

*Dr Jacek Bogumił Gosk*

## **Równanie dyfuzji – przewodzenie ciepła wzdłuż pręta**

### *1. Szkic rozwiązywania równania parabolicznego dla pręta metalowego*

Poszukujemy funkcji dwóch zmiennych  $T(x,t)$  będącej rozwiązaniem poniższego równania przewodnictwa cieplnego (RPC):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

oraz spełniającej następujące trzy warunki:

I. warunek początkowy:

$$T(x,0)=f_0(x), \quad (2)$$

II. warunki brzegowe:

$$1. T(0,t)=f_1(x) \quad (3a)$$

$$2. T(L,t)=f_2(x) \quad (3b)$$

Przystępując do rozwiązania powyższej postawionego problemu (1-3) w zastosowaniu do ćwiczenia 42 musimy rozpocząć od zadania odpowiednich dla eksperymentu warunków: początkowego (2) i brzegowych (3a), (3b). Szczególnie istotny jest tu warunek początkowy. Funkcja  $f_0(x)$  powinna opisywać zmianę temperatury wzdłuż pręta w chwili rozpoczęcia pomiaru. Najprostsza postać tego warunku  $f_0(x)=T_P$  oznacza, że pręt przed przystąpieniem do pomiaru miał temperaturę równą temperaturze pokojowej  $T_P$  (dalszym uproszczeniem będzie przyjęcie  $T_P=0$ ). Podobnie można postąpić w przypadku warunku (3b) tj. przyjąć  $f_2(t) = T_P$ . Zakładamy w ten sposób, że na końcu pręta utrzymujemy stałą temperaturę równą temperaturze pokojowej. Innym uproszczającym obliczenia podejściem jest prowadzenie ich dla pręta pół-nieskończonego. Jak pokażemy dalej rozwiązanie równania (1) przy tym założeniu pozwala poprawnie opisać wyniki pomiarów z ćwic. 42. Wynika to stąd, że, amplituda składowej szybkozmiennej w czasie (SSC) zmian temperatury (patrz UWAGI pkt VII, w szczególności wzór (iiii)) bardzo szybko maleje z rosnącym  $x$ .

Bardziej szczegółowo należy zająć się warunkiem (3a). Funkcja  $f_1(t)$  przedstawia zmiany temperatury na początku pręta. Zmiany temperatury w tym miejscu zależą od sposobu sterowania zmianą prądu płynącego przez grzałkę i geometrii układu. Bardzo cenny byłby tu bezpośredni pomiar temperatury na styku pręta i elementu przejściowego z umieszczoną w nim grzałką. My założymy, że zmiany temperatury w tym miejscu można opisać uproszczoną funkcją:

$$T(0,t)=T_g(1+\sin\omega t) \quad (4)$$

Rozwiązania równania (1) dla pół-nieskończonego pręta przy tak zadanych warunkach brzegowych dają poprawny jakościowo opis wyników eksperymentalnych ćwic. 42 (porównaj rozwiązania numeryczne z rys. 1 z wynikami pomiarów na rys. 3).

W prosty sposób rozwiązanie problemu (1)-(3) otrzymujemy stosując transformatę Laplace'a. Dzięki jej zastosowaniu możemy przejść od problemu rozwiązywania równania cząstkowego do rozwiązywania znacznie prostszego równania zwyczajnego. Wykorzystanie transformaty Laplace'a w rozwiązywaniu zagadnień fizycznych w bardzo przystępny i pogładowy sposób omówione jest w podręczniku LATHI'ego 'SIGNALS, SYSTEMS AND COMMUNICATION' (istnieje polskie tłumaczenie). Autor przedstawia w nim metody matematycznego opisu układów liniowych rozciągłych, w szczególności linii przesyłowej. Me-

tody te doskonale nadają się do opisu przenoszenia ciepła wzdłuż pręta metalowego. Poniżej pokażemy jak można stosując transformatę Laplace'a rozwiązać problem (1)-(4).

W pierwszym kroku poszukiwane rozwiązanie równania (1) przedstawiamy w następującej postaci:

$$T(x, s) = H(x, s)e^{st} \quad (5)$$

Gdzie:  $H(x, s)$  jest tzw. „funkcją transmisji” zależną od położenia  $x$  i uogólnionej częstości  $s$ . Po wstawieniu (5) do równania (1) otrzymujemy:

$$\frac{s}{k} H e^{st} = e^{st} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

Po skróceniu obu stron przez  $e^{st}$  dostajemy proste równanie zwyczajne, którego rozwiązaniem jest funkcja:

$$H(x, s) = A e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} + B e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} \quad (6)$$

Generalnie, stałe  $A$  i  $B$  wyznaczamy z warunków brzegowych (3a) i (3b). Przypomnijmy, my zamiast warunku (3b) przyjęliśmy, że nasz pręt jest pół-nieskończony. Przy tym założeniu oczywistym jest, że  $B=0$  (temperatura nie może dążyć do nieskończoności).

