Szczególna teoria względności A. Einsteina

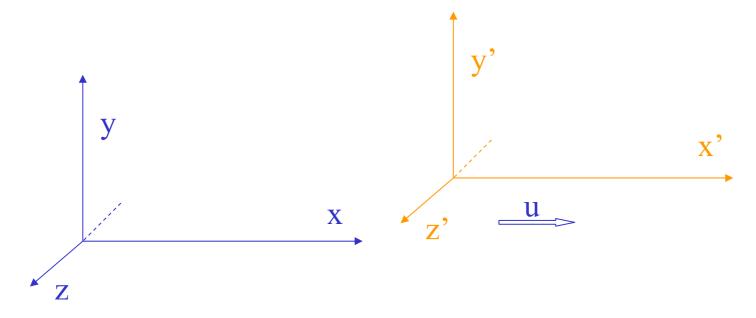


Droga historyczna

- -200 lat triumfu mechaniki
 (od sformułowania przez Newtona równań ruchu w 1666)
- -J.C.Maxwell (1864) przedstawia równania elektromagnetyczne,
 które okazują się <u>niesymetryczne</u> względem transformacji Galileusza
- Próby "poprawienia" równań Maxwella ⇒ niepowodzenie
- -H.A. Lorentz metodą prób znajduje podstawienie
 (nową transformację) dające niezmienniczość równań Maxwella

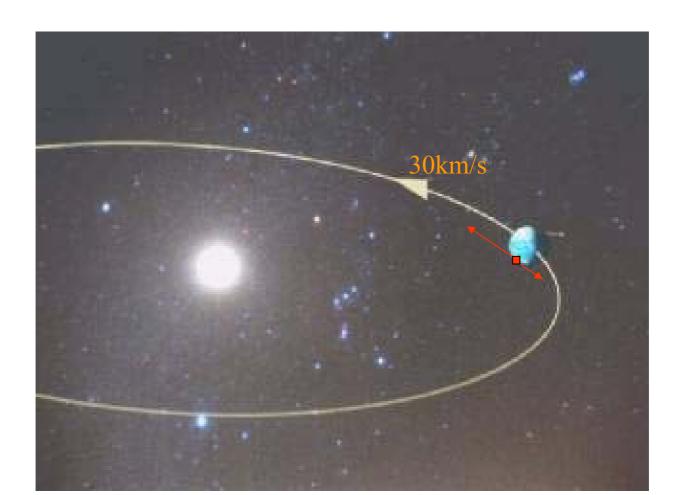
Transformacja Lorentza (TL) dla układów inercjalnych : Oxyz Ox'y'z'

 $(układ\ Ox\ 'y\ 'z\ 'porusza\ się\ ze\ stałq\ prędkościq\ \mathbf{u} = \mathbf{ue_x}\ względem\ Oxyz)$

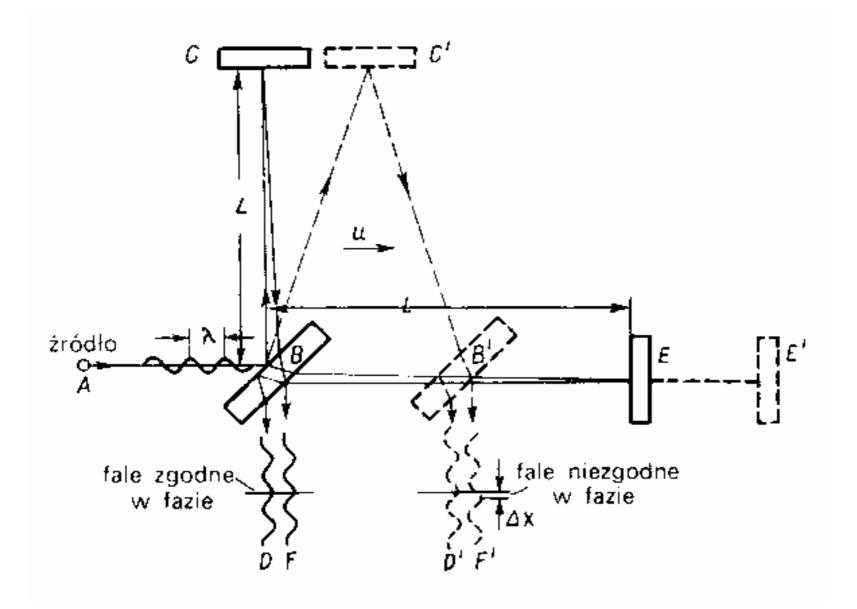


$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z, \qquad t' = \frac{t - xu/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

