy iloczynie prawdopodobieństw w rozkładzie dwumianowym

$$(C.1) \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(n-k)!(n-k+1)\dots(n-1)n}{(n-k)!k!} \underset[k \ll n]{n \rightarrow \infty} \approx \frac{n^k}{k!}$$

Przekształćmy teraz iloczyn prawdopodobieństw, wprowadzając oznaczenie $y = (1-p)^{n-k}$. Logarytmując to wyrażenie otrzymamy $\ln y = (n-k) \ln (1-p)$. Korzystając z przybliżenia $(n-k) \rightarrow n$ oraz $\ln (1-p) \approx -p$ dostajemy $\ln y = -np$, a więc:

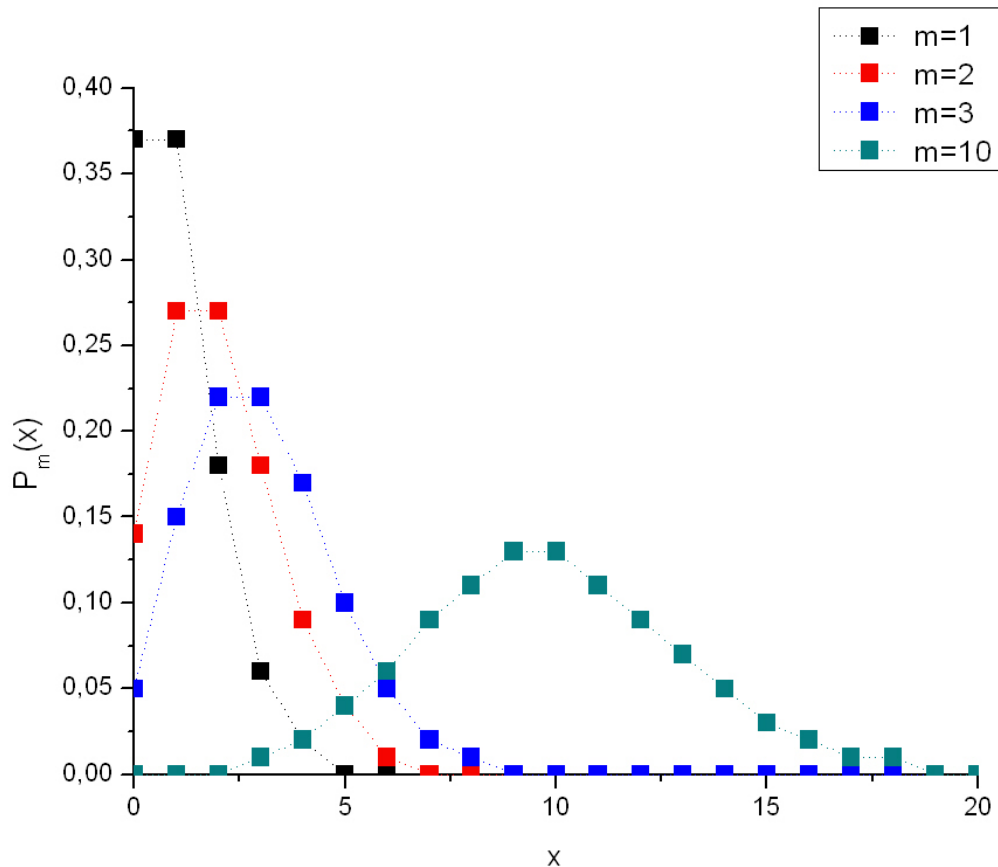
$$(C.2) \quad y = (1-p)^{n-k} \gg e^{-np}$$

Podstawiając te dwa przybliżenia, (C.1) i (C.2), do wzoru (B.1) otrzymujemy rozkład Poissona:

$$(C.3) \quad P_n(k) = \frac{n^k}{k!} p^k e^{-np}$$

Oznaczmy iloczyn np literą m i połóżmy $k = x$, wówczas rozkład Poissona przyjmie postać (C.4).

$$(C.4) \quad P_m(x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m}$$



Rysunek 3: Rozkład Poissona dla $m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=10$. Ponieważ jest to rozkład dyskretny kwadraciki przedstawiają poziom prawdopodobieństwa, natomiast linie służą jedynie lepszej wizualizacji.

