

## BADANIE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO I TEMPERATUROWEGO METALI METODĄ ANGSTRÖMA.

### 1. PODSTAWY FIZYCZNE

Doświadczenie poucza, że pomiędzy ciałami ogrzаныmi do różnych temperatur zachodzi wymiana ciepła, czyli transport energii. Ciało o wyższej temperaturze traci ciepło, a ciało o niższej temperaturze je zyskuje. Wymiana ta trwa tak długo, dopóki temperatury obu ciał nie zrównają się. Znamy trzy sposoby wymiany (przenoszenia) ciepła, a mianowicie:

- a) przez prądy konwekcyjne (unoszenie ciepła)
- b) przez promieniowanie
- c) **przez przewodzenie.**

Przenoszenie ciepła przez unoszenie odbywa się razem z przenoszeniem materii. Towarzyszą temu tzw. prądy konwekcyjne czyli strumienie cieczy lub gazu\*, które gdy mają temperaturę wyższą od temperatury otoczenia - unoszą ciepło do góry, a gdy mają temperaturę niższą od temperatury otoczenia - opadają w dół.

Wymiana ciepła przez promieniowanie polega na wytworzeniu kosztem ciepła energii promienistej, przeniesieniu tej energii w postaci fali elektromagnetycznej do ciała o niższej temperaturze i następnie zamianie energii fali w ciepło w procesie absorpcji fali przez to ciało.

**Przewodzenie ciepła** natomiast zachodzi wyłącznie wewnątrz ciała, którego jedne części mają wyższą temperaturę a inne niższą.

Pragnąc zbadać jedynie zjawisko przewodzenia ciepła, należy zaprojektować eksperyment tak, aby wyeliminować lub w znacznym stopniu ograniczyć wymianę ciepła przez promieniowanie i unoszenie. Eliminacja wymiany przez unoszenie polega na umieszczeniu układu pomiarowego w próżni lub ograniczeniu konwekcji poprzez utrudnienie przemieszczania się płynu otaczającego badany element. Z kolei wyeliminowanie wymiany przez promieniowanie polega na osłonięciu badanego elementu ekranem o temperaturze równej temperaturze badanego elementu. Wtedy tyle samo energii zostanie wypromieniowane z badanego elementu do ekranu, ile z ekranu w kierunku badanego elementu i wymianę ciepła przez promieniowanie będzie można pominąć. Minimalizację wymiany ciepła przez promieniowanie można także osiągnąć poprzez stosowanie niezbyt wysokich temperatur.

### 2. MECHANIZMY PRZENOSZENIA CIEPŁA W CIELE STAŁYM

Od czasów Demokryta wiemy, że materię można opisać jako zbiór cząsteczek, z których zbudowane są ciała w każdym ich stanie skupienia. Opisem własności materii na podstawie jej cząsteczkowej budowy zajmuje się kinetyczno - molekularna teoria materii. Warto zatem próbować odpowiedzieć na pytanie, jak ciepło przenoszone jest przez materię zbudowaną z cząstek.

Wiemy, że dla temperatur większych od zera bezwzględnego, ciepło jest miarą energii ruchu cząsteczek, przy czym temperatura jest miarą średniej energii kinetycznej cząsteczki, a ilość ciepła jest proporcjonalna do liczby poruszających się cząsteczek ciała o danej średniej temperaturze.

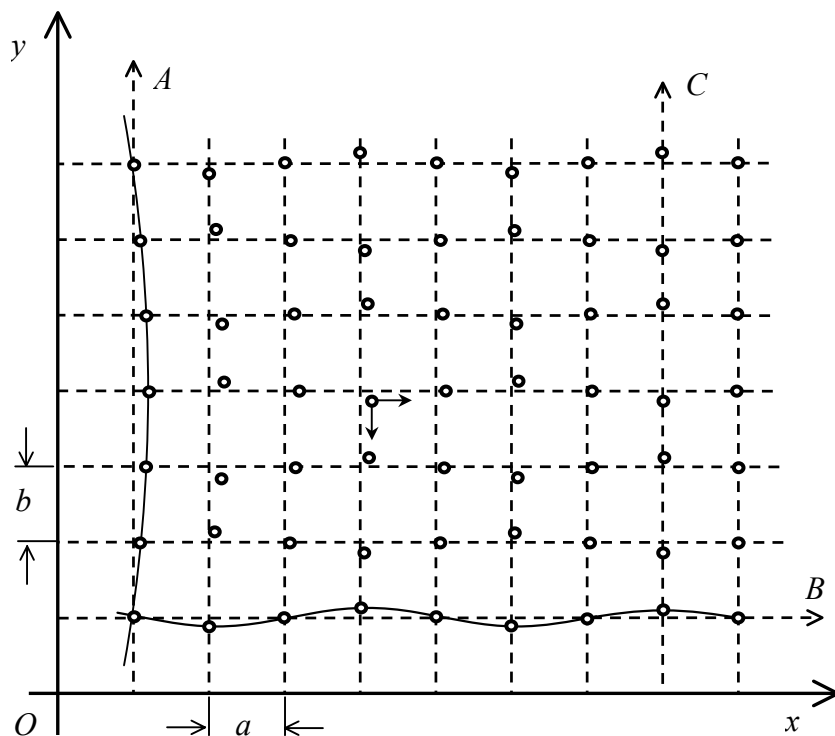
Cząsteczki, z których składa się ciało stałe, ułożone są zazwyczaj w sieć krystaliczną tak, że możemy je sobie wyobrazić jako kulki połączone sprężynkami (wiązaniami międzyatomowymi). Cząsteczki mogą poruszać się wokół położenia równowagi wzdłuż trzech kierunków - osi  $Ox$ ,  $Oy$

---

\* Ciecze i gazy razem noszą nazwę płynów, jako że ich cząstki mogą bez ograniczeń poruszać się w całej objętości naczynia, w którym się znajdują.

i  $Oz$ . Jeżeli poruszają się szybciej - ciało ma wyższą temperaturę, a jeżeli wolniej - niższą. Załóżmy, że źródło ciepła znajduje się w punkcie  $O$ . Poruszając się, każda cząsteczka pociąga za sobą sąsiednią, wywołując „falę drgnień” rozprzestrzeniającą się wzdłuż wszystkich trzech wymiarów do granic kryształu. Dwuwymiarowy model drgającej sieci krystalicznej pokazano na rysunku 1.

