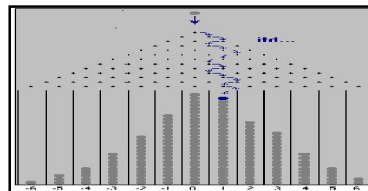




POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ FIZYKI

LABORATORIUM FIZYKI I



Jan Pluta

TABLICA GALTONA

Komputerowe modelowanie procesu pomiaru

WARSZAWA
2000r.

SPIS TREŚCI

1. PODSTAWY FIZYCZNE	3
1.1 POMIAR, REZULTAT, DOKŁADNOŚĆ	3
1.2 BŁĘDY I NIEPEWNOŚCI POMIAROWE	3
1.3 CECHY PRZYPADKOWYCH BŁĘDÓW POMIAROWYCH	4
1.4 KILKA POJĘĆ ZE STATYSTYKI	4
2. OPIS ĆWICZENIA	5
2.1 CEL EKSPERYMENTU KOMPUTEROWEGO	5
2.2 TABLICA GALTONA I PROCESY STOCHASTYCZNE	6
2.3 RZECZYWISTE I MODELOWANE POMIARY - ZAŁOŻENIA HAGENA	7
2.4 ROZKŁAD DWUMIANOWY (BERNOULLIEGO)	8
2.5 CENTRALNE TWIERDZENIE GRANICZNE	9
2.6 ROZKŁAD NORMALNY (GAUSSA)	9
2.8 ROZKŁAD POISSONA	11
2.9 TEST ZGODNOŚCI χ^2	12
3. WYKONANIE ĆWICZENIA I ANALIZA DANYCH	13
3.1. INTERPRETACJA WYNIKÓW I WNIOSKI	15
4. PYTANIA KONTROLNE	15
5. BIBLIOGRAFIA	16
6. PROGRAM KOMPUTEROWY - INTERNET	16

1. PODSTAWY FIZYCZNE

1.1 Pomiar, rezultat, dokładność

Pomiar jest podstawowym źródłem informacji w nauce i technice. Proces pomiaru polega na porównaniu wielkości mierzonego obiektu z wzorcem przyjętym za jednostkę. Wynik pomiaru zawiera zasadniczo dwie informacje: **wymiar jednostki** (np. metr, sekunda, kilogram, amper itp.) oraz **wartość liczbowa**, która określa ile razy mierzony obiekt jest większy lub mniejszy od przyjętego wzorca.

Uzyskana w wyniku pomiaru liczba będąca wynikiem pomiaru nie jest jednak nigdy wyznaczona bezwzględnie precyzyjnie. Dlatego rezultat pomiaru musi zawsze zawierać trzecią informację określającą **dokładność** uzyskanej wartości liczbowej. Bez tej dodatkowej informacji wynik pomiaru może prowadzić do zupełnie błędnych wniosków¹.

W przedstawionym tu modelowaniu komputerowym pokazane zostaną mechanizmy powstawania błędów pomiarowych, metody szacowania dokładności pomiarów oraz interpretacja statystyczna wyznaczonych wartości reprezentujących wynik pomiaru i jego dokładność.

1.2 Błędy i niepewności pomiarowe

Błędy występujące w pomiarach można podzielić na trzy grupy. Podział ten określa też sposób, w jaki dany rodzaj błędu jest uwzględniany w procesie pomiaru.

1. **Błędy grube** - powstające wskutek pomyłki wykonującego pomiar lub naglej zmiany warunków pomiaru. Takie błędy należy **eliminować** w procesie pomiaru, zaś wynik pomiaru nie powinien być obciążony ich wpływem.
2. **Błędy systematyczne** - wynikające z niedoskonałości przyrządów pomiarowych lub metody pomiaru. Błędy tego typu należy (w miarę możliwości) **korygować** a ich granice powinny być wyraźnie określone.
3. **Błędy przypadkowe** - występujące zawsze w pomiarach spowodowane są przez wiele różnorodnych czynników. Nie można ich ani wyeliminować ani skorygować. Należy jednak **oszacować** ich wartość i podawać jako jeden z elementów wyniku pomiaru.

Błędy, których wyeliminowanie nie jest możliwe, noszą też nazwę **niepewności pomiarowych**.

¹ Mówi góral do turysty:

- Panie, ta góra ma sto milionów lat i trzy tygodnie.
- A skąd pan to wie tak dokładnie? - pyta zaciekawiony turysta.
- Bo dokładnie trzy tygodnie temu był tu jeden profesor, co mówił, że ona ma sto milionów lat.

1.3 Cechy przypadkowych błędów pomiarowych

Charakterystyczną cechą błędów przypadkowych jest to, że na błąd pomiaru składa się suma wielu małych, niezależnych przyczynków, tzw. **błędów elementarnych**. Spowodowane są one czynnikami wynikającymi z zewnętrznych warunków prowadzenia pomiarów (np. zmian temperatury), właściwości obiektu mierzonego (np. elastyczności materiału w pomiarach długości), niestabilnej pracy urządzeń pomiarowych itp. W rezultacie, przy kilkakrotnym wykonywaniu pomiarów tej samej wielkości uzyskuje się różne wyniki. Wyniki te grupują się wokół wartości prawdziwej, zaś ich rozrzut może być miarą dokładności pomiaru. Samej wartości prawdziwej nie znamy, możemy jednak uzyskać jej wartość przybliżoną, oraz ocenić na ile wyznaczona wartość może różnić się od wartości prawdziwej.

1.4 Kilka pojęć ze statystyki

Traktując błędy przypadkowe jako wartości **zmiennej losowej**, możemy dla naszych ocen zastosować pojęcia rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Przypomnijmy te, które dotyczą bezpośrednio naszego ćwiczenia.

