

Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki
Centralne Laboratorium Fizyki
Piotr Jaśkiewicz
Krystyna Wosińska

Wyznaczanie współczynnika lepkości cieczy.

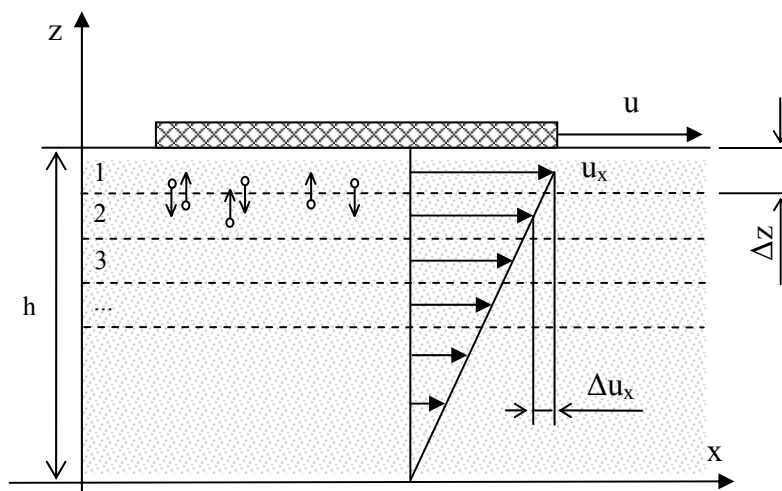
1. Podstawy fizyczne.

Płyny to substancje, które po przyłożeniu do nich siły o dowolnej wartości nie odkształcają się tak, jak ciała stałe, lecz zaczynają płynąć, zmieniając swój kształt. Do płynów zaliczamy ciecze i gazy.

Lepkość to zdolność płynu do stawiania oporu przy wzajemnym przemieszczaniu się elementów płynu względem siebie. Wyobraźmy sobie ciecz w naczyniu o głębokości h , z którą od góry styka się płyta o powierzchni S (rys. 1). Po przyłożeniu do płyty siły F , o kierunku równoległym do powierzchni cieczy, płyta zacznie się poruszać najpierw ruchem przyspieszonym o malejącym przyspieszeniu, a po osiągnięciu prędkości granicznej u – ruchem jednostajnym. Zjawisko to wynika z działania siły tarcia płyty o powierzchnię cieczy, siły rosnącej wraz z prędkością płyty. Poruszająca się z prędkością u płyta porywa za sobą cząstki cieczy o masie m , tworząc cienką warstwę o grubości Δz . Warstwa ta z kolei oddziałuje z następną warstwą a oddziaływanie to wynika z przenikania cząsteczek cieczy pomiędzy warstwami.

Prędkości cząsteczek płynu przybierają dowolne kierunki a ich wartości oscylują wokół prędkości średniej $\langle v \rangle$, zależnej od temperatury. W jednostce czasu zatem tyle samo cząsteczek przeniknie na skutek ruchu termicznego z warstwy 1 do 2 jak z warstwy 2 do 1. Jednak cząsteczki z warstwy 1 przenikając do warstwy 2 niosą ze sobą w kierunku osi x pęd powiększony o wartość mu , $p'_x = m\langle v \rangle + mu$, przyspieszając warstwę 2. Z kolei cząsteczki przenikające z warstwy 3 do warstwy 2 niosą ze sobą jedynie pęd o składowej p_x równej $p_x = m\langle v \rangle$, zmniejszając liczbę cząsteczek o powiększonym pędzie i spowalniając warstwę 2.

W ten sposób pęd płyty porusza warstwy cieczy powodując ich ruch z prędkością u_x zmieniającą się od u w warstwie przylegającej do płyty do 0 przy dnie naczynia. Prędkość u_x w punkcie o współrzędnej z spełnia równanie (rys. 1) $\frac{u_x}{z} = \frac{u}{h} \Rightarrow u_x = \frac{u}{h} z$



Rys. 1. Transport pędu w cieczy.

Siła oporu doznawana przez płytę, czyli siła lepkości jest wprost proporcjonalna do powierzchni płyty S i do szybkości zmian prędkości warstw cieczy z odległością od płyty. Znak (-) wynika z faktu, że jest to siła hamująca zwrócona przeciwnie do prędkości:

$$F = -\eta \cdot S \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\eta \cdot S \cdot \frac{u}{h} \quad (1)$$

gdzie współczynnik η oznacza dynamiczną lepkość płynu.