Analiza rysunku 1 pokazuje, że drgania mogą rozchodzić się w postaci fal poprzecznych (np. wzdłuż prostej  $A$  lub  $B$ ) i podłużnych (np. wzdłuż prostej  $C$ ). W pozostałych kierunkach w kryształach fale są superpozycją (złożeniem) fal podłużnych i poprzecznych. Ponadto wszystkie drgania są ze sobą powiązane (sprzężone), więc żadne z nich nie może odbywać się niezależnie od innych. Prędkość rozchodzenia się fal „ruchów cieplnych” jest uzależniona od własności sprężystych ciała, opisanych prawem Hooke’a.



Rys. 1 Dwuwymiarowy model drgającej sieci krystalicznej.  $a$  i  $b$  oznaczają wymiary komórki elementarnej. Strzałkami pokazano składowe ruchy przypadkowo wybranej cząsteczki.

Drgania sieci krystalicznej mogą rozchodzić się po całym kryształach a następnie odbijać się od ścian kryształu i interferować z drganiami padającymi, tworząc fale stojące.

Z teorii dualizmu falowo - korpuskularnego wiemy, że zarówno poruszającą się cząstkę można opisać w postaci fali, jak i falę można przedstawić w postaci cząstki (patrz instrukcje do ćwiczeń 36 i 37). Fale „ruchów cieplnych” opisane jako cząstki, noszą nazwę fononów. Ponieważ **fonony** nie mogą istnieć w próżni (w odróżnieniu od np. protonów, elektronów czy fotonów), nazywamy je quasicząstkami.

Ciało znajdujące się w temperaturze zera bezwzględnego nie będzie zawierało fononów, bowiem wszystkie jego cząsteczki będą w zasadzie nieruchome (za wyjątkiem tzw. drgań zerowych, opisanych przez mechanikę kwantową). Wzrost temperatury ciała oznacza powstawanie fononów, najpierw o małych częstotliwościach (czyli małych energiach). Po podgrzaniu ciała do wyższych temperatur pojawiają się fonony o wyższych częstotliwościach. Pojawi się zatem większa ilość sposobów rozchodzenia się drgań w sieci krystalicznej. Wynika stąd, że pojemność cieplna ciała będzie zależna od temperatury, w jakiej się to ciało znajduje. Matematyczny opis zależności wartości ciepła właściwego od temperatury,  $c_w(T)$ , sformułował Peter J. W. Debye (1884 - 1966).

Drgania sieci krystalicznej nie są jedynym sposobem realizowania przepływu ciepła przez ciało stałe. W izolatorach są one jedynym mechanizmem przenoszenia energii cieplnej.

W metalach, oprócz atomów związanych w sieć krystaliczną, mamy do czynienia ze swobodnymi elektronami, których drgania także mogą przenosić ciepło. Liczba elektronów swobodnych w metalu jest w przybliżeniu równa liczbie dodatnich jonów sieci krystalicznej. Można by było zatem przypuszczać, że przenoszą one co najmniej tyle samo ciepła, co fonony. Jednak fakt, że energia elektronów podlega ograniczeniom wynikającym z zakazu Pauliego powoduje, że przenoszą one mniej ciepła niż fonony. Ogólnie można stwierdzić, że:

- podczas ogrzewania izolatora od temperatury zera bezwzględnego, zależność ciepła właściwego od temperatury najpierw będzie zgodna z teorią Debye'a a następnie - po przekroczeniu tzw. temperatury Debye'a  $\theta$ , - ciepło właściwe będzie niezależne od temperatury\*;
- podczas ogrzewania metal od temperatury zera bezwzględnego, zależność ciepła właściwego od temperatury będzie złożeniem modelu Debye'a i modelu opisującego sposób przenoszenia ciepła przez elektrony swobodne.

Reasumując, zależność ciepła właściwego ciała od temperatury wyraża zależność :

$$c_w = \alpha \cdot \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 + \gamma \cdot T \quad (1)$$

gdzie  $c_w$  oznacza ciepło właściwe,  $\theta$  - temperaturę Debye'a,  $\alpha$  i  $\gamma$  - współczynniki proporcjonalności. Pierwszy składnik zależności (1) opisuje przenoszenie ciepła przez fonony a drugi składnik - przenoszenie ciepła przez elektrony swobodne.

### 3. RÓWNANIE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO I TEMPERATUROWEGO.

W celu ułatwienia rozważań założmy, że wymiana (przepływ) ciepła odbywa się jedynie wzdłuż jednego wymiaru badanego ciała, pomiędzy jego końcami utrzymywanymi w stałych temperaturach  $T_1$  i  $T_2$ . W praktyce można taki przepływ ciepła zrealizować w długim, jednorodnym, cienkim pręcie, z powierzchnią boczną starannie odizolowaną od otoczenia (patrz rys. 2). Ciepło może tu wpływać do pręta lub z niego wypływać jedynie przez powierzchnie czołowe walca. Aby rozkład ciepła nie zmieniał się w czasie, tyle samo ciepła winno dopływać przez powierzchnię  $S_1$ , ile przez powierzchnię  $S_2$  odpływać do otoczenia.

W pierwszym przybliżeniu założmy, że rozkład temperatury od odległości jest zbliżony do liniowego, a w materiale pręta nie ma żadnych dodatkowych źródeł ani ujść ciepła.

