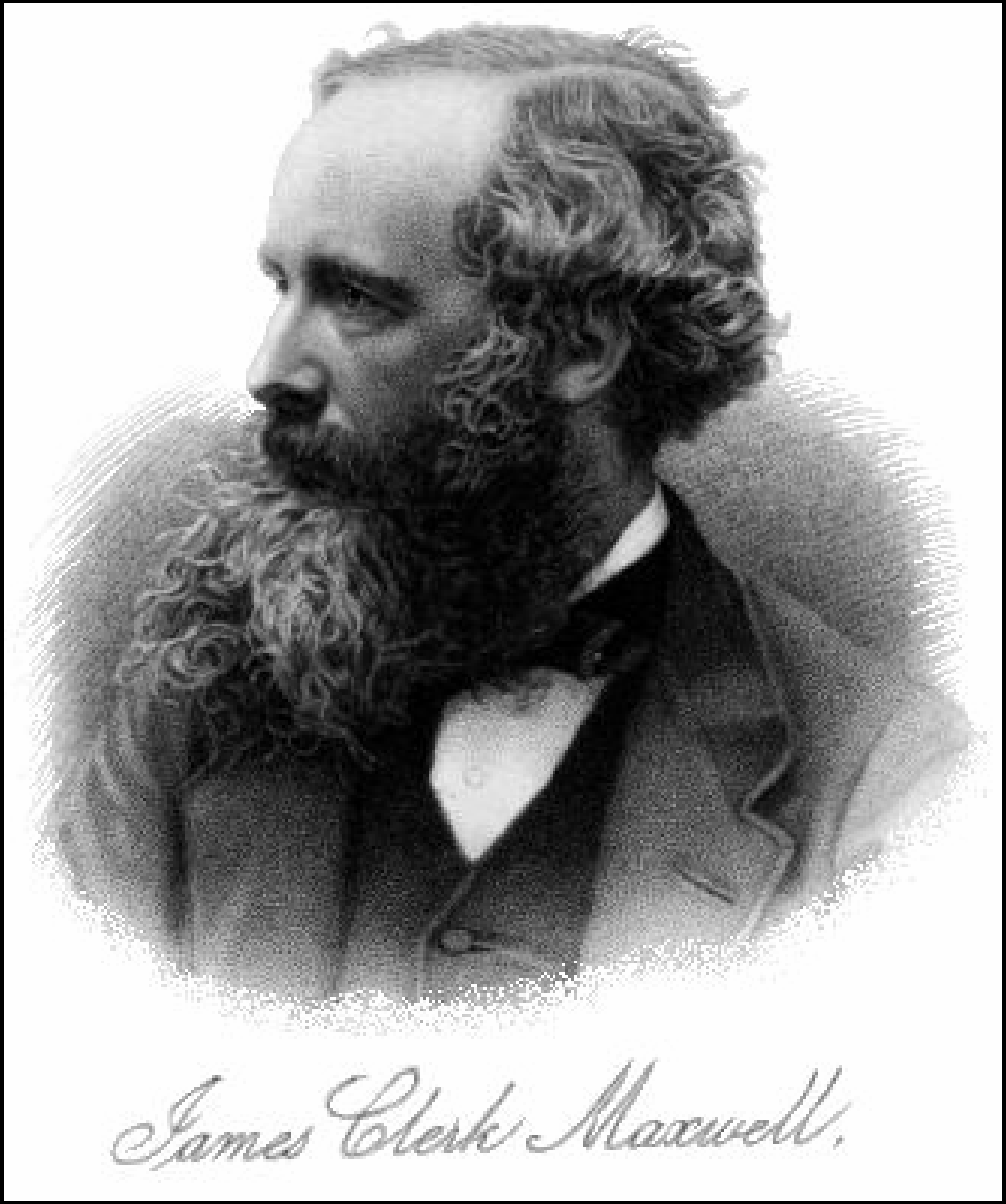
Fale elektromagnetyczne



- **James Clerk Maxwell 1831-1879**
  James Clerk Maxwell, a Scot whose ideas increasingly electrify, magnetize and change the world today.

