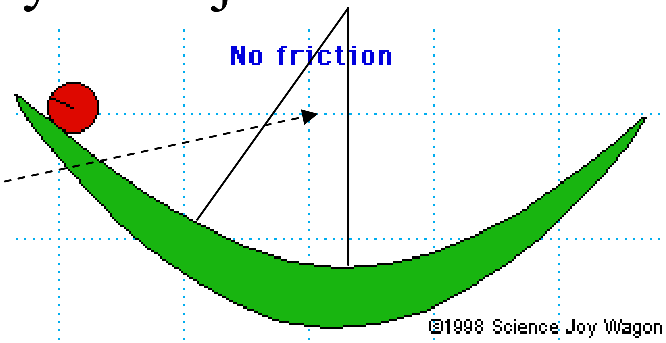
FALE

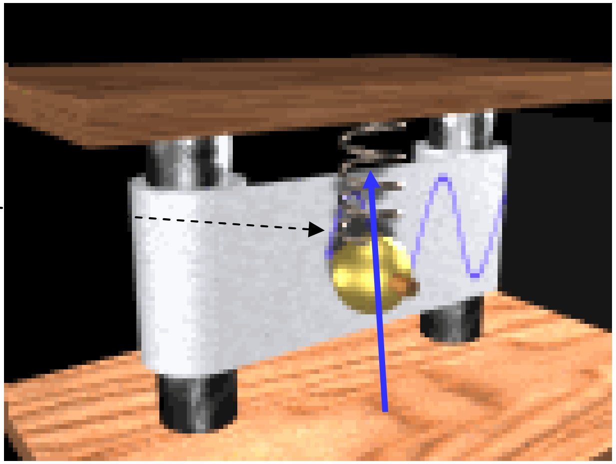
Drganie ⇨ dynamiczne zaburzenie równowagi układu odbywa się w pewnym miejscu

Drgania - przykłady:

$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega_o t + \alpha),$



$y(t) = x_m \cos(\omega_o t + \varphi),$



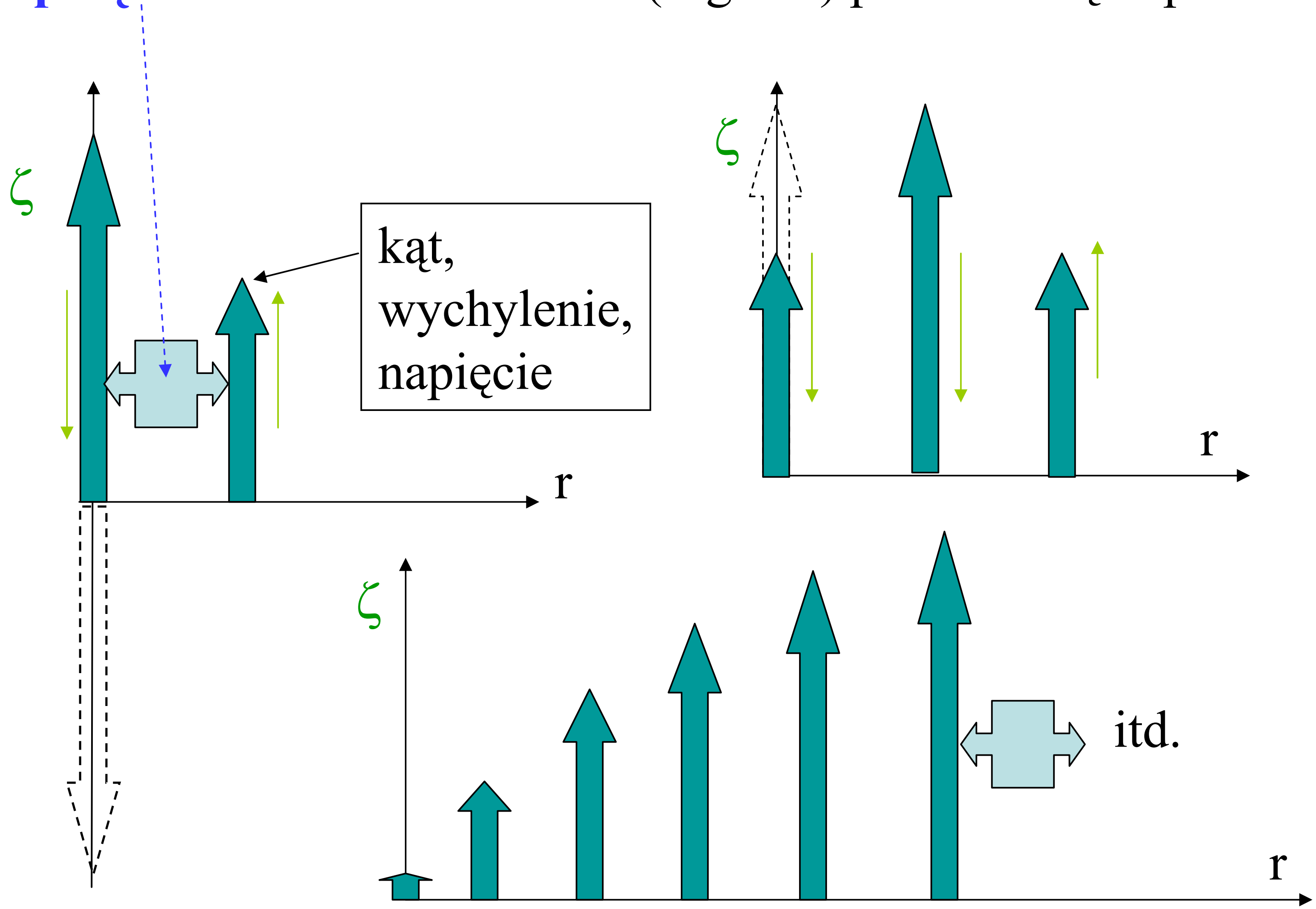
także:

$p(t) = p_m \cos(\omega t + \varphi),$

$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi),$ itd.,

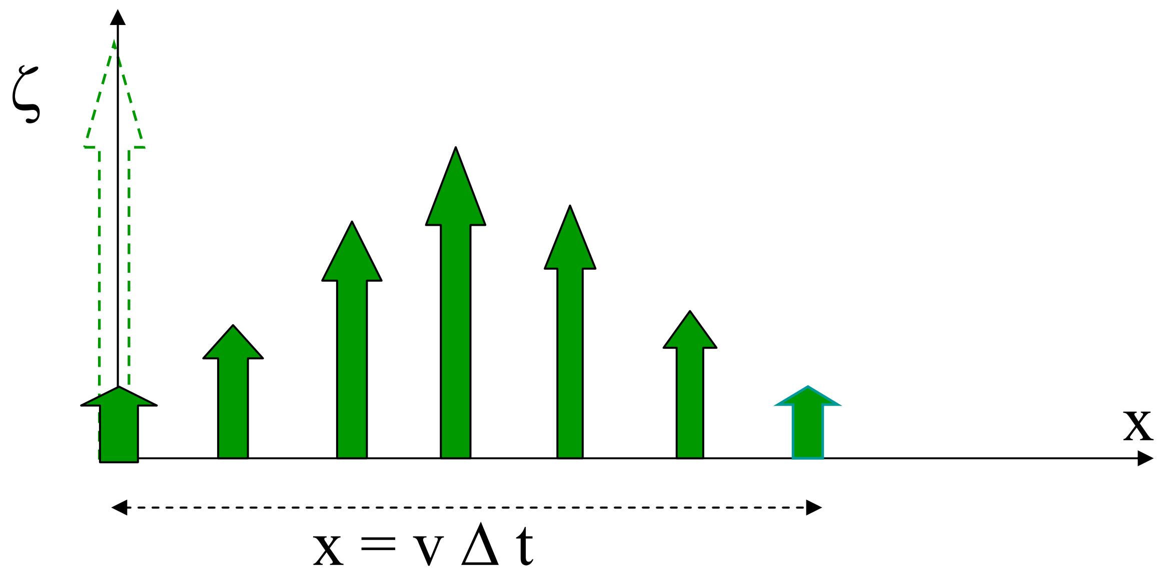
ogólnie zaburzenie : $\varsigma(t) = \varsigma_m \cos(\omega t + \varphi),$

Sprzężenie → zaburzenie (drganie) przenosi się w przestrzeni

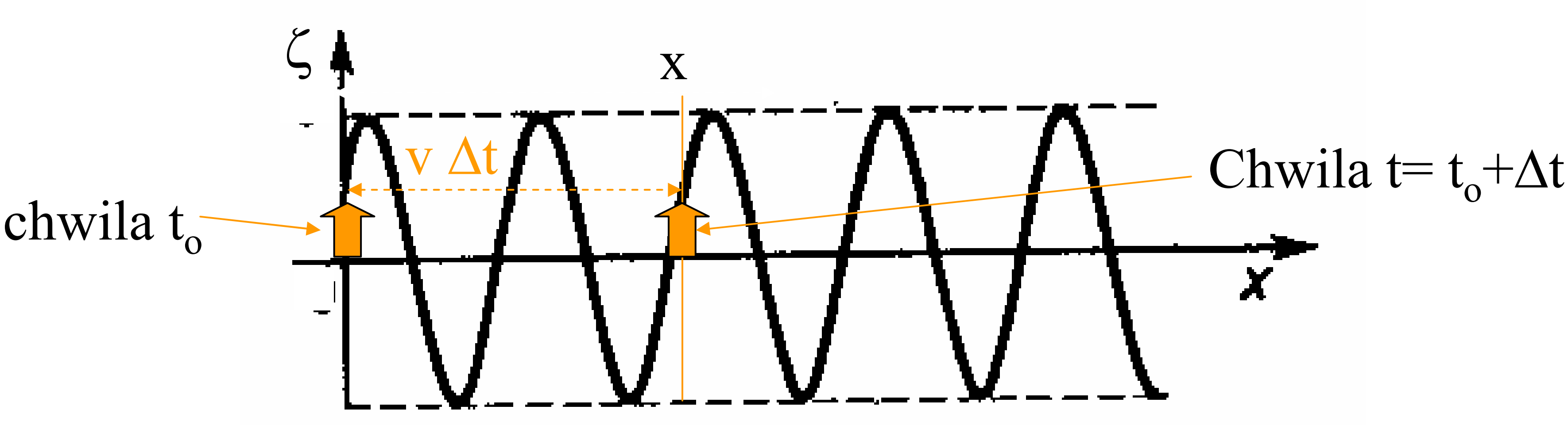


Zaburzenie rozchodzące się w przestrzeni = fala

Propagujące drganie harmoniczne → fala harmoniczna



Niech drganie propaguje w kierunku Ox,
i nie zależy od pozostałych współrzędnych y, z;