Zgodnie z teorią rozwiązanie równania (1) przy zadanych warunkach (2) i (4) ma postać:

$$T(x, t) = L^{-1}\{H(x, s) \cdot L(T(0, t))\},$$

gdzie: symbole  $L$  i  $L^{-1}$  oznaczają odpowiednio transformatę Laplace'a i odwrotną transformatę Laplace'a. Jednak, jak pokażemy poniżej, dla znalezienia rozwiązania naszego problemu nie jest konieczna znajomość transformaty Laplace'a funkcji  $T(0, t)$ .

Dalej zastosujemy znane własności transformaty Laplace'a. W szczególności wykorzystamy tu twierdzenie Borela o splocie mówiące, że, transformata Laplace'a z iloczynu dwóch funkcji jest splotem odwrotnych transformat Laplace'a tych funkcji:

$$T(x, t) = L^{-1}\{H(x, s)\} * L^{-1}\{L(T(0, t))\} \quad (7)$$

A stąd po zastosowaniu definicji splotu funkcji mamy:

$$T(x, t) = \int L^{-1}\{H\}(x, t-u) \cdot T(0, u) du. \quad (8)$$

Teraz do równania (8) należy wstawić przyjętą postać 'funkcji wymuszającej'  $T(0, t)$  tj. (4) i odwrotną transformatę Laplace'a z funkcji transmisji  $H(x, s)$ . Jej wartość (można ją znaleźć w stosownych tablicach) wynosi:

$$L^{-1}\left(e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}\right) = \frac{x}{\sqrt{4\pi kt^3}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \quad (9)$$

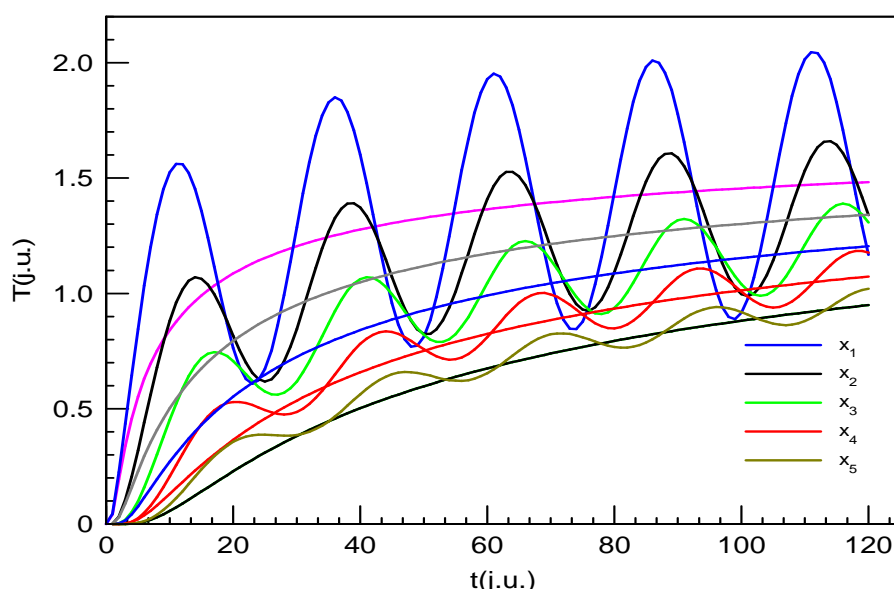
Tak więc, ostateczna postać naszego rozwiązania to:

$$T(x, t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi k(t-u)^3}} e^{-\frac{x^2}{4k(t-u)}} T_g(1 + \sin \omega u) du \quad (10)$$

Łatwo uzyskać rozwiązanie numeryczne równania (10) korzystając z programu **Mathematica**. Na rys.1 przedstawiono przykładowe obliczenia zmiany temperatury w funkcji czasu dla pięciu różnych miejsc pręta ( $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < L$ ). Oś  $x$  na rysunkach to czas  $t$  (w