  "Maxwell's importance in the history of scientific thought is comparable to Einstein's (whom he inspired) and to Newton's (whose influence he curtailed)"
  Ivan Tolstoy, biographer of Maxwell

James Clerk Maxwell himself (in 1864) said:
"**We have strong reason to conclude that light itself - including radiant heat and other radiation, if any - is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electro-magnetic field according to electro-magnetic laws**."

W 1864 r. **J.Clerk Maxwell** zauważył, że prawo Ampere'a (o cyrkulacji wektora H), sformułowane w magnetostatyce nie daje poprawnego wyniku w przypadku,
gdy natężenie prądu w przewodniku zmienia się w czasie.

To spostrzeżenie doprowadziło do opisu fal elektro--magnetycznych i powstania teorii elektromagnetyzmu.

Jednak dopiero w 1888 r., po upływie ponad 20 lat
od sformułowania równań Maxwella, **H. Hertz** zademon-strował doświadczalnie (wysłał i odebrał) istnienie tych fal .

Oddziaływanie elektromagnetyczne to jedno z czterech znanych fizyce oddziaływań elementarnych.

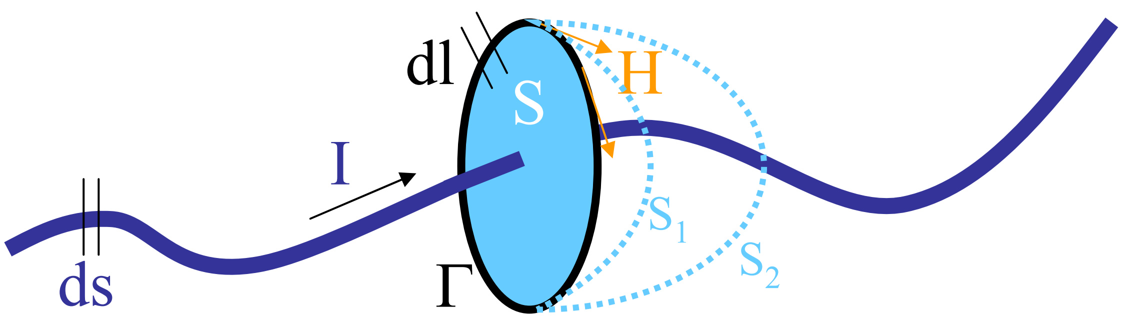
Prawo Ampere'a

Twierdzenie o cyrkulacji wektora natężenia pola magnetycznego H

Cyrkulacja wektora natężenia pola magnetycznego po dowolnym konturze zamkniętym jest równa algebraicznej sumie **prądów makroskopowych** obejmowanych przez ten kontur:

$$\iint_S (rot\vec{H})d\vec{S} \Leftrightarrow \oint_\Gamma \vec{H}d\vec{l} = \sum_k I_k = \iint_S \vec{j}d\vec{S}$$

