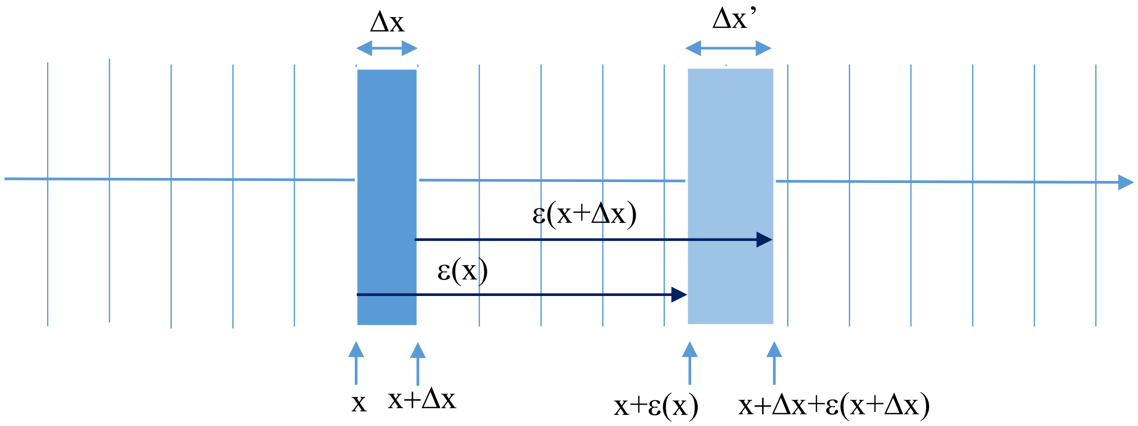
*Dr hab. J. B. Gosk*

## Układ równań opisujących fale dźwiękowe w powietrzu

Celem tego dodatku jest naszkicowanie wyprowadzenia układu równań opisujących rozchodzenie się fal dźwiękowych (FD) w powietrzu. W ten sposób dowiemy się od których parametrów opisujących stan gazu zależy prędkość dźwięku. Rozpatrzymy najprostszy przypadek fal płaskich tj. takich w których zaburzenie *f* jest funkcją dwóch zmiennych: jednej zmiennej przestrzennej *x* i czasu *t*. Przypomnijmy $f_+(x, t) = f(x - V\cdot t)$ i $f_-(x, t) = f(x + V\cdot t)$ to najbardziej ogólne postaci funkcji opisujących fale poruszające się w przeciwnych kierunkach ze stała prędkością *V* wzdłuż osi x. Oczywiście obie funkcje powinny być rozwiązaniami szukanego przez nas układu równań.

Przed przystąpieniem do wyprowadzenia układu równań zastanówmy się jakie wielkości fizyczne, w przypadku fal dźwiękowych, ulegają zaburzeniu. W tym celu przyjrzyjmy się temu co dzieje się w pobliżu płaskiej membrany głośnika (źródło fal). Jeżeli membrana zaczyna szybko poruszać się do przodu powietrze tuż przed nią ulega sprężeniu, cząsteczkom gazu w zderzeniu z membraną przekazywany jest dodatkowy pęd, wzrasta ciśnienie, które wywiera nacisk na dalsze warstwy powietrza. Te z kolei są sprężane, co powoduje w nich wzrost ciśnienia i w ten sposób w powietrzu rozchodzi się fala zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza. Zmiany gęstości i ciśnienia powietrza są wynikiem przemieszczenia mas powietrza. Towarzyszą im, o czym mowa w dodatku A, zmiany temperatury. Uwaga. W tym samym czasie kiedy powietrze za membraną jest sprężane przed membraną następuje jego rozprężanie. Zaburzenie rozchodzi się w obu kierunkach.

Dla wyprowadzenia stosownych wzorów wygodnym będzie przeprowadzić następujący eksperyment myślowy. Obszar powietrza, przez który przechodzi fala dźwiękowa podzielimy na cienkie, prostopadłe w stosunku do kierunku rozchodzenia się FD, warstewki o grubości Δx (rysunek 1).




Rys. 1. Przemieszczenie, w wybranej chwili czasu, pojedynczej (zaznaczonej) warstewki powietrza w rezultacie przechodzenie przez rozpatrywany obszar FD.