jednostkach umownych), zaś oś  $y$  to temperatura  $T$  (w jednostkach umownych). Rozwiązania te otrzymano dla zadanych wartości parametrów  $\omega$  i  $k$ . Pamiętajmy, w eksperymencie parametr  $\omega$  zadajemy tj. ustalamy czas grzania (półokres) i czas kiedy grzałka jest wyłączona (kolejny półokres). Parametr  $k$  jest kombinacją trzech stałych materiałowych: współczynnika przewodnictwa cieplnego  $\chi$ , ciepła właściwego  $c_p$  i gęstości masy  $\rho$  materiału badanego pręta  $k = \chi(c_p \rho)^{-1}$ . Tak, więc, mając zadane  $\omega$  i  $k$  możemy obliczyć przewidywane wartości  $T(x, t)$  i porównać je z danymi eksperymentalnymi. Oczywiście trzeba pamiętać, że wielkości mierzone mają swój wymiar. W ćwiczeniu postępujemy odwrotnie. Z eksperymentu otrzymujemy przebieg zmian temperatury w funkcji czasu dla dwóch wybranych punktów pręta. Z tych wykresów odczytujemy stosowne wielkości związane z obiema funkcjami. Teraz zakładając, że zastosowany model matematyczny poprawnie opisuje wyniki eksperymentu znajdujemy związki między tymi wielkościami i parametrem  $k$  występującym w teorii.

Wyniki obliczeń zmiany temperatury w funkcji czasu dla  $k=0.25$  i okresu  $T=25$  [j.u.] dla pięciu różnych położeń  $x=0.8, 1.2, 1.6, 2.0, 2.4$  przedstawiono na rysunku 1. Dla tych samych punktów i wartości parametrów  $k$  i  $T$  przeprowadzono dodatkowe obliczenia przy warunku początkowym (3a) w postaci  $T(0, t) = T_g$  (oznacza to utrzymywanie stałej temperatury na początku pręta). Na rysunku są one reprezentowane przez krzywe monotoniczne dążące dla  $t \rightarrow \infty$  do wartości granicznej  $T = T_g$ .

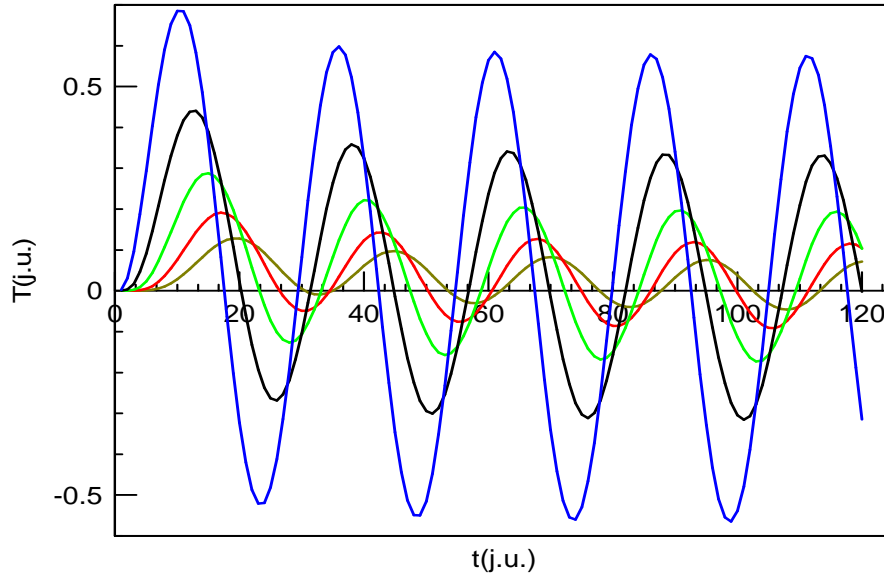


Rys. 1. Zmiany temperatury w funkcji czasu policzone dla pięciu różnych punktów pręta  $x=0.8, 1.2, 1.6, 2.0, 2.4$ . Krzywe monotonicznie obrazują zmianę temperatury w tych samych punktach pomiarowych w sytuacji gdyby pręt podgrzewać prądem stałym o wartości skutecznej równej tej dla stosowanego prądu zmiennego (patrz instrukcja ćwic. 42). Wszystkie krzywe monotoniczne dla  $t \rightarrow \infty$  dążą do  $T_g = 1.77$  [j.u.].

Dalej na rys. 2 pokazano jedynie składowe szybkozmienne w czasie pełnych rozwiązań  $T(x, t)$ . Otrzymano je przez odjęcie od pełnych rozwiązań ich składowych monotonicznych (patrz rys. 1). Równoważnie, otrzymuje się je rozwiązując (1) przy warunku (3a) w postaci  $T(0, t) = T_g \sin \omega t$ . Z rysunku 2 wynikają następujące ważne fakty. Po pierwsze, zmiany  $T(x_i, t)$  dla odpowiednio dużych  $t$  ( $t \geq 60$  [j.u.]) można opisać za pomocą funkcji cosinus. Po drugie, z rosnącą wartością  $x$  maleje amplituda SSC zmian temperatury. Po trzecie, wykresy policzone dla kolejnych rosnących  $x$  ( $x_i = x_0 + i \Delta x$ ) są systematycznie przesunięte w prawo ( $\Delta t \sim \Delta x$ ). Ilościową zależność zmiany amplitudy i opóźnienia czasu  $\Delta t$  od  $\Delta x$  można otrzymać w oparciu o wygodny do tego wzór (iiii) (patrz punkt VII w UWAGACH).