Jeśli <u>propagujące</u> drganie z prędkością v : $x = v\,\Delta t$

w początku układu współrzędnych $x = 0$ jest drganiem harmonicznym

$$\varsigma(x=0,\, t) = a\cos(\omega\, t + \varphi),$$

przy czym w chwili t_o

$$\varsigma(x=0,\, t_o) = \varsigma_o = a\cos(\omega\, t_o + \varphi),$$

to w innym dowolnym punkcie x takie drganie (ς_o) pojawi się po czasie

$$\Delta t = x/v,$$

więc ς w miejscu x będzie w czasie t takie,

jakie było ς_o w początku układu $x=0$ wcześniej, tj. w chwili

$$t_o = (t - \Delta t) = (t - x/v),$$

czyli:

$$\varsigma(x,\, t) = \varsigma_o\{x=0,\;\; t_o=(t- x/v)\}$$

Ponieważ

$$\varsigma_o = a\cos[\omega t_o + \varphi] \quad (\textit{drganie w } x=0),$$

i

$$t_o = (t - x/v) \ ,$$

$\Longrightarrow$ $$\varsigma(x, t) = a\cos[\omega(t - x/v) + \varphi],$$

$$\varsigma(x, t) = a\cos[\omega t - x\,(\omega/v) + \varphi],$$

Oznaczenie: $\omega/v = \left(= \dfrac{2\pi / T}{v} = 2\pi/Tv\right) = 2\pi/\lambda = k$ - *liczba falowa*,

$\Longrightarrow$ $$\boxed{\varsigma(x,t) = a\cos[\omega t - kx + \varphi]}$$ - równanie fali

Definicje podstawowe

Definicja 1

Falą nazywamy zaburzenie pewnej wielkości $\varsigma(x,y,z,t)$, które rozchodzi się w przestrzeni z prędkością v

fala poprzeczna - zaburzenie przestrzennie zorientowane jest prostopadle do kierunku propagacji fali,

fala podłużna - zaburzenie jest wzdłuż kierunku propagacji

Definicja 2

powierzchnią falową jest zbiór punktów przestrzeni objętej falą, w których zaburzenie ma jednakową charakterystykę (fazę)

fala płaska - powierzchnią falową jest płaszczyzna

fala kulista - powierzchnia falowa jest sferyczna

Definicja 3

Długością fali periodycznej λ jest odległość, którą przebywa powierzchnia falowa w czasie równym jednemu okresowi,

zatem $\lambda = v\,T,$

lub $\lambda f = v \quad (T = 1/f)$

Równanie harmonicznej fali płaskiej
propagującej wzdłuż osi x

$$\varsigma(x,t) = a \cos[\omega t - kx + \varphi], \qquad k=\omega/v ,$$

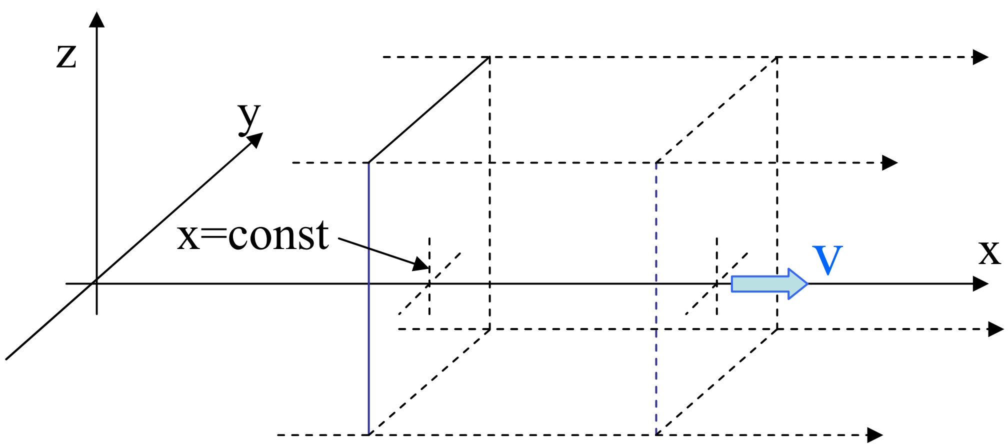
powierzchnią falową tej fali jest zbiór wszystkich punktów takich, że

faza: $[\omega t - kx + \varphi] = \text{const}$

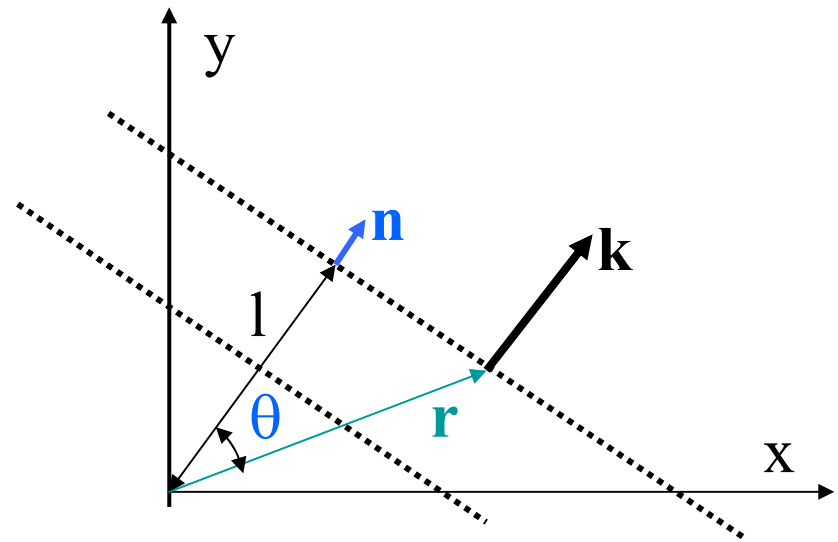
tj. w ustalonej chwili $t = const$ $\Rightarrow$ jednakowe zaburzenie ς jest dla $x = const$, ➡ płaszczyzna;

szybkość (*przestrzennej*) zmiany tej płaszczyzny (przesuwania się fazy) to: $d(faza)/dt = \omega - k\,(dx/dt) = 0$

$\Rightarrow$ $dx/dt = \boxed{\omega/k = v}$ - prędkość fazowa



Propagacjafali płaskiej w dowolnym kierunku **n** (l) (*fala niettłumiona*)



$\varsigma(l,t) = a \cos[\omega t - k\, l + \varphi]$,

$\varsigma(r,t) = a \cos[\omega t - k\, r \cos\theta + \varphi]$,

k –liczba falowa,

$\vec{\mathbf{r}}$ – promień wodzący

jeśli przyjmiemy $\vec{\mathbf{k}} = k\,\vec{\mathbf{n}}$,

n – wersor kierunkowy fali,

$\Rightarrow$ $\varsigma(r,t) = a \cos[\omega t - \mathbf{kr} + \varphi]$,

k *jest* ***<u>wektorem</u> falowym*** *normalnym do powierzchni falowej*

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

więc $\varsigma(r,t) = \mathrm{Re}\{a\, e^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi)}\}$,

lub $\varsigma(r,t) = a\, e^{i\varphi}\, e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$ (*cz. rzecz.*)

W przypadku tłumienia

amplituda $a = a_o e^{-\gamma x}$,

$\gamma > 0$ – współczynnik tłumienia

$$\longrightarrow \quad \varsigma(x,t) = a_o e^{-\gamma x} \cos[\omega t - kx + \varphi],$$

lub dla dowolnego kierunku propagacji ($\mathbf{k}$):

$$\varsigma(r,t) = a_o e^{-(\gamma \mathbf{k}\,\mathbf{r} - i\varphi)} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

Równanie falowe

$$\varsigma(r,t) = a\cos[\omega t - \mathbf{kr} + \varphi],$$

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2} = -\omega^2\, a\cos(\omega t\text{-}\mathbf{kr}+\alpha) = -\omega^2\, \varsigma,$$

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} = -k_x^{\,2}\, a\cos(\omega t\text{-}\mathbf{kr}+\alpha) = -k_x^{\,2}\, \varsigma,$$

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} = -k_y\, a\cos(\omega t\text{-}\mathbf{kr}+\alpha) = -k_y^{\,2}\, \varsigma,$$

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial z^2} = -k_z\, a\cos(\omega t\text{-}\mathbf{kr}+\alpha) = -k_z^{\,2}\, \varsigma,$$

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial z^2} = -(k_x^{\,2}\varsigma + k_y^{\,2}\varsigma + k_z^{\,2}\varsigma) = -\,k^2\,\varsigma = -\frac{1}{v^2}\,\omega^2\,\varsigma,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2}$$

$-\,\omega^2\varsigma,$

$$\boxed{\Delta\varsigma = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2}}$$

Δ - *operator Laplace'a* (*laplasjan*)

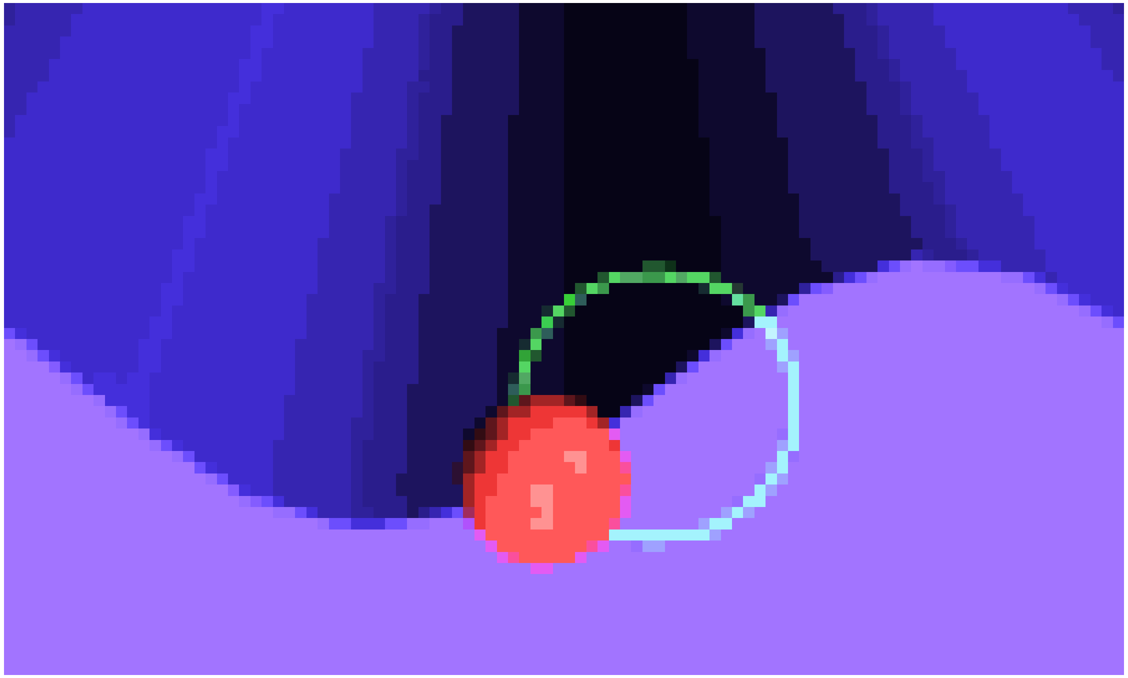
Jedno z rozwiązań (*już znane*)

$\varsigma(r,t) = a\, e^{-i\varphi}\, e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$ - *równanie fali harmonicznej, płaskiej*

Również każda funkcja (*różniczkowalna*) o postaci:

$$f(\omega t - \mathbf{kr})$$

opisuje pewną falę.