Wyrażenie (C.4) określa prawdopodobieństwo zarejestrowania x rozpadów promieniotwórczych w wybranym odcinku czasu przy ustalonej wartości m . Zastanówmy się nad doświadczalną interpretacją iloczynu $np = m$. Prawo wielkich liczb Bernoulliego mówi nam, że jeśli wykonujemy n doświadczeń i prawdopodobieństwo, że nastąpi zdarzenie A wynosi p , to przy dużej liczbie prób możemy określić oczekiwaną liczbę pozytywnych zdarzeń jako $np = m$. Ilość pozytywnych zdarzeń nosi nazwę wartości oczekiwanej w schemacie prób Bernoulliego. Przypomnijmy, że wartość oczekiwana, wartość średnia, wartość przeciętna czy też nadzieja matematyczna oznacza tę samą wielkość, równą z definicji:

$$(C.5) \quad EX = \sum_{x=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

gdzie x_i – zmienna losowa a $p(x_i)$ – prawdopodobieństwo jej wystąpienia. Obliczmy wartość

oczekiwaną dla rozkładu Poissona

$$(C.6) \quad EX = \sum_{x=0}^{\infty} x_i \frac{m^x}{x!} e^{-m} = \sum_{x=1}^{\infty} x_i \frac{m^x}{x!} e^{-m} = \sum_{x=0}^{\infty} m \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} e^{-m} = m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m^j}{j!} e^{-m} = m$$

Zauważmy, że wartość oczekiwana m w rozkładzie Poissona jest identyczna z wartością oczekiwaną otrzymaną z prawa wielkich liczb Bernoulliego.

Jak wynika z powyższych zależności rozkład Poissona jest wyznaczony jednoznacznie tylko przez jeden parametr – wartość oczekiwaną, jest więc rozkładem jednoparametrycznym. Na rysunku 3 przedstawiono wykresy rozkładów Poissona dla różnych wartości m , wyraźnie niesymetryczne. Ze wzrostem m rozkład staje się coraz bardziej symetryczny.

Badając próbkę n jąder promieniotwórczych wartość oczekiwaną rozkładu Poissona $m = np$ można bardzo dobrze przybliżyć przez średnią liczbę rozpadów zarejestrowanych w naszym eksperymencie w jednostkowym przedziale czasu, tzn $np = m = N$. Obliczmy wariancję w rozkładzie Poissona

$$(C.7) \quad D^2 X = EX^2 - (EX)^2$$

Liniową miarą rozrzutu zmiennych losowych wokół wartości średniej jest pierwiastek kwadratowy z wariancji (odchylenie standardowe)

$$(C.8) \quad EX^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x_i^2 \frac{m^x}{x!} e^{-m} = m \sum_{x=0}^{\infty} x_i \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} e^{-m} = m \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{m^j}{j!} e^{-m} = m(m+1)$$

Wstawiając (C.6) i (C.7) do wzoru (C.8) otrzymujemy:

$$(C.9) \quad D^2 X = m = \sigma$$

Odchylenie standardowe w rozkładzie Poissona równe jest \sqrt{m} , co tłumaczy wzrost szerokości rozkładu ze wzrostem średniej.

Z powyższego wynika, że jeżeli mamy do czynienia ze zmienną losową podlegającą rozkładowi Poissona, to większość wyników będzie się grupowało w przedziale $m \pm \sqrt{m}$. W przypadku, gdy przeprowadzany eksperyment polega na zliczaniu niezależnych wielkości przypadkowych i gdy mamy do dyspozycji tylko jeden pomiar (N) – niepewność tego pomiaru możemy określić stosując kolejne przybliżenia:

$$(C.10) \quad N \simeq \bar{N}_i \sigma = \sqrt{N} \approx \sqrt{N}$$

Jest to odpowiednik szacowania niepewności standardowej metodą A.

Tak więc dokonując w ustalonym czasie pomiaru N zliczeń rozpadów promieniotwórczych możemy bez dodatkowych pomiarów stwierdzić, że niepewność tej wielkości, na poziomie jednego odchylenia standardowego wynosi \sqrt{N} . Jest to tak zwana niepewność statystyczna wynikająca ze statystycznego charakteru mierzonej wielkości.