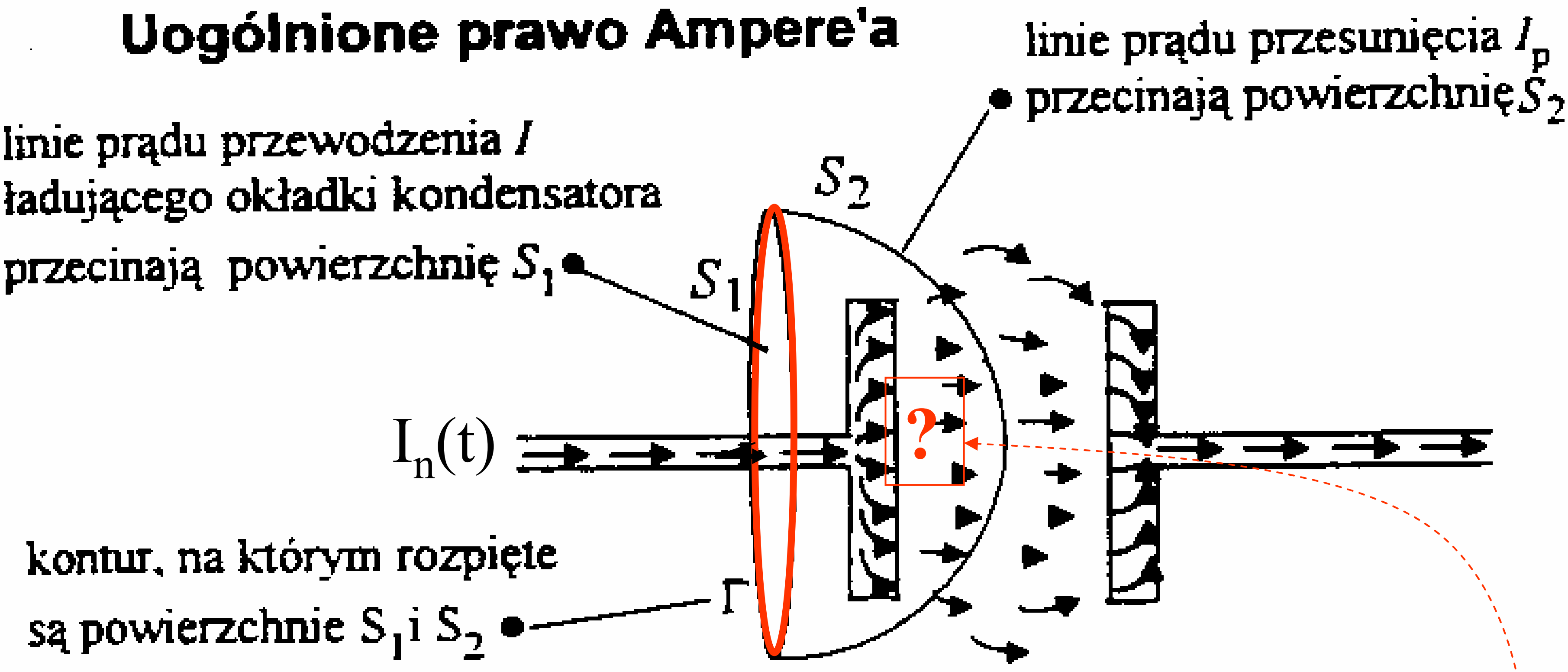
lub (tw.S) rot **H** = **j** ;



Uwaga:

dla **j**(s) = const → div **j**=0 ⇨ div (rot **H**)=0

Równania Maxwella (1866)



1 $\oint_\Gamma \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S2} (rot\vec{H}) d\vec{S} \neq \iint_{S2} \vec{j}_n d\vec{S} \longrightarrow$ rot **H** = **j** ?

2 div (rot **H**) ($\rightarrow$0) = div **j**; ale div $\mathbf{j}_n = -\delta\rho/\delta t$?

rot **H** = $\mathbf{j}_n$ + ?

Założenia Maxwella

1.

$$\mathbf{j}_{\text{całk}} = \mathbf{j}_{\text{n}} + \mathbf{j}_{\text{przes}},$$
$$div\ \mathbf{j}_{\text{n}} = -\ div\ \mathbf{j}_{\text{przes}}$$

aby $\quad div\ \mathbf{j}_{\text{całk}} = 0$

wskazówki fizyczne:

$$div\ \mathbf{j}_{\text{n}} = -\ \frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad \rho = div\ \mathbf{D}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{j}_{\text{przes}} \Leftrightarrow \mathbf{D} \quad ?$$

2. Zmienne pole magnetyczne B powoduje powstanie wirowego pola elektrycznego E_{ind} (SEM_{ind}) niezależnie od obecności obwodu elektrycznego,

$$SEM_{\text{ind}} = \boxed{-\ \frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_L \vec{E}_{ind}\, d\vec{l}}$$

Uzasadnienie formalne: div[rot **H**] = 0 (*dla dowolnego wektora*);

Jeżeli: $\text{rot}\,\mathbf{H} = j_{całk} = j + j_{przes} \Rightarrow \text{div}[\text{rot}\,\mathbf{H}] = 0$ gdy: $\text{div}\, j = -\,\text{div}\, j_{przes}$

ale $\text{div}\,\mathbf{j_n} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \text{div}\,\mathbf{j_p} = +[\dfrac{\partial \rho}{\partial t}],$

W ośrodku nieprzewodzącym (próżni) brak $\mathbf{j_p}$, ale jest pole **D** *takie, że*

(*pr. Gaussa*) $\rho = \text{div}\,\mathbf{D} \Rightarrow \text{div}\,\mathbf{j_p} = +\dfrac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\mathbf{D}) = \text{div}(\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t})$

lub $\mathbf{j_p} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

ostatecznie $\boxed{\text{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

Uwaga 1

Określenie „prąd przesunięcia” ma charakter umowny;

