

UNIDAD I

GEOMETRÍA

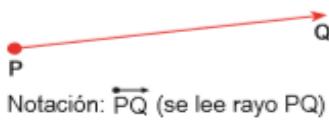
Semana 01:

SEGMENTO DE RECTA

❖ LA LINEA RECTA

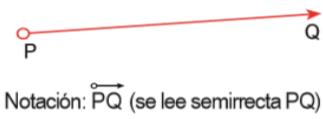
Es una sucesión infinita de puntos que se extiende indefinidamente en sus dos sentidos y en una sola dirección; además una recta genera los siguientes elementos geométricos:

1. Rayo: Es la parte de la recta que tiene un punto de origen y es ilimitada en un solo sentido.



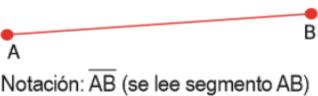
Notación: \overrightarrow{PQ} (se lee rayo PQ)

2. Semirrecta: Es igual que el rayo, con la única diferencia de que el punto de origen no pertenece a la semirrecta.



Notación: \overleftarrow{PQ} (se lee semirrecta PQ)

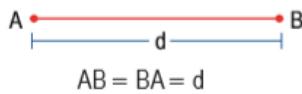
3. Segmento de recta: Es una porción de recta comprendida entre dos puntos, a los cuales se les denomina extremos del segmento de recta.



Notación: \overline{AB} (se lee segmento AB)

Propiedades del segmento de recta:

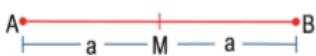
a) Longitud de segmento: Es la magnitud de la distancia que se separa a los extremos de un segmento; la longitud es además un número real positivo y se expresa en unidades de longitud.



$$AB = BA = d$$

Notación: AB (se lee longitud de AB)

b) Punto medio de un segmento: Es aquel punto de un segmento que equidista de sus extremos, es decir la longitud de un extremo al punto medio es igual a la longitud del otro extremo al mismo punto.



Si $AM = a$ y $MB = a \Rightarrow AM = MB$

$\therefore M$: punto medio de AB

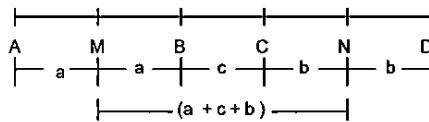
c) Operaciones con segmentos: La adición y sustracción de segmentos se basan en el siguiente axioma: "La suma de las partes nos da el todo"

EJEMPLOS

1. Sobre una línea recta se considera los puntos consecutivos A, B, C y D . Luego los puntos medios M y N de AB y CD respectivamente. Hallar MN si: $AC + BD = 50$.

- a) 20 b) 25 c) 30 d) 40 e) 50.

Resolución:



Dato: M y N son puntos medios de AB y CD .

$$AM = MB = a, CN = ND = b$$

Dato: $AC + BD = 50$

$$(2a + c) + (c + 2b) = 50$$

$$2a + 2c + 2b = 50$$

$$2(a + c + b) = 50$$

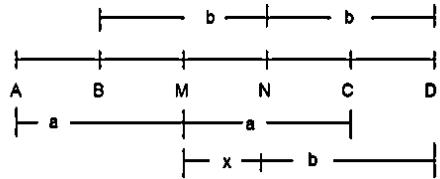
$$2MN = 50$$

$$MN = 25 ; \text{ Rpta. B}$$

2. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D . Luego los puntos medios M y N de AC y BD respectivamente. Hallar MN si: $AB + CD = 60$

- a) 20 b) 25 c) 30 d) 40 e) 60

Resolución:



Dato: M y N puntos medios de AC y BD

$$AM = NC = a, BN = ND = b$$

Dato: $AB + CD = 60$

$$(a + x - b) + (x + b - a) = 60$$

$$2x = 60$$

$$x = 30$$

$$MN = 30 ; \text{ Rpta. C}$$

3. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D . Si: $BC = 4$, $AD = 10$. Calcula la distancia entre los puntos medios de AB y CD .