Jednostką lepkości jest zatem $\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \right]$ lub $[\text{Pa} \cdot \text{s}]$

W miarę wzrostu gęstości płynu ρ i prędkości u oraz dla przypadków trójwymiarowych (np. kula zanurzona w płynie) zależności stają się bardzo skomplikowane. W przypadku trójwymiarowym zamiast o warstwach płynu mówimy o rurek płynu, których kształt jest także trójwymiarowy. Opis ich zachowania wymaga zastosowania teorii chaosu.

Szczególnym parametrem pozwalającym na przybliżone przewidywanie zachowania się rurek płynu jest liczba Reynolds'a, Re . Z zależności (1) wynika, że siła lepkości zależy od prędkości płyty i parametru liniowego $l = \frac{S}{h}$. Liczbę Reynolds'a definiujemy jako:

$$Re = \frac{u \rho l}{\eta} \quad (2)$$

Dla małej prędkości u , małej gęstości płynu ρ i dużej jego lepkości η , $Re \ll 1$ a wtedy ruch płynu nazywamy laminarnym (bezwirowym). Gdy prędkość przepływu płynu lub prędkość ruchu ciała w nim zanurzonego przekroczy wartość krytyczną, kształt i rozmieszczenie przestrzenne rurek płynu z jednoznacznie dla danej prędkości określonego w czasie i przestrzeni zmienia się w układ wirów. Ruch płynu nazywamy wtedy turbulentnym.

Rozważmy kulę o promieniu r i masie m_k spadającą swobodnie w cieczy o gęstości ρ_c z prędkością v przy zachowaniu warunków przepływu laminarnego. Siłę oporu, zwaną siłą Stokesa, można przedstawić w postaci :

$$F_s = -\alpha \eta v l \quad (3)$$

gdzie α oznacza współczynnik kształtu a l wymieniony wyżej parametr liniowy.

Dla kuli $\alpha = 6\pi$ oraz $l = r$:

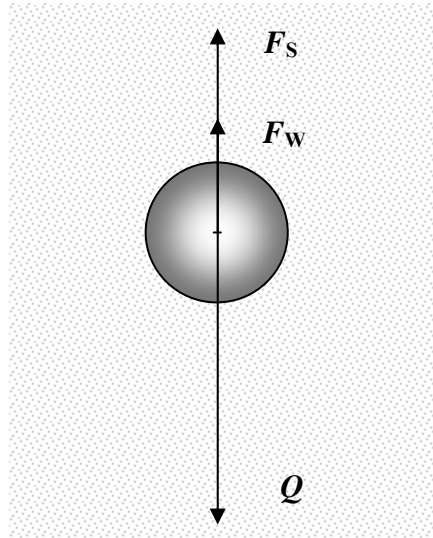
$$F_s = -6\pi \eta v r \quad (4)$$

Zależność ta nosi nazwę **prawa Stokes'a**.

Na spadającą w cieczy kulę działają trzy siły: siła grawitacji Q , wynikająca z prawa Archimedesasa siła wyporu F_w oraz siła lepkości (oporu cieczy) F_s (4):

$$Q = m_k g; \quad F_w = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c g \quad (5)$$

gdzie g oznacza wartość przyspieszenia ziemskiego, ρ_c – gęstość cieczy, r – promień kulki, m_k – masę kulki.



Rys. 2. Siły działające na kulkę swobodnie spadającą w cieczy.

Na kulkę działa zatem siła wypadkowa $F = Q + F_w + F_s$ a równanie ruchu kulki, zgodnie z drugą zasadą dynamiki można przedstawić w postaci:

$$m_k \frac{dv}{dt} = m_k g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c g - 6 \pi \eta r v \quad (6)$$

F_s rośnie wraz z prędkością kulki v aż do chwili, w której siły Q , F_w oraz F_s zrównoważą się a wartość wypadkowej siły F będzie równa zero. Rozwiązanie tego równania dla warunku początkowego $v(t=0) = 0$ ma postać następującą:

$$v(t) = \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho_k - \rho_c) \cdot \left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta r}{m_k} t} \right) \quad (7)$$