Skoncentrujmy uwagę na niezaburzonej warstewce powietrza (brak FD) położonej między x i x+Δx. W trakcie przechodzenia FD przez rozpatrywany obszar warstewka zmieni swoje położenie. Wektor **ε** opisujący jej przemieszczenie oraz odpowiadający mu wektor prędkość **u** $= \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ są równoległe do osi x, dlatego FD są falami podłużnymi (dalej przez u i ε oznaczymy długości tych wektorów). Ponieważ masa powietrza rozważanej warstewki w trakcie jej przemieszczania się jest stała, ze zmianą jej grubość wiąże się (łatwa do policzenia w oparciu o rysunek 1) zmiana gęstości powietrza ρ. Wprowadźmy oznaczenia. Niech $\rho_o$, $p_o$, $\rho_z$ i $p_z$

oznaczają gęstość i ciśnienie powietrza w stanie równowagi (brak FD w rozpatrywanym obszarze) oraz wartości odpowiadające ich zmianie (obecność zaburzenia).

$$\rho = \rho_o + \rho_z, \quad p = p_o + p_z\,; \;\; \rho_o >> \rho_z, \quad p_o >> p_z \qquad (*)$$

Dodatkowo pamiętajmy że:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho_z}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_z}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho_z}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p_z}{\partial t} \qquad (**)$$

Z rysunku 1 wynika następująca zależność:

$$\Delta x' = x + \Delta x + \varepsilon(x+\Delta x) - x + \varepsilon(x) \cong \Delta x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Delta x$$

Stąd dostajemy:

$$\rho_o \Delta x = \rho \Delta x' = (\rho_o + \rho_z)(\Delta x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Delta x),$$

I po skróceniu:

$$\rho_o = \rho_o \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho_o + \rho_z,$$

Ostatecznie po zaniedbaniu $\rho_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ dużo mniejszego w stosunku do $\rho_o \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ mamy:

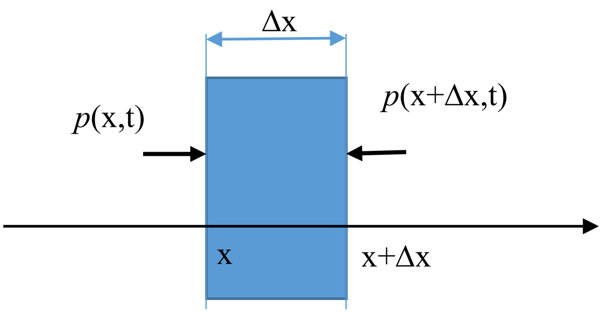
$$\rho_z = -\rho_o \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \qquad (1a)$$

lub

$$\rho_z = -\rho_o u \qquad (1b)$$

Ten ważny związek wykorzystamy w dalszej części pracy.

Rozważmy prostopadłościan o boku Δx i powierzchni S prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali dźwiękowej. Na masę powietrza zawartą w prostopadłościanie działa siła




Rys. 2. Różnica wartości ciśnienia na przeciwległych ściankach warstewki.

*F*, której wartość wynika z różnicy ciśnienia wywieranego przez powietrze na przeciwległych ściankach w odległości Δx:

$$F = S \cdot (p(x,t) - p(x+\Delta x,t)) \cong -S \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x$$

Masa powietrza $\rho_o \cdot \Delta x \cdot S$ pod działaniem siły *F* ulega przyspieszeniu $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial^2 t} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Stąd otrzymujemy:

$$-S \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x = \rho_o \cdot \Delta x \cdot S \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial^2 t} = \rho_o \cdot \Delta x \cdot S \frac{\partial u}{\partial t}$$

Po skróceniu:

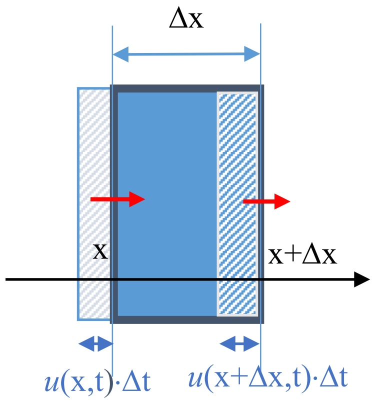
$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_o \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial^2 t} = 0 \qquad (2a)$$

lub

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_o \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (2b)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób jedno równanie, w którym występują dwie funkcje $p$(x,t) i $u$(x,t) (2b) lub $p$(x,t) i ε(x.t) (2a). Aby zamknąć układ równań brakuje nam jeszcze jednego równania. W tym celu wykorzystamy prawo zachowania masy.