Wartość oczekiwana lub **przeciętna** $E(x)$, zmiennej losowej x określona jest jako

$$E(x) = \sum x_i P(x=x_i) \quad (1)$$

gdzie $P(x_i)$ jest prawdopodobieństwem tego, że zmienną losową x ma wartość x_i , a sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe wartości zmiennej losowej dyskretnej. Dla zmiennych losowych o rozkładzie ciągłym wartość oczekiwana zdefiniowana jest jako

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (2)$$

gdzie $f(x)$ jest **gęstością prawdopodobieństwa** zmiennej losowej x .

Rozrzut wartości zmiennej losowej x , wokół wartości oczekiwanej, określony jest przez **odchylenie standardowe**, σ

$$\sigma^2(x) = E\{[x - E(x)]^2\} = E(x^2) - [E(x)]^2 \quad (3)$$

W rzeczywistych pomiarach nie znamy jednak ani wartości oczekiwanej ani odchylenia standardowego. Wykonujemy natomiast serię **N** pomiarów i wyliczamy **wartość średnią**, $\langle x \rangle$, oznaczaną też jako \bar{x} .

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4)$$

Rozrzut poszczególnych pomiarów wokół wartości średniej opisujemy za pomocą tzw. **średniego błędu kwadratowego pojedynczego pomiaru, s_x** .

$$s_x = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

Dokładność wyznaczenia wartości średniej określamy poprzez tzw. **średni błąd kwadratowy średniej**:

$$s_{\langle x \rangle} = \left[\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 \right]^{1/2} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} \quad (6)$$

Wyznaczone w ten sposób wielkości $\langle x \rangle$ i s_x zbiegają przy zdążającej do nieskończoności liczbie pomiarów do zdefiniowanych wcześniej wartości $E(x)$ i σ . Wielkość $s_{\langle x \rangle}$ zbiega do zera gdy liczba pomiarów zdąża do nieskończoności.

Taka procedura pozostawia jednak szereg otwartych kwestii. W realnych przypadkach liczba pomiarów jest zawsze bardzo daleka od nieskończoności. Czy mimo to możemy stosować wartości $\langle x \rangle$, s_x , $s_{\langle x \rangle}$ do opisu wyniku i dokładności pomiaru? Jak zależą wartości $\langle x \rangle$, s_x oraz $s_{\langle x \rangle}$ od liczby wykonanych pomiarów? Jak możemy rozpoznać, że to właśnie błędy przypadkowe odgrywają w naszym pomiarze dominującą rolę? Jakie mogą być oznaki występowania błędów systematycznych? Błędy grube są także w pewnym sensie błędami przypadkowymi. Jak można je rozpoznać i wyeliminować? Listę tę można kontynuować...

2. OPIS ĆWICZENIA

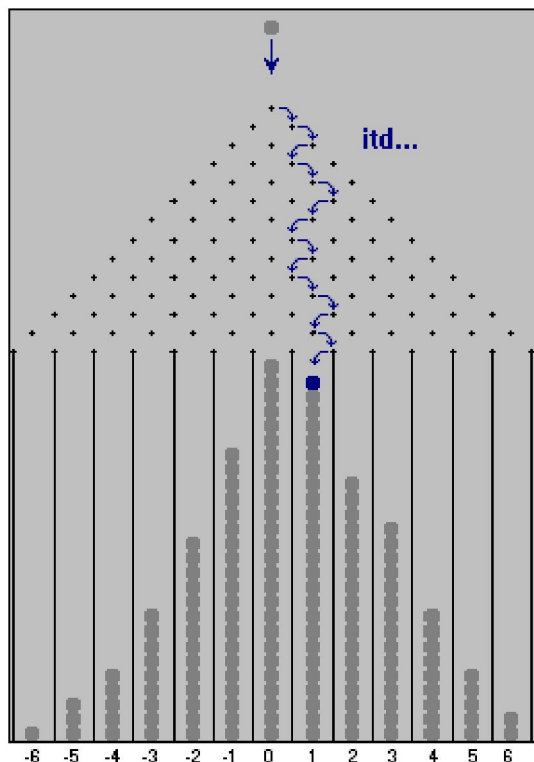
2.1 Cel eksperymentu komputerowego

Celem przedstawionego tu eksperymentu komputerowego jest znalezienie odpowiedzi na postawione wyżej i podobne pytania poprzez modelowanie procesu pomiaru i analizę mechanizmów prowadzących do powstawania błędów pomiarowych. W przeciwieństwie do realnie wykonywanych pomiarów, będziemy znać wartość prawdziwą x , stanowiącą punkt odniesienia w naszych rozważaniach. Będzie również możliwe wykonanie dużej liczby pomiarów w stosunkowo krótkim czasie.

Równocześnie zobaczymy, że proces powstawania błędów pomiarowych posiada wiele cech wspólnych dla całej klasy procesów statystycznych i wiedza zdobyta przy opisie procesu pomiaru może znaleźć zastosowanie w wielu dziedzinach życia, niekoniecznie dotyczących pomiarów fizycznych.

2.2 Tablica Galtona i procesy stochastyczne

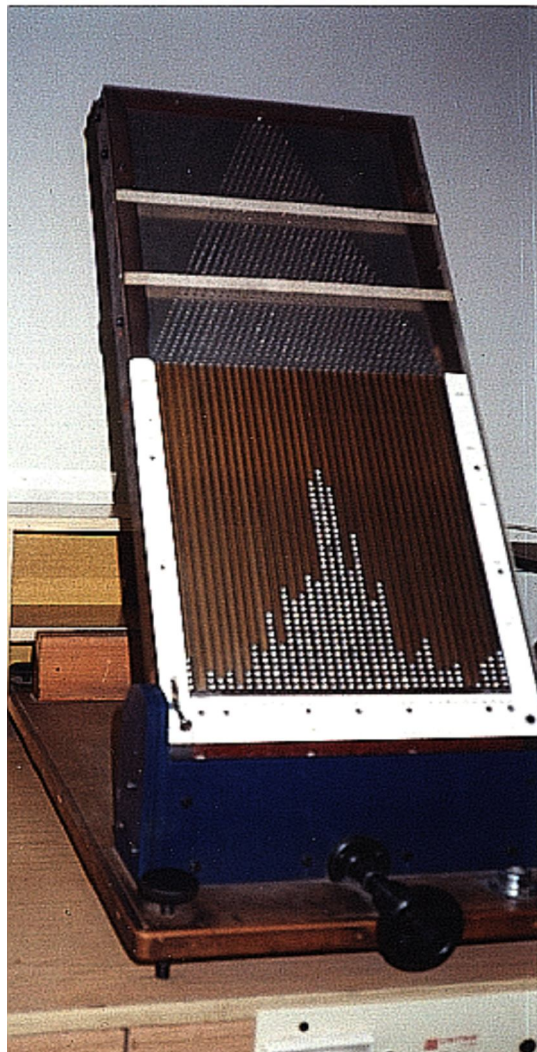
Poglądowym modelem ilustrującym proces pomiaru jest tzw. **Tablica Galtona**. W oryginalnym wykonaniu przyrząd ten stanowi płyta na której rozmieszczone jest wiele rzędów kołeczków, Rys.1. Tablica ustawiona jest pionowo bądź nachylona