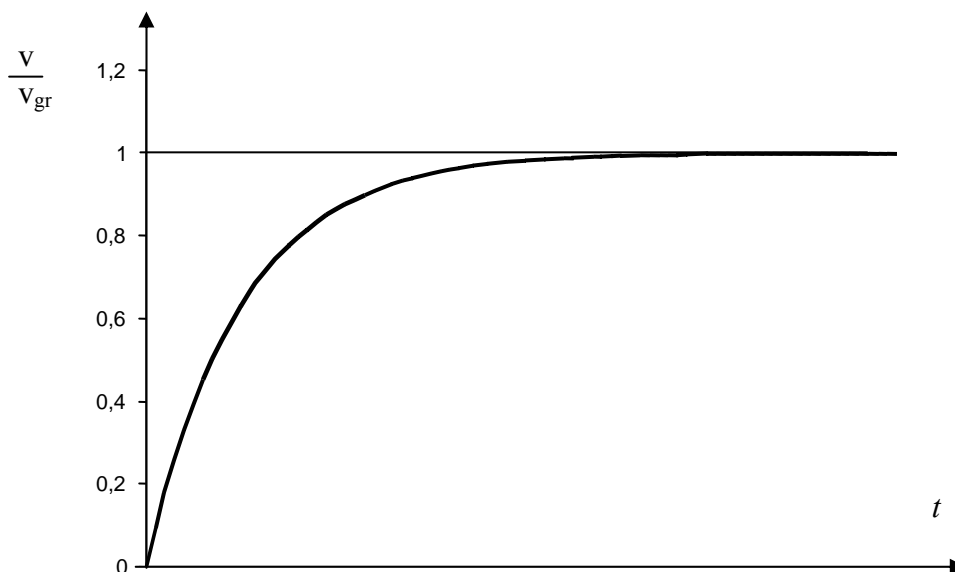
gdzie ρ_k oznacza gęstość materiału, z którego wykonana jest kulka.

Dla $t \rightarrow \infty$, $v(t)$ dąży do v_{gr} :

$$v_{gr} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho_k - \rho_c) \cdot \left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta r}{m_k} t} \right) \right) = \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho_k - \rho_c) \quad (8)$$

Zależność (8) została wyprowadzona dla przypadku nieograniczonej objętości cieczy. Jeżeli kulka porusza się wzdłuż osi cylindra o promieniu R a wysokość słupa cieczy wynosi h , do wzoru na prędkość graniczną należy wprowadzić poprawki uwzględniające wpływ dna i ścianek bocznych cylindra:

$$v_{gr} = \frac{2r^2 g (\rho_k - \rho_c)}{9\eta \left(1 + 2,4 \frac{r}{R} \right) \left(1 + 3,1 \frac{r}{h} \right)} \quad (9)$$



Rys. 3. Zależność prędkości kulki od czasu – rozwiązanie równania (6) dla $v(t=0) = 0$

2. Wyznaczanie współczynnika lepkości cieczy na podstawie prawa Stokes'a

Na podstawie zależności (9) można wyznaczyć η mierząc prędkość graniczną poruszających się w cieczy kulek o znanym promieniu i gęstości. Pomocnym będzie wyznaczenie drogi s_1 , po przebyciu której kulki poruszać się będą ruchem jednostajnym.

Obliczmy drogę przebytą przez kulkę w czasie t , całkując wyrażenie na prędkość (7):

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t A(1 - e^{-Bt'}) dt' = \left(At' + \frac{A}{B} e^{-Bt'} \right) \Big|_{t'=0}^{t'=t} = \\
 &= At - \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt}) = v_{gr} t - v_{gr} \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)
 \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie $A = \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho_k - \rho_c)$ i zgodnie z (8) jest równe v_{gr} . $B = \frac{6\pi\eta r}{m_k}$ a skoro ma wymiar $\left[\frac{1}{s} \right]$,

