8.03acd

torsdag 29 februari 2024 20:49

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

a)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) - (-2)\cdot(-4) =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$ karakteristiska poly.

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3 \quad \boxed{\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -1}$$

egenvärden

$(5I - A)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \neq 0$$

egenvektor

$(-I - A)x = 0$

multiplicera med -2 i ①

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ① \; -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ ② \; -4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t \neq 0$$

egenvektor

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 1 = \underline{\lambda^2 - 4\lambda + 5}$$ karakteristisk poly.

$$\lambda_1 = 2 + i \quad \lambda_2 = 2 - i$$

$((2+i)I - A)x = 0$:

multiplicera ② med i

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} x \Leftrightarrow \begin{cases} ① \; ix_1 - x_2 = 0 \\ ② \; x_1 + ix_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ix_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = it \\ x_2 = t \end{cases}$$

$$x = t\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \neq 0$$

$((2-i)I - A)x = 0$:

multiplicera ① med i

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} x \Leftrightarrow \begin{cases} ① \; -ix_1 - x_2 = 0 \\ ② \; x_1 - ix_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -it \\ x_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = t\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \neq 0$$

$$S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2, \quad \lambda_{1,2} = 0$$

$(0 \cdot I - A)x = 0$:

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; t \neq 0$$

Pga att det inte finns tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer:

S = finns ej $\quad \hat{A}$ = finns ej