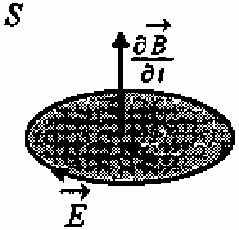
$\mathbf{j_p}$ reprezentuje zmieniające się w czasie pole elektryczne E(t),D(t)

Równania Maxwella

I. Prawo Faradaya dla indukcji elektromagnetycznej

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_\Gamma \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$



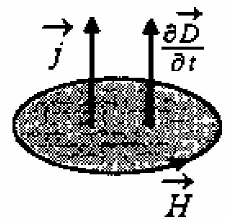
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

II. Uogólnione prawo Ampere'a

$$\Phi_D = \int_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_\Gamma \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = I + \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

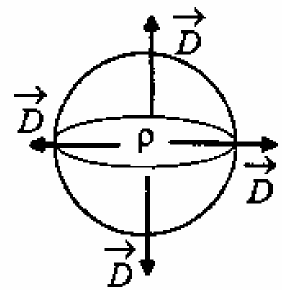
$$I = \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S}$$



$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

III. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

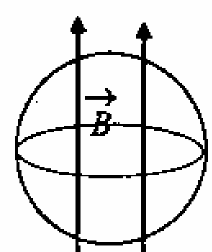
$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V$$



$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

IV. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$



$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Równania Maxwella

	Postać różniczkowa	Postać całkowa	opis
1	$div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{S_v} \vec{E}\,d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$	Prawo Gaussa dla pola elektrycznego
2	$rot\,\vec{E} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{l_s} \vec{E}\,d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\,d\vec{S}$	Prawo Faraday'a
3	$div\,\vec{B} = 0$	$\oiint \vec{B}\,d\vec{S} = 0$	Prawo Gaussa dla pola magnetycznego
4	$rot\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{l_s} \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\,d\vec{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{d}{dt}\int_S \vec{E}\,d\vec{S}$	Prawo Ampere'a

Wielkości fizyczne w równaniach Maxwella

Symbol	**Wielkość fizyczna**	**Jednostka SI**	**Oznaczenie**
E	Natężenie pola elektrycznego	Volt na metr	V/m
D	Indukcja elektryczna	Culomb na metr kwadrat	C/m^2
H	Natężenie pola magnetycznego	Amper na metr	A/m
B	Indukcja magnetyczna	Tesla	T
j	Gęstość prądu	Amper na metr kwadratowy	A/m^2
ρ	Gęstość ładunku elektrycznego	Culomb na metr sześcienny	C/m^3

Symbol	Wielkość fizyczna	Wartość
c	*Szybkość światła w próżni*	$2.998 \times 10^{8}\, m/s$
μ_0	*Przenikalność magnetyczna próżni*	$4\pi \times 10^{-7}\, H/m$
ε_0	*Przenikalność elektryczna próżni*	$8.854 \times 10^{-12}\, F/m$

Podstawowe rozwiązania (różniczkowych) równań Maxwella:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

Uwaga 2

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$$

Pierwsze i trzecie równanie są równaniami wektorowymi; łącznie z 2. i 4. równaniem odpowiadają 8 równaniom skalarnym z niewiadomymi **E,B,D,H,j** (*15 funkcji skalarnych*). Należy więc dołączyć do układu jeszcze 3 równania (wektorowe) t.zw.”materiałowe”:

$$\mathbf{D}=\varepsilon_o\varepsilon\,\mathbf{E},$$

$$\mathbf{B}=\mu_o\mu\mathbf{H},$$

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$$

Przypadek izotropowego ośrodka neutralnego (ρ=0), **nieprzewodzącego** (j=0), o przenikalnościach ε, μ:

z r-ń materiałowych: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_o \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_o \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

div **B** = $\mu_o\mu$ div **H**,   div **D** = $\varepsilon_o\varepsilon$ div **E**

zatem :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_o\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}}, \\ \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_o\varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{E} = 0 \end{array}\right.$$

rot $\boxed{}$:

$$\text{rot (rot } \mathbf{E}) = -\mu_o\mu \ \text{rot} \ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_o\mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu_o\mu \ \varepsilon_o\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} ,$$