D Rozkład Gaussa

Rozkład Poissona jest rozkładem przybliżonym opisującym częstotliwość rozpadów promieniotwórczych próbki o niskiej aktywności. Gdy aktywność próbki wzrasta przybliżenie $k \ll n$ jest już nieuzasadnione (zauważmy, że wzrost aktywności próbki można symulować w warunkach laboratoryjnych przez zwiększanie jednostkowego przedziału czasowego rejestracji). Wówczas należy skorzystać z innego przybliżenia rozkładu dwumianowego jakim jest rozkład Gaussa. Gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$(D.1) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

gdzie x – zmienna losowa, \bar{x} – średnia arytmetyczna, σ – odchylenie standardowe:

$$(D.2) \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^w (x_i - \bar{x})^2}.$$

Pełny dowód matematyczny, iż rozkład dwumianowy przechodzi w rozkład Gaussa przy $n \rightarrow \infty$ i k dostatecznie dużym znajduje się m. in. w książce Fisza [6].

Ze wzoru (D.2) wynika, że rozkład Gaussa jest rozkładem symetrycznym dla dowolnej wartości średniej \bar{x} . W odróżnieniu od rozkładu Poissona, rozkład Gaussa jest rozkładem dwuparametrycznym. W celu jednoznacznego określenia tego rozkładu należy oddzielnie wyznaczyć dwa parametry: średnią wartość liczby zdarzeń \bar{x} i odchylenie standardowe σ . W przypadku rozpadu promieniotwórczego dość dobrym przybliżeniem odchylenia standardowego będzie oczywiście pierwiastek ze średniej (patrz 1C. Rozkład Poissona). Otrzymanie dla rozkładu promieniotwórczego rozkładu normalnego (Gaussa) o odchyleniu standardowym $\sigma \gg \sqrt{\bar{x}}$ będzie świadczyło o tym, że na fluktuacje statystyczne nakładają się znaczne niepewności przypadkowe, wynikające z działania aparatury.

$$(D.3) \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-z^2}{2}}, \text{ gdzie } z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

Znając parametry rozkładu: \bar{x} i σ można dla każdej wartości zmiennej losowej obliczyć odpowiadającą jej zmienną standaryzowaną z (patrz wzór D.3). Należy pamiętać, że prawdopodobieństwo otrzymania wielkości x w przedziale $(x, x+dx)$ otrzymujemy poprzez pomnożenie gęstości prawdopodobieństwa $\phi(x)$ przez szerokość przedziału dx .

E Test χ^2

Test χ^2 [4,5,6] służy do ilościowej oceny zgodności serii pomiarów z krzywą teoretyczną, która naszym zdaniem powinna opisywać uzyskane punkty doświadczalne. Niech wspomniana krzywa teoretyczna będzie postaci $y = f(x)$, a serię pomiarów stanowić będzie l wartości wielkości y_i , zmierzonych przy ustalonych wartościach x_i . Wówczas suma:

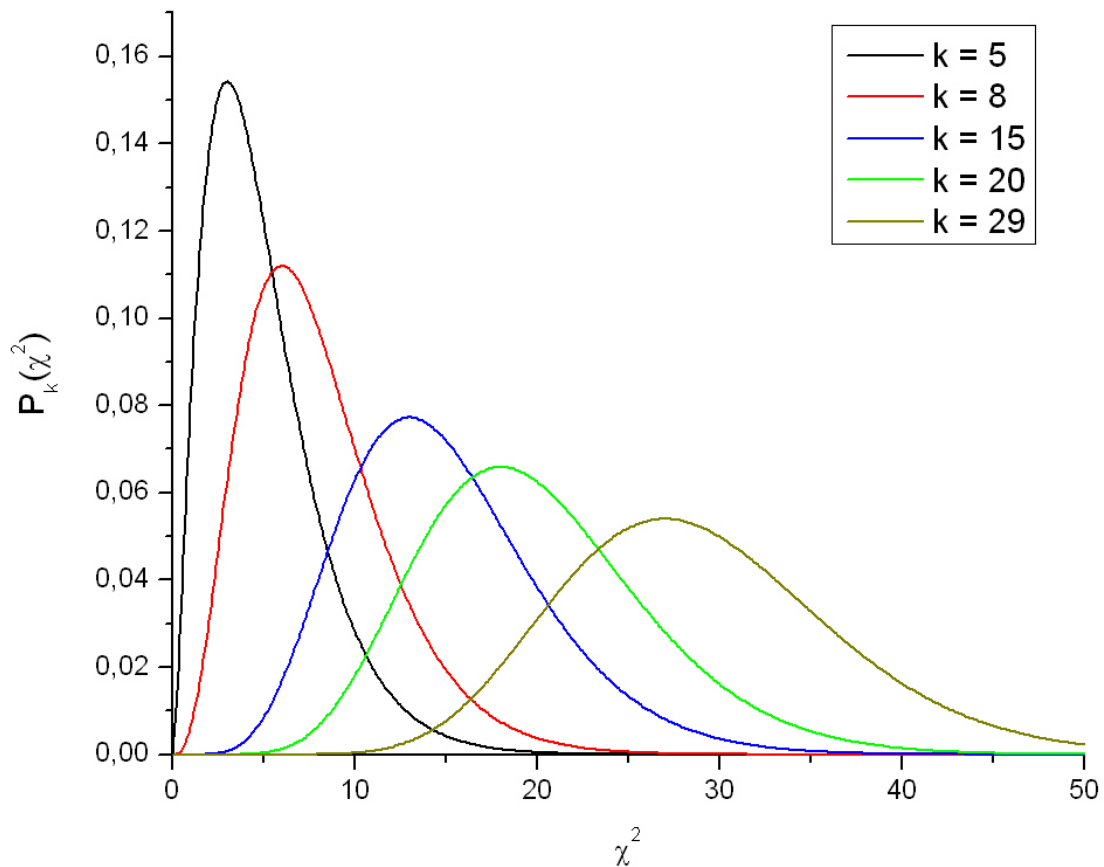
$$(E.1) \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^l \left[\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right]^2$$

gdzie: σ_i – niepewność mierzonych wielkości y_i , wydaje się być wielkością dobrze odzwierciedlającą odstępstwa wszystkich punktów eksperymentalnych od krzywej teoretycznej. Spodziewana wielkość zmiennej losowej χ^2 winna być zbliżona do liczby składników sumy, gdyż wkład każdego ze składników, przy poprawnie przeprowadzonym eksperymencie jest rzędu jedności.

Dokładne prześledzenie problemu może dostarczyć bardziej precyzyjnych informacji. Można udowodnić, że jeśli wielkość y_i , obarczona jest tylko niepewnościami przypadkowymi (z odchyleniem standardowym σ_i) to zmienna losowa χ^2 również podlega pewnemu rozkładowi prawdopodobieństwa o gęstości:

$$(E.2) \quad P_k(\chi^2) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-\chi^2}{2}}$$

gdzie: k – jest liczbą stopni swobody rozkładu χ^2 , równą liczbie niezależnych składników sumy (E.1), a $\Gamma(k/2)$ oznacza funkcję gamma Eulera. Wartość oczekiwana zmiennej losowej χ^2 jest właśnie równa liczbie stopni swobody k .