- -Równania <u>dynamiki Newtona</u> okazują się niesymetryczne w stosunku do transformacji Lorentza (T.L.)
- -Doświadczenie Michelsona Morleya (M-M, 1887) ⇒
 negatywna próba wyznaczenia zmiany prędkości światła
 względem poruszającej się Ziemi



Interferometr Michelsona

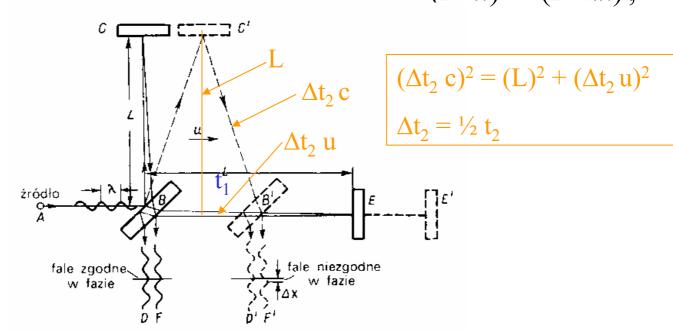


Doświadczenie Michelsona – Morleya (Cleveland 1887)

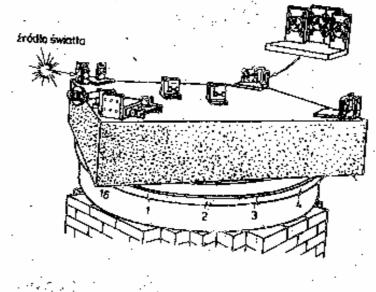
$$t_{1} = \frac{L}{c - u} + \frac{L}{c + u} = \frac{2Lc}{c^{2} - u^{2}} = \frac{2L}{c} (1 - \frac{u^{2}}{c^{2}})^{-1} \approx \frac{2L}{c} (1 + \frac{u^{2}}{c^{2}})$$

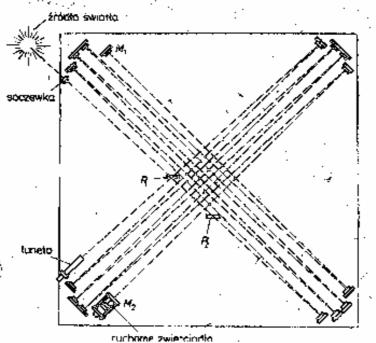
$$t_{2} = \frac{2L}{\sqrt{c^{2} - u^{2}}} = \frac{2L}{c} (1 - \frac{u^{2}}{c^{2}})^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2L}{c} (1 + \frac{1}{2} \frac{u^{2}}{c^{2}}) \quad u = 30 \frac{km}{s} \Rightarrow \frac{u^{2}}{c^{2}} = 10^{-8}$$

$$(1 + x)^{n} \approx (1 + nx), \quad x < < 1$$



A.A.Michelson, Niemcy 1881 - $\Delta N = 0.4$ prążka (L=1,2 m) A.A.Michelson, E.W.Morley, USA - $\Delta N = 0.04$ prążka (L=11 m)





- **G.F. Fitzgerald** proponuje "ryzykowną" hipotezę (sugestię?) wyjaśnienia negatywnego wyniku eksperymentu M-M: skrócenie ramienia interferometru (t.j. przestrzeni) <u>w kierunku ruchu;</u>
- A. Einstein (1905) wprowadza dwa "relatywistyczne" postulaty formułuje podstawy szczególnej teorii względności, co wyjaśnia spójnej teorii m.in. także negatywny wynik eksperymentu M-M;