Energia harmonicznej fali płaskiej (sprężystej)

$\varsigma(x,t) = a \cos[\omega t - kx + \varphi]$

– opisuje wychylenie cząstek ośrodka

$\Delta W_{kin} = 1/2\,(\Delta m)\,(v)^2 = 1/2\,(\rho\Delta V)\,(d\varsigma/dt)^2, \Rightarrow$

$\Delta W_{kin} = 1/2\,\rho\Delta V\,(a\,\omega)^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi),$

$w_{kin} = \Delta W_{kin}/\Delta V = 1/2\,\rho\,(a\,\omega)^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi),$

Dla drgań harmonicznych nietłumionych

$E_c = E_{kin} + U = 2 < E_{kin} >$ [*lub* $E_c = (E_{kin})_{max}$]

Zatem

$w_c = \rho\,(a\,\omega)^2 <\sin^2(\omega t - kx + \varphi)>,$

$< w_c > = 1/2\,\rho\,\underline{a^2\,\omega^2}$

Definicja 4

Strumień energii Φ przez powierzchnię S jest to ilość energii przenoszona przez tę powierzchnię w jednostce czasu

$$\Phi = dW/dt \qquad [\text{Wat}]$$

Definicja 5

Natężeniem fali I nazywamy uśrednioną powierzchniową gęstość prostopadłego strumienia energii $\Phi_\perp$

$$I = \langle d\Phi/dS_\perp \rangle \quad [\text{W/m}^2]\ ;$$

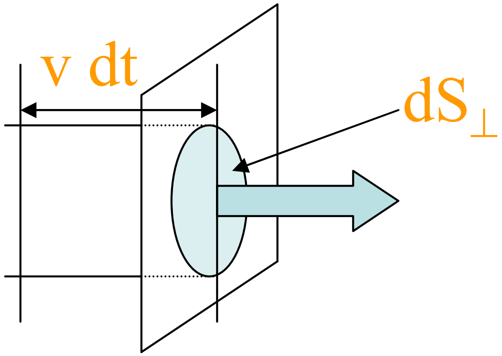
$$\langle\Phi\rangle = \int_S \mathbf{I}\, d\mathbf{S}$$

$$I = \langle dW/(dS_\perp dt)\rangle,$$

ale $$dW = w\, dV = w\, dS_\perp v\, dt$$

$$\vec{\mathbf{I}} = \langle w_c \rangle \vec{\mathbf{v}}$$

zatem $$\langle\Phi\rangle = \int_S \langle w_c\rangle\, \mathbf{v}\, d\mathbf{S}$$



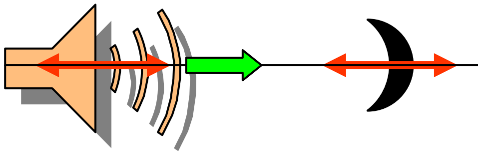
EFEKT DOPPLERA

(dla fal sprężystych – np. dźwiękowych)

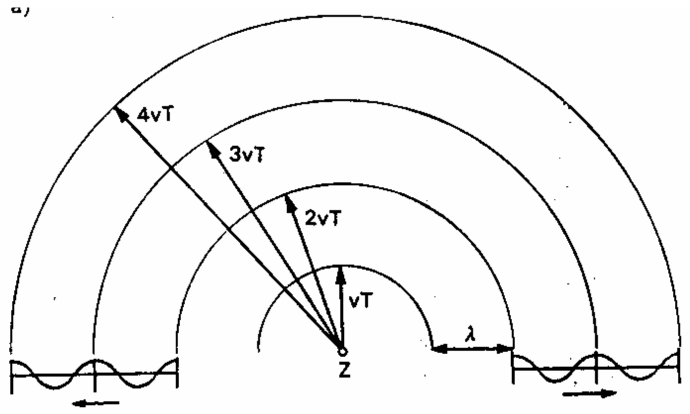
Niech źródło dźwięku (z) i odbiornik (o) poruszają się wzdłuż łączącej je prostej Ox z prędkościami

$(+\,v_z)$ gdy się zbliżają i $(-v_z)$ gdy się oddalają,

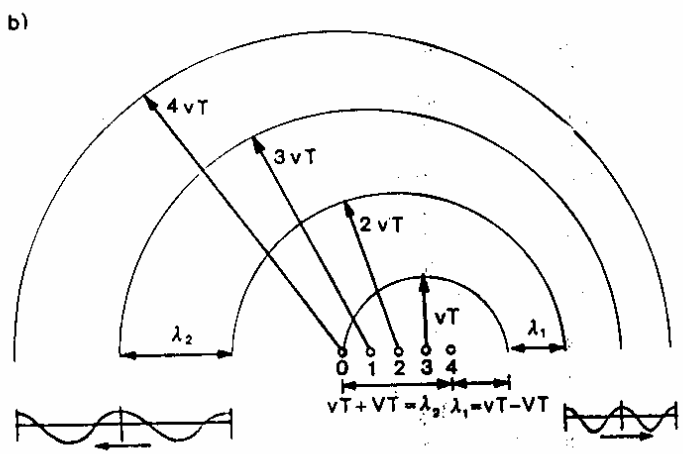
$(+\,v_o)$ ” $(-v_o)$ ”



t.zn $v_z > 0$ gdy źródło porusza się zgodnie z kierunkiem dźwięku i $v_z < 0$ gdy przeciwnie; odwrotnie dla odbiornika



źródło stojące

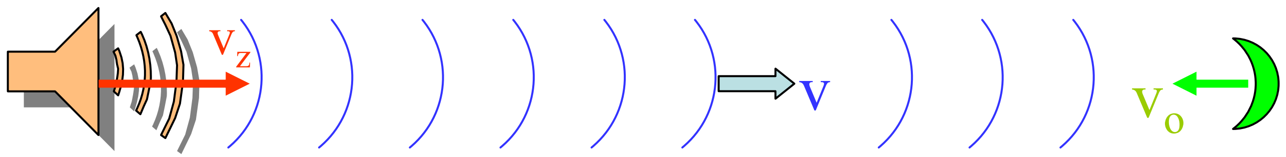


źródło w ruchu

Źródło o prędkości $(+\ v_z)$ i częstotliwości (f_z) wzbudza w ośrodku falę biegnącą z prędkością (v) o długości (λ') :

$$\lambda' = (T)(v - v_z) = (1/f_z)(v - v_z)$$

[$(v - v_z)$ – *prędkość fali względem poruszającego się źródła*]



Odbiornik poruszając się z prędkością $+\ v_o$ względem ośrodka odbiera f_o drgań w ciągu 1 sekundy:

$$f_o = \frac{\Delta s_{1s}}{\lambda'} = \frac{1[s]}{\lambda'}(v + v_o) \qquad (f = 1/T = v/\lambda)$$

Stąd

$$f_o = f_z \frac{(v + v_o)}{(v - v_z)}$$

$$f_o = f_z \frac{(v + v_o)}{(v - v_z)}$$

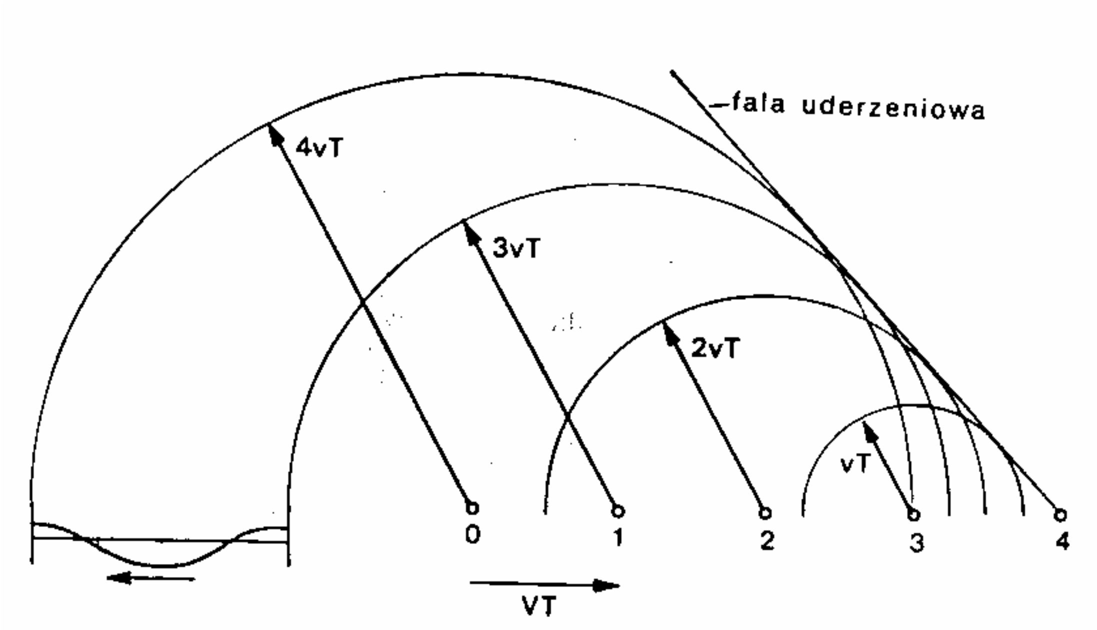
Wniosek

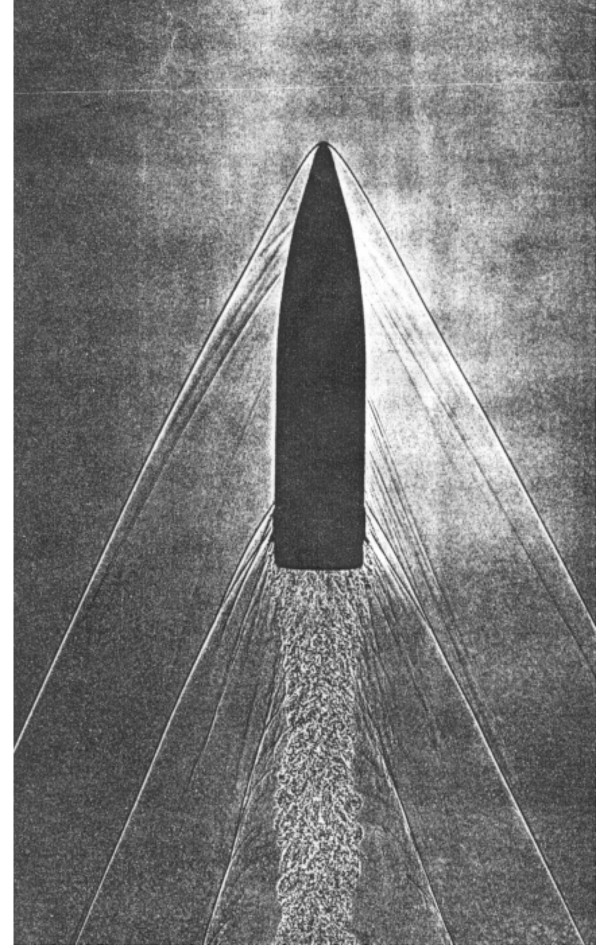
W przypadku, gdy odbiornik i źródło **zbliżają się** ($+v_o$, $+v_z$), odbierana częstotliwość f_o jest wyższa od częstotliwości emitowanej (źródła) – **dźwięk jest wyższy**

gdy odbiornik i źródło **oddalają się** ($-v_o$,$-v_z$), odbierana częstotliwość f_o jest niższa od emitowanej – **dźwięk jest niższy**

a dla $\mathbf{v = v_z}$ **?**

Fala uderzeniowa





Uwaga 4

Dla innych kierunków prędkości odbiornika i źródła ($\mathbf{v_o}$, $\mathbf{v_z}$) do wzoru należy wstawić rzuty tych prędkości na wspólną oś na której leżą