Rozpatrzmy ponownie prostopadłościan o objętości ΔV = Δx·S, gdzie jak poprzednio Δx oznacza grubość warstwy zdefiniowanej przez płaszczyzny prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fal a S - powierzchnię ścian bocznych. W wyniku rozchodzenia się fali dźwiękowej w zaznaczonym obszarze (sztywno związanym z osią x) przemieszczające się powietrze spowoduje zmianę masy, a tym samym i gęstości powietrza (m=ρ·V). I tak w krótkim odcinku czasu Δt do wnętrza prostopadłościanu przez lewą boczną powierzchnię S przemieści się powietrze znajdujące się w cienkiej warstewce (parz rysunek 2) o grubości $u$(x)·Δt. W tym samym czasie powietrze z warstewki o grubości $u$(x+Δx)·Δt




Rys. 3. Zmiana masy powietrza w wyróżnionym prostopadłościanie w trakcie przechodzenia FD.

przemieści się na zewnątrz prostopadłościanu. Stąd zmiana masy (gęstości Δρ) powietrza po czasie Δt w objętości ΔV wyniesie:

$$\Delta\rho\cdot S\cdot\Delta x = \rho_o\cdot u(x)\cdot\Delta t\cdot S - \rho_o\cdot u(x+\Delta x)\cdot\Delta t\cdot S \cong -\rho_o\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x\cdot\Delta t\cdot S$$

Po skróceniu i przekształceniu mamy:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -\rho_o\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

Zastępując Δρ/Δt przez pochodną cząstkową $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ dostajemy drugie z poszukiwanych równań:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho_o\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (3)$$

Niestety w układzie równań (2) i (3) pojawiła się poza poszukiwanymi $p$(x,t) i $u$(x,t) nowa funkcja $\rho$(x,t). Tak więc aby dysponować zamkniętym układem równań tj. dwoma równaniami z dwoma poszukiwanymi funkcjami potrzebujemy jeszcze jednego związku dla występujących w tych równaniach funkcji $p$(x,t), $u$(x,t) i $\rho$(x,t). Założymy, że znany jest nam związek pomiędzy (dodatek A) ciśnieniem $p$ i gęstością $\rho$ tj. typ przemiany gazowej. Jak pokazuje eksperyment fali dźwiękowej towarzyszy przemiana adiabatyczna. Przekształćmy równanie (2b) do wygodniejszej postaci:

$$\rho_o\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

Oznaczmy $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ przez $v^2$. Jak pokażemy dalej v oznacza prędkość fali dźwiękowej.
Przypomnijmy, ten związek jest kluczowy dla metody pomiaru $\kappa = c_p/c_v$ w ćwiczeniu 43 (dodatek A).

Ostatecznie poszukiwany układ równań opisujący rozchodzenie się płaskich fal dźwiękowych w powietrzu przyjmuje postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_o} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_o} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (4b)$$

Jest to układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu, w którym funkcje $u(x,t)$ i $\rho(x,t)$ reprezentują zaburzenia prędkości przemieszczenia masy powietrza i zmiany jego gęstości. Tak więc wykonaliśmy postawione na wstępie zadanie.