## UWAGI

I. Przedstawione rozwiązanie (10) jest splotem ze względu na zmienną  $t$  dwóch funkcji; pierwszej pochodzącej od rozwiązania podstawowego lub potencjału cieplnego punktu stałego (Pogorzelski 'ANALIZA MATEMATYCZNA tom IV, PWN 1956):

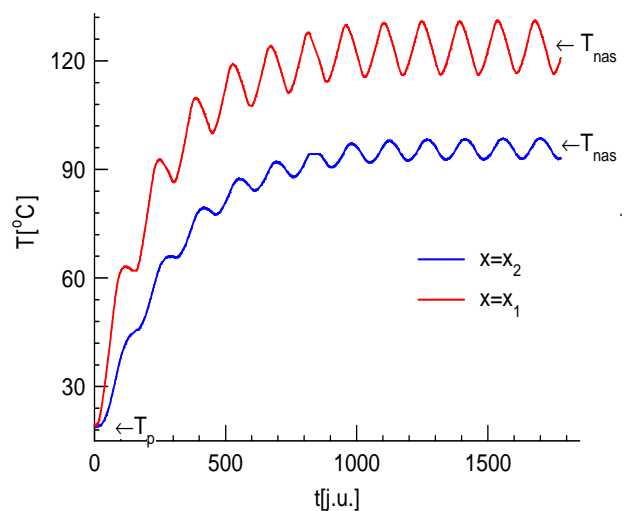


Rys. 2. Policzone składowe szybkozmienne w czasie zmiany temperatury w funkcji czasu dla pięciu różnych punktów pręta  $x_5 > x_4 > x_3 > x_2 > x_1$ .

$$\frac{x}{\sqrt{4\pi kt^3}} e^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

oraz funkcji  $f_1(x)$  występującej w warunku brzegowym (4). Rozwiązanie dla warunku początkowego (2) innego niż u nas ( $T(x,0) = T_p$ ) tj. dla dowolnej funkcji  $f_0(x)$  można znaleźć w podręczniku Pogorzelskiego).

II. Porównanie rozwiązań numerycznych z danymi eksperymentalnymi obrazowanymi na rys. 3 dwoma wykresami zmian temperatury w funkcji czasu mierzonej w dwóch różnych punktach pręta pokazuje, że dla pręta półnieskończonego przy przyjętym warunku początkowym (4) otrzymujemy poprawny jakościowo opis eksperymentu. Wyniki eksperymentalne pokazują że, dla wybranego punktu pomiarowego zmiany temperatury można opisać za pomocą funkcji będącej sumą: funkcji monotonicznie rosnącej z czasem ( $T_{t \rightarrow \infty} \rightarrow T_{nas}$ ) i pewnej funkcji okresowej (rys. 2). Amplituda funkcji okresowej szybko



Rys. 3

maleje z rosnącą odległością  $x$ . Składowa monotoniczna szybko rośnie dla małych  $t$  i praktycznie się już nie zmienia ('nasyca') dla  $t > 1250[j.u.]$  i  $t > 1550[j.u.]$  odpowiednio dla  $x_1$  i  $x_2$ .

III. Z matematycznego punktu widzenia przystępując do rozwiązania naszego zagadnienia brzegowo początkowego:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x \in \Omega \quad (0 \leq x \leq L), t \geq 0, \quad (1)$$

$$T(x, 0) = f_0(x), x \in \Omega \quad (0 \leq x \leq L), \quad (2)$$

$$T(0, t) = f_1(t), T(L, t) = f_2(t), x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (3)$$

należałoby dowieść: *istnienie, jednoznaczność i stabilność rozwiązania* tj. pokazać, że zagadnienie *jest dobrze postawione*. Przypominamy. *Jednoznaczność* oznacza, że zagadnienie (1, 2, 3) może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie. *Stabilność rozwiązania* oznacza, że mała zmiana warunku początkowego prowadzi do małej zmiany rozwiązania.

Zagadnienie (tj. równanie różniczkowe i dodatkowe warunki) jest dobrze postawione w pewnej przestrzeni funkcyjnej X jeżeli:

1. istnieje rozwiązanie należące do X,
2. jest to jedyne rozwiązanie w przestrzeni X,
3. rozwiązanie zależy w sposób ciągły od dodatkowych warunków (tj. rozwiązanie jest stabilne).