Uwaga 5

Efekt Dopplera obserwowany jest również dla fal świetlnych, jednak zależność na zmianę częstotliwości jest inna

Fale stojące

Superpozycja 2 fal płaskich

$\varsigma_1 = a_1 \cos[\omega t - kx + \varphi_1]$, $\varsigma_2 = a_2 \cos[\omega t + kx + \varphi_2]$,

biegnących w przeciwne strony (+x) i (- x):

niech $a_1 = a_2$

$\varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2 = 2a \{\cos[kx + (\varphi_1 - \varphi_2)/2] \cos[\omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2]\}$

przesunięcie początku układu Oxt o $\Delta x = -(\varphi_1 - \varphi_2)/(2k)$

i $\Delta t = -(\varphi_1 + \varphi_2)/(2\omega)$

$\varsigma = 2a \cos(kx) \cos(\omega t)$

lub $\varsigma = [2a \cos(2\pi x/\lambda)] \cos(\omega t)$

gdzie amplituda $|2a \cos(2\pi x/\lambda)|$

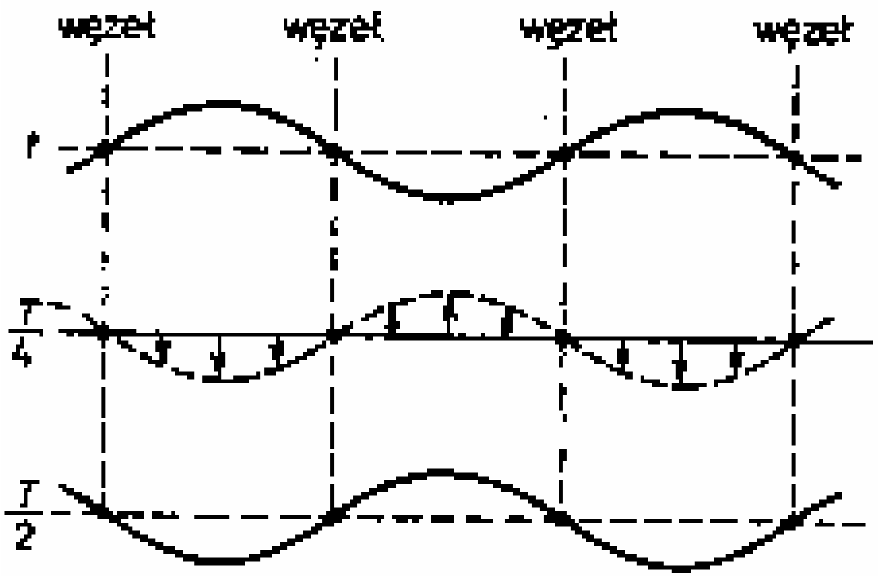
brak związku $(x \longleftrightarrow t)$ *!* $\Rightarrow$ $v=0$

amplituda $|2a \cos(2\pi x/\lambda)|$

- ma wartość maksymalną dla $(2\pi x/\lambda) = \pm n\pi$ ($n = 0,1,2,3,\ldots$)
  czyli dla $x_s = \pm n(\lambda/2)$ (*strzałki*)

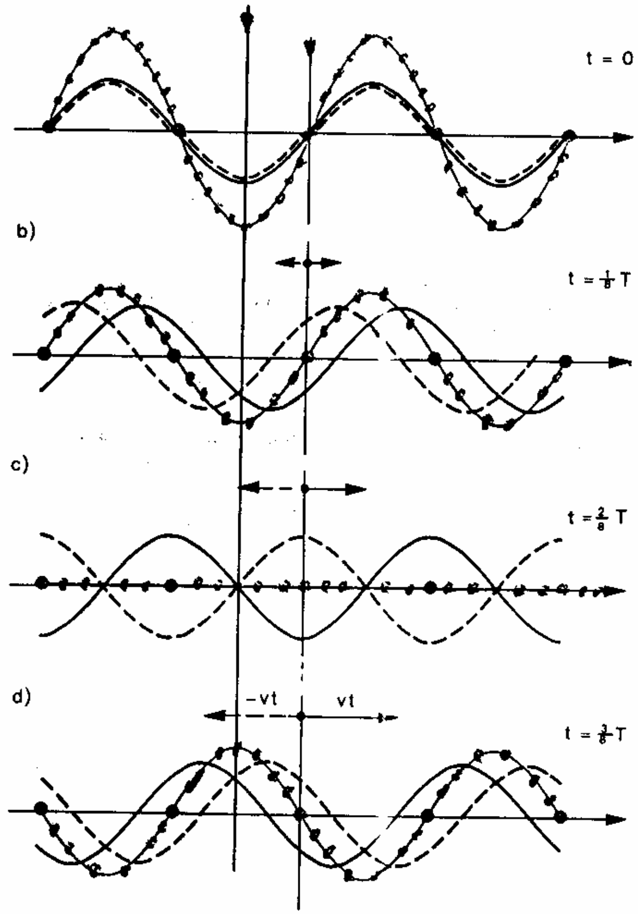
- i minimalną dla $2\pi x/\lambda = \pm(n+1/2)\pi$ ($n = 0,1,2,3,\ldots$)
  $x_w = \pm(n + 1/2)\lambda/2$ (*węzły*)

niezależnie od chwili t !



Uwaga

1. Fala stojąca nie przenosi energii (v=0).
2. W fali stojącej następuje cykliczna zamiana energii kinetycznej na potencjalną i odwrotnie
3. Chwilowy strumień energii fali przepływa od węzła do strzałki i z powrotem, ale średni strumień jest zerowy



Fala stojąca w strunie

Struna zamocowana na obu końcach - powstają tam odbicia i węzły fali stojącej, stąd długość struny l musi spełniać warunek :

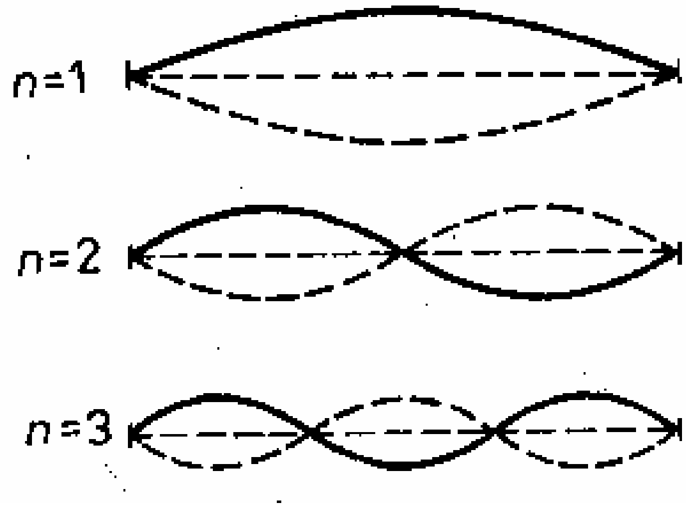
$$l = n \lambda/2, \quad (n = 1,2,3,...)$$

w strunie mogą pojawiać się tylko takie długości fal, że:

$$\lambda_n = 2l/n$$

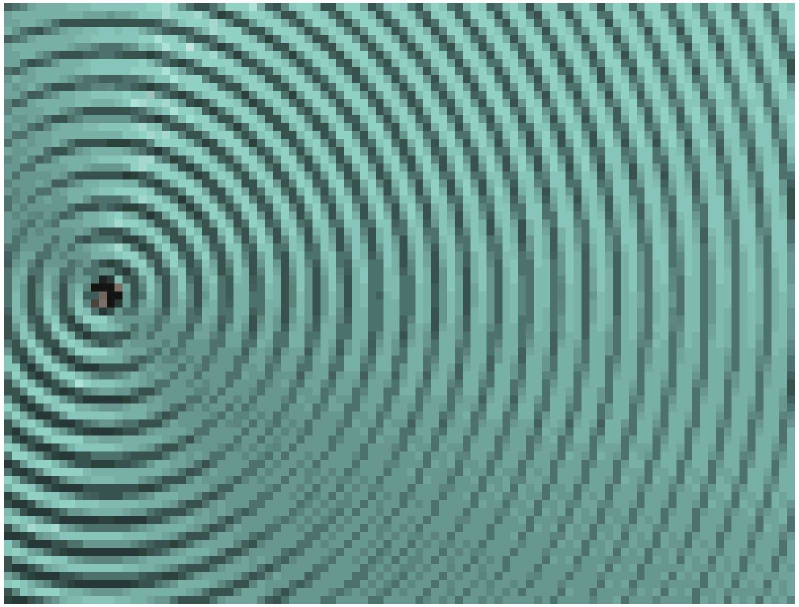
lub częstotliwości: $f_n = v/\lambda_n$, $\Rightarrow$ $f_n = n\dfrac{v}{2l}$,

(v-*prędkość fali*)



Dźwięk

- Jest falą sprężystą podłużną lub poprzeczną o częstotliwości 16÷20 000 Hz [1/s]
- Takie fale o częstotliwościach mniejszych od 16 Hz to **infradźwięki**
- Powyżej 20 000 Hz to **ultradźwięki i hiperdźwięki**