Rys.1.

Powyżej - Ilustracja ruchu kulki na tablicy Galtona.

Obok - mechaniczna wersja tablicy Galtona w Laboratorium studenckim Instytutu Fizyki PW, wykonana przez p. Andrzeja Kozłowskiego.



względem poziomu. Z góry spuszcza się kulki, które spadając w dół zderzają się z kołeczkami i ostatecznie wpadają do przegródek umieszczonych w dolnej części tablicy. Wskutek wielokrotnych zderzeń kulki przemieszczają się także w kierunku poziomym.

Ruch kulki, będący przykładem tzw. **błądzenia przypadkowego**, należy do klasy **procesów stochastycznych** czyli takich, których rozwój czasowy opisywany jest przez wartości zmiennych losowych. Innymi przykładami procesów tego typu są: fizyka - nieuporządkowane ruchy cząsteczek cieczy (tzw. ruchy Browna) lub rozproszenia cząstek przechodzących przez ośrodek materialny, elektronika - szumy urządzeń elektronicznych, działania sportowe lub wojskowe - uderzenia pocisków w tarczę, życie społeczne - kroki nietrzeźwego osobnika na ulicy itd. W naszym przypadku jest to proces powstawania błędów pomiarowych.

2.3 Rzeczywiste i modelowane pomiary - Założenia Harena

Wykonujemy pomiar wielkości x , czyli spuszcza kulę na tablicy Galtona. Najmniejsza działka naszego przyrządu pomiarowego równa jest odległości między kółkami w rzędzie. Następujące relacje określają związki pomiędzy rzeczywistym i modelowanym pomiarem.

- **Proces pomiaru** → ruch kulki na tablicy
- **Błędy pomiarowe** → przemieszczenia poziome kulki
- **Wynik pomiaru** → numer przegródki, do której trafiła kulka

Sprecyzujmy podstawowe cechy procesu powstawania błędów przypadkowych oraz zestawmy je z własnościami ruchu kulek na tablicy Galtona (są to tzw. założenia Harena):

1. Błędy przypadkowe obecne są w każdym pomiarze - spadające kulki zawsze ulegają zderzeniom z kółkami.
2. Błąd przypadkowy pomiaru można rozpatrywać jako sumę bardzo dużej liczby małych, jednakowych błędów elementarnych - końcowe przemieszczenie kulki jest sumą dużej liczby małych, jednakowych przemieszczeń.
3. Błędy elementarne występują z jednakowym prawdopodobieństwem ze znakiem plus i minus - prawdopodobieństwa odchylenia w prawo i w lewo są takie same.

Oznaczmy przez $\pm\delta$ dwie możliwe wartości przemieszczenia kulki wskutek zderzenia z kółkiem, a przez p prawdopodobieństwo przemieszczenia w jedną (np. lewą) stronę. Prawdopodobieństwo przemieszczenia w prawo będzie $q=1-p$. Jeżeli spełnione jest trzecie założenie Harena, to $p=q=0.5$. Zakładamy, że poszczególne przemieszczenia są wzajemnie niezależne. Przemieszczeniom w lewo przypisujemy, umownie, znak minus, przemieszczeniom w prawo, znak plus. Zwróćmy też uwagę, że wartość przemieszczenia δ równa jest połowie odstępów pomiędzy kółkami w rzędzie.

Prawdopodobieństwa przemieszczeń w lewo i w prawo są:

$$P(x_i=-\delta)=p, \quad P(x_i=+\delta)=(1-p)=q, \quad (7)$$

Wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe dla naszego dwupunktowego rozkładu prawdopodobieństwa wyznaczmy korzystając ze wzorów (1) oraz (3)

$$E(x_i) = (-\delta)p + \delta(1-p) = \delta(1-2p) \quad (8)$$

$$\sigma^2(x_i) = E(x_i^2) - [E(x_i)]^2 = 4\delta^2 p(1-p) \quad (9)$$

Zwróćmy uwagę, że jeżeli spełnione jest trzecie założenie Harena, to

$$E(x_i) = 0, \quad \sigma^2(x_i) = \delta^2 \quad (9a)$$

2.4 Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)

Niech nasza tablica Galtona posiada n poziomych rzędów kołeczków. Oznaczmy przez k liczbę przemieszczeń kulki w lewo nie interesując się w jakiej kolejności one zachodzą. Liczba kombinacji, w których kulka przemieści się k razy w lewo przy n rzędach kołeczków określona jest przez znany czynnik kombinatoryczny

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (10)$$

Zakładamy, że poszczególne przemieszczenia są wzajemnie niezależne, z czego wynika, że prawdopodobieństwo danej kombinacji przemieszczeń jest iloczynem prawdopodobieństw. Uzyskujemy wówczas bardzo prosty wzór określający prawdopodobieństwo tego, że przy n rzędach kołeczków kulka przemieści się k razy w lewo.