Resolución:



$$\text{Por dato: } AD = 10$$

$$\text{Entonces: } 2m + 4 + 2n = 10$$

$$2(m+n) = 6 \Rightarrow m+n = 3$$

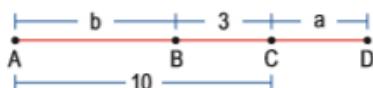
Piden:

$$MN = m + 4 + n \Rightarrow (m+n) + 4 \\ = 3 + 4 = 7$$

$$\therefore MN = 7$$

4. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Si: BC = 3, AC = 10. Calcula la distancia entre los puntos medios de AB y CD.

Resolución:



$$\text{Como } C \text{ es punto medio en } BD \Rightarrow BC = CD \\ 3 = a$$

$$\text{Del gráfico: } b + 3 = 10$$

$$b = 7$$

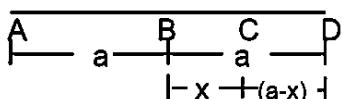
$$\text{Piden: } AD = b + 3 + a = 7 + 3 + 3 = 13$$

$$\therefore AD = 13$$

5. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que B es punto medio de AD y AC - CD = 50. Hallar BC

- a) 20 b) 25 c) 30 d) 40 e) 50

Resolución:



Dato: B es punto medio de AD

$$AB = BD = a$$

$$\text{Dato: } AC - CD = 50$$

$$(a+x) - (a-x) = 50$$

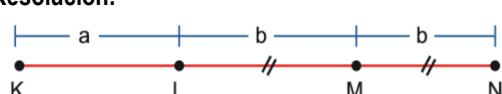
$$2x = 50$$

$$x = 25$$

$$BC = 25; \text{ Rpta. B}$$

6. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos K, L, M y N, tal que M es el punto medio de \overline{LN} , calcula: $E = \frac{KN+KL}{KM}$

Resolución:



$$\text{Piden: } E = \frac{KN+KL}{KM}$$

$$E = \frac{(a+2b)+a}{a+b}$$

$$E = \frac{2(a+b)}{a+b}$$

$$\therefore E = 2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C siendo "0" punto medio de BC, $AB^2 + AC^2 = 100$. Hallar $A0^2 + B0^2$

- A) 10 B) 25 C) 50 D) 100 E) 20

2. Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos "P", "Q", "R" y "S"; luego ubicamos "A" y "B" puntos medios de PR y QS respectivamente. Calcular "AB", si: PQ = 6; RS = 8.

- A) 14 B) 2 C) 7 D) 3 E) 4

3. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D" tal que: $CD = 7AC$.

Hallar "BC", si: $BD - 7AB = 40$.

- A) 3 B) 8 C) 20 D) 5 E) 9

4. Se tienen los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D" de tal manera que: $AB = 3$; $CD = 2$.

Además: $4BC + 5AD = 88$. Hallar "AC"

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 7 E) 9

5. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Calcular "AD", si: $AC = 10$; $AD + CD = 30$

- A) 5 B) 10 C) 20 D) 25 E) 40

6. Sean los puntos colineales: "O", "A", "B" y "C" tal que:

$$\frac{3OA + OC}{4OB}$$

$3AB = BC$. Hallar:

- A) 0,5 B) 1,5 C) 2 D) 3 E) 1

7. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Si se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{BC}}{3} = \frac{\overline{CD}}{5}$$

"CD", si: AD = 20

Calcular

- A) 6 B) 9 C) 12 D) 11 E) 10

8. En una recta se consideran los puntos consecutivos "A", "B", "C", "D", "E" y "F". Si se cumple la siguiente relación:
 $AC + BD + CE + DF = 20$ y $BE = 6$.
 Hallar "AF"

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 14

9. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Se cumple:
 $AB = 3$; $AC = 5$; $4AB - BD - 2CD = 4$, hallar: AD

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

10. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Se cumple que: $AC + BD = 20$; Calcular "AD+BC"

- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

TAREA

1. En una recta se consideran los puntos consecutivos "A", "B" y "M".
 Si: $AM + BM = 3/2 \cdot AB$; Hallar: AM/BM

- A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8

2. Sobre una línea recta se tienen los puntos consecutivos "P", "A", "B" y "C" dispuestos de manera que: $PA + PB = PC + BC$ y $PA = 8$. Calcular "BC".