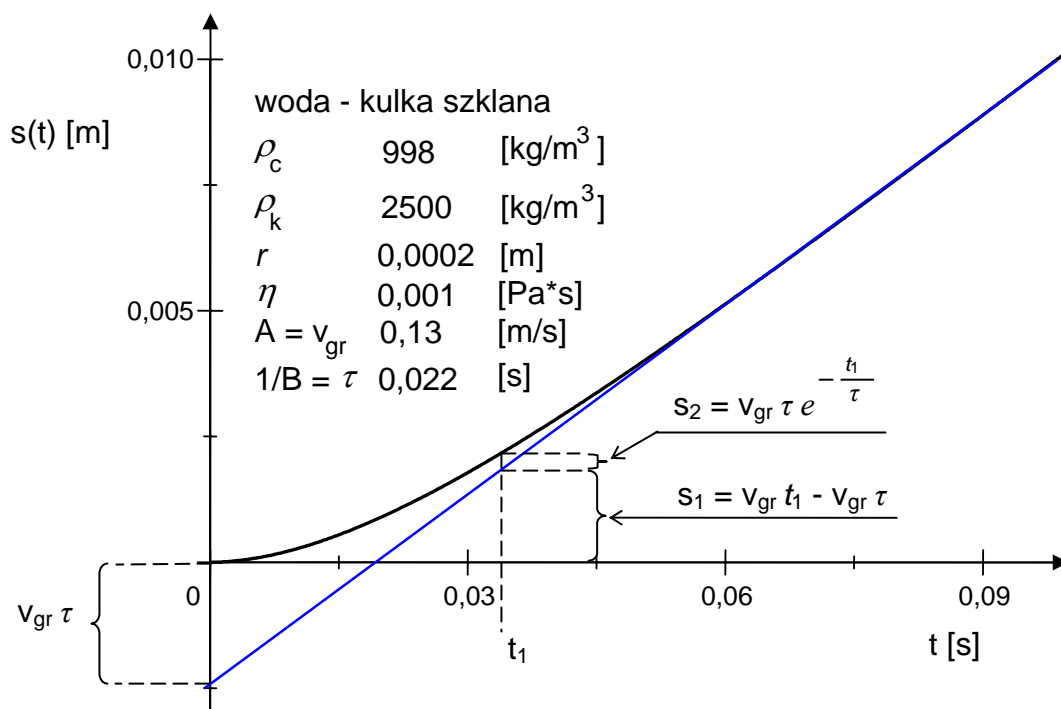
zatem $\frac{1}{B} = \tau$ gdzie τ jest czasem relaksacji. Czas relaksacji jest miarą czasu dochodzenia układu

(kulka swobodnie spadająca w cieczy) do równowagi, czyli stanu, w którym wszystkie siły działające na kulkę są w równowadze. W doświadczalnym układzie pomiarowym wartość τ powinna być jak najmniejsza, pragniemy bowiem badać stan równowagi, czyli mierzyć prędkość

v_{gr} . Ponieważ $B = \frac{9\eta}{2r^2 \rho_k}$, do celów eksperymentalnych należy zatem wybrać kulki o małym

promieniu i wykonane z materiału o małej gęstości, która nie może być jednak mniejsza od gęstości cieczy.

Z wykresu pokazanego na rys. 4 wynika, że droga s przebyta przez kulkę w czasie t_1 równa jest sumie dwóch składników :



Rys. 4. Zależność drogi od czasu dla szklanej kulki o $r = 0,2\text{mm}$ opadającej swobodnie w wodzie.

$$s = s_1 + s_2, \quad (11)$$

$$\text{gdzie } s_1 = v_{gr} t_1 - v_{gr} \tau, \text{ oraz } s_2 = v_{gr} \tau e^{-\frac{t_1}{\tau}} \quad (12)$$

Możemy teraz obliczyć, po jakim czasie t_1 wartość s_2 będzie równa niepewności pomiaru drogi Δs :