$$\Delta P_k^n = C_k^n p^k (1-p)^{n-k} \quad (11)$$

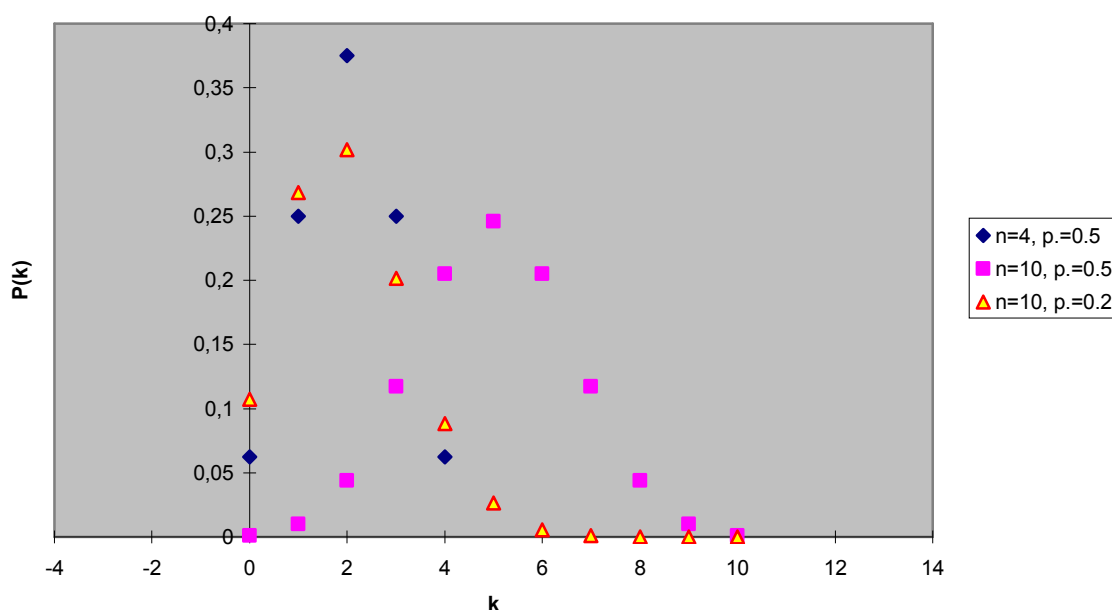
Jest to wzór opisujący tzw. **dwumianowy rozkład prawdopodobieństwa**.

Wartość oczekiwana dla tego rozkładu wynosi: $E(k)=np$, zaś kwadrat odchylenia standardowego (*wariancja*), $\sigma^2=np(1-p)=npq$.

Kiedy $p=q=0.5$ to rozkład nasz staje się symetryczny, a zależność od k określona jest wyłącznie przez czynnik kombinatoryczny

$$\Delta P_k^n = C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (11a)$$

Przykłady rozkładów dwumianowych



Przy k przemieszczeniach w lewo i $(n-k)$ przemieszczeniach w prawo przemieszczenie sumaryczne kulki wyniesie

$$x(k) = k(-\delta) + (n-k)\delta = (n-2k)\delta \quad (12)$$

Kiedy więc k będzie równe $n/2$, czyli kulka odbije się tyle samo razy w lewo co i w prawo, przemieszczenie sumaryczne wyniesie zero - pomiar nasz będzie dokładny. Kiedy k będzie równe n lub zero, przemieszczenie będzie największe i wyniesie $\pm n\delta$; to największy dla danej wartości n możliwy błąd pomiaru w naszej procedurze modelowania.

2.5 Centralne twierdzenie graniczne

Opisując błędy przypadkowe zgodnie z założeniami Hagena zakładamy, że liczba błędów (przemieszczeń) jest bardzo duża, zaś poszczególne błędy (przemieszczenia) są bardzo małe. Aby to zrealizować w naszym modelu zwiększamy liczbę rzędów kołeczków zmniejszając równocześnie szerokość przegródki. Rozkład prawdopodobieństwa błędów pomiarowych (przemieszczeń) będziemy opisywać podając wartość stosunku $\Delta P_k^n / \Delta x$ gdzie Δx jest szerokością przegródki, która w naszym przypadku wynosi 2δ .

W granicy: $n \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$, rozkład nasz przechodzi w krzywą ciągłą, a zdefiniowany powyżej stosunek określa funkcję gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_k^n}{\Delta x} = \frac{dP}{dx} \quad (13)$$

Analityczna postać tak otrzymanej krzywej stanowi treść jednego z fundamentalnych twierdzeń statystyki matematycznej, tzw. **centralnego twierdzenia granicznego**. Sens tego twierdzenia wyrazić można w następujący sposób.

Jeżeli x_j są niezależnymi zmiennymi losowymi podlegającymi rozkładowi o wartości przeciętnej a i odchyleniu standardowym σ , to przy $n \rightarrow \infty$ ich suma podlega rozkładowi normalnemu (Gausa) o wartości przeciętnej równej na i odchyleniu standardowym równym $\sigma \sqrt{n}$.

2.6 Rozkład normalny (Gausa)

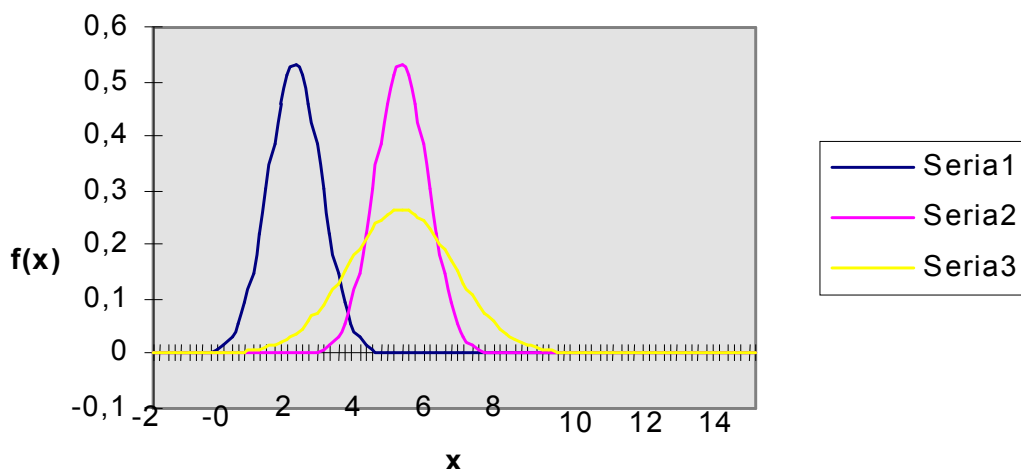
Można pokazać, że sumy zmiennych losowych podlegają rozkładowi Gaussa nawet wówczas gdy nie wszystkie x_j pochodzą z tego samego rozkładu. W naszym przypadku odpowiada to sytuacji, kiedy błędy elementarne mają różne wartości. Twierdzenie to ma ogromne znaczenie praktyczne, a dzięki niemu rozkład Gaussa należy