W większości podręczników zamiast układu równań wyprowadza się/podaje się równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

gdzie $f(x, t)$ oznacza jedno z rozpatrywanych przez nas zaburzeń: $\varepsilon(x, t)$, $u(x, t)$, $\rho(x, t)$, $p(x, t)$.
Uwaga. W tym przypadku żądamy aby funkcja $f(x, t)$ posiadała pochodne cząstkowe drugiego rzędu. W układzie równań (4a, 4b) występują funkcje, dla których wystarczy, że posiadają pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

Znane z podręczników równania różniczkowe drugiego rzędu łatwo otrzymać korzystając z układu równań (4a, 4b). Rozpoczniemy od wyprowadzenia równania opisującego przemieszczenie powietrza $\varepsilon(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \qquad (5)$$

W tym celu w równaniu (4a) zastąpimy $\frac{\partial u}{\partial t}$ przez $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{v^2}{\rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{v^2}{\rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (***)$$

Po zróżniczkowaniu równania (1a) i wykorzystaniu (**) dostajemy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

Po wstawieniu tej zależności do równania (***) dostajemy (5).

Kolejne równania otrzymamy przyjmując, że funkcje opisujące zaburzenia spełniają warunek:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \qquad (6)$$

Policzmy pochodną (4a) po $x$ i pochodną (4b) po $t$ i skorzystajmy z (6), wtedy dostaniemy:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \qquad (7)$$

Licząc pochodną (4a) po $t$ oraz pochodną (4b) po $x$ i korzystając ponownie z (6) dostajemy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (8)$$

Mając na uwadze (**) oraz związek:

$$p_z = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_o \cdot \rho_z = \mathrm{v}^2 \cdot \rho_z,$$

z równania (7) dostajemy:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad (9)$$

Jeżeli zachodzi V = v to funkcje: $f_+(x, t) = f(x - V\cdot t)$ i $f_-(x, t) = f(x + V\cdot t)$ reprezentujące odpowiednio zaburzenia: $\varepsilon$(x, t), $u$(x, t), $\rho$(x, t), $p$(x, t) spełniają równania (5, 7, 8, 9). Stąd wynika uzasadnienie dla wprowadzonego wcześniej oznaczenia $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_o = \mathrm{v}^2$.

Uwaga. W eksperymentach laboratoryjnych zaburzenia najczęściej są opisane przez funkcje harmoniczne. Argumentem funkcji trygonometrycznych (sinus, cosinus, …) jest kąt wyrażony w radianach. Tak więc aby stosować te funkcje należy przejść od zmiennych przestrzennych ($\mathbf{x}$ =[x, y, z]) i czasowej t na zmienną kątową Θ, tj. $\mathbf{x} \rightarrow \Theta = \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ i $t \rightarrow \Theta = \omega t$, gdzie $\mathbf{k}$ to wektor falowy a ω to częstość kołowa (patrz dodatek A).

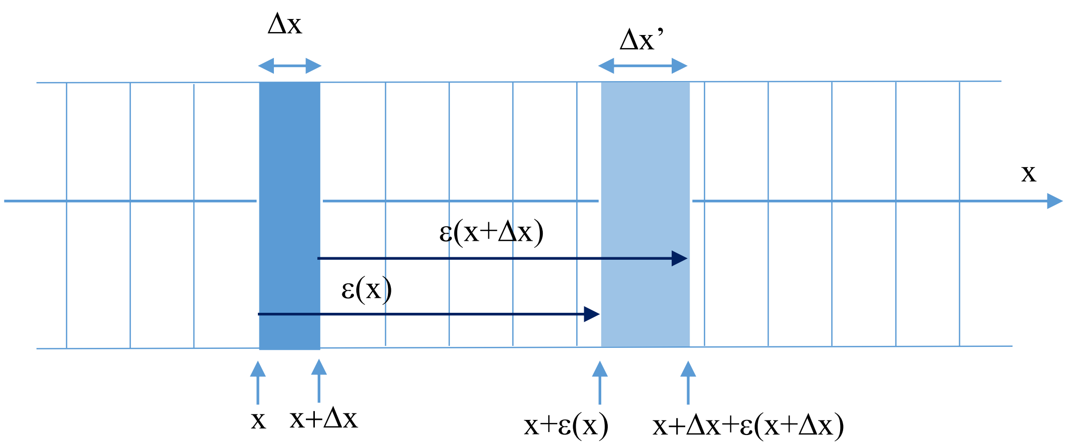
**Uzupełnienie**

Fale dźwiękowe rozchodzą się w cieczach i ciałach stałych. Mamy tu na myśli fale podłużne. Wyprowadzając równanie opisujące ten typ fal ograniczymy się do przypadku ciał stałych. Na wstępie przypomnijmy prawo *Hooke'a*. Jeżeli belkę/pręt o przekroju S i długości $l$ podamy ściskaniu/rozciąganiu to jej wydłużenie/skrócenie $\Delta l$ będzie proporcjonalne do użytej siły:

$$\frac{F}{S} = Y \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

gdzie: wielkość F/S nazywamy *naprężeniem*, a Δl/l *odkształceniem*. Wielkość Y charakteryzująca dany materiał nazywa się *modułem Younga*.