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Se tienen los puntos colineales "A", "B", "C" y "D" tal que: $AB + CD = 13$ y $BM - MC = 1$. Hallar "CD". Además "M" es punto medio de AD.

- A) 5 B) 7 C) 8 D) 9

4. Se ubican los puntos colineales "M", "A", "O" y "B". Si "O" es punto medio de AB. Hallar "OM", si:

$$(MA)(MB) + \frac{(AB)^2}{4} = 9$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

5. En una recta se tienen los puntos consecutivos "A", "N", "G", "E" y "L". Si "N" y "G" son puntos medios de AE y NL respectivamente. Hallar "AE", si:

$$\frac{1}{NL} - \frac{1}{AE} = \frac{1}{80} ; \quad GE = 2$$

- A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

6. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B; C y D; tal que:

$$\frac{AB}{2} = \frac{BC}{3} = \frac{CD}{5} ; \quad AD = 12\text{cm}; \text{Calcular BC}$$

- A) 7 B) 6 C) 8 D) 10 E) 20

7. Sobre una línea recta, se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D; de modo que:
 $CD = 3 \cdot BC$. Hallar la longitud del segmento AC. Si: $AD + 3 \cdot AB = 20\text{ m}$

- A) 1m B) 2m C) 3m D) 4m E) 5m

8. Sobre una línea recta, se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D; de modo que: $AB = 9\text{ m}$ y $BC = 3\text{ m}$. Además: $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Hallar la longitud del segmento CD

- A) 3m B) 4m C) 6m D) 8m E) 3,5m

9. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C, tal que $AB = 6$, $AC = 10$ y M es punto medio de \overline{BC} . Calcula AM.

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

10. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Calcula AD, si: $3AC + 2AB = 8$ y
 $3CD + 2BD = 7$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 9

Semana 02:

ÁNGULOS

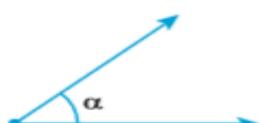
Es la figura geométrica determinada por un punto de origen (vértice del ángulo) de donde emanan dos rayos ilimitados (lados del ángulo).

Clasificación de un ángulo por sus medidas:

a) Ángulo nulo ($\alpha = 0^\circ$)



b) Ángulo agudo ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)



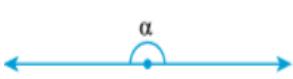
c) Ángulo recto ($\alpha = 90^\circ$)



d) Ángulo obtuso ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)



e) Ángulo llano ($\alpha = 180^\circ$)



f) Ángulo no convexo ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$)



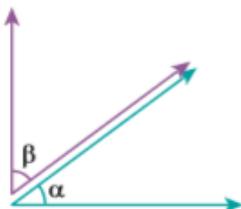
Clasificación respecto a la medida de otro ángulo:

a) Ángulos congruentes

$$\text{Si: } \alpha = \beta$$

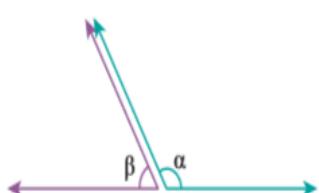
b) Ángulos complementarios

$$\text{Si: } \alpha + \beta = 90^\circ$$



c) Ángulos suplementarios

$$\text{Si: } \alpha + \beta = 180^\circ$$



Notación:

$\angle AOB$: se lee ángulo AOB

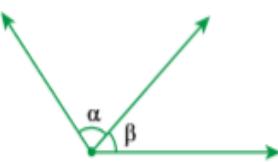
Además: α es la medida del $\angle AOB$

$\Rightarrow m\angle AOB = \alpha$
y se lee medida del ángulo AOB.