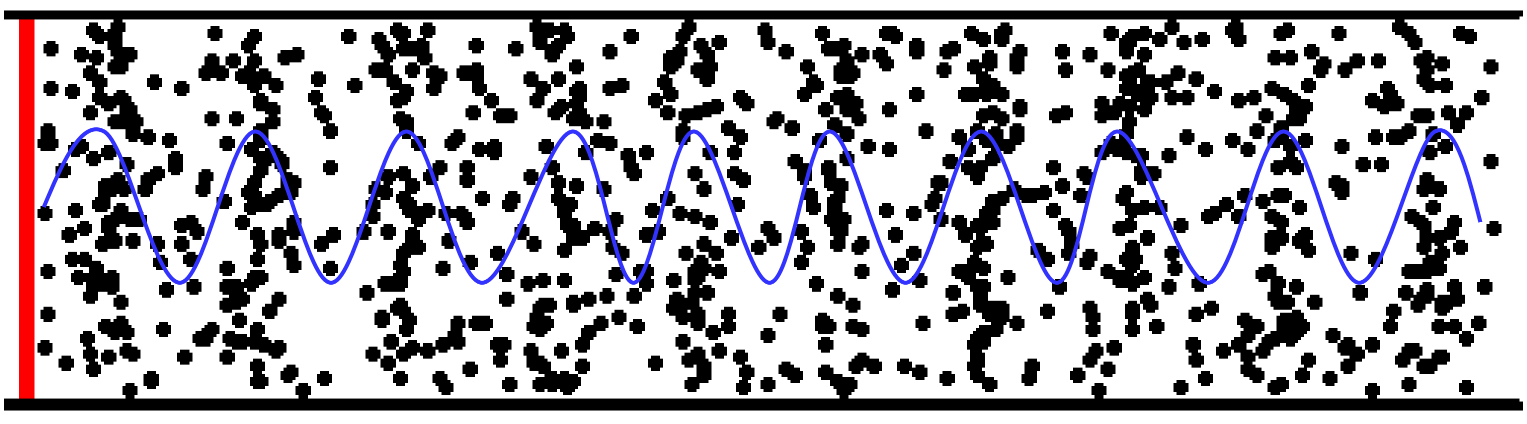


Prędkość dźwięku w powietrzu

$$v = \sqrt{\chi RT/M},$$

$\chi = C_p/C_v$, M=*masa molowa gazu*

dla T= 290K ⟶ v = 340 m/s

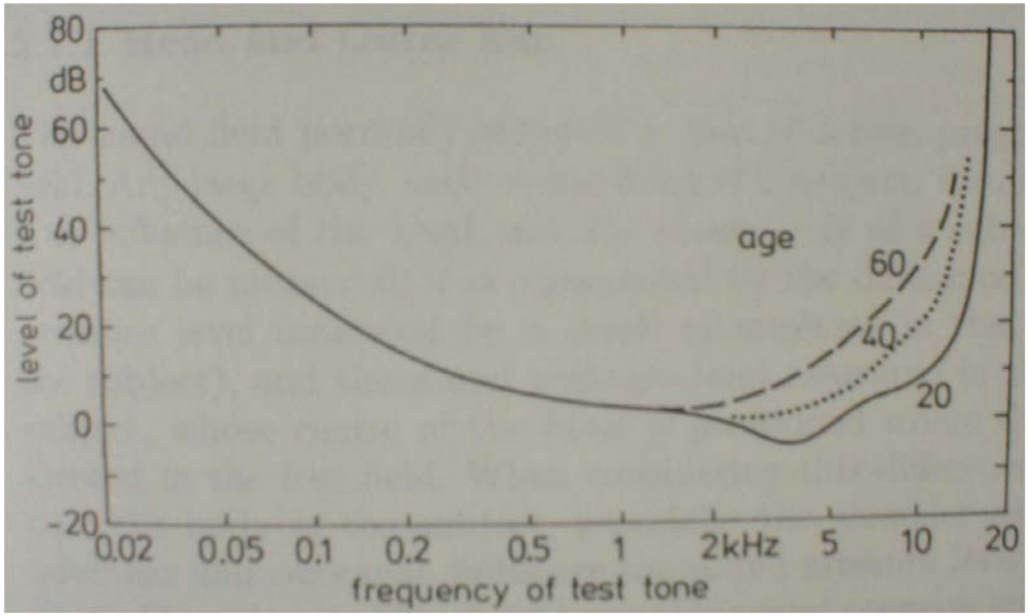


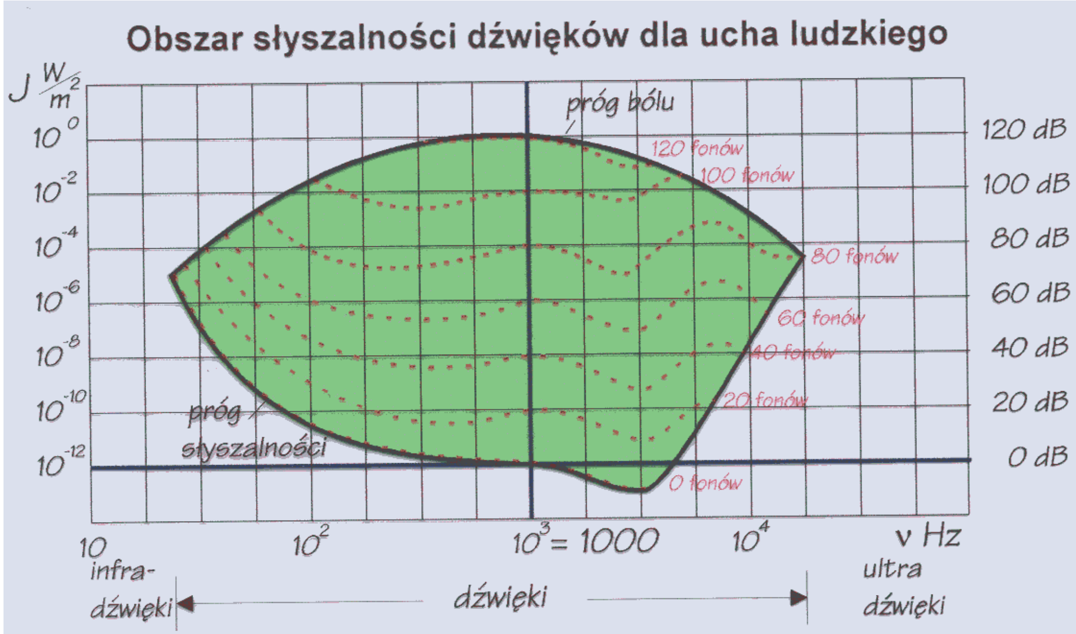
Próg słyszalności to natężenie $I_o = 10^{-12}$ W/m
(*w zakresie 1000 Hz÷4000 Hz*)

Poziom głośności $L = \lg (I/I_o)$ [B] (*beli*)
lub $L = 10 \lg (I/I_o)$ [dB] (decy*beli*)

Podobnie natężenie względne (stosunek dwóch natężeń)
$L_{12} = 10 \lg (I_1/I_2)$ [dB] (decy*beli*)

