**ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ**

**ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»**

Факультет компьютерных наук

Образовательная программа «Программная инженерия»

УДК 519.1

|  |  |
| --- | --- |
| СОГЛАСОВАНО  Руководитель проекта,  Профессор базовой кафедры «Интеллектуальные технологии системного анализа и управления» ФИЦ «Информатика и управление» РАН,  д-р физ.-мат. наук  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ М. А. Посыпкин  «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2022 г. | УТВЕРЖДАЮ  Академический руководитель образовательной программы «Программная инженерия»,  профессор департамента программной инженерии, канд. техн. наук  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. В. Шилов  «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2022 г. |

**Отчет**

**по исследовательскому курсовому проекту**

на тему “Высокопроизводительные методы решения задачи о ранце со многими ограничениями” по направлению подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия»

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнил  студент группы БПИ-194  образовательной программы  09.03.04 «Программная инженерия»  Попов Игорь    «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2022 г. |

**Москва 2022**

# РЕФЕРАТ

Отчет ?? с., ? рис., ? табл., ? источн., ? прил.

**Ключевые слова:** *задача о рюкзаке; задача о ранце; knapsack problem; комбинаторная оптимизация; метод ветвей и границ;*

В отчете представлены результаты курсового проекта на тему “Высокопроизводительные методы решения задачи о ранце со многими ограничениями“, выполненного на основании учебного плана подготовки бакалавров по направлению 09.03.04 "Программная инженерия" и утвержденной академическим руководителем темы курсового проекта.

**Объект исследования** – задача о ранце со многими ограничениями .

**Предмет исследования** – ысокопроизводительные алгоритмы решения задачи о ранце со многими ограничениями.

**Цель исследования** – разработка эффективных методов решения задачи о булевом ранце со многими ограничениями, исследование эффективности разработанных алгоритмов.

**Задачи исследования:**

* Составление обзора существующих подходов к решению задачи о ранце со многими ограничениями.
* Выбор алгоритма для оптимизации и программная реализация выбранного алгоритма на языке C++.
* Оптимизация выбранного решения или разработка новых методов решения задачи.
* Параллельная реализация полученных алгоритмов на языке C++.
* Проведение сравнительного тестирования полученных методов.
* Анализ результатов тестирования.

**Методы исследования:**

* Изучение публикаций и статей.
* Реализация существующих и разработанных решений и оценка их эффективности

**Научная новизна:**

**Достоверность научных результатов**

**Практическая значимость.** В отличие от одномерной задачи о ранце, многомерный вариант позволяет описывать широкие классы прикладных задач, в частности задачи, связанные с планированием и управлением транспортными и производственными процессами.

**Результаты работы**

ОГЛАВЛЕНИЕ

[РЕФЕРАТ 2](#_Toc96026128)

[ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 5](#_Toc96026129)

[ВВЕДЕНИЕ 6](#_Toc96026130)

[ГЛАВА 1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЙ 7](#_Toc96026131)

[1.1 Постановка задачи 7](#_Toc96026132)

[1.2 Методы решения 7](#_Toc96026133)

[1.2.1 Точные методы решения 7](#_Toc96026134)

[1.2.2 Теоретический анализ 8](#_Toc96026135)

[1.2.3 Эвристика 9](#_Toc96026136)

[ГЛАВА 2. АЛГОРИТМ ШИХА И ЕГО МОДИФИКАЦИЯГЛАВА 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ 10](#_Toc96026137)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 11](#_Toc96026138)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 12](#_Toc96026139)

# 

# ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Классическая задача о ранце (КЗР) – NP-полная задача комбинаторной оптимизации. Свое название получила от конечной цели: уложить как можно большее число ценных вещей в рюкзак в рюкзак, при условии, что вместимость рюкзака ограничена.

Многомерная задача о ранце (МЗР) – обобщение классической задачи о ранце. Вместо веса дано несколько разных ресурсов. На каждый ресурс есть собственное ограничение.

Класс NP – класс задач, верифицируемых(проверяемых) за полиномиальное время.