Doświadczenie pokazuje, że temperatura ciała zmienia się w czasie przepływu ciepła. Należy zatem zdefiniować **strumień ciepła** jako ilość ciepła  $\Delta Q$  przepływającego przez ciało w czasie  $\Delta t$ :

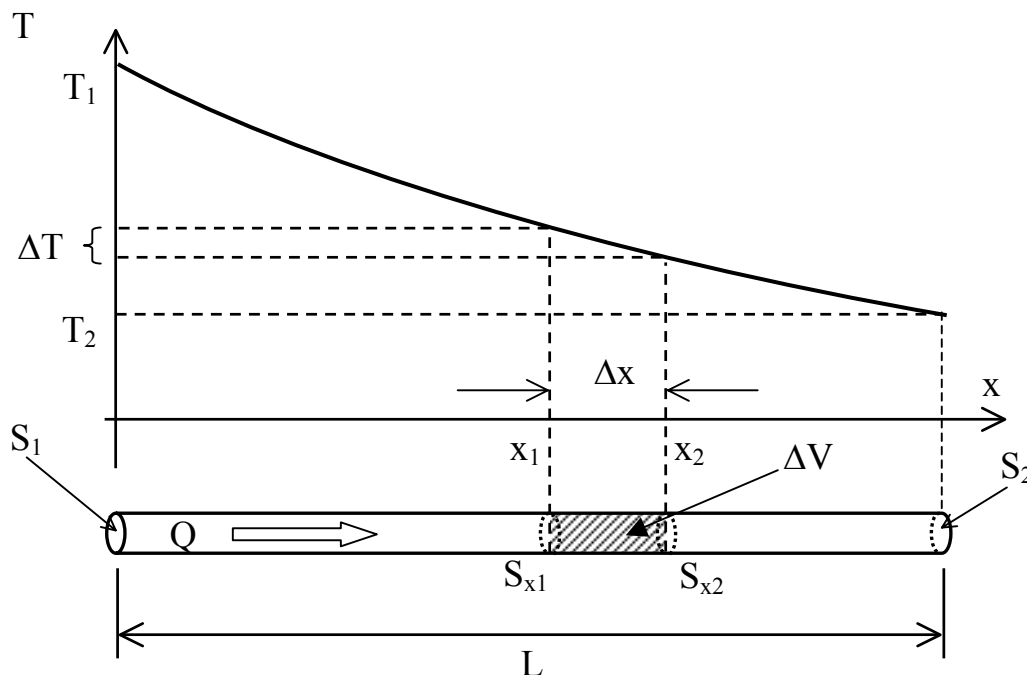
$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \left[ \frac{J}{s} \right] \quad (2)$$

Strumień ciepła przepływający przez powierzchnię  $S$  ciała nazywamy **natężeniem (lub gęstością) strumienia ciepła** i definiujemy jako:

$$F = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Delta Q}{S \cdot \Delta t} \quad \left[ \frac{J}{m^2 s} \right] = \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (3)$$

---

\* tzw. prawo Dulonga - Petita.



Rys. 2 Rozkład temperatur wzdłuż jednorodnego pręta w warunkach stacjonarnego przepływu ciepła.

Jeżeli na końcach pręta o długości  $L$  pokazanego na rysunku 2 powierzchnie  $S_1$  i  $S_2$  będą utrzymywane w różnych temperaturach  $T_1$  i  $T_2$  przy  $T_1 > T_2$  a temperatury te będą stałe i niezależne od czasu, to strumień ciepła  $\Phi$  (ilość ciepła  $\Delta Q/\Delta t$  przepływającego w jednostce czasu od końca o wyższej temperaturze do końca o niższej temperaturze) też będzie niezależny od czasu, a przepływ taki będzie nosił nazwę **przepływu stacjonarnego**. Strumień ciepła  $\Phi$  można opisać równaniem w postaci :

$$\Phi = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} S, \quad (4)$$

gdzie  $\lambda \left( \left[ \frac{J}{mKs} \right] = \left[ \frac{W}{mK} \right] \right)$  oznacza **współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału pręta**.

Rozważając przepływ ciepła przez odcinek pręta o długości  $\Delta x$  (i objętości  $\Delta V$ ), zależność (4) można zapisać w postaci:

$$\Phi = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S, \text{ a przy } \Delta x \text{ dążącym do zera: } \Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S \quad (5)$$

Wielkość pochodnej temperatury  $T$  po odległości  $x$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x}$ , nazywamy **gradientem temperatury**. Po podzieleniu przez  $S$  oraz na podstawie zależności (3) otrzymujemy :

$$F = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (6)$$

Równanie powyższe nosi nazwę **prawa Fouriera** i można je zawrzeć w twierdzeniu, że **przy stacjonarnym przepływie ciepła strumień ciepła przepływający w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię jest proporcjonalny do gradientu temperatury, a współczynnikiem proporcjonalności jest  $\lambda$ , współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału, w którym ten przepływ zachodzi.**

Prawo Fouriera stosuje się w sytuacjach, w których można założyć, że gradient temperatury jest mały, czyli przy  $\Delta x$  równym odległości międzycząsteczkowej w materii (ok.  $10^{-7} \div 10^{-9}$  m w warunkach normalnych\*) różnica temperatur sąsiednich powierzchni  $S_{x1}$  i  $S_{x2}$  odpowiadających położeniom  $x_1$  i  $x_2$  z rysunku 1, jest niewielka.

Prawo Fouriera zostało sformułowane dla przypadku, w którym temperatury  $T_1$  i  $T_2$  z rysunku 2 są stałe i niezależne od czasu czyli ilość ciepła przepływającego od powierzchni o wyższej temperaturze do powierzchni o niższej temperaturze też będzie niezależna od czasu. Taki przepływ ciepła nosi nazwę **stacjonarnego**.

Prawo Fouriera dobrze opisuje przepływ ciepła także w sytuacji, w której przepływ ciepła nie będzie stacjonarny, lecz temperatury  $T_1$  i  $T_2$  będą wolno zmieniać się w czasie. W praktyce można dowiedzieć, że im większy współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału,  $\lambda$  tym lepiej prawo Fouriera opisuje przepływ ciepła w przypadku niestacjonarnego przepływu ciepła.

Powyższe ograniczenia pokazują, że równanie Fouriera nie dotyczy zjawisk szybkozmiennych lub o dużym gradiencie temperatury, np. zjawisk przewodzenia ciepła zachodzących podczas eksplozji.