rot rot **a** = grad div **a** – Δ **a**

$$\Delta\, \mathbf{a} = \frac{\partial^2 a}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 a}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 a}{\partial^2 z}$$

rot rot **a** = grad div **a** – $\sum_i \frac{\partial^2 a_i}{\partial \xi_i^{\,2}}$

$$\text{rot}\, \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) e_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) e_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) e_z$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \sum_i \frac{\partial^2 E_i}{\partial \xi_i^2}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_o \mu \ \varepsilon_o \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

równanie falowe przy $\frac{1}{v^2} = \mu_o \mu \ \varepsilon_0 \varepsilon$

W próżni $\mu = 1$ *oraz* $\varepsilon = 1$ *i* $v = c$, $\longrightarrow$ $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}}$

Analogicznie dla wektora natężenia pola magnetycznego H

Równanie falowe $\Re$; $\varsigma(r,t) = a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2}} = -\omega^2 a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = \boxed{-\omega^2 \varsigma},$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} = -k_x^2 a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_x^2 \varsigma, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} = -k_y a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_y^2 \varsigma, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \varsigma}{\partial z^2} = -k_z a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_z^2 \varsigma,
\end{array}\right.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial z^2} = -(k_x^2 \varsigma + k_y^2 \varsigma + k_z^2 \varsigma) = -k^2 \varsigma = -\frac{1}{v^2}\boxed{\omega^2 \varsigma},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \varsigma = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2}}$$

Δ - *operator Laplace'a (laplasjan)*

Elektromagnetyczna **fala płaska** biegnąca w kierunku **Ox**

E ,H ≠ f(y,z)

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)e_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)e_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)e_z$$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}} = -\mu_0\mu \dfrac{\partial H_x}{\partial t} \\[2ex] \left.\begin{array}{l} \boxed{\dfrac{\partial E_x}{\partial z}} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_0\mu \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \boxed{\dfrac{\partial E_x}{\partial y}} = -\mu_0\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

$$\boxed{} = 0$$

Analogicznie dla $\quad \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_o\varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \quad , \quad \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_o\varepsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t}} \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0\mu \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \quad , \quad \dfrac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_o\varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{array}\right\}$$

$E_y \longleftrightarrow H_z$, $E_z \longleftrightarrow H_y$

wystarczy przeanalizować 1 związek: $\boxed{}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\mu_0\mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) = -\mu_0\mu \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_o\varepsilon_o\mu\,\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\mu_o\varepsilon_o = \frac{1}{c^2}}$$

Analogicznie dla wektora H_z natężenia pola magnetycznego

Wniosek 1

Pola E i H opisywane są równaniem falowym dla fal, których prędkość w próżni wynosi $v_{fo} = c \quad (= 1/\varepsilon_o \mu_o)$

Wniosek 2

Dla fali EM rozchodzącej się w kierunku Ox: $E_x = 0$, $H_x = 0$,

$$E_y \Rightarrow H_z \Rightarrow E_y \Rightarrow H_z \ldots\ldots\ldots (y_E \Leftrightarrow z_H) \text{ i.t.d,}$$

$$E_z \Rightarrow H_y \Rightarrow E_z \Rightarrow H_y \ldots\ldots\ldots (z_E \Leftrightarrow y_H) \text{ i.t.d}$$

t.zn **Ox⊥E⊥H -** fala EM jest falą poprzeczną

Przykład rozwiązania:

$$\begin{cases} E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_e), \\ H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_h), \end{cases}$$

Po podstawieniu do równania ($E_y \longleftrightarrow H_z$) dostajemy:

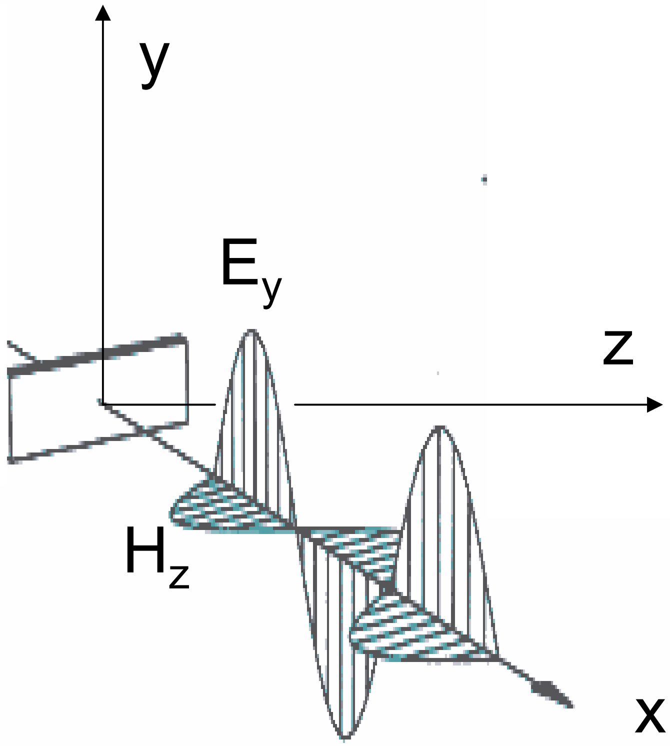
$$\alpha_e = \alpha_h\ ,$$

$$\varepsilon_o \varepsilon\, E^2{}_m = \mu_o \mu\, H^2{}_m$$

lub

$$E_m \sqrt{\varepsilon_o \varepsilon} = H_m \sqrt{\mu_o \mu}$$

Płaska fala elektromagnetyczna w ośrodku izotropowym



Energia przenoszona przez falę EM (*w próżni*)

Gęstość energii $$w = w_E + w_H = w = \frac{1}{2}\,\varepsilon_o\,(E)^2 + \frac{1}{2}\,\mu_o\,(H)^2,$$

ponieważ: $$E_m^{\,2}\,\varepsilon_o = H_m^{\,2}\,\mu_o,$$

czyli $$E_m\sqrt{\varepsilon_o} = H_m\sqrt{\mu_o},$$

to $$w = ½\,(E_m\sqrt{\varepsilon_o})(E_m\sqrt{\varepsilon_o}) + ½\,(H_m\sqrt{\mu_o})(H_m\sqrt{\mu_o})$$

$$\Rightarrow \quad w_E = w_H,$$

czyli $$w = \sqrt{\mu_o\,\varepsilon_o}\;E\,H = \frac{1}{c}\,S$$

lub $$S = EH = w\,c$$

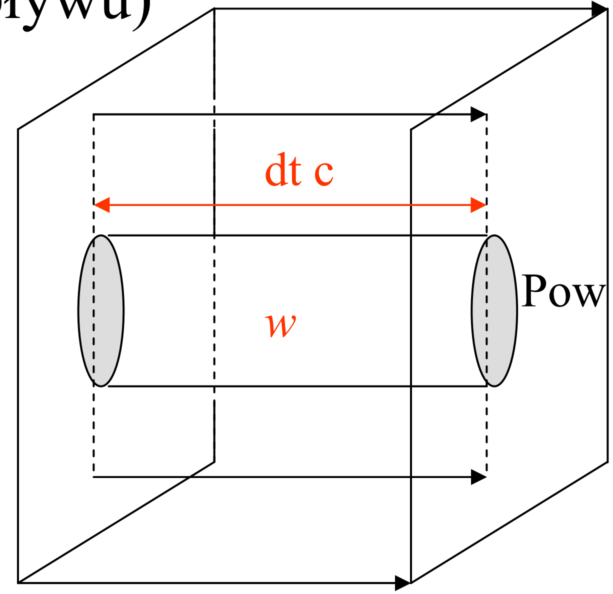
Definicja 1

Wektor $\mathbf{S} = \mathbf{E}x\mathbf{H}$ nazywa się wektorem Poyntinga

(**S** ma kierunek rozchodzenia się fali EM i długość: $S = |\,\mathbf{E}x\mathbf{H}\,| = E\,H$)

Wniosek 3

Wektor Poyntinga o długości $S = w\,c$ jest wektorem powierzchniowej gęstości strumienia energii przenoszonej przez fale elektromagnetyczną (t.j. natężeniem przepływu)



Przenoszona energia w czasie dt przez powierzchnię *Pow:*

$$\Delta W = w\,V = w\,c\,dt\,Pow$$

Natężenie przepływu energii:

$$\Delta W / Pow\,dt = w\,c\ (=S)$$