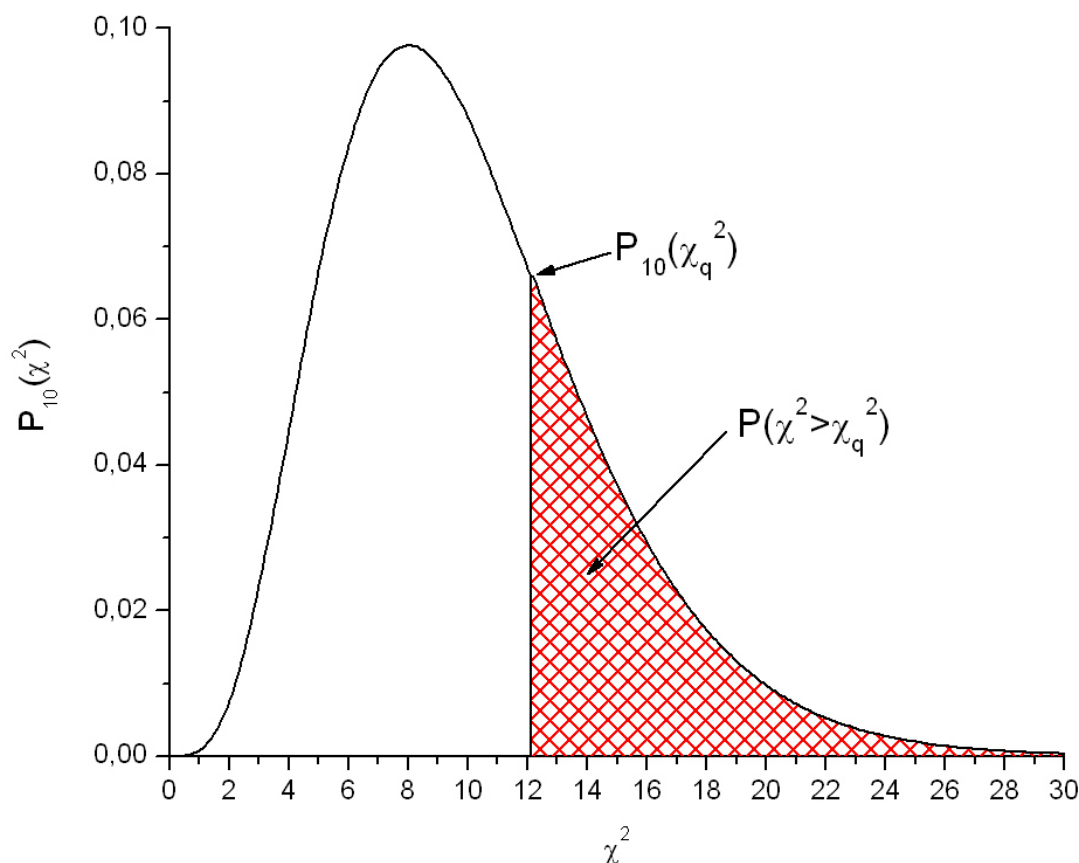


Rysunek 4: Rozkład χ^2 dla 5, 8, 15, 20 i 29 stopni swobody.

Wyrażenie:

$$(E.3) \quad \int_{\chi_q^2}^{\infty} P_k(\chi^2) d\chi^2 = P(\chi^2 > \chi_q^2)$$

oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna losowa χ^2 przyjmie wartość większą od χ_q^2 (porównaj rysunek 5). Wielkość P nosi nazwę poziomu ufności, χ_q^2 zwana jest wartością progową.



Rysunek 5: Ilustracja poziomu ufności dla testu χ^2 o 10 stopniach swobody.

Wyrażenie (E.1) ulega pewnej modyfikacji, gdy badamy zgodność doświadczalnych rozkładów prawdopodobieństwa liczby zdarzeń przypadkowych z rozkładem przewidywanym teoretycznie (np. z rozkładem Poissona lub Gaussa). Załóżmy, że przeprowadziliśmy n pomiarów, a zmienną niezależną x pogrupowaliśmy w l przedziałach (indeks i numeruje przedziały, $i = 1, 2, \dots, l$). Wówczas wielkość y_i we wzorze (E.1), musimy zastąpić liczbą n_i , która jest liczbą zarejestrowanych przez nas zdarzeń typu x_i . Wartość teoretyczna $f(x_i)$, przy spełnionym warunku:

$$(E.4) \quad \sum_{i=1}^l n_i = n$$

będzie z kolei równa np_i , gdzie p_i jest obliczonym przez nas rozkładem teoretycznym. Niepewność wielkości n_i , która jako liczba zdarzeń przypadkowych podlega rozkładowi Poissona, równa jest pierwiastkowi z wartości oczekiwanej $\sigma_i^2 = np_i$, a więc:

$$(E.5) \quad \chi^2 = \sum_{i=0}^l \left[\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=0}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

W tym wypadku liczba stopni swobody, to liczba przedziałów l zmniejszona o jeden (ze względu na warunek normalizacyjny (E.4)) oraz zmniejszona o liczbę parametrów s jednoznacznie wyznaczających rozkład teoretyczny (dla rozkładu Poissona $s = 1$, a dla rozkładu Gaussa $s = 2$).