VI. Zaproponowany w skrypcie studenckim wzór (12) nie jest rozwiązaniem zagadnienia (1-4). Co prawda funkcja  $T(x, t) = T_0 e^{-ax} \cos(\omega t + \varphi - bx)$  spełnia równanie (1) ale, po pierwsze, występujące w funkcji parametry  $a$  i  $b$  nie są od siebie niezależne (łatwo to pokazać przez bezpośrednie sprawdzenie). Po drugie, co jest tu istotne, zaproponowana funkcja nie spełnia warunku początkowego. Po wstawieniu do wzoru (12) (w domniemaniu większości studentów wzoru prawidłowo opisującego wyniki eksperymentu) warunku  $t=0$  otrzymujemy funkcję zmienną  $x$  będącą iloczynem funkcji eksponentialnej i funkcji cosinus! Natomiast w laboratorium standardowo pomiary rozpoczynamy od  $T(x, 0) = T_p$ . Co więcej na monitorze komputera na stanowiskach do ćwic. 42 obserwujemy wykresy takie jak te na rysunku 3, a nie takie jak na pomocniczym rys. 4 ze skryptu tj. wykresy powstające ze wstawienia  $x = \text{constans}$  do wzoru (12). Dla uniknięcia konfuzji u czytającego powyższy tekst i skrypt studencki dołączono w następnym punkcie uwagi o stawianiu warunku początkowego i warunków brzegowych. Wyjaśnimy jeszcze, w skrypcie w równaniu (11a) pominięto stałą  $T_0$  z warunku brzegowego (skonfrontuj to z warunkiem brzegowym (4) w powyższym skrypcie).

## 2. Stawianie zagadnień granicznych.

### Szczególne rozwiązanie RPC

W przypadku równania parabolicznego warunek początkowy polega na podaniu wartości funkcji  $T(x, t)$  tylko w pewnej chwili początkowej  $t_0$ . Warunki brzegowe mogą być różne zależnie od rozkładu temperatury na brzegu (sposobu prowadzenia eksperymentu). Generalnie rozpatruje się trzy rodzaje warunków brzegowych.

1. Dana temperatura na końcu pręta  $x_0=0, L$ .

$$T(x_0, t) = \mu(t),$$

gdzie  $\mu(t)$  jest funkcją daną w pewnym przedziale czasu ( $t_0 \leq t \leq T$ ) badania zjawiska.

2. Dana wartość pochodnej

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t) = \gamma(t)$$

na końcu pręta. Warunek ten otrzymujemy, jeżeli jest znana wielkość strumienia ciepła przepływającego przez przekrój poprzeczny pręta.

3. Na końcu pręta dany jest związek liniowy pomiędzy pochodną i funkcją

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_o, t) = -\lambda[T(x_o, t) - T_P(t)].$$

Ten warunek odpowiada wymianie ciepła na końcu pręta z ośrodkiem o znanej temperaturze  $T_P$  według prawa Newtona. Warunki brzegowe przy  $x = 0$  i  $x = L$  mogą być różnych rodzajów, a więc liczba różnych zagadnień brzegowych jest duża. My przyjęliśmy warunek brzegowy (4) i rozważaliśmy przypadek pręta pół-nieskończonego.

Rozwiązując konkretny problem fizyczny często dokonujemy różnych ułatwiających obliczenia uproszczeń ( patrz N. Tichonow, A. A. Samarski 'RÓWNANIA FIZYKI MATEMATYCZNEJ' PWN 1963). Przykładowo, gdy badana część pręta znajduje się w pobliżu jednego z końców, a daleko od drugiego przyjmuje się że praktycznie biorąc, temperatura jest wyznaczona przez temperaturę bliskiego końca i warunek początkowy. W podobnych zagadnieniach uważa się zazwyczaj pręt za półprostą ( $0 \leq x < \infty$ ). Obliczenie dla skończonego pręta nie jest o wiele trudniejsze, ale przedstawianie go na Pierwszym Laboratorium nie jest chyba celowe. Często rozpatrujemy inny przypadek graniczny podstawowego zagadnienia, kiedy zaniedbuje się warunek początkowy. Ma to miejsce wtedy, gdy wpływ warunków początkowych na rozkład temperatury wzdłuż pręta słabnie z biegiem czasu. Jeśli interesująca nas chwila jest dostatecznie daleka od początkowej, to praktycznie temperatura pręta jest wyznaczona przez warunki brzegowe, ponieważ zmiana warunków początkowych nie zmieniłaby rozkładu temperatury pręta w granicach dokładności pomiarów. W tym przypadku praktyczniej jest uważać, że obserwacja trwa nieskończenie długo, a tym samym warunki początkowe odpadają. Oczywiście można zastosować oba uproszczenia tj. przyjąć że:

- i) interesuje nas rozkład temperatury w pobliżu jednego z końców pręta, a wpływ drugiego końca uważamy za nieistotny (rozważamy pręt pół-nieskończony),
- ii) badamy zjawisko w chwili dostatecznie odległej od początkowej zakładając, że wpływ warunków początkowych na rozkład temperatury w chwili badania jest praktycznie do pominięcia.