Clasificación respecto a la medida de otro ángulo:

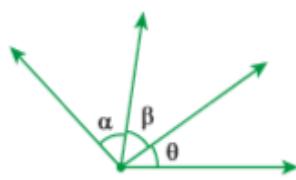
a) Ángulos adyacentes:

Cuando están uno al lado del otro



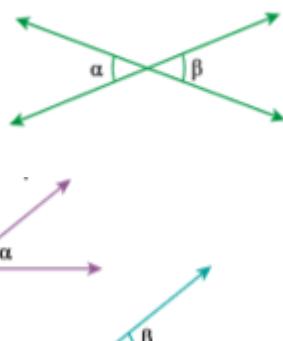
b) Ángulos consecutivos:

Cuando están uno a continuación de otro



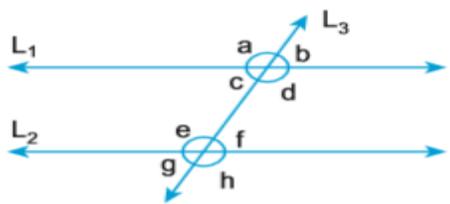
c) Ángulos opuestos:

Cuando sus lados son opuestos y colineales.



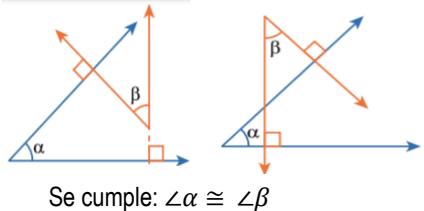
❖ ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA RECTA SECANTE

Cuando una recta secante interseca a dos rectas paralelas se originan los ángulos:



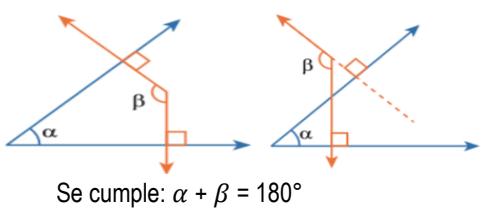
Ángulos de lados perpendiculares

a) **Congruentes:** Si ambos son agudos



$$\text{Se cumple: } \angle\alpha \cong \angle\beta$$

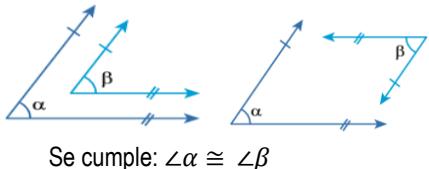
b) **Suplementarios:** Si uno es agudo y el otro obtuso



$$\text{Se cumple: } \alpha + \beta = 180^\circ$$

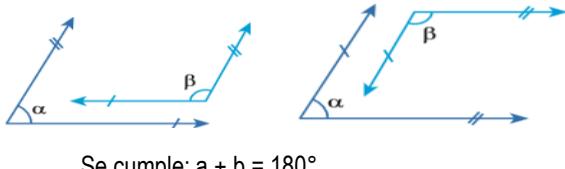
Ángulos de lados paralelas

a) **Congruentes:** Si ambos son agudos u obtusos.



$$\text{Se cumple: } \angle\alpha \cong \angle\beta$$

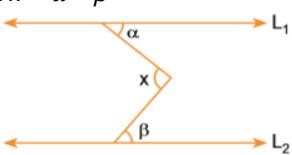
b) **Suplementarios:** Si uno es agudo y el otro obtuso.



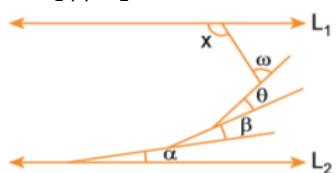
$$\text{Se cumple: } \alpha + \beta = 180^\circ$$

Propiedades

Se cumple: $x = \alpha + \beta$



2. Si $\vec{L_1} // \vec{L_2}$



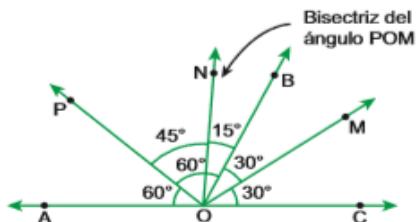
Se cumple: $x = \alpha + \beta + \theta + \omega$

Ejemplos:

1. Los ángulos consecutivos y suplementarios AOB y BOC difieren en 60° . Se trazan las bisectrices \overrightarrow{OP} y \overrightarrow{OM} de dichos ángulos, respectivamente; luego la bisectriz \overrightarrow{ON} del ángulo POM. Calcula la $m\angle BON$.