$$t_1 = \tau \ln \left(\frac{v_{gr} \tau}{\Delta s} \right) \quad (13)$$

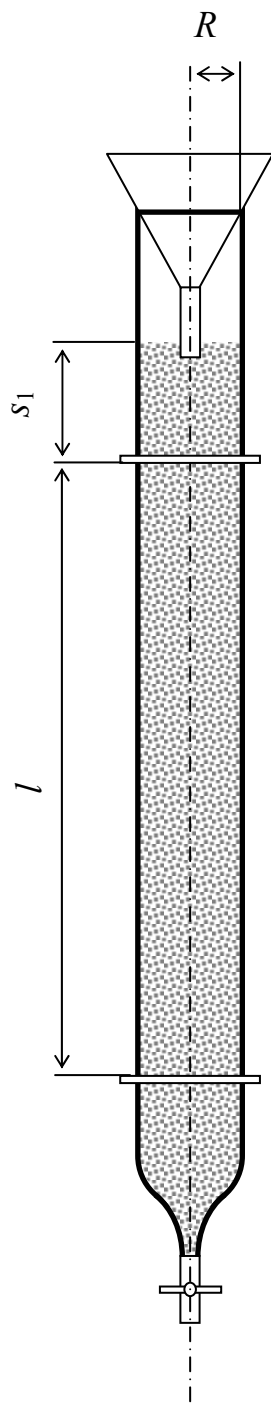
Stąd możemy obliczyć wartość położenia górnego znacznika wysokości (rys. 5) względem powierzchni cieczy, po minięciu którego kulka będzie z niepewnością pomiaru położenia Δs poruszać się ruchem jednostajnym z prędkością v_{gr} :

$$s_1 = v_{gr} t_1 - v_{gr} \tau = v_{gr} \tau \left(\ln \frac{v_{gr} \tau}{\Delta s} - 1 \right) \quad (14)$$

3. Wykonanie pomiarów

Badane ciecze znajdują się w rurach pokazanych na rys. 5.

- 1) Na wadze laboratoryjnej należy zważyć wybraną liczbę kulek. Wynik, podzielony przez liczbę kulek będzie średnią wartością \bar{m}_k .
- 2) Przy pomocy suwmiarki zmierzyć wewnętrzną średnicę cylindra $2R$.



Rys. 5

- 3) Przy pomocy mikromierza zmierzyć średnicę kulek a następnie obliczyć średnią wartość promienia kulki \bar{r} .

Należy teraz wyznaczyć prędkość graniczną kulek mierząc drogę i czas przebycia tej drogi w ruchu jednostajnym. Wiemy, że prędkość ustala się po przebyciu pewnej drogi i górny znacznik powinien być ustawiony odpowiednio nisko. Jednak mierzona droga i czas ruchu powinny być jak największe, aby błąd względny pomiaru był jak najmniejszy.

Pomiar wstępny.

Pomiar wstępny ma na celu wyznaczenie drogi s_1 , po przebyciu której kulki poruszać się będą ruchem jednostajnym, tak aby właściwy pomiar prędkości granicznej można było wykonać mierząc maksymalną drogę i czas ruchu.

- 4) Ustawić górny znacznik wysokości w połowie wysokości cylindra. Rurka lejka powinna być zanurzona w cieczy. Zapisać odległość znacznika od powierzchni cieczy.
- 5) Dolny znacznik ustawić ok 5cm powyżej dna cylindra. Zmierzyć odległość l pomiędzy znacznikami.
- 6) Wrzucić do lejka jedną kulkę i zmierzyć przy pomocy stopera czas jej opadania pomiędzy znacznikami. Kulkę wrzucać ostrożnie tak, aby jej prędkość początkowa na powierzchni cieczy była bliska zeru.
- 7) Powtórzyć pomiar czasu kolejno dla dwóch kulek. **Przed wykonaniem kolejnego pomiaru usunąć poprzednią kulkę z cylindra przy pomocy zaworu, otwieranego tylko na krótką chwilę. Pamiętać o podstawieniu zlewki.**
- 8) Wyniki zapisywać w zaprojektowanej przez siebie tabeli.
- 9) Na podstawie zależności (9) oraz wyników pomiarów obliczyć prędkość graniczną v_{gr} oraz oszacować lepkość badanej cieczy, przyjmując $H = l + s_1$
- 10) Przyjmując wartość błędu pojedynczego pomiaru położenia kulki za równą jej średnicy ($\Delta s = 2r$), obliczyć czas relaksacji τ , t_1 , a następnie na podstawie zależności (14) s_1 .

Pomiar dokładny.

- 11) Ustawić górny znacznik wysokości w odległości s_1 od poziomu cieczy w cylindrze.
- 12) Wykonać pomiary dla wszystkich kulek (pkt. 1).
- 13) Powtórzyć procedurę pomiarową od pkt 4) do pkt 12) dla pozostałych cieczy.