W



w tym wprowadza poprawkę do równań Newtona (na masę) zapewniającą im niezmienniczość względem T.L:

$$\mathbf{m} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Postulaty Alberta Eisteina

1. Zasada względności A. Einsteina

Wszystkie prawa przyrody są takie same

we wszystkich <u>inercjalnych</u> układach odniesienia (IUO)

(równania opisujące je są niezmiennicze [symetryczne]

względem transformacji między inercjalnymi układami odniesienia IUO;

transformację ruchu opisuje podstawienie Lorentza TL)

Zasada względności ruchu sformułowana została po raz pierwszy **przez Galileusza** (⇒ Transformacja Galileusza TG),

przyjęta następnie **przez Newtona** ⇒ wynikała bezpośrednio

z niezmienniczości równań dynamiki Newtona w IUO względem T.G.

2. Zasada stałości prędkości światła

Prędkość światła w próżni jest taka sama we wszystkich IUO

(tj. nie zależy od ruchu źródeł i odbiorników prędkość graniczna)

Elementy szczególnej teorii względności - konsekwencje i wnioski

Transformacja Lorentza (wynika bezpośrednio z postulatu stałości szybkości światła c oraz jednorodności przestrzeni i czasu):

oznaczenia:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

$$\beta \le 1, \quad \gamma \ge 1$$

Przekształcenia transformacyjne Oxyz \longrightarrow Ox'y'z' dla $\mathbf{u} = \mathbf{u} \ \mathbf{e}_{\mathbf{x}}$:

$$x' = \gamma (x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z \quad t' = \gamma (t - xu/c^2),$$

Odwrotna transformacja Lorentza: Ox'y'z' Oxyz

$$x = \gamma (x' + ut'), \quad y = y', \quad z = z' \qquad t = \gamma (t' + x'u/c^2)$$
 (u \rightarrow [-u])

Konsekwencja 1

przestrzeń i czas <u>nie są</u> niezależne

Długość w różnych układach odniesienia

Długość ciała w spoczynku wynosi $l=(x_2-x_1)$; jaka będzie jego długość w układzie **O**, gdy zacznie poruszać się ono w **O** z prędkością (v)?

Niech \mathbf{O} ' będzie układem, w którym to ciało spoczywa (t.zn. \mathbf{O} ' porusza się w \mathbf{O} z prędkością $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, \rightarrow mierzone w \mathbf{O} ' ciało ma długość l bo w nim spoczywa)

ciało nieruchome w **O'** mierzo*ne w* **O** ma długość: $(x'_2 - x'_1)$,

gdzie:

$$x_{1}' = \frac{x_{1} - vt_{o}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} \qquad x_{2}' = \frac{x_{2} - vt_{o}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} \qquad x_{1}' = \frac{x_{2} - x_{1}}{\sqrt{1 - \frac{u^{2}}{c^{2}}}}$$

 $(punkty x_1' oraz x_2' mierzone jednocześnie – w chwili t_o)$

lub
$$l' = l \gamma$$
, $\gamma < 1 \implies l < l'$ (ciało widziane z **O**!)

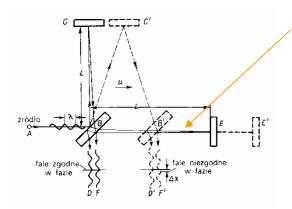
Wniosek:

długość poruszającego się ciała ulega skróceniu (dla obserwatora w O)

Konsekwencja 2 skrócenie odległości Fitzgeralda - Lorentza

Interpretacja wyniku eksperymentu Michelsona -Morleya

Obserwacja eksperymentu M-M "z zewnątrz":



to ramie interferometru ulega skróceniu do L' = L/γ , t.zn.

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$t_1 = \frac{2L'c}{c^2 - u^2} = \frac{2Lc\sqrt{1 - u^2/c^2}}{c^2(1 - u^2/c^2)} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

i jest równy
$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Wniosek: eksperyment M-M musiał dać wynik negatywny

Przekształcanie prędkości

odpowiednik (v=v'+u) w T.G.