do najbardziej rozpowszechnionych rozkładów statystycznych. Przykład wyprowadzenia rozkładu Gaussa poprzez wykonanie przejścia granicznego: $n \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$, przy warunku $n\delta^2 = \text{const.}$ (zwany metodą Hageny) podany jest w podręczniku Wróblewskiego i Zakrzewskiego, Wstęp do Fizyki, tom 1, str. 67, (ref. [4]). Zmienna losowa x ma rozkład Gaussa, jeżeli jej gęstość prawdopodobieństwa zdefiniowana jest następująco:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (14)$$

gdzie: $a=E(x)$ jest wartością przeciętną, a σ jest odchyleniem standardowym. Rozkład jest symetryczny względem wartości a , dla której gęstość prawdopodobieństwa osiąga maksimum. Parametr σ określa "szerokość" rozkładu. Warto zapamiętać, że prawdopodobieństwo występowania zmiennej losowej w granicach jednego odchylenia standardowego względem wartości przeciętnej wynosi około 68.3 % zaś w granicach trzech wartości σ wynosi 99.8 %.

Przykłady rozkładów Gaussa



2.7 Skończona liczba pomiarów

Wiemy już dlaczego właśnie rozkład Gaussa stosujemy do opisu przypadkowych błędów pomiarowych. Pomimo jednak, że liczba rzędów kołeczków na tablicy Galtona jest duża a wielkość przegródki mała, zauważamy istotne różnice w wynikach modelowania w zależności od liczby wykonanych pomiarów.

Co więcej, nawet przy tej samej liczbie pomiarów, wyniki poszczególnych serii różnią się istotnie między sobą. Jest to naturalną konsekwencją faktu, że wykonując serię N pomiarów pobieramy **próbę** o wymiarze N , która ma reprezentować całą **populację** czyli zbiór wszystkich możliwych pomiarów wielkości mierzonej. Każdy wykonany pomiar jest próbą o wymiarze *jeden*.

Wielkości $\langle x \rangle$, S_x , $S_{\langle x \rangle}$, podobnie jak wynik pojedynczego pomiaru, są także zmiennymi losowymi w odróżnieniu od ściśle określonych wartości parametrów rozkładu Gaussa. Wielkości te noszą nazwę **estymatorów** - odpowiednio: wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego, odchylenia standardowego wartości średniej dla serii N pomiarów. Wartości tych estymatorów dążą do wartości estymowanych parametrów przy zdążającej do nieskończoności liczbie prób.

Kiedy jednak liczba pomiarów jest niewielka, liczby trafień do poszczególnych przegródek nie układają się w spodziewany, regularny kształt. Łatwo jest to zaobserwować wykonując kilka serii po N pomiarów i obserwując zmieniające się liczby trafień do tej samej przegródki.

Trafienie kulki do danej przegródki możemy traktować jako jedną z $n+1$ możliwych wartości zmiennej losowej stanowiącej wynik naszego modelowanego pomiaru. Liczby trafień do poszczególnych przegródek przy N wykonanych pomiarach podlegać będą tzw. **rozkładowi wielomianowemu** będącemu uogólnieniem rozkładu dwumianowego. Pomiedzy liczbami trafień do różnych przegródek wystąpi ujemna korelacja, bowiem kiedy kulka trafia więcej razy do jednej przegródki, to automatycznie musi mniej razy trafić do innych.

2.8 Rozkład Poissona

Kiedy liczba przegródek na tablicy Galtona jest bardzo duża wówczas korelacje pomiędzy liczbami trafień do różnych przegródek stają się nieistotne. Proces zapewniania poszczególnych przegródek możemy wtedy opisać rozkładem dwumianowym traktując trafienie do danej przegródki jako sukces zaś nie trafienie jako porażkę. Oczywiście, wartość $p = \Delta P_k^n$ będzie wówczas bardzo mała ale wartość oczekiwana takiego rozkładu będzie mieć wartość skończoną równą Np , gdzie N jest liczbą wykonanych pomiarów. Podkreślić należy, iż nie chodzi tu o kształt całego modelowanego rozkładu trafień do różnych przegródek, ale o rozkład odnoszący się do zapewnienia jednej i tej samej przegródki. Rozkład taki można otrzymać wykonując wiele serii po N pomiarów i analizując liczbę trafień do danej przegródki.

Graniczny przypadek rozkładu dwumianowego, kiedy p zdąża do zera a N zmierza do nieskończoności ale tak, że iloczyn Np pozostaje stały, to także jeden z najważniejszych rozkładów statystycznych - **rozkład Poissona**. Inne przykłady tego rozkładu to: liczba aktów rozpadu substancji promieniotwórczej w ustalonym odcinku czasu, liczba gwiazd w określonym wycinku sfery niebieskiej, liczba klientów wchodzących do sklepu w danym odcinku czasu itp. Rozkład ten można uzyskać także w naszym modelowaniu komputerowym zakładając bardzo małą wartość prawdopodobieństwa p przy możliwie dużej liczbie odbić kulki, n .