Słyszalność w zależności od wieku

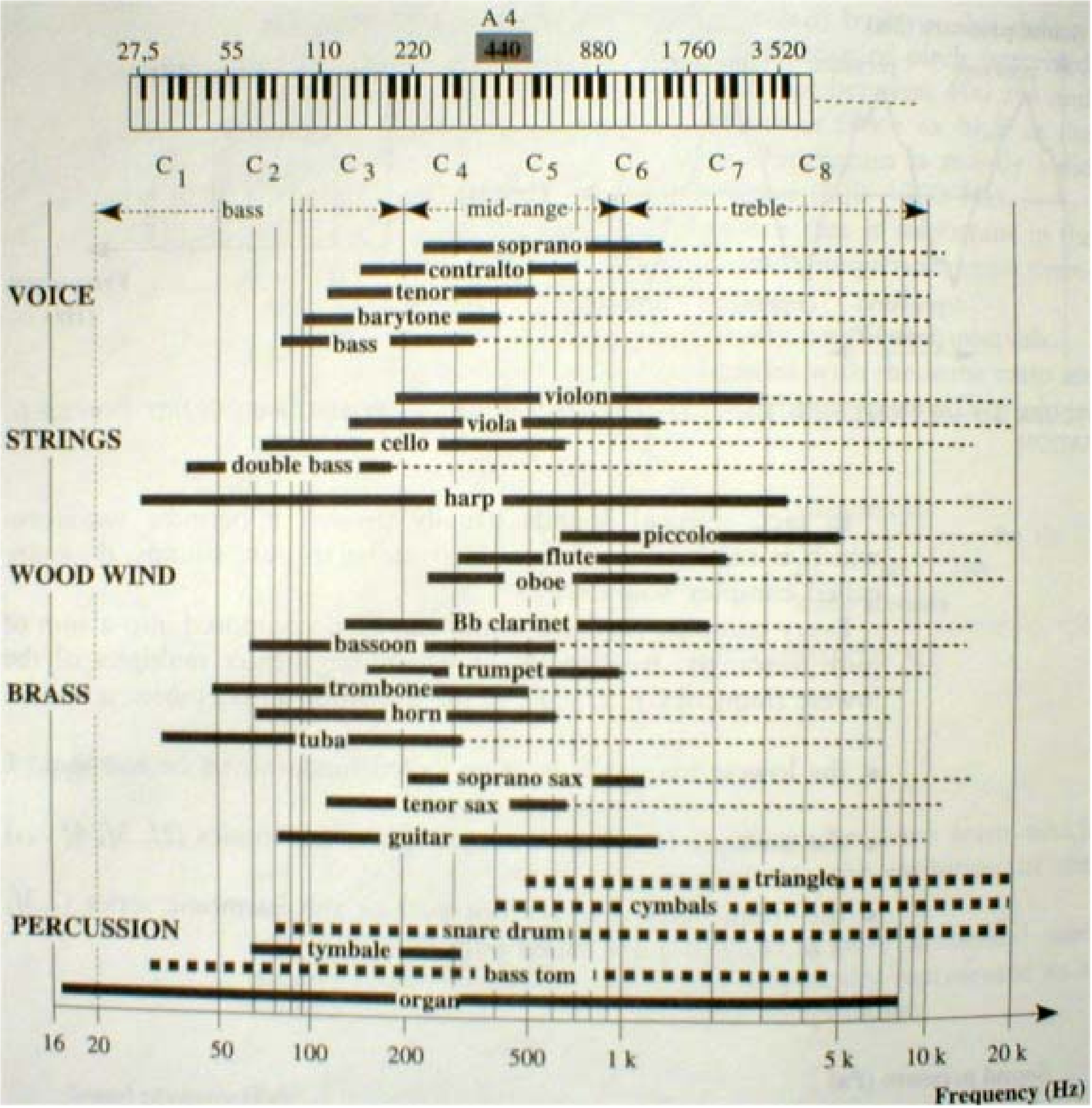




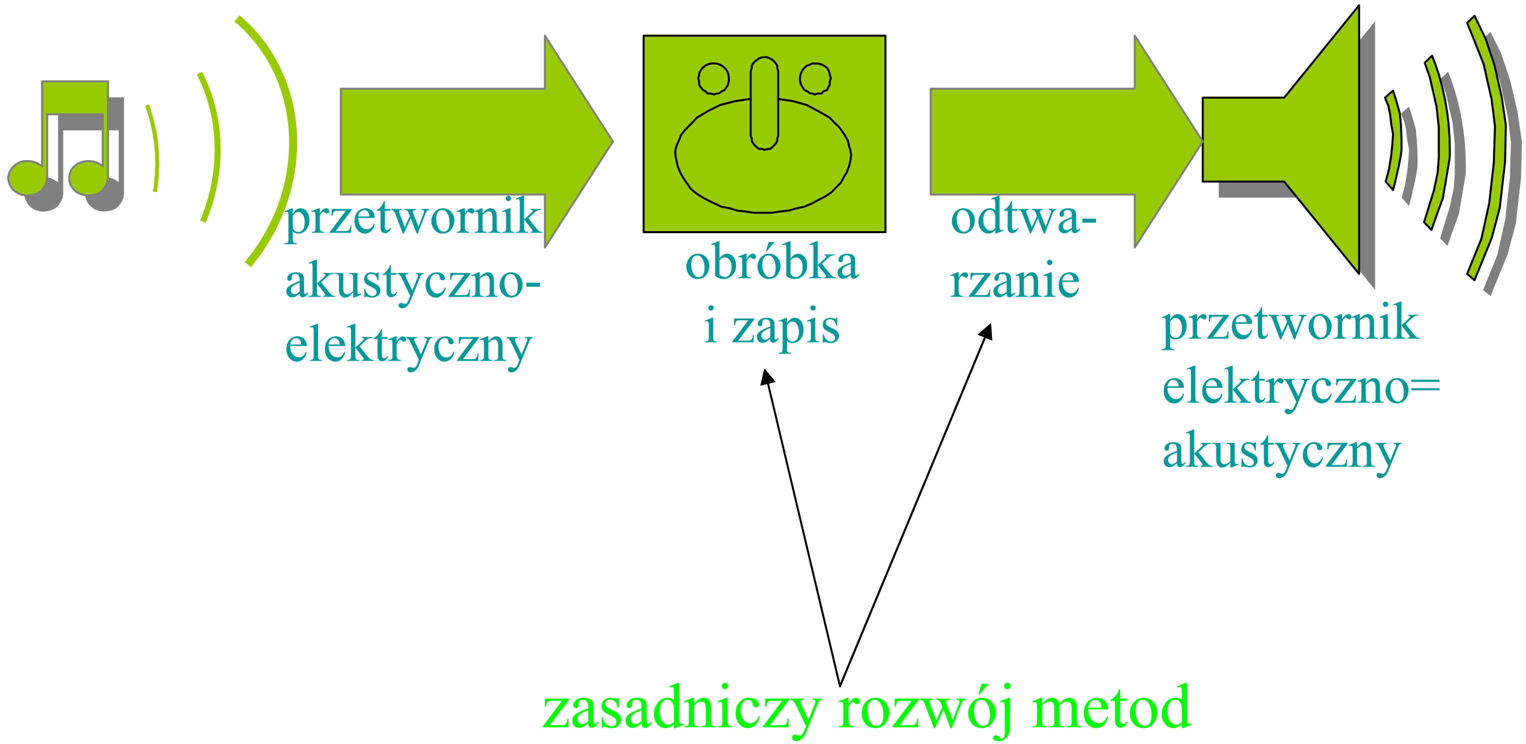
Przykłady różnych dźwięków

Źródło dźwięku (odległość od źródła)	Natężenie I (W/m^2)	Poziom natężenia L (dB)
Szept (1m)	10^{-12}	0
Niegłośna rozmowa (1 m)	10^{-8}	40
Krzyk (1 m)	10^{-5}	70
Orkiestra symfoniczna (5 m)	10^{-4}	80
Młot pneumatyczny (1 m)	10^{-2}	100
Ryk odrzutowca (20 m)	1	120

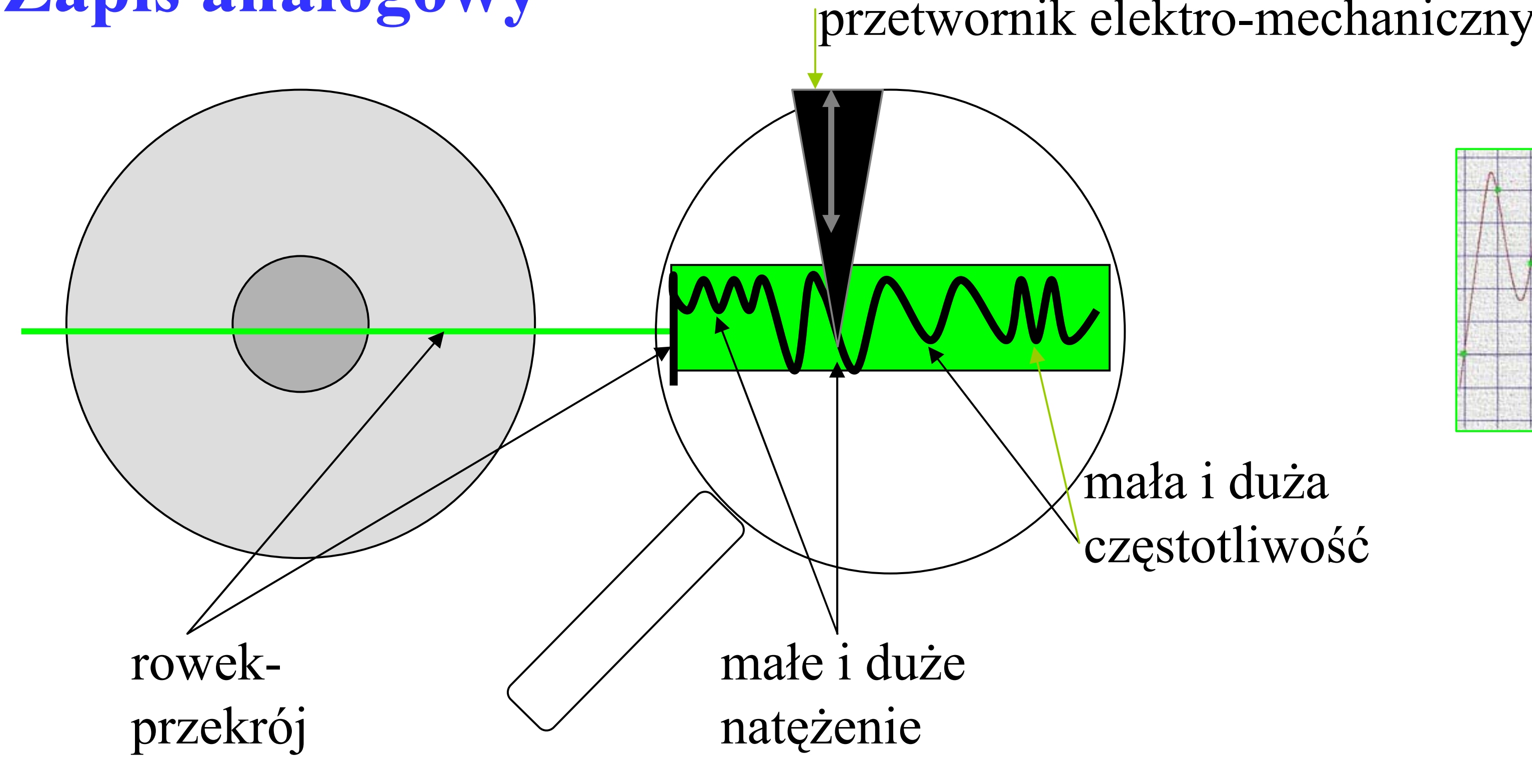
Zakresy częstotliwościowe instrumentów muzycznych

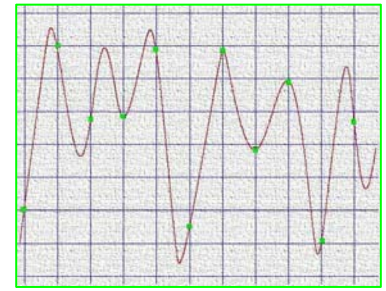


Technika rejestracji dźwięku (zapis dźwięku)



Zapis analogowy





fala
dźwiękowa

Odtwarzanie

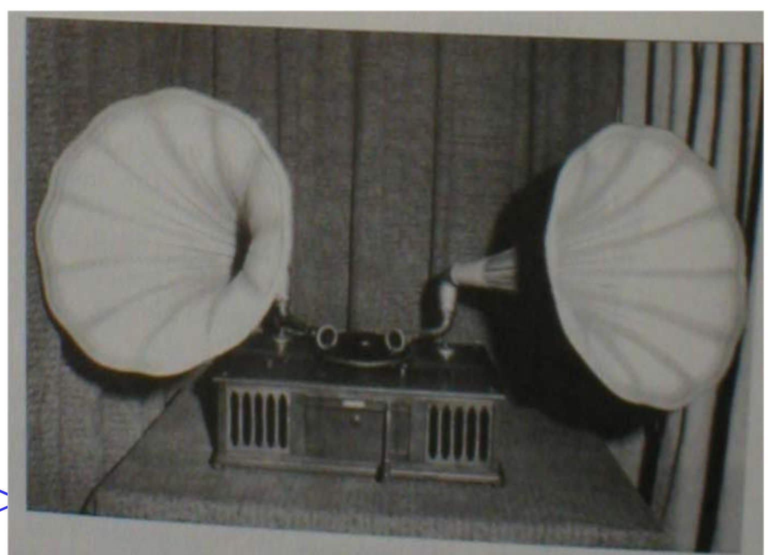
dynamika:

~56 dB

ograniczenie

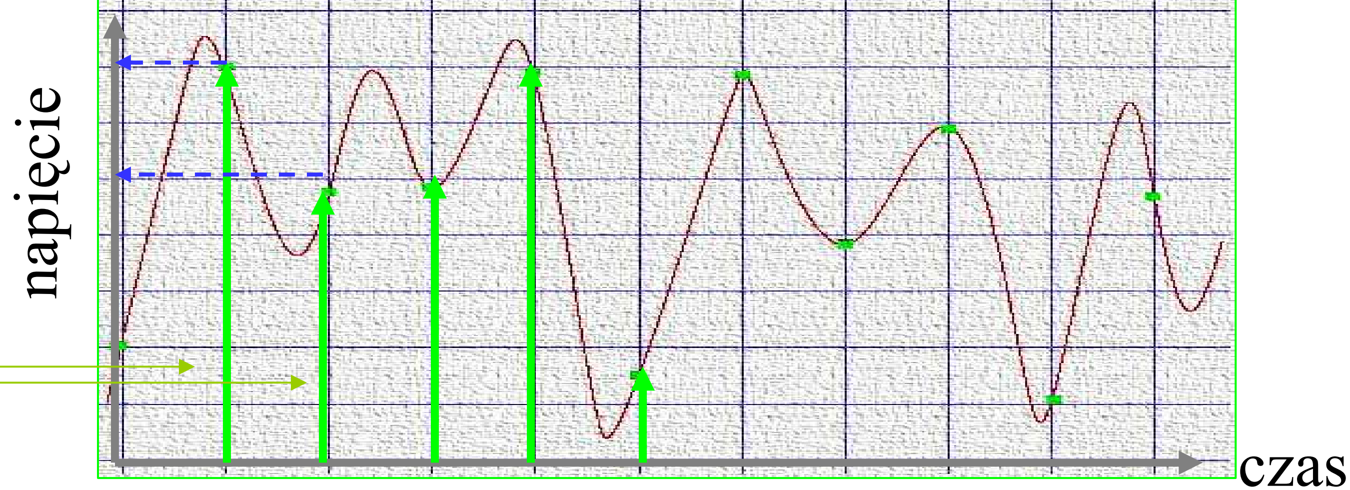
częstotliwości:

<25Hz,15 kHz>



Zapis cyfrowy

„próbkowanie” – chwilowy pomiar napięcia



Przetwornik AD 8-bitowy: napięcie → liczba binarna ośmiopozycyjna:

0	0	0	0	0	0	0	0

→

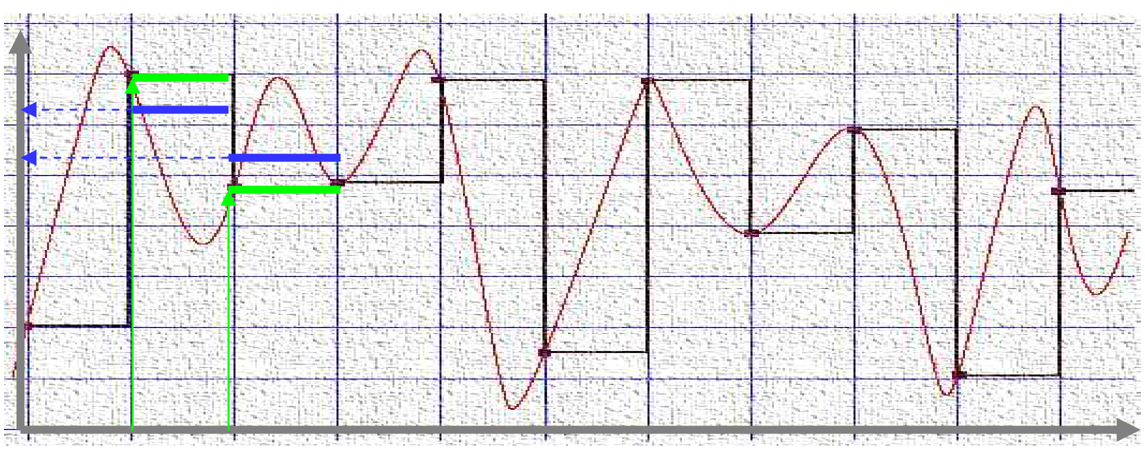
1	1	1	1	1	1	1	1

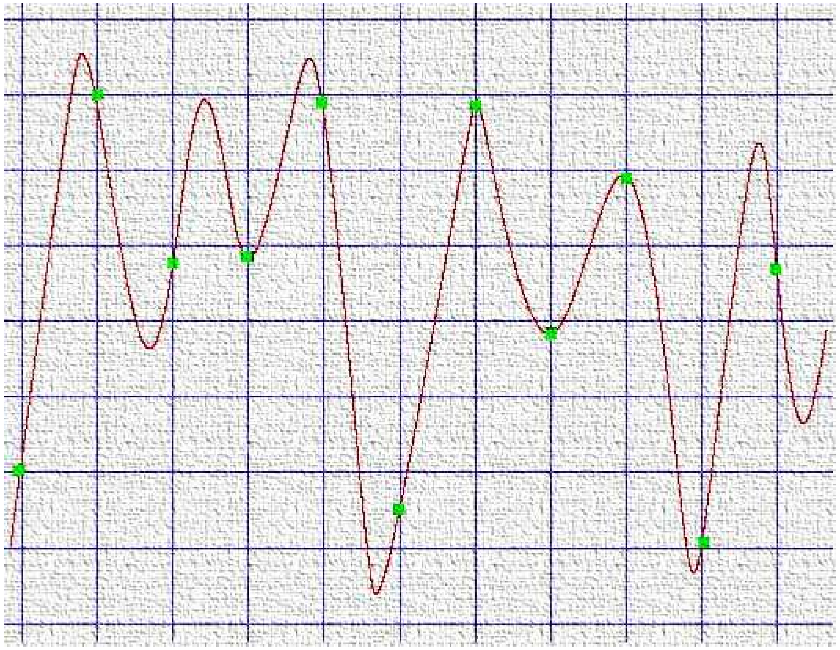
= 256 liczb

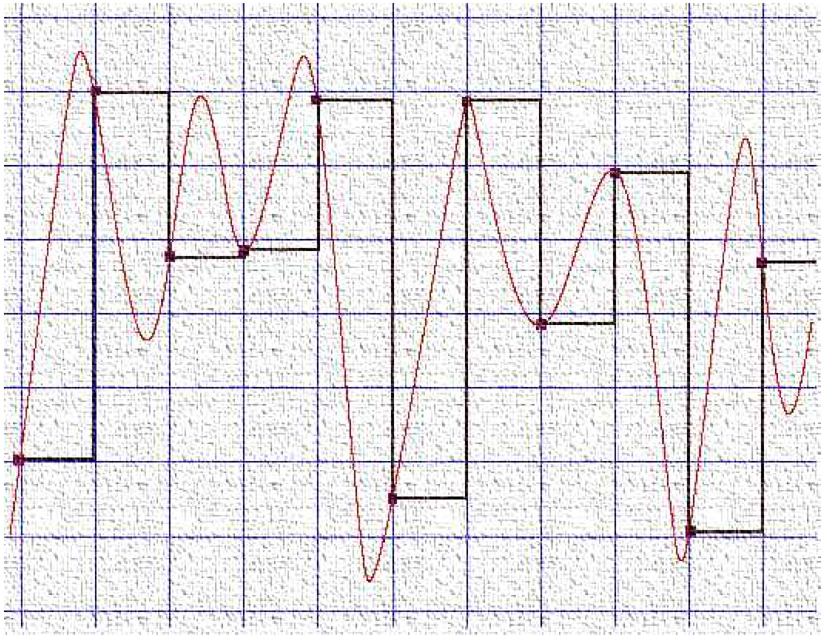
Typowy zakres napięcia: 0÷5V / 256 → ≈ 40 mV / 1 liczbę;

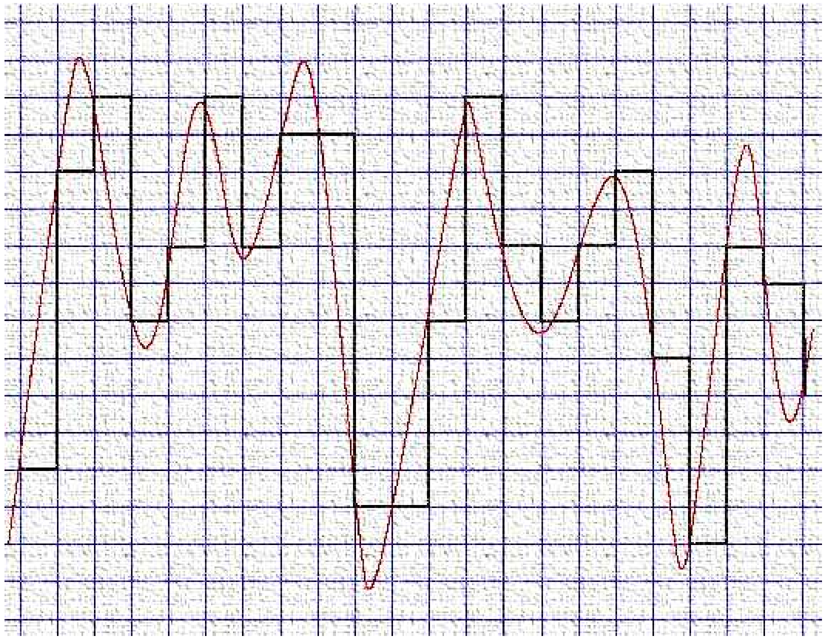
Przetwornik DA : liczba binarna → napięcie:

napięcie 4015mVzostanie przyporządkowane liczbie reprezentującej 4000mV, a napięcie 4025 mV liczbie 4040mV

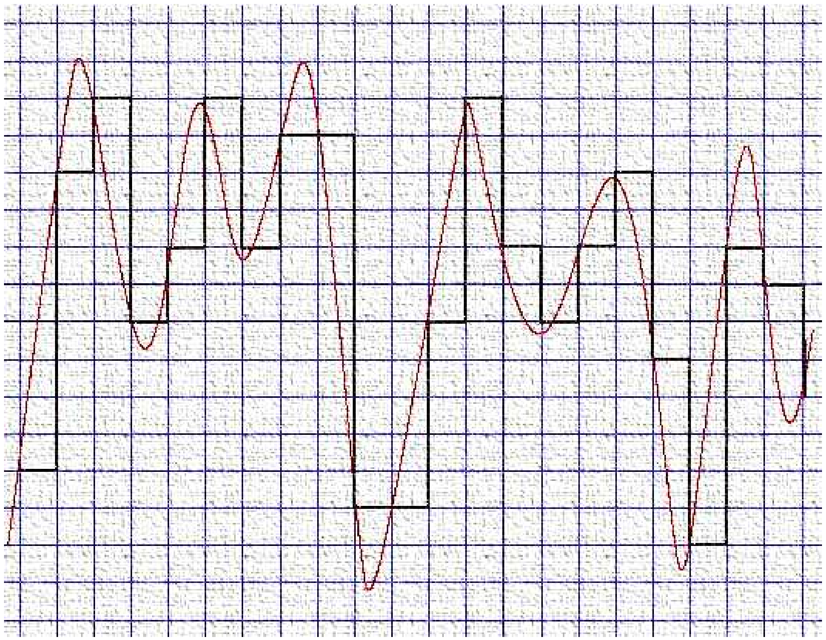


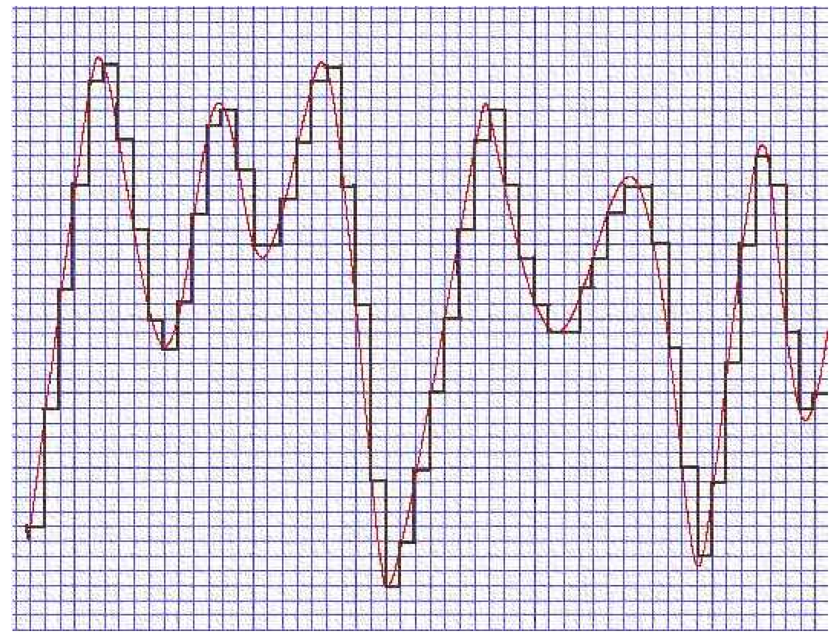






Poprawa jakości przez zwiększenie częstotliwości próbkowania i zmniejszenie „kroku” napięcia (tj. zwiększenie ilości liczb do dyspozycji przetwornika)





Typowa częstotliwość próbkowania – 44,1 kHz,

przetwornik 16-bitowy, ➡ 44100 x 16 x 2 = 1411 kb/s ≈ 10,3 Mb/s

➡ kodowanie, np. MPEG Audio Layer 3,4 (MP3,4)

Zakres częstotliwości <0 , 20 000 Hz>, dynamika: do 100 dB

Ultradźwięki

Cagnard de la Tour , 1819 , wytwarza ultradźwięki za pomocą syreny

Langevin , 1917, elektroniczna generacja i detekcja ultradźwięków

Fale sprężyste podłużne lub poprzeczne

Zakres częstotliwości powyżej 20 000 Hz

(*górne partie zakresu rzędu* 10^9 *Hz określa się też jako hiperdźwięki*)

Ultradźwięki o częstotliwościach rzędu 10 GHz – 100Ghz są obecne w sieciach krystalicznych jako wynik drgań cieplnych cząsteczek

Wytwarzanie : generatory mechaniczne (syreny, gwizdki),
generatory elektromechaniczne (piezostrykcja, magnetostrykcja)