Aby zrozumieć 'naturę' fal dźwiękowych w ciałach stałych wygodnie jest, podobnie jak w przypadku fal dźwiękowych w powietrzu, podzielić rozpatrywany ośrodek, w którym propaguje się fala (wzdłuż osi x) na umowne 'cienkie plasterki' o grubości Δx (rys. 4).

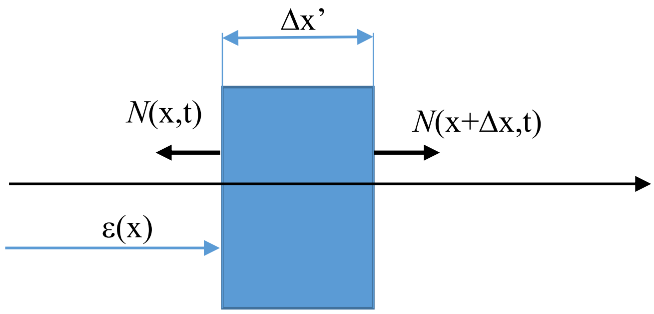



Rys. 4. Przemieszczenie oznaczonej warstewki ciała stałego przy przechodzeniu fali podłużnej.

W wyniku przechodzenia fali warstewka znajdująca się pierwotnie w położeniu x przemieści się do nowego położenia (rys. 4). Ulega ona również odkształceniu zależnemu od jej położenia, któremu z kolei, zgodnie z prawem *Hooke'a*, odpowiada zmieniające się z położeniem naprężenie *N*(x). Jak wynika z rysunku odkształcenie czyli wydłużenie względne warstewki (pierwotnie znajdującej się w położenia x) wynosi *w*=(Δx'−Δx)/Δx a związane z nim naprężenie *N*(x):

$$N(x) = Y\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = Y\frac{\varepsilon(x+\Delta x) - \varepsilon(x)}{\Delta x} \approx Y\frac{\varepsilon(x) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Delta x - \varepsilon(x)}{\Delta x} = Y\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

Teraz skorzystamy z drugiej zasady Newtona. W tym celu ponownie rozpatrzmy cienką warstewkę Δx', która przemieszcza się z przyspieszeniem $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$.




Rys. 5. Różnica naprężenia prowadząca do ruchu warstewki z przyspieszeniem $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$.

Siła działająca na wyróżniony prostopadłościan o masie $\rho_o$·Δx·S wynika z różnicy naprężenia na powierzchniach prostopadłych do kierunku rozchodzenia się fali (rys. 5). Pamiętając że *F*=*N*·S otrzymujemy:

$$\rho_o \cdot \Delta x \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -(N(x,t) - N(x+\Delta x, t)) \cdot S \cong \frac{\partial N}{\partial x}\Delta x \cdot S = \{N = Y\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\} = Y\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}\Delta x \cdot S\,,$$

Ostatecznie po skróceniu otrzymujemy:

$$\frac{\rho_o}{Y}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

A stąd dostajemy wzór na prędkość fali dźwiękowej (fali podłużnej) w ciele stałym.

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho_o}}.$$

Prowadząc analogiczne rozważania (proponujemy wykonać je samodzielnie jako ćwiczenie) można uzyskać wzór na prędkość fal poprzecznych w ciele stałym:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho_o}}$$

gdzie: G -moduł sztywności (sprężystość postaci). Szczególny typ fal porzecznych (skręcanie pręta; fale ścinania) przedstawiono w podręczniku Feynmana wykłady z fizyki, Tom II, Część 2, PWN 1974, str. 336.