Resolución:

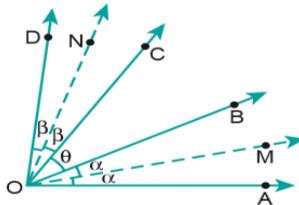
Piden: $m\angle BON$.



$$\text{Se observa: } m\angle BON = 15^\circ$$

2. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, de modo que la $m\angle AOC = 48^\circ$, y la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOB y COD es igual a 30° . Halla la $m\angle BOD$.

Resolución:



Piden:

$$m\angle BOD = \theta + 2\beta$$

Por dato: $m\angle AOC = 48^\circ$

$$2\alpha + \theta = 48^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 24^\circ - \theta/2 \dots \dots (1)$$

Además: $m\angle MON = 30^\circ$

$$\alpha + \theta + \beta = 30^\circ \dots \dots \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$(24^\circ - \frac{\theta}{2}) + \theta + \beta = 30^\circ$$

$$\frac{\theta}{2} + \beta = 6^\circ \Rightarrow \theta + 2\beta = 12^\circ$$

3. Si a la diferencia entre el suplemento de un ángulo y el doble de su complemento le sumamos 20° , obtenemos las $\frac{3}{5}$ partes de su suplemento. Halla la medida del ángulo.

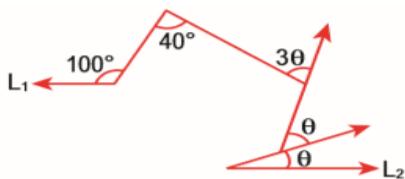
Resolución:

Sea α : la medida del ángulo

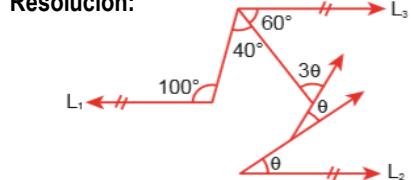
Por dato:

$$\begin{aligned} S(\alpha) - 2C(\alpha) + 20^\circ &= \frac{3}{5}S(\alpha) \\ \frac{3}{5}S(\alpha) &= 2C(\alpha) - 20 \\ S(\alpha) &= 5C(\alpha) - 50^\circ \\ 180^\circ - \alpha &= 5(90^\circ - \alpha) - 50^\circ \\ 180^\circ - \alpha &= 450^\circ - 5\alpha - 50^\circ \\ 4\alpha &= 220^\circ \\ \therefore \alpha &= 55^\circ \end{aligned}$$

4. En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula θ .

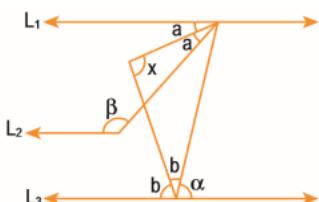


Resolución:



Se traza $\overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_2}$
Por propiedad: $\theta + \theta + 3\theta + 60^\circ = 180^\circ$
 $5\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = 24^\circ$

5. Calcula x , $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$ y $\alpha + \beta = 200^\circ$



Resolución:

$$\begin{aligned} \text{Dato: } \alpha + \beta &= 200^\circ \\ \text{Sabemos: } x &= a + b \\ \text{También: } 2a + \beta &= 180^\circ \\ 2b + \alpha &= 180^\circ \quad \} \quad (+) \\ 2a + 2b + 200^\circ &= 360^\circ \\ \Rightarrow a + b &= 80^\circ \\ \therefore x &= 80^\circ \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTAS

1. Si a la medida de un ángulo se le disminuye su suplemento resulta 20° . ¿Cuánto mide dicho ángulo?

A) 100° B) 80° C) 20° D) 180° E) 130°

2. Las medidas de dos ángulos complementarios están en la relación de 4 a 5. Calcular el suplemento del mayor.

A) 100° B) 120° C) 130° D) 140° E) 170°

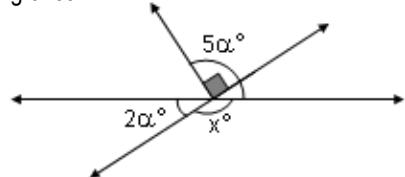
3. Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD cuyas medidas son proporcionales a 4; 3 y 5 respectivamente, tal que la $m\angle AOD = 120^\circ$. Calcular la $m\angle AOC$.