Oznaczenia:

Prędkość ciała w O:

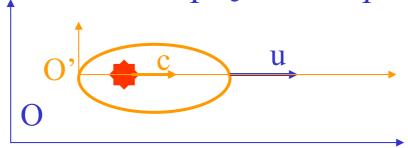
droga w O:
$$x = \gamma (x' + ut') = \gamma (v' t' + ut'), \quad (x_0 = 0)$$

czas w O:
$$t = \gamma (t' + x'u/c^2) = \gamma (t' + v' t' u/c^2), (t_o = 0)$$

prędkość w O:

$$v_{x} = \frac{x}{t} = \frac{v't' + ut'}{t' + v't'(u/c^{2})} \implies v_{x} = \frac{v' + u}{1 + v'(u/c^{2})}$$

Przekształcanie prędkości - przykład



1.) Pojazd (O') porusza się z prędkością $u=\frac{1}{2}$ c i wysyła sygnał świetlny (c). Jaka jest prędkość tego sygnału w układzie O? Z Tr.Galileusza v = u+v'=1/2 c+c=1,5c

Z Tr. Lorentza
$$v = \frac{c + 0.5c}{1 + c(0.5c/c^2)} = \frac{1.5c}{1 + 0.5} = c$$

2). Pojazd porusza się z prędkością u= c i wysyła sygnał świetlny (c)

$$v = \frac{c+c}{1+c(c/c^2)} = \frac{2c}{1+1} = c$$

Jeśli $|\mathbf{v'} \mathbf{e_x}| = \mathbf{v_x'}$, $\mathbf{v'_y} = |\mathbf{v'} \mathbf{e_y}|$, $\mathbf{v'_z} = |\mathbf{v'} \mathbf{e_z}|$, (lecz nadal układ O' porusza się tylko wzdłuż Ox układu O), to:

$$v_{x} = \frac{v'+u}{1+v'(u/c^{2})}$$

$$v_{y} = v'_{y} \sqrt{1-\beta^{2}},$$

$$v_{z} = v'_{z} \sqrt{1-\beta^{2}}$$

Wniosek:

Ruch układu o kierunku Ox zmienia także prędkości ciała w Oy i Oz;

Odstęp czasu między zdarzeniami

W pewnym miejscu x' układu O' zachodzą dwa zdarzenia w chwilach t₁' i t₂'; zdarzenia te dostrzega obserwator w O w chwilach:

$$t_1 = \frac{t_1' + x_1'(u/c^2)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$
 oraz
$$t_2 = \frac{t_2' + x_1'(u/c^2)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Odstęp czasu między tymi zdarzeniami w poruszającym się O'

(liczony w O):
$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{lub } \Delta t = \Delta t' \gamma \qquad \longrightarrow \Delta t > \Delta t'$$

Wniosek: Upływ czasu w poruszającym się układzie jest wolniejszy (poruszający się zegar ∆t', chodzi'' wolniej)

Czas zegara układowego nazywa się czasem własnym
$$\tau \implies \Delta \tau < \Delta t$$
 $(\Delta t' = \Delta \tau)$

Konsekwencja 3

Dylatacja czasu (czas własny układu jest najkrótszy)

Odstęp czasu między zdarzeniami

W pewnym miejscu x' układu O' zachodzą dwa zdarzenia w chwilach t₁' i t₂'; zdarzenia te dostrzega obserwator w O w chwilach:

$$t_1 = \frac{t_1' + x_1'(u/c^2)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$
 oraz
$$t_2 = \frac{t_2' + x_1'(u/c^2)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Odstęp czasu między tymi zdarzeniami w poruszającym się O'

(liczony w O):
$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$
 lub $\Delta t = \Delta t' \gamma$
$$dt = dt' \gamma,$$

$$dt/dt' = \gamma$$

Czas zegara układowego (tu: t') nazywa się czasem własnym τ (dt'= $d\tau$) $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$

Jednoczesność

W układzie **O'** w pewnej chwili t_1 ' zachodzą <u>równocześnie</u> dwa zdarzenia w różnych miejscach x_1 ' oraz x_2 ';