W celu sformułowania równania przewodnictwa cieplnego dla przypadku **niestacjonarnego** (tzn. gdy rozkład temperatury od odległości  $T(x)$  zmienia się w czasie), należy utworzyć bilans cieplny odcinka o niewielkiej długości  $\Delta x$ , zawartego w przecie z rys. 2. **Równanie przewodnictwa cieplnego w postaci różniczkowej**, omówione szerzej w Dodatku, ma postać równania składającego się z trzech składników:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c_w \rho \frac{\partial T}{\partial t} + q_{gen} . \quad (7)$$

Składnik  $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  opisuje różnicę pomiędzy ilością ciepła wpływającego w jednostce czasu

do odcinka pręta o długości  $\Delta x$  przez powierzchnię  $S_{x1}$  a ilością ciepła wypływającego z tego odcinka pręta w jednostce czasu przez powierzchnię  $S_{x2}$ , przy czym ilość ciepła jest liczona na jednostkę objętości.

Ciepło, które pozostanie w odcinku pręta, zostanie zużyte w dwóch zjawiskach. Po pierwsze, spowoduje zmianę temperatury tego odcinka, w myśl definicji ciepła właściwego  $c_w$ . Ilość ciepła, zmagazynowanego w objętości  $\Delta V$  w jednostce czasu, przypadającą na jednostkę objętości, opisuje składnik  $c_w \rho \frac{\partial T}{\partial t}$ , gdzie  $\rho$  oznacza gęstość materiału pręta. Drugim zjawiskiem

jest anihilacja lub generacja ciepła, której szybkość opisuje ostatni składnik,  $q_{gen}$ . Ilość ciepła liczoną na jednostkę objętości, wytwarzaną przez istniejące w materiale źródła ciepła w jednostce czasu ( $q_{gen}$  ze znakiem „+”) nazywamy szybkością generacji ciepła. Ilość ciepła liczoną na jednostkę objętości wypływającą do ujść ciepła w jednostce czasu ( $q_{gen}$  ze znakiem „-”) nazywamy anihilacją ciepła. Przyczyn generacji i anihilacji ciepła jest wiele. Np. substancja ciała może w rozważanej temperaturze podlegać przemianie fazowej - co zawsze zmienia energię wewnętrzną ciała. Składniki substancji ciała mogą po osiągnięciu odpowiedniej temperatury

\* Warunki normalne oznaczają temperaturę  $20^\circ\text{C}$  i ciśnienie  $1013 \text{ hPa}$ .

podlegać reakcji chemicznej. Przez ciało może przepływać strumień cząstek (np. elektronów), przekazując swoją energię atomom ciała lub chłodząc je np. według mechanizmu zjawiska Peltiera. A zatem :

- Źródłem ciepła może być zachodząca w danej temperaturze przemiana fazowa zmniejszająca energię wewnętrzną ciała (czyli powodująca wydzielanie ciepła), egzotermiczna reakcja chemiczna, czy przepływający prąd elektryczny.
- Ujściem ciepła może być także przemiana fazowa ale zwiększająca energię wewnętrzną ciała (czyli powodująca pochłonięcie ciepła), endotermiczna reakcja chemiczna, lub prąd elektryczny przepływający przez styk dwóch materiałów, istniejący wewnątrz ciała.

Dla przypomnienia - gdy w rezultacie reakcji chemicznej wydzielą się ciepło, nazywamy taką reakcję egzotermiczną; gdy w rezultacie reakcji chemicznej ciepło jest przez reagenty pochłaniane, taką reakcję nazywamy endotermiczną.

Równanie (7) można opisać obrazowo dla skończonych przedziałów czasu jako :

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \text{różnica ilości ciepła} \\ \text{wpływającego i} \\ \text{wypływającego przez} \\ \text{przewodzenie z objętości } \Delta V \end{array}}}{\Delta V \cdot \Delta t} = \frac{\boxed{\begin{array}{c} \text{ilość ciepła} \\ \text{zmagazynowanego} \\ \text{w objętości } \Delta V \end{array}}}{\Delta V \cdot \Delta t} + \frac{\boxed{\begin{array}{c} \text{ilość ciepła} \\ \text{wytworzonego} \\ \text{przez źródła ciepła} \\ \text{w objętości } \Delta V \end{array}}}{\Delta V \cdot \Delta t} .$$

Równanie (7) po podzieleniu przez  $c_w$  i  $\rho$  przyjmuje postać :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q_{gen}}{c_w \rho}, \quad (8)$$

gdzie  $k = \frac{\lambda}{c_w \rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$ , przy czym  $k$  nosi nazwę **współczynnika przewodnictwa temperaturowego materiału** pręta. Równanie (8) nosi nazwę **równania przewodnictwa temperaturowego** w postaci różniczkowej.

Gdy przepływ ciepła jest stacjonarny, wtedy  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , a równanie (7) przyjmuje postać **równania przewodnictwa cieplnego w postaci różniczkowej dla przepływu stacjonarnego**:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{q_{gen}}{c_w \rho}. \quad (9)$$

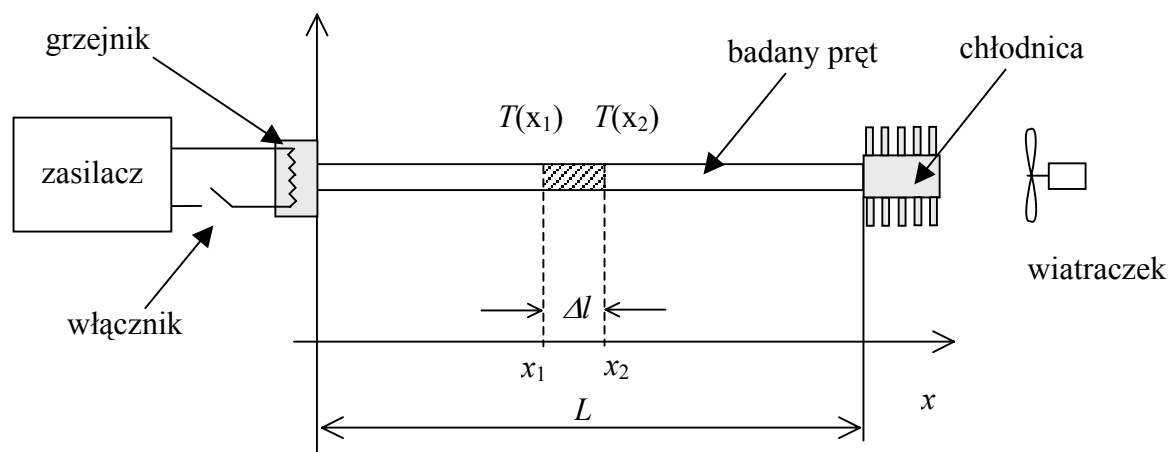
Gdy wewnątrz ciała nie ma źródeł ani ujść ciepła, wtedy  $q_{gen} = 0$ , a równanie (8) przyjmuje postać :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (10)$$

gdzie współczynnik przewodnictwa temperaturowego  $k$  jest proporcjonalny do prędkości wyrównywania się temperatur.