A) 40° B) 50° C) 60° D) 70° E) 80°

4. Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tales que: $m\angle AOC = 45^\circ$, $m\angle BOD = 65^\circ$ y $m\angle AOD = 100^\circ$. Calcular la $m\angle BOC$.

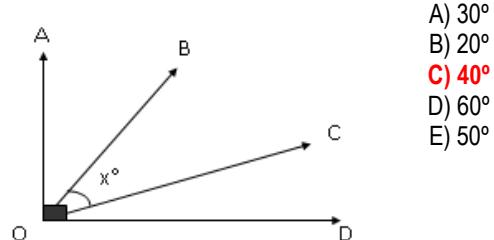
A) 60° B) 50° C) 70° D) 80° E) 10°

5. Del gráfico "x"



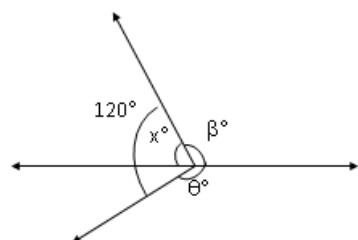
A) 110° B) 120° C) 130° D) 135° E) 140°

6. Si: $m\angle AOC + m\angle BOD = 130^\circ$, calcular "x"



A) 30°
B) 20°
C) 40°
D) 60°
E) 50°

7. Calcular "x", si $\theta - \beta = 6^\circ$



A) 54° B) 57° C) 60° D) 63° E) 66°

8. Se tiene los ángulos consecutivos AOB y BOC, tal que OM es bisectriz del ángulo AOC. Si: $m\angle BOC - m\angle AOB = 50^\circ$, calcular la $m\angle BOM$.

A) 20° B) 25° C) 40° D) 45° E) 50°

9. Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD tal que sus medidas suman 180° , además la $m\angle BOC$

$= 40^\circ$. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.

- A) 70° B) 80° C) 40° D) 50° E) 45°

10. Si: se cumple:

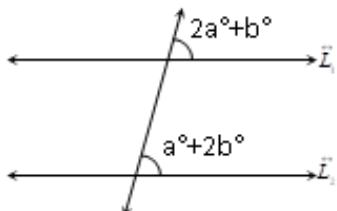
$$CCC_x + SSSSS_{2x} = 210^\circ$$

Hallar el complemento de "x"

- A) 80° B) 70° C) 65° D) 60° E) 42°

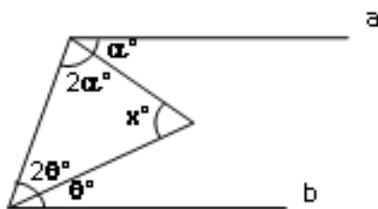
TAREA

1. En la figura calcular " a/b ", si: $L_1 \parallel L_2$



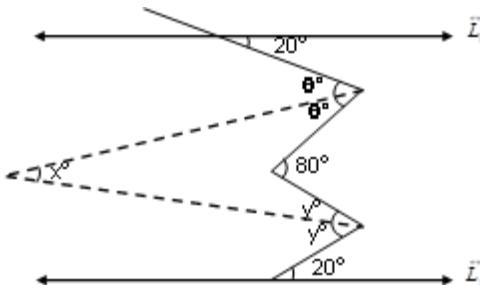
- A) $3/5$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 1 E) $3/2$