Na podstawie tabeli rozkładu χ^2 można znaleźć poziom ufności P , jaki odpowiada otrzymanej ze wzoru (E.3) wartości zmiennej losowej χ^2 przy znanej liczbie stopni swobody. Otrzymanie bardzo niskiego poziomu ufności może świadczyć o tym, że odstępstwa punktów doświadczalnych od krzywej teoretycznej nie są spowodowane jedynie niepełnościami przypadkowymi, a mogą mieć swe źródło w źle przyjętej przez nas hipotezie lub dużym wkładzie niepewności systematycznych. Bardzo wysoki poziom ufności może być natomiast ostrzeżeniem, że oszacowanie niepewności było zbyt "optymistyczne".

2 Temat i cel ćwiczenia

Tematem ćwiczenia jest statystyczny charakter rozpadu promieniotwórczego. Niestety, w warunkach laboratorium studenckiego nie możemy tego twierdzenia w pełni zweryfikować. Dowód musiałby zawierać: stwierdzenie wykładniczego maleńia aktywności próbki, wykazanie niezależności stałej rozpadu od czynników zewnętrznych i jej niezmienności w czasie. Istniejące warunki pozwalają jedynie zbadać rozkład częstości rozpadów promieniotwórczych próbki o bardzo długim okresie połowicznego zaniku, dostatecznie długim w porównaniu z czasem obserwacji, aby założenie o stałej aktywności próbki było w pełni uzasadnione. Możemy wówczas oczekiwać, jak to już było powiedziane wyżej, że rozkład częstości rozpadów promieniotwórczych rejestrowanych w stałym przedziale czasu będzie zgodny z teoretycznym rozkładem zdarzeń przypadkowych.

W naszym przypadku doświadczalne rozkłady będziemy porównywać z przybliżonymi rozkładami teoretycznymi: dla małej średniej liczby zdarzeń z rozkładem Poissona, dla dużej liczby średniej zdarzeń z rozkładem Gaussa. Sprawdzenie natomiast, czy doświadczalny rozkład zajścia danej liczby rozpadów w odcinku czasu jest zgodny z którymś z podanych rozkładów teoretycznych można dokonać przy pomocy testu χ^2 .

3 Propozycja wykonania ćwiczenia

1. Aparaturę do wykonania ćwiczenia nr 7 włącza asystent.
2. Studenci wraz z asystentem ustalają warunki w jakich będą wykonywane pomiary. Zależy to od scenariusza ćwiczenia, jaki asystent chce z daną grupą studencką zrealizować. Jednym ze scenariuszy może być uzyskanie 100 rozkładów Poissona zmierzonych w takich samych warunkach eksperymentalnych (identyczna odległość źródła od licznika, taka sama wartość bramki oraz taka sama liczba prób). Wówczas schemat postępowania powinien być następujący:
3. Źródło umieszczamy jak najbliżej detektora.
4. Wybieramy określoną wartość bramki.
5. Liczbę prób ustalamy na 100.
6. Każdy z 4 zespołów studenckich wykonuje pomiary 25 rozkładów Poissona.
7. Studenci sprawdzają, czy wśród wykonanych pomiarów nie ma pomiarów obarczonych błędem grubym [9]. Mogą to być pomiary, w których nie został zrealizowany warunek iż liczba prób musi wynosić 100. Takie pomiary odrzucamy i na ich miejsce wykonujemy nowe pomiary.
8. Po wykonaniu powyższych punktów 4 zespoły studenckie będą miały wspólnie do analizy próbkę 100 rozkładów Poissona, zmierzonych w takich samych warunkach. Jeśli chcemy, aby nasza próbka 100 rozkładów Poissona była próbką jednorodną, nadającą się do analizy otrzymanego doświadczalnie rozkładu wartości zmiennej losowej χ^2 , należy wygenerować rozkłady Poissona o takiej samej liczbie stopni swobody (tę liczbę stopni swobody ustalamy z asystentem).