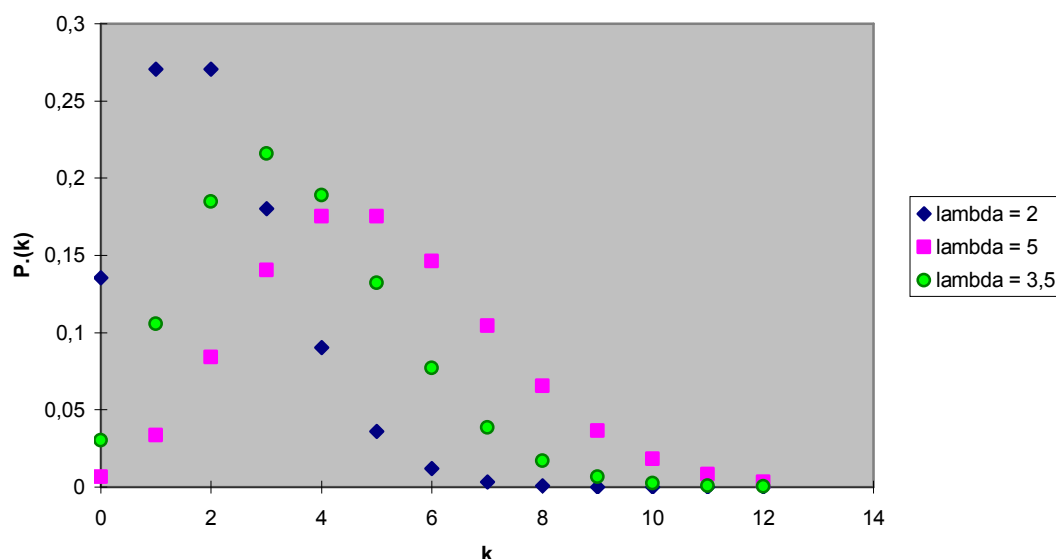
Rozkład Poissona, podobnie jak i rozkład dwumianowy, określony, jest dla dyskretnej zmiennej losowej;

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (15)$$

Jedynym parametrem rozkładu Poissona jest wartość oczekiwana, $\lambda=np$. Kwadrat odchylenia standardowego (wariancja) równa jest wartości oczekiwanej, $\sigma^2=\lambda$.

Zwróćmy uwagę, że wartość stosunku $\sigma / \lambda = 1 / \sqrt{\lambda}$ zmniejsza się za wzrostem wartości oczekiwanej. Oznacza to, że błąd względny liczby trafień do danej przegródki, związany ze statystycznym charakterem naszego procesu, maleje wraz ze wzrostem liczby pomiarów i ilościowo może być opisany przez pierwiastek kwadratowy ze średniej liczby trafień do danej przegródki. Ten bardzo ważny wniosek umożliwia oszacowanie niepewności statystycznej liczby zliczeń np. przy badaniu statystycznego charakteru rozpadu promieniotwórczego.

Przykłady rozkładów Poissona



2.9 Test zgodności χ^2

Konsekwencją omawianych wyżej fluktuacji statystycznych jest "poszarpany" kształt uzyskanego rozkładu wyników pomiarów, wizualnie niezgodny z gładkim rozkładem Gaussa. Niezgodność ta może być jednak uzasadniona dużą niepewnością statystyczną pomiarów, szczególnie - jeśli liczba wykonanych pomiarów jest niewielka. Istnieje więc potrzeba obiektywnego testu hipotezy zgodności wyników z rozkładem teoretycznym. Do tego celu wykorzystać można test zgodności χ^2 .

W celu wykonania tego testu dzielimy wyniki uzyskanej serii pomiarów na M grup i wyznaczamy wartość wyrażenia

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(N_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad (16)$$

Każdy składnik w liczniku, to kwadrat różnicy pomiędzy liczbą pomiarów w danej grupie, a analogiczną liczbą przewidywaną przez testowany rozkład statystyczny. W naszym przypadku grupę może stanowić zawartość jednej lub kilku przegródek. Jeżeli różnice te spowodowane są tylko przez rozrzut statystyczny, czyli nasza hipoteza jest prawdziwa, każdy składnik sumy powinien być rzędu jedyn-

ki (por. stosunek σ^2/λ , powyżej). Wartość X^2 będzie więc rzędu M , a jej rozkład będzie zgodny z rozkładem χ^2 . Jedynym parametrem tego rozkładu jest **liczba stopni swobody**, $N_{DF}=(M-L-1)$, gdzie L jest liczbą parametrów testowanego rozkładu, np. 2 - dla rozkładu Gaussa, 1 - dla rozkładu Poissona. Liczba stopni swobody, to liczba niezależnych elementów testu. Od liczby testowanych grup odejmujemy więc liczbę więzów narzuconych przez zadane wartości parametrów testowanego rozkładu oraz warunek normalizacji. Warunek ten wynika z oczywistej relacji, $\sum Np_i = N$. Dla weryfikacji naszej hipotezy należy wprowadzić jeszcze tzw. **poziom ufności**, α . Jest to prawdopodobieństwo, uzyskania wartości X^2 większej niż χ^2 przy danych wartościach N_{DF} i α . Jeżeli wyznaczona wartość X^2 jest większa niż χ^2 dla danych N_{DF} i α , to hipotezę należy odrzucić.

Ważnym elementem testu χ^2 jest wybór szerokości przedziałów, które powinny być na tyle wąskie, by odzwierciedlać kształt badanego rozkładu, ale i na tyle szerokie, by zapewnić w każdej grupie wystarczającą liczbę obserwacji przewidywanych przez testowany rozkład. W naszym przypadku chodzi o liczbę trafień do danej przegródki lub grupy przegródek. Liczbę 5 przyjmuje się zwykle jako wystarczającą. Jest to szczególnie ważne na brzegach rozkładów, gdzie liczby obserwacji często są niewielkie. Właśnie wówczas można wziąć sumę obserwacji z kilku przedziałów jako jedną grupę.