Te zdarzenia obserwowane są w O w różnych chwilach

$$t_{1} = \frac{t_{1}' + x_{1}'(u/c^{2})}{\sqrt{1 - \frac{u^{2}}{c^{2}}}}$$
 oraz
$$t_{2} = \frac{t_{1}' + x_{2}'(u/c^{2})}{\sqrt{1 - \frac{u^{2}}{c^{2}}}}$$

Konsekwencja 4

względność pojęcia równoczesności oraz następstwa zdarzeń (*zjawisk bez związku przyczynowego*)

Masa i energia

Konieczna poprawka Einsteina na masę:
$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
wynosi
$$\frac{1}{\sqrt{v^2}} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

wynosi
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Wniosek: Masa relatywistyczna rośnie wraz z energią ciała

ale
$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

$$\implies m \cong m_o + \frac{1}{2} m_o v^2 (\frac{1}{c^2}) + \dots \quad \text{lub} \quad \text{mc}^2 = m_o c^2 + \frac{1}{2} m_o v^2 + \dots$$

Konsekwencja 5

Równoważność masy i energii: E= mc²

 mc^2 -energia całkowita; m_oc^2 - energia spoczynkowa ciała

Prawa dynamiki relatywistycznej

I. Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
 ; $\vec{p} = m\vec{v}$ (m=const)

W fizyce klasycznej (Newtona) masa ciała nie zależy od jego prędkości, więc pęd jest liniową funkcją prędkości;

masa relatywistyczna jest funkcją prędkości ciała:

$$m_r = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

więc pęd relatywistyczny jest nieliniową funkcją prędkości ciała

(v jest mierzone w tym samym układzie, co p)

$$\vec{p}_r = m_r \vec{v} = \frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wniosek: $\mathbf{p}_r \neq \mathbf{m}$ a

Prawa dynamiki relatywistycznej

stąd również

$$\vec{p}_r = \frac{m_o v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_r \vec{v}$$

$$\vec{p}_r = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{r}}{dt} = m_o \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

ie
$$d\tau = dt\gamma = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
 jest czasem własnym poruszającej się cząstki

Energia relatywistyczna

$$E_{c} = mc^{2} = \frac{m_{o}c^{2}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}, \qquad E_{kin} = (E_{c} - E_{o}) = \frac{m_{o}c^{2}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} - m_{o}c^{2} = m_{o}c^{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} - 1\right)$$

$$dla: v << c: E_{kin} = m_{o}c^{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} - 1\right) = m_{o}c^{2} (1 + \frac{1}{2}\frac{v^{2}}{c^{2}} + \dots - 1) \approx \frac{1}{2}m_{o}v^{2}$$

$$E_{kin} = \frac{m_{o}c^{2}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} - m_{o}c^{2}$$

Relatywistyczna energia i pęd $(m=m_o)$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p/E = v/c^2 \rightarrow v = pc^2/E \rightarrow v^2 = p^2c^4/E^2$$

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$E^{2} - \frac{p^{2}c^{4}}{E^{2}} \frac{E^{2}}{c^{2}} = m^{2}c^{4} \longrightarrow (E^{2} - p^{2}c^{2}) = m^{2}c^{4} \Rightarrow inv.$$

$$(\frac{E^2}{c^2} - p^2) = m^2 c^2$$

Transformacja pędu i energii

Ox'y'z' Oxyz,
$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$
, m=m_o

$$m\frac{dx}{d\tau} = \gamma \left(m\frac{dx'}{d\tau} + \beta mc\frac{dt'}{d\tau}\right)$$

$$m\frac{dy}{d\tau} = m\frac{dy'}{d\tau} \qquad m\frac{dz}{d\tau} = m\frac{dz'}{d\tau}$$

$$mc\frac{dt}{d\tau} = \gamma \left(mc\frac{dt'}{d\tau} + \beta m\frac{dx'}{d\tau}\right)$$

ale

$$m \frac{dx}{d\tau} = p_x;$$
 itd., $\frac{dt}{d\tau} = \gamma \rightarrow mc \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c}$

$$p_{x} = \gamma (p'_{x} + \beta \frac{E'}{c}),$$

$$p_{y} = p'_{y} \qquad p_{z} = p'_{z}$$

$$\frac{E}{c} = \gamma (\frac{E'}{c} + \beta p'_{x})$$

odpowiedniki współrzędnych $(x,y,z,ct) \rightarrow (p_x, p_y, p_z, E/c)$ transformują się tak samo – i w czterowymiarowej przestrzeni o analogicznych własnościach tworzą czterowektor energii-pędu,