4 Opracowanie wyników

1. Każdy z zespołów zapisuje z ekranu komputera 3 wielkości policzone przez program dla kolejnych rozkładów Poissona: wartość średnią, wartość zmiennej losowej χ^2 oraz liczbę stopni swobody.
2. Zespoły wymieniają się otrzymanymi wynikami.

3. Zespoły analizują rozkład wartości średnich oraz rozkład wartości zmiennej losowej χ^2 .
4. Każdy ze studentów wybiera dla siebie jeden z rozkładów Poissona do przeanalizowania. Indywidualna analiza rozkładów Poissona polega na: obliczeniu wartości średniej i porównaniu jej z wartością otrzymaną przez program komputerowy, wykonaniu histogramu, znalezieniu krzywej teoretycznej, naniesieniu krzywej teoretycznej na histogram doświadczalny, policzeniu wartości zmiennej losowej χ^2 i porównaniu jej z wartością otrzymaną przez program komputerowy.
5. Każdy ze studentów odczytuje z tablic rozkładu χ^2 wartość poziomu ufności P dla swojego rozkładu Poissona. Następnie porównuje ją z wartością poziomu ufności oszacowaną na podstawie 100 wartości χ^2 otrzymanych przez wszystkie 4 zespoły studenckie.
6. Normy ISO (GUM) zalecają ujednolicenie zapisu końcowego wyniku i jego niepewności nie ingerując w filozofię przeprowadzania eksperymentu [10]. Celem ćwiczenia nr 7 nie jest wyznaczenie jakiejś konkretnej wielkości fizycznej lecz zapoznanie się z własnościami rozpadu promieniotwórczego.
7. Po wykonaniu wszystkich pomiarów i obliczeń byłoby dobrze, aby student mógł podsumować swoją pracę pisząc esej pt „ Czy ćwiczenie nr 7 przekonało Cię, że rozpad promieniotwórczy ma charakter statystyczny?”

5 Pytania kontrolne

1. Na czym polega przemiana promieniotwórcza α , β i γ ?
2. Sformułować podstawowe prawo rozpadu promieniotwórczego, słuszne dla wszystkich rodzajów przemian promieniotwórczych.
3. Co to jest aktywność preparatu promieniotwórczego i jak zmienia się ona w czasie?
4. Co to jest okres połowicznego zaniku? Jaki jest jego związek ze stałą rozpadu?
5. Co to są fluktuacje statystyczne?
6. Jaki jest związek między stałą rozpadu λ a średnim czasem życia τ jądra promieniotwórczego (lub cząstki elementarnej)?

7. Jakie parametry opisują w sposób jednoznaczny rozkład Poissona i rozkład Gaussa?
8. Jak określamy liczbę stopni swobody rozkładu χ^2 ?
9. Co to jest poziom ufności?
10. Rozpad promieniotwórczy i ruchy Browna należą do licznych przykładów procesów statystycznych występujących w przyrodzie. Zastanów się nad różnicą w przyczynie statystycznego charakteru rozpadu promieniotwórczego i ruchów Browna.

6 Literatura

1. Cz. Bobrowski, Fizyka – krótki kurs, Rozdz. 8.3 i 8.4, WNT, Warszawa 1993.
2. I. Prigogine, I. Stengers, Z chaosu ku porządkowi, Rozdz. VII, PIW, Warszawa 1990.
3. W. Szlenk, Rachunek prawdopodobieństwa dla klasy IV liceum ogólnokształcącego i technikum, Rozdz. VI, PZWS, Warszawa 1979.
4. N.W. Smirnow, W. Dunin-Borkowski, Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych, Rozdz. III, IV i VII, PWN, Warszawa, 1969.
5. W. T. Eadie i inni, Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej, PWN, Warszawa, 1969.
6. H. Szydlowski, Teoria pomiarów, Rozdz. IV i VI, PWN, Warszawa, 1979.
7. J. Harabowska, L. Tykarski, Laboratorium podstaw fizyki, Poradnik, Rozdz. IV, WPW 1993.
8. H. Abramowicz, Jak analizować wyniki pomiarów, Rozdz. III i IV, PWN, 1993.
9. A. Kubiacyk, Określanie niepewności pomiarów, poradnik do Laboratorium Fizyki, Skrypt.
10. Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement, (GUM) JCGM 100:2008