Wtedy stawiamy zagadnienie znalezienia rozwiązania RPC spełniającego tylko jeden warunek brzegowy  $T(0, t) = f(t)$ . Pomimo, że drugie założenie w sposób oczywisty nie jest spełnione (krótki w skali zjawiska dostępny czas na wykonanie ćwiczenia) to jednak takie podejście zastosowano przy rozwiązaniu problem opisu matematycznego wyników pomiaru w ćwiczeniu 42. Poniżej pokażemy jak dochodzi się do tego rozwiązania. W dalszych rozważaniach zajmiemy się jedynie SSC pełnego rozwiązania. Wobec tego przyjmiemy nasz warunek brzegowy w następującej postaci zespolonej:

$$T(0, t) = Ae^{i\omega t + \varphi}.$$

Z liniowości równania przewodnictwa cieplnego wynika, że część rzeczywista i część urojona zespolonego RPC spełniają to samo równanie. Rozpatrzmy, więc zagadnienie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (i)$$

$$T(0, t) = Ae^{i\omega t + \varphi}. \quad (ii)$$

Rozwiązanie szukamy w postaci:

$$T(x, t) = Ae^{bt + ax + \varphi} \quad (iii)$$

Gdzie stałe  $a$  i  $b$  są stałymi dotąd nieokreślonymi. Podstawiając wyrażenie (iii) do równania (i) i warunku brzegowego (ii) otrzymujemy:  $a^2 = b/k$ , gdzie  $b = i\omega$ , skąd:

$$a = \pm \sqrt{\frac{b}{k}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{k}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2k}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2k}}$$

Część rzeczywista rozwiązania po wstawieniu wyliczonych wartości  $a$  i  $b$  ma postać:

$$T(x, t) = A e^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2k}} x} \cos(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2k}} x + \omega t + \varphi),$$

i spełnia równanie przewodnictwa cieplnego wraz z warunkiem brzegowym (ii). W zależności od wyboru znaku otrzymujemy dwa rozwiązania. Ponieważ sens fizyczny ma tylko funkcja ograniczona ostatecznie nasze rozwiązanie ma postać:

$$T(x, t) = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}} x} \cos(-\sqrt{\frac{\omega}{2k}} x + \omega t + \varphi) \quad (\text{iii})$$

Powyższy wzór jest podstawą opracowania ćwiczenia 42. SSC rozwiązania problemu (1)-(3) (patrz tekst zasadniczy) dla dużych wartości  $t$  przechodzi w rozwiązanie (iii). Należy jednak pamiętać, że dla dużych  $t$  oba eksperymentalne wykresy przesunięte są do góry (o wartość  $T_{\text{nas}}$  na rys. 3)! Przypominamy, student ma do dyspozycji pomiary temperatury w funkcji czasu w dwóch punktach na przecie odległych od siebie o  $\Delta x$ . Pomiary: okresu, amplitud i przesunięcia w czasie odczytane z wykresów obrazujących wyniki eksperymentu pozwalają wyznaczyć poszukiwaną wielkość  $k$  **niezależnie dwoma sposobami**.

## DODATEK 1

W bardzo prosty sposób rozważany powyżej przypadek wyidealizowanego pręta całkowicie odizolowanego od otoczenia można rozszerzyć na przypadek bardziej realistyczny tj. taki, w którym uwzględnimy przekaz ciepła do otoczenia przez powierzchnię boczną pręta. W równaniu (1) pojawia się wtedy nowy dodatkowy człon  $\sigma$  ( $T(x, t) - T_p$ ) (prawo Newtona). Można łatwo pokazać, że współczynnik  $\sigma$  wyraża się wzorem:

$$\sigma = 2\alpha / R \rho c_w,$$

gdzie:  $\alpha$  to współczynnik opisujący szybkość emisji ciepła z jednostki powierzchni pręta a  $R$  jest promieniem pręta. Po uwzględnieniu tego członu i przyjęciu wcześniejszego założenia  $T_p = 0$  otrzymujemy zmodyfikowane równanie przewodnictwa ciepła w przecie:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + \sigma T \quad (*)$$

Rozwiązując równanie (\*) postępujemy analogicznie jak przy rozwiązywaniu równania (1). Do równania (\*) wstawiamy  $T(x, t)$  w postaci (5) i stąd mamy:

$$k \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = sH + \sigma H \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = (s + \sigma) / k \cdot H \quad (**)$$