Wielkości relatywistyczne energii i pędu spełniają prawa zachowania we wszystkich układach inercjalnych

Interwał

Z konsekwencji 1:

- czas i przestrzeń klasyczna są częściami jednej całości
 - czasoprzestrzeni;
- "zwykłe" wektory stają się czterowektorami (x,y,z,ct);
- "zwykła" odległość (metryka euklidesowa) $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$

przechodzi w interwał
$$\Delta s$$
: $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}$$

Jak transformuje się interwał przy przejściu z O do O'?

$$\Delta s^{2} = c^{2} \Delta t^{2} - \Delta x^{2} - \Delta y^{2} - \Delta z^{2};$$

podstawiając wzory tranformacyjne TL dostaje się:

$$\Delta s^2 = \Delta s^2 = inv.$$

Wniosek: Interwał jest niezmiennikiem w układach inercjalnych (TL)

Podobnie metryka w przestrzeni pędu i energii:

$$(E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = inv.$$
, $poniewa\dot{z} (E^2/c^2 - p^2) = m^2c^2$

Odległość w czasoprzestrzeni = interwał Δs jest niezmiennikiem tr.L,

Także długość dowolnego czterowektora a(x,y,z,ct) jest niezmiennikiem

$$a^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -\Delta s^2$$

Analogicznie jak w przestrzeni klasycznej, kwadrat długości wektora (*lub odległości 2 punktów*) w czasoprzestrzeni można wyrazić

$$|a|^2 = a \ a = \sum \Delta a_i^2 = \Delta a_x^2 + \Delta a_y^2 + \Delta a_z^2 = inv.$$

czterowektor położenia x_i:

$$x_i = (x,y,z, i ct)$$

bowiem:
$$|x|^2 = \sum \Delta x_i^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 t^2 = -\Delta s^2$$

analogicznie czterowektor energii-pędu:

$$p_{i} = (p_{x}, p_{y}, p_{z}, i [E/c])$$

$$|p|^{2} = \sum \Delta p_{i}^{2} = p_{x}^{2} + p_{y}^{2} + p_{z}^{2} - (E/c)^{2} \quad (= -m^{2}c^{4} = inv.)$$

Interwał $\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}$ może być rzeczywisty, lub urojony, lub równy zeru \Rightarrow decyduje o relacji wzajemnej zjawisk;

⇒ jest niezmiennikiem T.L., więc interwał rzeczywisty (urojony) jest rzeczywisty (urojony) w każdym inercjalnym UO;

Dla interwału rzeczywistego (zdarzenia potencjalnie powiązane):

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2 > 0,$$

możliwe jest więc $\Delta 1' = 0$ przy $\Delta 1 \neq 0$,

t.zn. zdarzenia w różnych miejscach O są w jednym miejscu O'

niemożliwe jest jednak $\Delta t' = 0$; jest to interwał czasopodobny

Dla interwału urojonego (zdarzenia bez wzajemnego wpływu)

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2 < 0$$

możliwe jest więc $\Delta t' = 0$ przy $\Delta t \neq 0$,

t.zn. zdarzenia niejednoczesne w O są jednoczesne w O';

niemożliwe jest jednak $\Delta l' = 0$; jest to interwał przestrzennopodobny

Jak transformuje się interwał przy przejściu z O do O'?

$$\Delta s^{2} = c^{2} \Delta t^{2} - \Delta x^{2} - \Delta y^{2} - \Delta z^{2};$$

podstawiając wzory tranformacyjne TL dostaje się:

$$\Delta s^2 = \Delta s^2 = inv.$$

Wniosek:

Interwał jest niezmiennikiem w układach inercjalnych (TL)