Wydawać by się mogło, że do pomiaru wartości  $k$  wystarczy zmierzyć zależność temperatury od położenia wzdłuż pręta  $T(x)$  dla stacjonarnego przepływu ciepła, czyli przy  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , a następnie dwukrotnie zróżniczkować ten rozkład po położeniu przy pomocy metod numerycznych. Zachodzą tu jednak dwie przeszkody. Pierwsza wynika z konieczności zapewnienia warunków pomiaru  $T(x)$  tak, aby nie zakłócić rozkładu temperatur przez odprowadzanie ciepła przez wiele czujników temperatury z bocznej powierzchni pręta. Druga wynika z analizy rysunku 2. W praktyce rozkład temperatury wzdłuż pręta jest zbliżony do liniowego. Wartość drugiej pochodnej zatem byłaby niewielka i bliska zeru. Obliczenie współczynnika proporcjonalności stojącego w równaniu przy wielkości bliskiej zeru obarczone byłoby dużym błędem. Metoda taka nadaje się wyłącznie do pomiaru przewodności cieplnej ciał źle przewodzących ciepło, czyli o małych wartościach  $\lambda$ .

#### 4. METODA ANGSTRÖMA BADANIA PRZEWODNICTWA TEMPERATUROWEGO



Rys. 3 Schemat do analizy przewodnictwa temperaturowego pręta w warunkach niestacjonarnego przepływu ciepła.

Metodę badania przewodnictwa temperaturowego ciał stałych w warunkach niestacjonarnego przepływu ciepła opracował Angström w latach 1861 - 1863.

Układ pokazany na rysunku 3 składa się z badanego pręta, do którego lewego końca przymocowany jest grzejnik, a do prawego chłodnica. Układ zasilania grzejnika zaopatrzony jest we włącznik umożliwiający ogrzewanie lewego końca pręta tak, aby zmiana temperatury  $T_{x=0}$  zachodziła w sposób periodyczny w czasie. Prawy koniec pręta zwarty jest cieplnie z chłodnicą tak, aby temperatura prawego końca pręta  $T_{x=L}$  była niezmienna w czasie, a ciepło było szybko odprowadzane do otoczenia. Powierzchnia boczna pręta jest odizolowana od otoczenia, zatem przepływ ciepła odbywa się tylko wzdłuż osi  $Ox$  pręta, a temperatura w każdym punkcie dowolnego przekroju poprzecznego pręta jest taka sama.

Do wyznaczenia współczynnika przewodności temperaturowej  $k$  materiału pręta niezbędne jest dokonanie pomiaru temperatury w dwóch, oddalonych od siebie o  $\Delta l$  punktach pręta. Wykorzystując pojemność cieplną grzejnika można doświadczalnie dobrać moc grzejnika oraz czasy jego włączenia i wyłączenia tak, aby temperatura  $T_{x=0}$  zmieniała się sinusoidalnie od czasu  $t$ :

$$T(t)_{x=0} = T_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (11a)$$

gdzie  $T_0$  oznacza amplitudę,  $\omega$  - częstość,  $\varphi$  - fazę początkową temperatury.

Wtedy w dowolnym miejscu pręta, zależność temperatury od czasu i położenia  $T(t,x)$  będzie następująca:

$$T(t,x) = T_0 \cos(\omega t - k'x + \varphi) \quad (11b)$$

gdzie  $k'$  jest **wektorem falowym**, a postać równania (11b) jest **równaniem fali**.

Aby znaleźć rozwiązanie równania (11b), czyli zależność  $T(t,x)$  w dowolnym miejscu pręta przy temperaturze  $T_{x=0}$  zmieniającej się według zależności (11a), należy rozwiązać równanie różniczkowe (10) dla wymienionych warunków brzegowych. Ścisłe rozwiązanie czytelnik znajdzie w poz. 1 literatury. W przybliżeniu można założyć, że w dowolnym miejscu pręta temperatura będzie zmieniała się także w sposób periodyczny, aczkolwiek amplituda i faza temperatury mierzonej w dowolnym miejscu pręta będą już inne niż inicjowane przez grzejnik na początku pręta, dla  $x = 0$  (wzór 11a). Dociekliwego czytelnika zapraszamy do przestudiowania instrukcji do ćwiczenia nr 9, opisującej drgania tłumione\*.

Dość wspomnieć, że w dowolnym miejscu wzdłuż osi  $Ox$  pręta temperatura będzie miała wartość :

$$T(x,t) = T_0 \cdot e^{-ax} \cos(\omega t - \varphi - bx) \quad (12)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są współczynnikami związanymi z współczynnikiem przewodności temperaturowej  $k$  w sposób następujący :

$$a \cdot b = \frac{\omega}{2k} \quad (13)$$

Jeżeli w punktach  $x_1$  i  $x_2$  pręta temperatura będzie według (12) równa odpowiednio:

$$\begin{aligned} T(x_1,t) &= \overbrace{T_0 \cdot e^{-ax_1}}^{T_1} \cos(\omega t - \varphi - bx_1) \text{ , oraz} \\ T(x_2,t) &= \underbrace{T_0 \cdot e^{-ax_2}}_{T_2} \cos(\omega t - \varphi - bx_2) \text{ ,} \end{aligned} \quad (14)$$

to **stosunek amplitud**  $T_1$  i  $T_2$  obu czasowych przebiegów temperatury, określonych równaniami

(14) będzie równy  $\frac{T_1}{T_2} = e^{a(x_2 - x_1)}$ , a stąd :

$$a = \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\Delta l} \quad (15)$$

---

\* Rozwiązanie równania (10) dla temperatury w dowolnym miejscu pręta zmieniającej się według (11b) wykazuje, że częstość  $\omega$  przebiegu temperaturowego także ulegnie zmianie. Zmianę tę można przy przebiegach wolnozmiennych pominąć (komentarz do prawa Fouriera - równanie (6)).