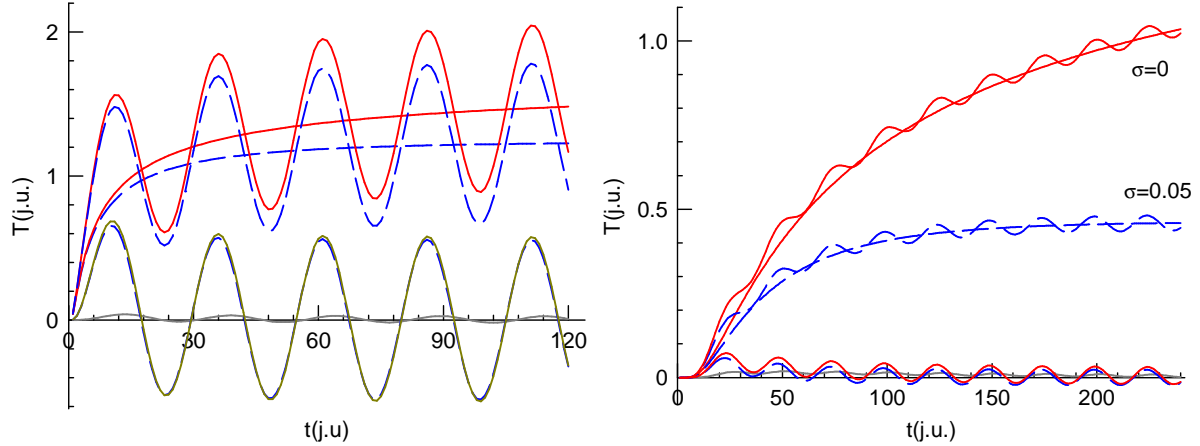
Tak więc i tym razem otrzymujemy proste równanie zwyczajne, którego rozwiązaniem jest funkcja:

$$H(x, s) = A e^{-\sqrt{\frac{s+\sigma}{k}} x} + B e^{\sqrt{\frac{s+\sigma}{k}} x} \quad (***)$$

Jak poprzednio przyjmujemy  $B = 0$ . Dalej, albo samodzielnie liczymy transformatę Laplace'a funkcji  $H(x, s)$ , albo stosujemy znaną zależność, która mówi że przesunięciu w dziedzinie częstości (do  $s$  dodajemy  $\sigma$ ) odpowiada w dziedzinie czasu mnożenie transformaty przez  $e^{-\sigma t}$ .

$$L^{-1}\left(e^{-\sqrt{\frac{s+\sigma}{k}}}\right) = \frac{x}{\sqrt{4\pi kt^3}} e^{-\frac{x^2}{4kt} - \sigma t} \quad (****)$$

Tak więc w stosunku do równania (9) w nowym rozwiązaniu (\*\*\*\*) w funkcji eksponentialnej pojawia się dodatkowo  $-\sigma t$ . Zmodyfikowane równanie (10), tak jak poprzednio, rozwiązujemy numerycznie. Na poniższym rysunku porównano przypadek pręta nieemitującego ( $\sigma = 0$ ) i emitującego ( $\sigma = 0.05$ ) ciepło (przez powierzchnię boczną) do otoczenia.



Rys. 4. Porównanie zmian temperatury w funkcji czasu dla wybranego punktu pomiarowego  $x=0.8$  (lewy panel i  $x=3.0$  (prawy panel) dla przypadku  $\sigma = 0.05$  - przerywane krzywe niebieskie oraz przypadku doskonałej izolacji pręta  $\sigma = 0$  - ciągłe krzywe czerwone. Dodatkowo ciągła szara krzywa przedstawia różnicę tych SSC.

## DODATEK 2

Jeżeli w kontekście powyższych obliczeń (rozwiązania na półprostej dla  $\sigma=0.05$  i  $\sigma=0$ ) przyjąć się uważnie wynikom eksperymentalnym to zauważymy, że mamy tu bardzo ciekawą sytuację.