4. Opracowanie wyników pomiarów

- 1) Na podstawie zależności (9) oraz wyników pomiarów obliczyć prędkość graniczną v_{gr} oraz obliczyć lepkość badanej cieczy, przyjmując $H = l + s_1$.
- 2) Korzystając z zależności (10) wykonać wykresy $s(t)$ oraz obliczyć czasy relaksacji.
- 3) Obliczyć całkowity błąd pomiaru v_{gr} i η dla wszystkich badanych cieczy.
- 5) Na podstawie wyników obliczeń oszacować minimalną wartość promienia r stalowej kulki, która w badanym układzie wypełnionym gliceryną nie osiągnie nigdy prędkości granicznej.

5. Pytania kontrolne

- 1) Dlaczego gęstość materiału kulki nie może być mniejsza od gęstości cieczy? Przeprowadzić dowód.
- 2) Jak definiujemy lepkość płynu i jaka jest jej jednostka?
- 3) Co to jest liczba Reynolds'a?
- 4) Co to jest prędkość graniczna i jakim wyraża się wzorem?
- 5) Na podstawie zależności drogi przebytej przez kulkę od czasu podać sposób szacowania wartości początkowego położenia górnego znacznika wysokości.
- 6) Jak brzmi prawo Stokesa?

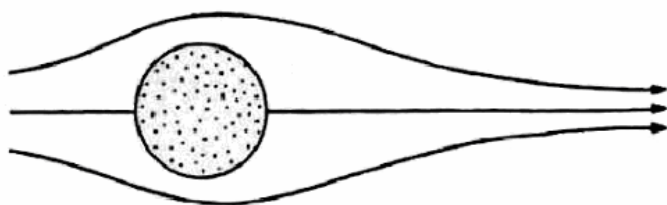
Literatura:

1. I.W. Sawieljew, Wykłady z fizyki t.1, Mechanika. Fizyka cząsteczkowa. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994r.
2. S. Vogel, *Life in moving fluids*, Princeton University Press, 1994.
3. T. Dryński, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976r.
4. B. Jaworski, A. Dietłaf, L. Miłkowska, G. Siergiejew, Kurs fizyki, t.1, Mechanika. Podstawy fizyki cząsteczkowej i termodynamiki. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1963r

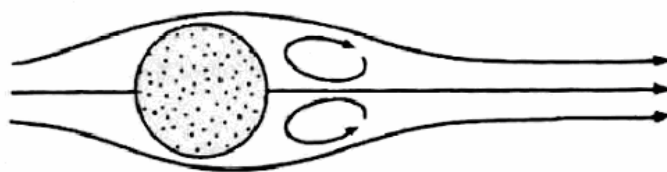
DODATEK

Wartości liczb Reynolds'a wyznaczone eksperymentalnie w badaniach ruchu żywych organizmów²

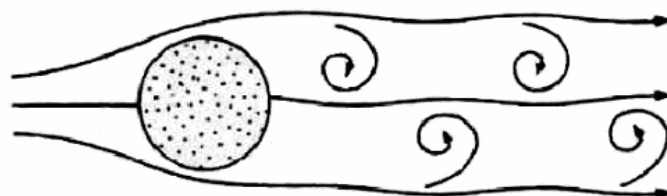
	Re
Duży wieloryb płynący z prędkością 10 m/s	300 000 000
Tuńczyk płynący z prędkością 10 m/s	30 000 000
Kaczka lecąca z prędkością 20 m/s	300 000
Duża ważka lecąca z prędkością 7 m/s	30 000
Widłonóg (skorupiak planktonowy) w trakcie skoku z prędkością 0,2 m/s	300
Skrzydła najmniejszych latających owadów w ruchu	30
Larwy bezkręgowców płynące z prędkością 1 mm/s	0,3
Sperma jeżowca płynąca z prędkością 0,2 mm/s	0,03
Bakteria płynąca z prędkością 0,01 mm/s	0,00001



- a) $Re < 10$
przepływ laminarny



- b) $10 < Re < 40$
przepływ laminarny,
stabilne wiry



- c) $40 < Re < 200\ 000$
przepływ turbulentny,
„wędrujące” wiry



- d) $Re > 200\ 000$
przepływ turbulentny,
kawitacja*

* kawitacja – zerwanie ciągłości płynu występujące dla dużych prędkości (dużych sił lepkości) związane z lokalną przemianą fazową i powstawaniem pęcherzyków pary płynu.