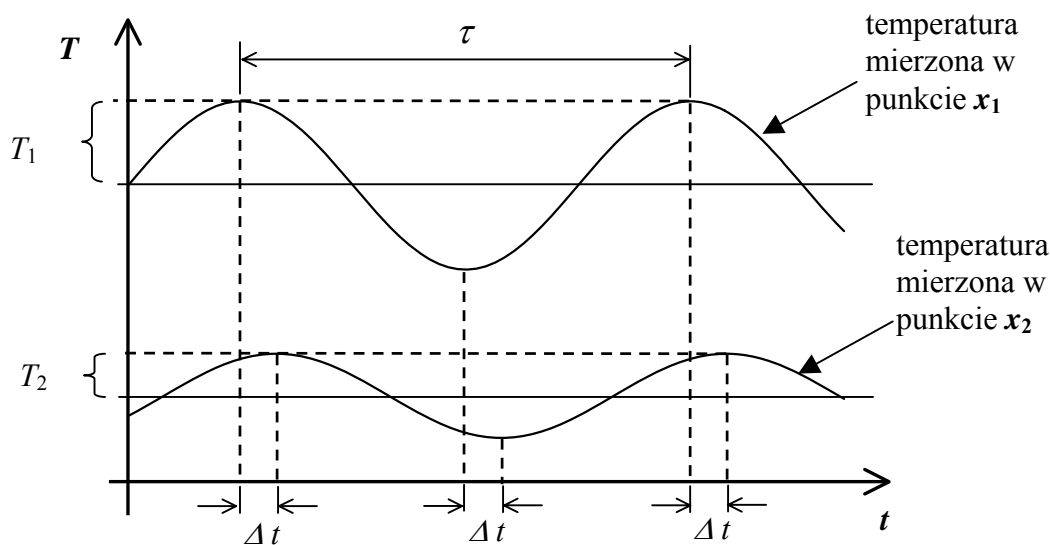
Z równań (14) wynika także różnica przesunięć fazowych  $\Delta\varphi$  obu przebiegów temperatury. Będzie ona równa różnicy argumentów funkcji cosinus :  $\Delta\varphi = b(x_2 - x_1)$  . Stąd :

$$b = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} . \quad (16)$$

Z zależności (13) wynika, że  $\frac{\omega}{2k} = \frac{2\pi}{\tau \cdot 2k} = a \cdot b$ , gdzie  $\tau$  jest **okresem zmienności fali temperaturowej** wytwarzanej przez grzejnik na początku pręta. Zatem :

$$k = \frac{\pi \cdot (\Delta l)^2}{\Delta\varphi \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} \left[ \frac{m^2}{s} \right] , \quad (17)$$

gdzie  $\Delta l$  jest **odległością pomiędzy punktami pomiaru temperatury** w pręcie,  $\tau$  - **okresem periodyczności** fali temperaturowej równym  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ , przy czym  $\tau_1$  jest czasem, w którym grzejnik jest włączony a  $\tau_2$  jest czasem, w którym grzejnik jest wyłączony;  $\Delta\varphi$  natomiast oznacza **wartość przesunięcia fazowego** pomiędzy temperaturami mierzonymi w obu punktach pomiaru temperatury.



Rys.4 Ustalony, czasowy przebieg temperatur mierzonych jednocześnie w punktach  $x_1$  i  $x_2$  badanego pręta.

Wykres obu przebiegów temperatury o okresie  $\tau$ , rejestrowanych równocześnie w dwóch punktach pręta po ustaleniu się periodycznego przepływu ciepła pokazano na rysunku 4.

Konieczną do obliczenia współczynnika przewodności temperaturowej  $k$  wartość przesunięcia fazowego  $\Delta\varphi$  można obliczyć z przesunięcia czasowego  $\Delta t$  maksimów lub minimów temperatur z otrzymanego wykresu według zależności :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \Delta t . \quad (18a)$$

Stąd :