Метод ветвей и границ (МВГ) – общий алгоритмический метод для нахождения оптимальных решений различных задач оптимизации. Является развитием метода полного перебора с основным отличием – отсевом подмножеств решений, заведомо не содержащих оптимальных решений.

Эвристический алгоритм – алгоритм решения задачи, включающий практический метод, не являющийся гарантированно точным или оптимальным, но достаточный для решения поставленной задачи.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача о ранце является одной из самых известных задач дискретной оптимизации. Описать задачу о ранце можно следующим образом: нужно сложить в рюкзак набор предметов максимальной суммарной ценности при условии, что каждый предмет обладает собственным весом, а вес, который мы можем переносить в рюкзаке ограничен.

Сформулирована задача о рюкзаке была в прошлом веке американским математиком Джорджем Данцигом [3]. Задача быстро привлекла интерес научного сообщества, так как имеет массу приложений. Основная область применения – задачи планирования и управления различными системами (транспортными, экономическими, производственными).

На практике же КЗР встречается не так часто. Причина заключается в том, что в каждой системе обычно находятся несколько людей, каждый из которых оценивает принимаемые решения по-своему. Более того, каждое решение чаще всего оценивается не по одному критерию. Для описания таких моделей подходит задача о ранце со многими ограничениями (МЗР).

Основное отличие от классической задачи о ранце состоит в наличии нескольких параметров у каждого предмета (не только веса), для каждого параметра существует свое ограничение. Для двумерного случая можно придумать следующую аналогию: нужно собрать в рюкзак набор предметов максимальной стоимости, но помимо ограничения на вес, который мы можем поднять, есть так же ограничение на суммарный объем (в рюкзак не поместится много предметов большого объема).

Задача о рюкзаке является NP-полной, т. е. не имеет полиномиального решения. Алгоритм полного перебора имеет сложность O(2N), что очевидно, так как каждый предмет имеет только два состояния: используется или не используется, т. е. решение можно представить как двоичное слово длины N, а всего таких слов 2N.

Цель данной работы – исследование существующих решений многомерной задачи о рюкзаке с целью модификации одного из предложенных алгоритмов или разработки своего решения.

# ГЛАВА 1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЙ

## 1.1 Постановка задачи

Сформулируем математическую постановку задачи:

где – число предметов, – число ограничений, – бит, который отвечает за включение предмета под номером *,* – стоимость -го предмета, – вес -го предмета в -ом ограничении,– -ое ограничение. Задача – найти такой поднабор предметов, что его суммарная ценность будет максимальной при условии, что ни одно ограничение не будет нарушено. Без потери общности, будем считать, что

Несмотря на то, что многомерная задача о ранце это просто обобщение классической задачи о ранце, ситуация сильно изменяется, когда появляются дополнительные ограничения.

## 1.2 Методы решения

Обзор существующих подходов к решению многомерной задачи о ранце был представлен в [1].

### 1.2.1 Точные методы решения

Разработка точных алгоритмов началась в шестидесятых годах прошлого века. Первые предложенные решения были основаны на динамическом программировании. Предлагались различные гибридные алгоритмы, которые использовали внутри себя метод ветвей и границ, эвристику, устранения недопустимых решений во время выполнения динамики. Ни один из предложенных методов не оказался эффективным. Основная проблема заключалась в том, что динамическое программирование требует очень много дополнительной памяти, поэтому получить оптимальное решение при большом числе предметов или ограничений не представлялось возможным

Другой подход к решению заключался в получении преимущества от специальной структуры МЗР. Ших представил первый алгоритм [2], который использовал линейное программирование. Данный алгоритм основано на методе ветвей и границ. Вычисление верхней границы и последующее ветвление узла основывалось на решении одномерных рюкзаков (каждое ограничение было выделено в отдельный рюкзак) с помощью линейного программирования. Из полученных решений выделялось наименьшее и считалось верхней границей данного узла. Переменная для ветвления определялась следующим образом: рассматривался одномерный ранец, решение которого впоследствии становилось верхней границей узла. Методом Данцига [2] решалась задача линейного программирования, ветвление осуществлялось по дробной переменной. Если дробной переменной нет, и данное решение было целочисленным ветвление прекращалось.