3. WYKONANIE ĆWICZENIA I ANALIZA DANYCH

Modelowanie komputerowe ruchu kulek na tablicy Galtona niczym nie różni się w swej idei od funkcjonowania tablicy mechanicznej. Techniczna różnica polega jedynie na łatwości zmiany liczby rzędów "kołeczków" oraz możliwości przyspieszenia szybkości zbierania danych, wykonywania obliczeń i prezentacji wyników.

Procedura modelowania komputerowego składa się z dwóch zasadniczych części.

1. Opis jakościowy. W tej części zilustrowane są podstawowe własności procesu pomiaru. Modeluje się pojedyncze pomiary i możliwe jest obserwowanie ruchu kulek na tablicy, zmiana szybkości ruchu kulek, sterowanie ruchu krok za krokiem itp. Wykonuje się również serie pomiarów gdzie można obserwować zmieniające się wartości $\langle x \rangle$, s_x , $s_{\langle x \rangle}$ wraz z rosnącą liczbą wykonanych pomiarów. Można również zmieniać prawdopodobieństwo odchylenia kulki w danym kierunku. Podany w programie komputerowym zestaw pytań umożliwia sprawdzenie stopnia zrozumienia związanych z modelowaniem zagadnień. ***Na pytania te należy odpowiedzieć w formie pisemnej i załączyć do sprawozdania.***

2. Analiza ilościowa. W drugiej części nie obserwuje się już ruchu kulek na tablicy, natomiast możliwa jest zmiana liczby aktów rozproszeń (rzędów kołeczków) w szerokim zakresie, zaś pomiary wykonuje się znacznie szybciej. Kształt końcowego rozkładu kulek na tablicy pokazywany jest wraz z zaznaczonymi granicami błędów statystycznych. Podany zestaw zadań umożliwia wykonanie ilościowej analizy kształtu i parametrów generowanych rozkładów.

Poniżej przedstawionych jest kilka przykładów analizy rezultatów modelowania. Podany zestaw nie wyczerpuje oczywiście istniejących możliwości. Wykonanie też innych testów traktowane będzie jako twórczy wkład wykonujących ćwiczenie w zrozumienie praw statystyki leżących u podstaw analizy danych doświadczalnych.

- 1. Zbadanie zależności $\langle x \rangle, s_x, s_{\langle x \rangle}$ od liczby wykonanych pomiarów.** Wykonaj kilka serii pomiarów dla ustalonych wartości n oraz p (np. $n=30, p=0.5$) i dla zwiększającej się liczby pomiarów N , np. $N=3, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000$. Zbadaj zależność wartości $\langle x \rangle, s_x, s_{\langle x \rangle}$ od N . Wyniki przedstaw na wykresie. Podaj asymptotyczne wartości do jakich zbiegają $\langle x \rangle, s_x, s_{\langle x \rangle}$ przy $N \rightarrow \infty$ korzystając z centralnego twierdzenia granicznego oraz znanych parametrów sumowanych rozkładów błędów elementarnych; wzory (9) lub (9a).
- 2. Skończona (mała) liczba pomiarów.** W praktyce, wykonujemy nie więcej niż kilka pomiarów, N i liczymy wartość średnią oraz jej niepewność. Dla zadanych n, p, N (np. $n=10, p=0.5, N=3$) wykonaj wiele serii pomiarów obserwując:
 - Czy rozkład wyników w seriach zgodny jest z rozkładem Gaussa?
 - Na ile wartość średnia bliska jest wartości rzeczywistej i czy różnice tych wartości zgodne jest z oszacowaniem błędu wartości średniej przez $s_{\langle x \rangle}$.Powtórz to dla dużo większej wartości N . Porównaj wyniki i wyciągnij wnioski.
- 3. Relacja: rozkład dwumianowy - rozkład Gaussa.** Sprawdź warunki w których rozkład dwumianowy może (lub nie) być przybliżony przez rozkład Gaussa. Wykonaj kilka serii pomiarów dla różnych wartości $n, p, i N$ wybierając je tak, by raz uzyskać zgodność, a innym razem - nie. Sprawdź relacje pomiędzy parametrami rozkładu dwumianowego i parametrami odpowiadającego mu rozkładu Gaussa wyznaczonymi w oparciu o Centralne Twierdzenie Graniczne.
- 4. Relacja: rozkład dwumianowy - rozkład Poissona.** Przeprowadź podobny test dla przejścia granicznego pomiędzy rozkładem dwumianowym a rozkładem Poissona. Wykonaj kilka serii modelowania dla różnych wartości p i n zachowując stałą wartość iloczynu np , na przykład: $(p=0.5, n=6)$; $(p=0.05, n=60)$. Wykonaj dużą liczbę pomiarów. Kiedy rozkłady te są podobne, a kiedy - nie? Jakie są związki pomiędzy parametrami obu rozkładów?
- 5. Relacja: rozkład Poissona - rozkład Gaussa.** Znajdź takie wartości p i n , dla których otrzymany rozkład będzie zgodny równocześnie z rozkładem Gaussa i Poissona i takie wartości dla których zgodność z jednym rozkładem będzie wykluczać zgodność z drugim. Podaj te wartości p i n . Zaprezentuj kształty rozkładów - modelowanych i teoretycznych. Uzasadnij wyniki.
- 6. Wykonaj test χ^2 dla wybranego rozkładu modelowanego i teoretycznego.**

Wyniki należy przedstawić w sprawozdaniu w postaci liczbowej oraz, kiedy jest to celowe, także w postaci wykresów. Należy podać również wynikające z analizy wnioski. Szczegóły wykonania zadań należy uzgodnić z osobą prowadzącą ćwiczenie.

3.1. Interpretacja wyników i wnioski

Prawidłowo wykonany pomiar powiększa zasób naszej wiedzy i umożliwia wyciągnięcie właściwych wniosków: naukowych, ekonomicznych, sportowych, socjologicznych itd. W przypisie na stronie pierwszej podano przykład błędnego wniosku spowodowanego zignorowaniem skali niepewności uzyskanej informacji. Konkretnie wnioski zależne są od badanego problemu, jednak zawsze **przy wyciąganiu wniosków musi być wzięta pod uwagę niepewność uzyskanej informacji**, niezależnie od dziedziny, której ona dotyczy.