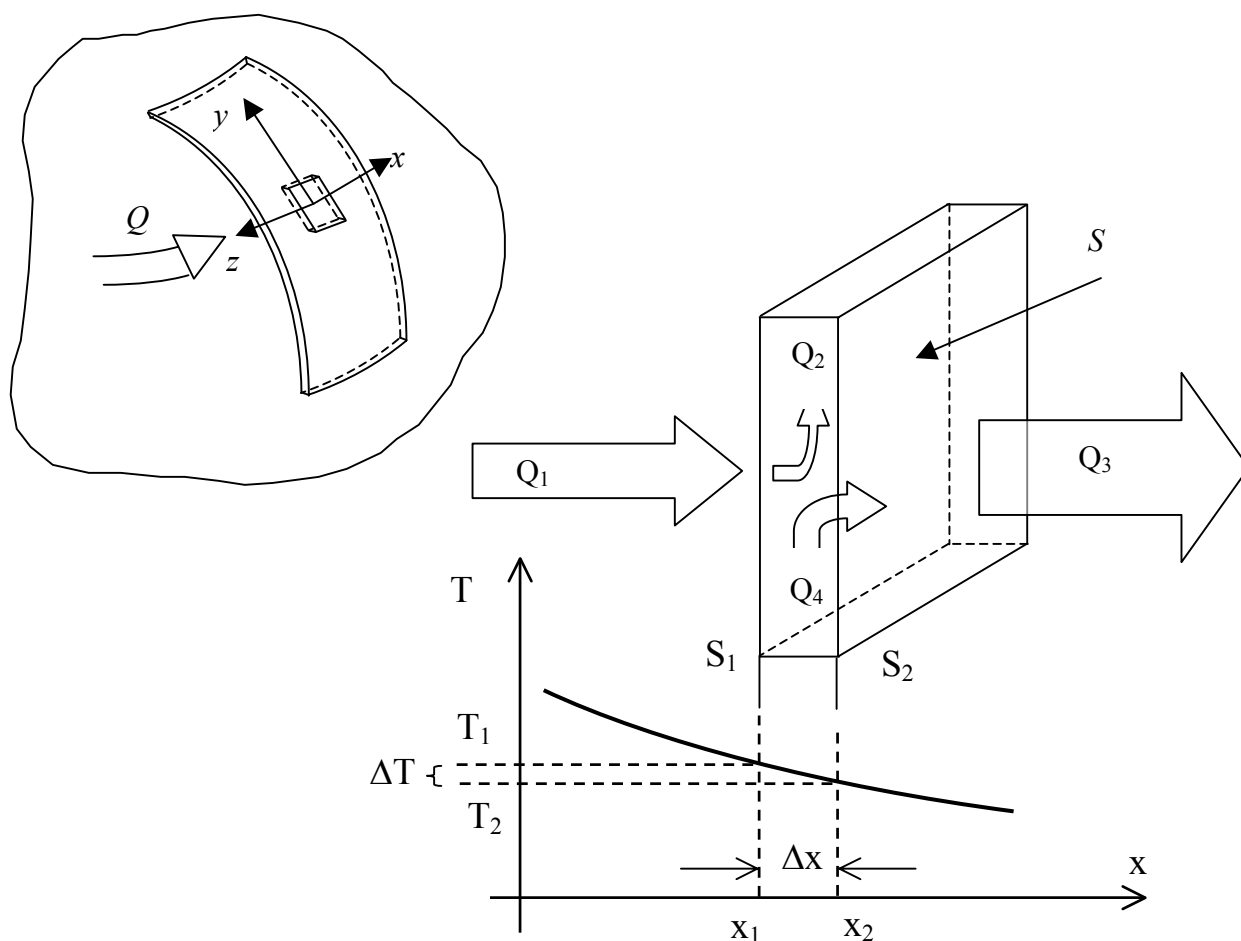
$$k = \frac{(\Delta l)^2}{2 \cdot \Delta t \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} . \quad (18b)$$

Wartość współczynnika przewodnictwa cieplnego natomiast obliczamy przy znajomości ciepła właściwego i gęstości materiału z zależności :

$$\lambda = k \cdot c_w \cdot \rho \left[ \frac{J}{mKs} \right] . \quad (19)$$

## DODATEK

## WYPROWADZENIE RÓWNANIA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO I TEMPERATUROWEGO



Rys. 6 Przepływ ciepła przez ciekłą warstwę o polu powierzchni  $S$ , wyodrębnioną wewnątrz ciała i prostopadłą do kierunku przepływu ciepła.

Wyobraźmy sobie ciało, przez które przepływa ciepło w dodatnim kierunku osi  $Ox$ . Wyodrębniona na rysunku cienka warstwa materiału, ułożona prostopadłe do kierunku przepływu ciepła, posłuży do wyprowadzenia równania przewodnictwa cieplnego. Załóżmy, że grubość tej warstwy jest niewielka i równa  $\Delta x$ , a pole powierzchni warstwy wynosi  $S$ . Ponieważ układ współrzędnych wybrano tak, aby oś  $Ox$  była równoległa do kierunku przepływu ciepła, będzie ono przepływać wyłącznie przez obie powierzchnie o polu  $S$ . Kierunek przepływu ciepła wskazuje, że zależność temperatury od położenia przebiega w przybliżeniu tak, jak pokazano na wykresie  $T(x)$ .

W celu wyprowadzenia równania przewodnictwa cieplnego należy utworzyć bilans cieplny wycinka warstwy pokazanej na rysunku. W skład równania wejdą cztery składniki pokazane na rysunku:  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  i  $Q_4$ .

Obecność w równaniu ciepła  $Q_2$  wynika z faktu, że  $T_1 > T_2$ . Z definicji ciepła właściwego  $c_w \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right]$  wiemy, że ilość ciepła oddanego przez materiał o masie  $m$ , którego temperatura zmalała o  $\Delta T$  jest równe  $\Delta Q = c_w \cdot m \cdot \Delta T = c_w \rho V \cdot \Delta T$ , gdzie  $\rho$  oznacza gęstość a  $V$  objętość materiału, czyli w naszym przypadku objętość warstwy. Zatem omawiana warstwa - podczas przepływu ciepła pokazanym na rysunku - straci ilość ciepła równą :

$$Q_2 = c_w \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot S \cdot \Delta x . \quad (22)$$

Ciepło  $Q_4$  powstaje w istniejących w opisywanej warstwie źródłach ciepła lub uchodzi do ujść ciepła. Zgodnie z równaniem (7), **szybkość generacji lub anihilacji ciepła**  $q_{gen}$  w jednostce objętości ciała definiujemy jako :

$$q_{gen} = \frac{Q}{V \cdot t} . \quad [q_{gen}] = \left[ \frac{J}{m^3 s} \right] \quad (23)$$

Stąd ilość ciepła  $Q_4$  generowana w rozważanej warstwie lub z niej usuwana będzie równa :

$$Q_4 = q_{gen} \cdot \Delta V \cdot \Delta t = q_{gen} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t . \quad (24)$$

$Q_1$  i  $Q_3$  opisują przepływ ciepła przez przewodzenie.  $Q_1$  jest ciepłem wpływającym do objętości warstwy powierzchnię  $S_1$  a ciepło  $Q_2$  wypływa z niej powierzchnię  $S_2$ . Ilość ciepła liczoną na jednostkę objętości, przepływającą w jednostce czasu przez powierzchnię  $S$  można opisać równaniem Fouriera (6) w postaci  $F = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$  .

Ciepłem wpływającym do objętości warstwy  $\Delta V$  przez powierzchnię  $S_1$  w czasie  $\Delta t$  jest ciepło  $Q_1$ . Na podstawie prawa Fouriera (6) oraz (3) :

$$Q_1 = F_1 \cdot S \cdot \Delta t = -\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \cdot S \cdot \Delta t . \quad (25)$$

Symbol  $f(x) \Big|_{x=x_1}$  oznacza, że wartość funkcji  $f(x)$  liczymy dla  $x = x_1$  .