Алгоритм Шиха показал впечатляющие результаты. Время его работы было на порядок меньше предшественников. Впоследствии, алгоритм Шиха был выбран для реализации и его модификации. Главным недостатком данного метода является большая потребность памяти для хранения узлов при большом количестве предметов.

Так же стоит уделить внимание алгоритмам с использованием метода ветвей и границ, основанных на Лагранжевой/суррогатной релаксации. Данные релаксации позволяют получить преимущество, за счет более быстрого вычисления границ в узлах.

### 1.2.2 Теоретический анализ

Теоретический анализ позволяет нам понять огромную разницу в сложности при переходе от КЗР к МЗР. Задача о ранце не является NP-полной в сильном смысле. Это значит, что у нее может существовать псевдополиномиальный алгоритм. Известно, что для обеих задач существует решение динамическим программированием, работающее за .

Так же, известно, что существуют схема полиномиальной аппроксимации. Схемы полиномиальной аппроксимации связаны с анализом наихудшего случая, что обеспечивает гарантию на максимальную величину, на которую эвристический алгоритм отклонится от оптимальности для любого случая. Коэффициент наихудшего случая производительности это наибольшее , для которого, где *I* – объект МЗР, – значение полученное при решении данного рюкзака эвристическим алгоритмом *H*. Полиномиальная аппроксимация позволяет показать полиномиальное время для эвристики со значением *r,* сколь угодно близким к 1.

Много работ было посвящено вероятностному анализу МЗР. Большинство работ исследовало зависимость между численным решением рюкзака и емкостью ограничений или количеством предметов *n*.

### 1.2.3 Эвристика

Решения, основанные на методе ветвей и границ сделали возможным решение экземпляров МЗР среднего размера. Тем не менее эвристические алгоритмы остаются конкурентоспособными, особенно когда число ограничений велико.

Как уже упоминалось, во многих работах были разработаны эвристические подходы к МЗР, среди которых можно найти все эвристические подходы, представленные в комбинаторной оптимизации. Классифицируем эти подходы на 3 группы: жадные алгоритмы, методы математического программирования и метаэвристические методы.

Жадные алгоритмы быстры и, как правило, просты в реализации. Ранние подходы успешно обобщили решение КЗР, к коэффициентам, определяемыми как отношение стоимости предмета к весу. В многомерном случае предметы выбирались исходя из коэффициентов , где это заданные неотрицательные веса.

# ГЛАВА 2. АЛГОРИТМ ШИХА И ЕГО МОДИФИКАЦИЯГЛАВА 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Fréville A. The multidimensional 0–1 knapsack problem: An overview //European Journal of Operational Research. – 2004. – Т. 155. – №. 1. – С. 1-21.

2. W. Shih, A branch and bound method for the multiconstraint zero–one knapsack problem //Journal of the Operations Research Society. – 1979. – Т. 30.– С. 369-378.

3. G.B. Dantzig, Discrete-Variable Extremum Problems //European Journal of Operational Research. – 1957. – Т. 5. – №. 2. – С. 266-277.

4. H. Greenberg and R. L. Hegerich, A Branch Search Algorithm for the Knapsack Problem //Management Science. – 1970. – Т. 16. – №. 5. – С. 327-322.

5. Kolesar, P. J., A Branch and Bound Algorithm for the Knapsack Problem //Management Science. – 1967. – Т. 13. – С. 723-735.

6. P.C. Chu & J.E. Beasley, A Genetic Algorithm for the Multidimensional Knapsack Problem //Journal of Heuristics. – 1998. – Т. 4. – С. 63-86.

7. J. H. Drake, Benchmark instances for the Multidimensional Knapsack Problem, [Электронный ресурс] — URL: Режим доступа: <https://www.researchgate.net/publication/271198281_Benchmark_instances_for_the_Multidimensional_Knapsack_Problem>, свободный. (дата обращения. 16.09.2021)