Związek między czasem własnym układu a interwałem

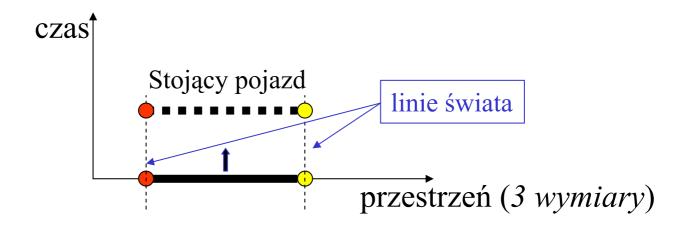
$$\Delta \tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

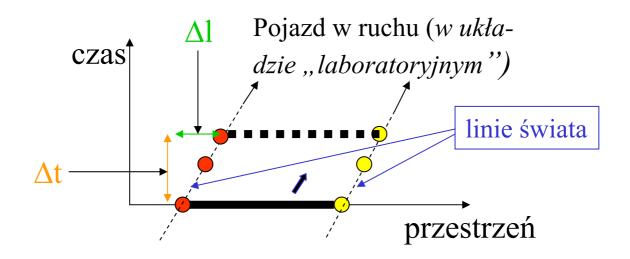
$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2} , \qquad \Delta \tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2} ,$$

$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2} , \qquad \Delta \tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2} ,$$

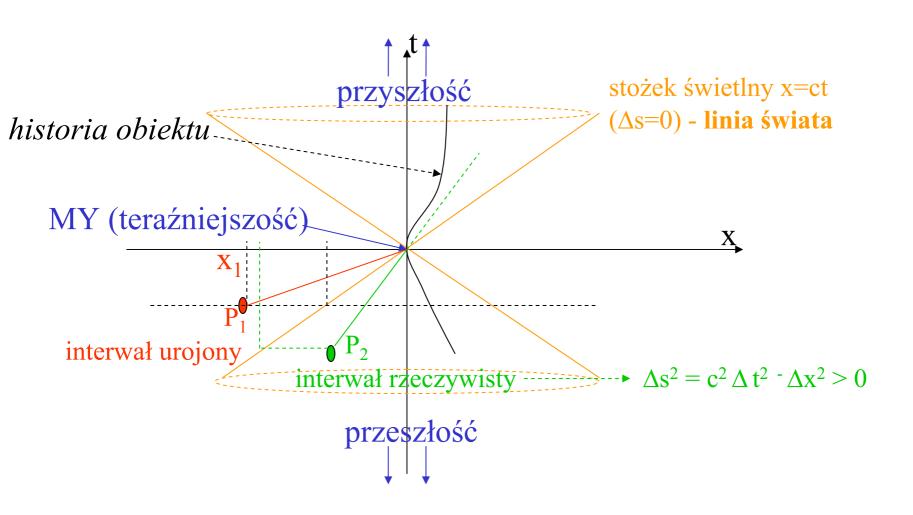
Wniosek: Czas własny układu jest również niezmiennikiem we wszystkich inercjalnych układach odniesienia

Hermann Minkowski: czasoprzestrzeń





Czasoprzestrzeń wokół nas



Konsekwencje teorii względności

- Przestrzeń i czas <u>nie są</u> niezależne, są powiązane T.L.
- Stała prędkość światła, niezależna od ruchu
 c (w próżni) to prędkość graniczna
- niezmienniczość praw fizyki w układach inercjalnych poruszających się z dowolną szybkością
 niezmienniczość równań Maxwella;
 "korekta" równań dynamiki Newtona;

```
(dla v_I = 8 \text{ km/s} \text{ poprawka } \Delta m < 1/2 \text{ } 000 \text{ } 000)
```

- względność pojęcia równoczesności (zjawisk bez związku przyczynowego)
- dylatacja czasu
 Δτ<Δt' upływ czasu własnego jest krótszy (czas płynie wolniej) niż czasu układu poruszającego się
- skrócenie odległości Fitzgeralda-Lorentza

Filozoficzne konsekwencje teorii względności

- Lekcja pokory ograniczoność percepcji świata "wszystko może okazać się błędne!"
- Granice intuicyjnego rozumienia zjawisk (paradoks bliźniąt)
- * Znaczenie symetrii praw fizyki