Detekcja: detektory piezoelektryczne, magnetostrykcyjne i optyczne

Zastosowania ultradźwięków

Zastosowania techniczne

nawigacja: echosondy , sonary

defektoskopia: kontrola jakości

pomiary techniczne: przepływu, poziomu, grubościomierze,

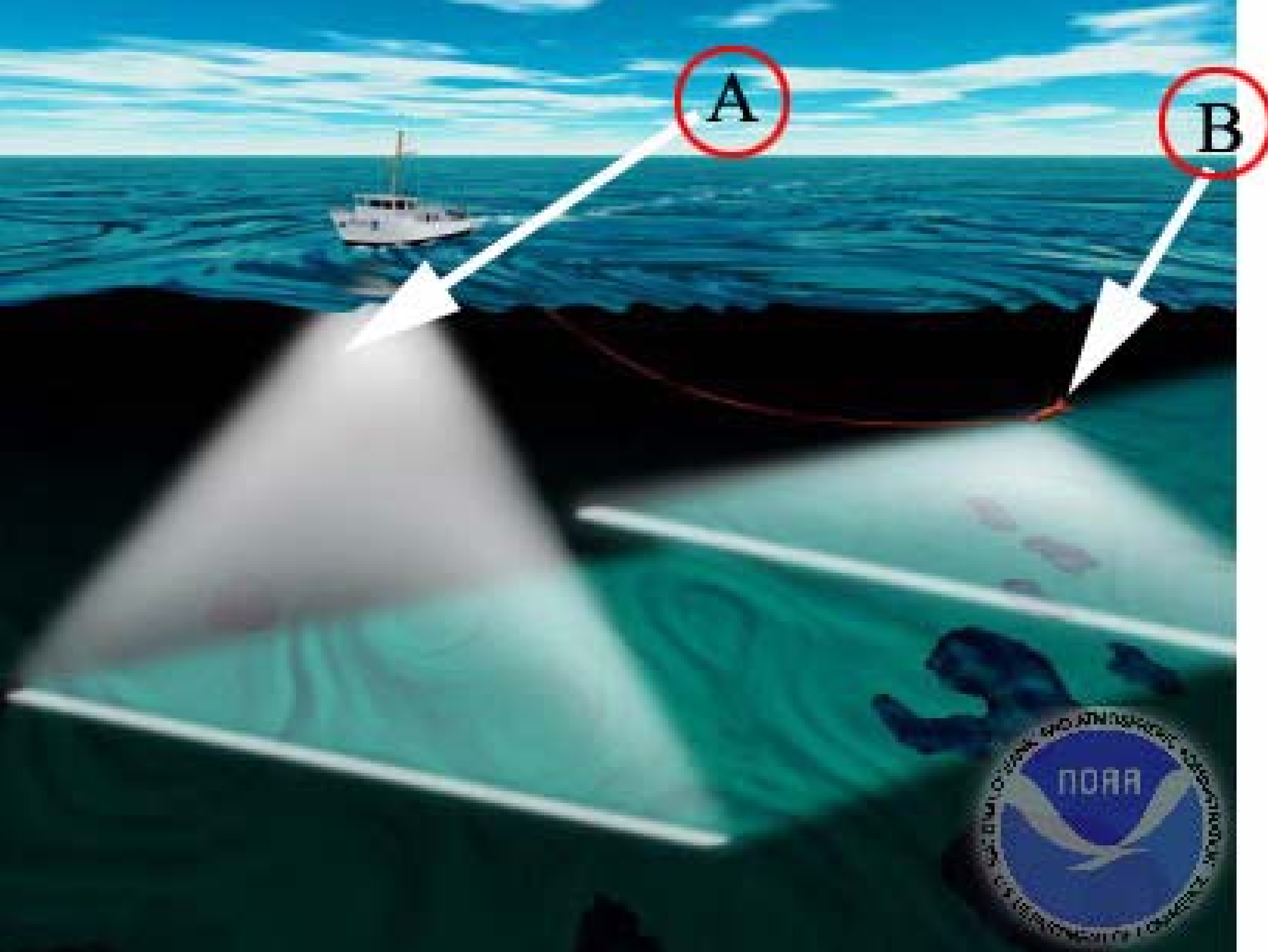
inne: obrabiarki, myjnie, czujniki (ruchu, ultradźwiękowy nos, wykrywacz ciąży u zwierząt , repelery, nauka-mikroskopia), homogenizacja, emulgacja, rozpuszczanie i rozpylanie, wspomaganie reakcji chemicznych, odemglanie,

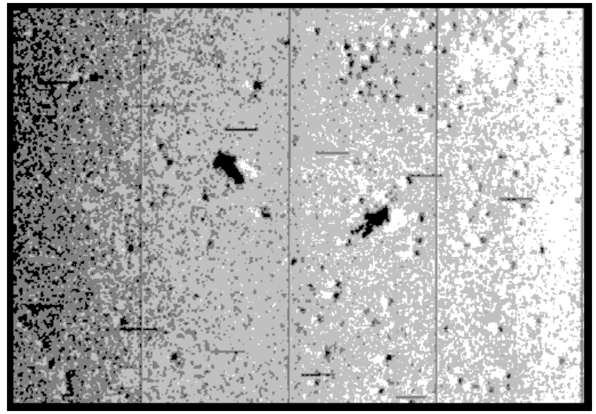
Zastosowania w medycynie

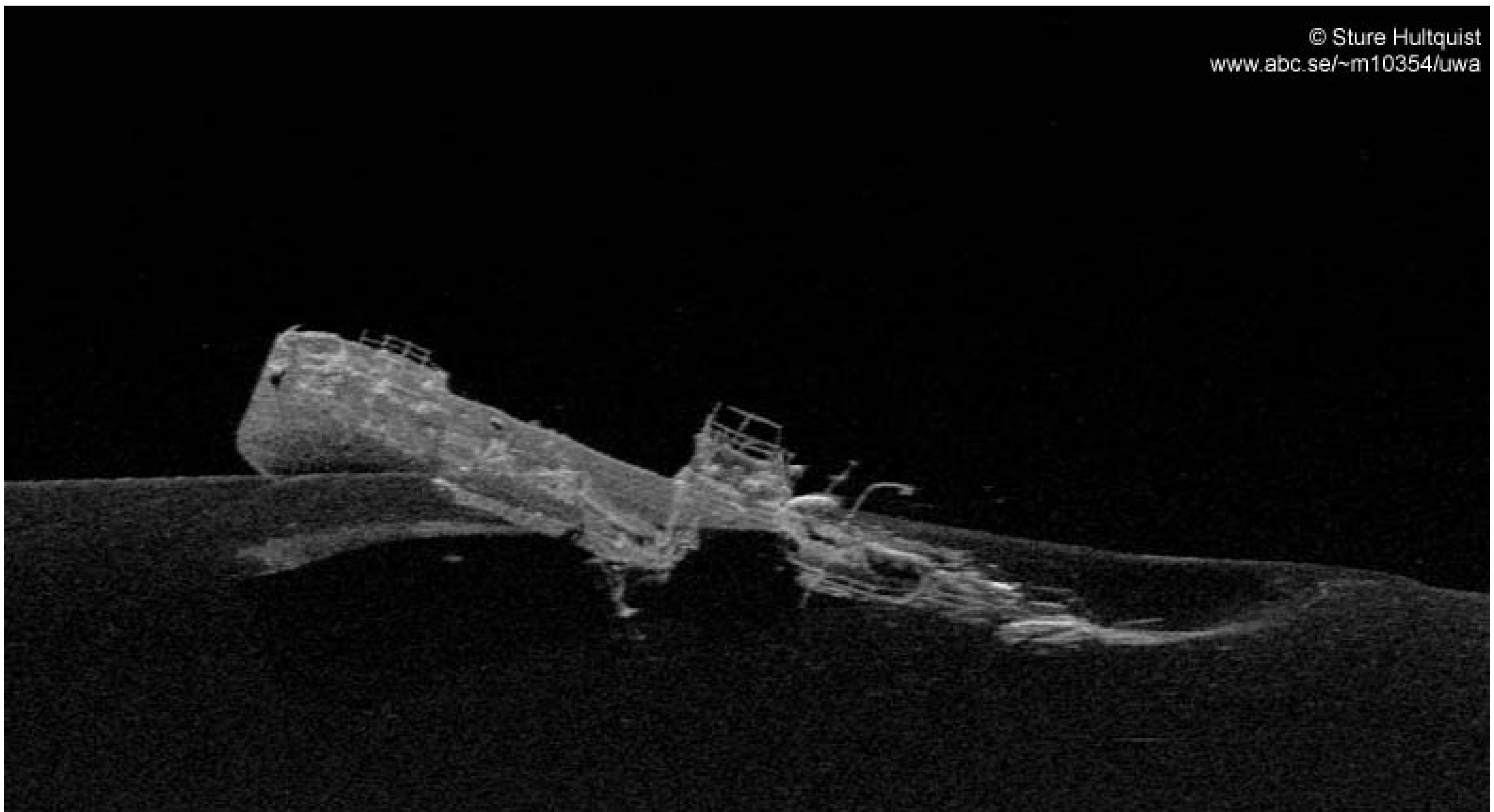
Fry William James (1928), chirurg amerykański, zapoczątkował lecznicze stosowanie ultradźwięków

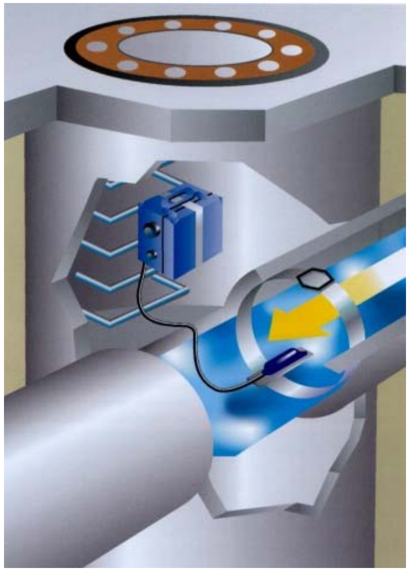
ultrasonografia (usg), iniekcja ultradźwiękową, koagulacja tkanek, stomatologia, zastosowania chirurgiczne

Przykłady zastosowań ultradźwięków


A
B
NOAA




© Sture Hultquist
www.abc.se/~m10354/uwa




MG 2000 S
mm/inch
MG 2000 M
mm/inch

Ultradźwięki w przyrodzie

Wiele zwierząt słyszy fale ultradźwiękowe;
niektóre je emitują i używają w różnych celach.

Najbardziej znanymi przykładami są szczury, delfiny, a zwłaszcza nietoperze posługujące się ultradźwiękami do echolokacji (dźwiękowy radar).

Nietoperze do orientacji w ciemności wytwarzają dźwięki
o częstotliwości 20 do 80 kHz, a niektóre nawet od 120 do 210 kHz.
Polujący nietoperz emituje 5 do 10 impulsów na sekundę;
po zlokalizowaniu np. lecącego owada liczba impulsów wzrasta
do 15-50 na sekundę, a w kolejnej fazie do 200 impulsów na sekundę
Orientacja zwierzęcia jest bardzo precyzyjna.