Na koniec ciepłem wypływającym z warstwy przez powierzchnię  $S_2$  będzie ciepło  $Q_3$  :

$$Q_3 = F_2 \cdot S \cdot \Delta t = -\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} \cdot S \cdot \Delta t . \quad (26)$$

Tworzenie bilansu cieplnego polega na przyrównaniu do siebie ciepła wpływającego do układu wraz z ciepłem generowanym w układzie przez źródła ciepła - z ciepłem wypływającym z układu i ciepłem traconym w ujściach ciepła :  $\sum Q_{in} = \sum Q_{out}$  (w naszym przypadku „układ” jest rozważaną objętością warstwy  $\Delta V$ ). Równanie bilansu cieplnego dotyczy przedziału czasu  $\Delta t$ .

Przedstawmy równanie  $\sum Q_{in} = \sum Q_{out}$  , czyli  $Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4$ , w postaci:

$$\underbrace{-\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \cdot S \cdot \Delta t}_{Q_1} = \underbrace{c_w \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot S \cdot \Delta x}_{Q_2} + \underbrace{-\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} \cdot S \cdot \Delta t}_{Q_3} + \underbrace{q_{gen} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t}_{Q_4} \quad (27)$$

Po podzieleniu obu stron równania przez  $\Delta x \cdot S \cdot \Delta t$  otrzymamy:

$$-\frac{\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}}{\Delta x} = \frac{c_w \rho \Delta T}{\Delta t} - \frac{\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_2}}{\Delta x} + q_{gen} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t \quad (28)$$

Po uporządkowaniu i wyłączeniu  $\lambda$  przed nawias otrzymujemy:

$$\frac{\lambda \left[ \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial T(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right]}{\Delta x} = \frac{c_w \rho \Delta T}{\Delta t} + q_{gen} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t \quad (29)$$

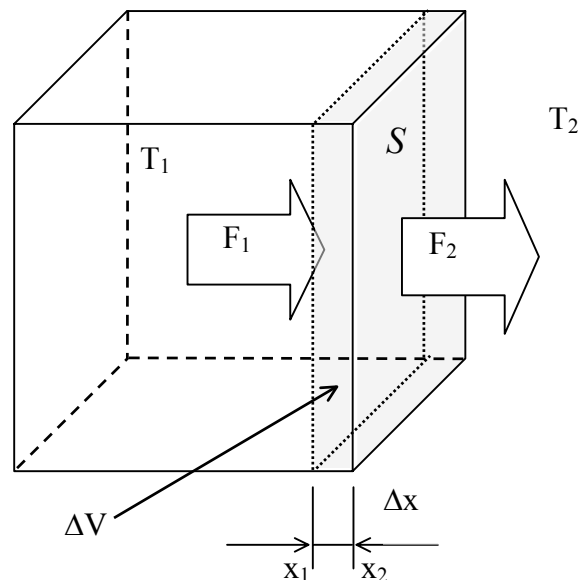
Przy  $\Delta x \rightarrow 0$  oraz  $\Delta t \rightarrow 0$ , po lewej stronie równania otrzymujemy drugą pochodną temperatury po położeniu a po prawej stronie pochodną temperatury po czasie:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c_w \rho \frac{\partial T}{\partial t} + q_{gen} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t \quad (30)$$

**Równanie to nosi nazwę równania przewodnictwa cieplnego w postaci różniczkowej (wzór 7).**

Dla stacjonarnego przepływu ciepła  $\left( \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$  równanie to przybiera postać:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = q_{gen} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t \quad (31)$$



Rys. 7 Wymiana ciepła z otoczeniem.

Rozważmy to równanie w przypadku, gdy powierzchnia  $S_2$  z rysunku 7 jest graniczną powierzchnią  $S$  ciała, przez którą ciepło odpływa do otoczenia. Napiszmy równanie (31) w postaci analogicznej do równania 29, czyli dla skończonych przyrostów  $\Delta x$  i  $\Delta t$ :

$$\frac{\lambda \left[ \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right]}{\Delta x} = q_{gen} . \quad (32)$$

Stąd, na podstawie (23) i po wymnożeniu przez  $\lambda$  i  $\Delta x$  :

$$\lambda \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \lambda \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \frac{Q}{\Delta V \cdot \Delta t} \Delta x , \quad (33)$$

gdzie  $\Delta V = S \cdot \Delta x$  jest objętością warstwy o grubości  $\Delta x$ , położonej przy powierzchni granicznej  $S_2$ . Na podstawie prawa Fouriera (6) wiemy, że lewa strona zależności (33) jest różnicą natężeń strumieni  $F_1$  i  $F_2$  wpływającego i wypływającego z warstwy granicznej. Doświadczalnie stwierdzono, że różnica ta jest dla niezbyt wysokich temperatur proporcjonalna do temperatury :

$$F_1 - F_2 = h(T_2 - T_1) , \quad (34)$$

przy czym  $T_2$  jest temperaturą otoczenia,  $T_1$  oznacza temperaturę wnętrza ciała, a współczynnik proporcjonalności  **$h$  jest współczynnikiem przenikania (przejmowania) ciepła, niezależnym od mechanizmu przepływu ciepła.** Jednostką  $h$  jest  $\frac{J}{m^2 \cdot s \cdot K}$ . Równanie to można na podstawie

definicji natężenia strumienia ciepła (3) przekształcić do postaci:

$$Q = \Delta F \cdot S \cdot \Delta t = h(T_2 - T_1) \cdot S \cdot \Delta t , \quad (35)$$

która jest znana jako **prawo Newtona**. Prawo to pozwala obliczyć **ciepło przepływające przez powierzchnię graniczną  $S$  ciała o temperaturze  $T_1$  do otoczenia o temperaturze  $T_2$  w czasie  $\Delta t$** , przy czym ujściem ciepła jest powierzchnia zewnętrzna, przez którą ciepło przepływa do otoczenia.