Rozważmy dla ustalonego punktu pół-nieskończonego pręta, jedynie składową monotoniczną zmian temperatury. Wtedy zaobserwujemy odmienne sytuacje dla  $\sigma=0.05$  i  $\sigma=0.00$ . W przecie idealnym ( $\sigma=0$ ) dla każdego  $x$  przy  $t \rightarrow \infty$  temperatura dążyć będzie do  $T=T_g$ . Na rys. 1 krzywe monotoniczne (będące rozwiązaniami równania (1) z warunkiem brzegowym (3a) w postaci  $T(0,t)=T_g$ ) przy  $t \rightarrow \infty$  dążą do  $T=1.77$  [j.u.] Oczywiście czas, dla którego przeprowadzono obliczenia jest w tym przypadku zbyt krótki, aby to dobrze zilustrować. Dla nieidealnego pręta ( $\sigma \neq 0$ ) ze względu na straty ciepła przez powierzchnię boczną w wyniku emisji ciepła do otoczenia temperatura w stanie ustalonym (praktycznie po odczekaniu dłuższego czasu, patrz rys. 3) będzie maleć z odległością  $x$  (porównaj na rys. 4 monotoniczne krzywe niebieskie). Popatrzmy teraz na wykresy eksperymentalne z rys. 3. Na górnej krzywej (pomiar bliżej grzejnika) widać, że po uśrednieniu SSC wykres zmiany temperatury praktycznie nasycy się już dla  $t > 1250$  [j.u.]. Bardzo podobnie jest też w przypadku dolnej krzywej, nasycenie następuje tu dla nieco większego czasu  $t > 1550$  [j.u.]. Czy obserwowana różnica między  $T_{1nas}$  i  $T_{2nas}$  rzeczywiście świadczy o tym, że w naszym eksperymencie nie jest zaniedbywalny efekt emisji ciepła przez powierzchnie boczne pręta? Żeby powiedzieć jak powinna się zmieniać temperatura nasycenia w funkcji położenia  $x$  należy skorzystać z RPC i stosownych warunków brzegowych. Ponieważ tym razem nie interesuje nas SSC zmian temperatury i zakładamy, że jesteśmy blisko stanu ustalonego ( $T$  nie zmienia się praktycznie już z czasem) w równaniu (\*) pomijamy człon zawierający pochodną po czasie.

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma T$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:



$$T(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\sigma}{k}}x} + Be^{\sqrt{\frac{\sigma}{k}}x},$$

gdzie stałe A i B wynikają z warunków brzegowych. Oczywiście rozwiązanie na półprostej (pręt pół-nieskończony) narzuca  $B=0$  oraz  $T(0)=T_g$ .

$$T(x) = T_g e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{k}}x}$$

Z powyższego wynika, że przy poczynionych założeniach znajomość ‘temperatury nasycenia’ w dwóch różnych punktach pozwalałaby wyznaczyć wartość  $\sigma$ .

$$\ln\left(\frac{T(x_1)}{T(x_2)}\right) = -\sqrt{\frac{\sigma}{k}}(x_1 - x_2) \Rightarrow \sigma = k\left(\frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{T(x_1)}{T(x_2)}\right)\right)^2$$

Niestety powyższy wzór obowiązuje jedynie dla pręta pół-nieskończonego. Przyjmijmy więc, że pręt jest skończony i ma długość L, ale nadal jest wyidealizowany ( $\sigma = 0$ ). Załóżmy także, że na drugim końcu pręta utrzymywana jest temperatura  $T(L)=T_p$  (tak naprawdę temperatura ta zależy od konstrukcji radiatora i wydajności wiatraczka na stanowisku ćwicz. 42). Oczywiście, najlepiej i najprościej było by zmierzyć temperaturę na końcu pręta. Tak więc mamy do rozwiązania nowe równie:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja:

$$T(x) = A \cdot x - B,$$

gdzie stałe A i B wyznaczamy z warunków brzegowych  $T(0)=T_g$  i  $T(L)=T_p$ . Ostatecznie:

$$T_{nas}(x) = \frac{T_p - T_g}{L} x + T_g$$

W tym przypadku temperatura nasycenia również maleje, ale wolniej, bo liniowo z x. Co wobec tego z przypadkiem pręta skończonego emitującego ciepło do otoczenia? Pozostawiamy to do policzenia dociekliwym studentom/asystentom, aby i oni mieli satysfakcję z samodzielnego rozwiązania problemu. Dodajmy, wszystkie niezbędne do tego narzędzia znajdują się w tekście i cytowanej literaturze. I uwaga na koniec. Chyba warto byłoby zmierzyć zmiany temperatury, w co najmniej czterech miejscach tj. na początku, końcu i dwóch już wybranych punktach pręta. W dwóch wariantach: pierwszym zasadniczym - tak jak dotąd z okresowym włączaniem i wyłączaniem prądu, drugim pomocniczym przy prądzie stałym (dla tej samej wartości równej wartości skutecznej prądu z wariantu pierwszego). Pozwoliłoby to na stwierdzenie, jakie modelowe warunki brzegowe najlepiej odpowiadają warunkom eksperymentu i czy z eksperymentu można uzyskać wielkość  $\sigma$ .

## Literatura

- B. P. Lathi ‘SIGNALS, SYSTEMS AND COMMUNICATION’ John Wiley & Sons 1956.  
 W. Pogorzelski ‘ANALIZA MATEMATYCZNA’ tom IV, PWN 1956.  
 A. N. Tichonow, A. A. Samarski ‘RÓWNANIA FIZYKI MATEMATYCZNEJ’ PWN 1963