Uwaga ta odnosi się także do "*pomiaru*", jakim było przestudiowanie niniejszej instrukcji. Prawdopodobne jest, że zawarte powyżej informacje pozostawiają wiele "*niepewności*", które nie zostały wystarczająco wyjaśnione. Przykładem może być podanie „*magicznej*” liczby 5 przy opisie testu χ^2 . Można uzupełnić tę informację dodając, że chodzi tu o warunek przybliżenia rozkładu wielomianowego rozkładem Gaussa. Dlaczego jednak ten właśnie warunek jest tu istotny?

Odpowiedź będzie bardziej ogólna. Przedstawione tu ćwiczenie stanowi jedynie "*pojedynczą próbę*", która w ograniczonym tylko zakresie reprezentuje *populację* możliwych prezentacji poruszonych tu zagadnień. Autor będzie wdzięczny Czytelnikom za pomoc w odnalezieniu *błędów grubych*, które zostaną niezwłocznie *wyeliminowane* oraz *niedopatrzeń systematycznych* wynikających z profesjonalnych przyzwyczajień. Najlepiej jednak jest wyznaczyć "*wartość średnią*" poprzez uzupełnienie podanych tu wiadomości korzystając z bogatej literatury. Kilka wybranych pozycji znajduje się bibliografii podanej w punkcie 5. niniejszej instrukcji.

4. PYTANIA KONTROLNE

1. Tablica Galtona ma cztery rzędy kuleczek, a prawdopodobieństwo odbicia się kulki w lewo wynosi $p=0.5$. Jaka jest szansa, że w pojedynczej próbie kulka trafi do środkowej przegródki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nastąpi to kiedy wykonamy dwie próby?
2. Czy wartość średnia z serii pomiarów jest zawsze bliższa wartości rzeczywistej niż pojedynczy pomiar?
3. Czy zawsze należy wykonywać serię pomiarów i wyznaczać wartość średnią ?
4. Podaj korzyści z wykonania serii pomiarów w stosunku do pomiaru pojedynczego.
5. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wartość zmiennej losowej o rozkładzie Gaussa równa jest wartości oczekiwanej.
6. Kiedy rozkład dwumianowy można aproksymować rozkładem Gaussa, a kiedy rozkładem Piossona?
7. Kiedy kształty rozkładów: Gaussa i Piossona bardzo się różnią, a kiedy są do siebie podobne?
8. Podaj kilka przykładów procesów prowadzących do rozkładów dwumianowego, Piossona, Gaussa.

5. BIBLIOGRAFIA

1. J. Garbarczyk, Badanie własności rozkładu Gaussa przy użyciu tablicy Galtona, Instrukcja do ćwiczenia laboratoryjnego, Instytut Fizyki PW, (niepublikowane)
2. J.Pluta, Modelowanie procesu powstawania błędów przypadkowych (Tablica Galtona), Laboratorium Podstaw Fizyki, red. J.Hrabowska, L.Tykowski, zeszyt 2. str. 224, Wyd.PW, Warszawa, 1986.
3. J.Gałązka-Friedman, I.Śledzińska, Metody opracowania i analizy wyników pomiarów, Laboratorium Podstaw Fizyki, red. J.Hrabowska, L.Tykowski, Poradnik, str. 126, Wyd.PW, Warszawa, 1985.
4. A.K.Wróblewski, J.A. Zakrzewski, Wstęp do Fizyki, t.1, str. 45, 67, PWN, Warszawa, 1984.
5. A.Plucińska, E. Pluciński, Elementy probabilistyki, PWN, Warszawa, 1981.
6. S.Brandt, Analiza danych, PWN, Warszawa, 1998.
7. W.T.Eadie, D. Drijard, F.E. James, M. Roos, B. Sadoulet, Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej, PWN, Warszawa, 1989.
8. A.G.Frodesen, O.Skjeggestad, H. Tofte, Probability and Statistics in Particle Physics, UNIVERSITETSFORLAGET, Berlin-Oslo-Tromsø, 1979.

6. PROGRAM KOMPUTEROWY - INTERNET

Nasz pierwszy program modelowania komputerowego tablicy Galtona powstał ponad 10 lat temu. Opracowanie graficzne wykonał **Bogusław Pluta**, wówczas uczeń liceum w Dubnej k. Moskwy. Program był prezentowany na konferencji dotyczącej zastosowania komputerów w dydaktyce fizyki MIKROFIZ'87; napisany był w języku BASIC i wykonywany był na komputerze AMSTRAD-6128 (128KB pamięci operacyjnej, bez dysku twardego). Program funkcjonował w Laboratorium Fizyki I przez 10 lat (do 1997 roku). Następną wersję przygotował w 1995r **Adam Wasaznik**, uczeń Liceum Nr 40 w Warszawie. Program napisany został w języku PASCAL. W 1997r **Elric Peyre** student trzeciego roku Ecole des Mines de Nantes we Francji opracował nową wersję "Tablicy" w ramach stażu, który odbywał w Instytucie Fizyki PW. Program napisany został w C++ i w trzech wersjach językowych: polskiej, francuskiej i angielskiej. Program ten funkcjonuje obecnie w Laboratorium Fizyki I Wydziału Fizyki PW. Wersję internetową programu opracowuje aktualnie **Zbyszek Jedrzejewski-Szmek** student Uniwersytetu Warszawskiego.

Aktualne wersje programu „**galton**” dostępne są poprzez **INTERNET**. Znaleźć tam można zarówno niniejszą instrukcję, do skopiowania na własny komputer, jak i sam kod programu modelowania oraz więcej szczegółowych informacji.

Adres: <http://www.if.pw.edu.pl/~pluta> ⇒ Wersja polska ⇒ Tablica Galtona.