2. Calcular "x", si: $a \parallel b$



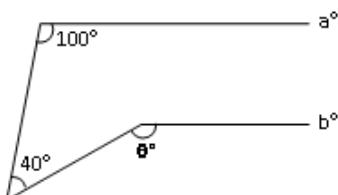
- A) 75° B) 60° C) 150° D) 130° E) 30°

3. Del gráfico calcular "x", si: $L_1 \parallel L_2$.



- A) 10° B) 20° C) 15° D) 30° E) 45°

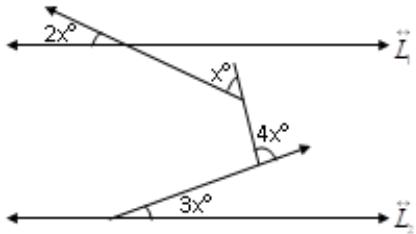
4. Calcular " θ ", si $a \parallel b$



- A) 10° B) 20° C) 15° D) 30° E) 45°

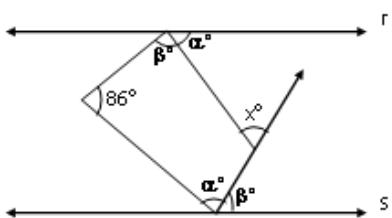
- A) 130° B) 140° C) 70° D) 120° E) 110°

5. En la figura $L_1 \parallel L_2$, calcular "x".



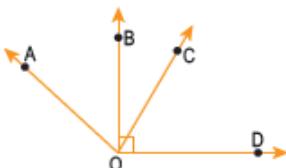
- A) 36° B) 18° C) 72° D) 60° E) 30°

6. En la figura $r \parallel s$. Calcular "x".



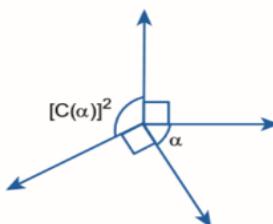
- A) 43° B) 47° C) 56° D) 34° E) 46°

7. En la figura \overrightarrow{OC} es bisectriz del $\angle AOD$ y los ángulos AOB y AOC son complementarios. Calcula la $m\angle AOB$.



- A) 30° B) 20° C) 40° D) 50° E) 60°

8. En la figura, calcula el valor de α .



- A) 180° B) 180° C) 80° D) 100° E) 60°

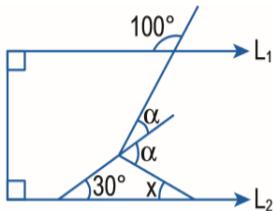
9. Siendo α la medida de un ángulo agudo y β la medida de otro ángulo, de tal manera que:

$$\alpha = \frac{2}{3} (\alpha + \beta)$$

¿Cuál es el máximo valor entero de β ?

- A) 30° B) 38° C) 44° D) 50° E) 60°

10. Según el gráfico, calcula x .

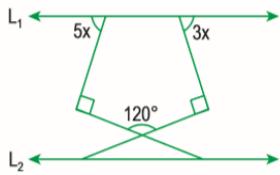


- A) 20° B) 22° C) 30° D) 32° E) 40°

11. Si a la medida de un ángulo se le disminuye 3° más que la mitad del complemento del ángulo, resulta un quinto de la diferencia entre el suplemento del ángulo y el complemento del ángulo. ¿Cuánto mide dicho ángulo?

- A) 44° B) 54° C) 64° D) 66° E) 70°

12. En la figura, si $\vec{L_1} \parallel \vec{L_2}$, halla x.

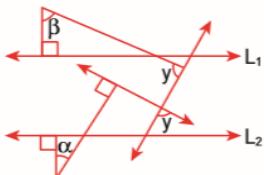


- A) 15° B) 20° C) 25° D) 30° E) 35°

13. Se tienen cinco ángulos cuyas medidas suman 180° y forman una progresión aritmética. Si la medida del ángulo menor es igual a la raíz cuadrada de la medida del mayor. ¿Cuánto mide el menor ángulo?

- A) 3° B) 5° C) 8° D) 14° E) 18°

14. Si: $\vec{L_1} \parallel \vec{L_2}$ y $\alpha + \beta = 66^\circ$, calcula el valor de y.

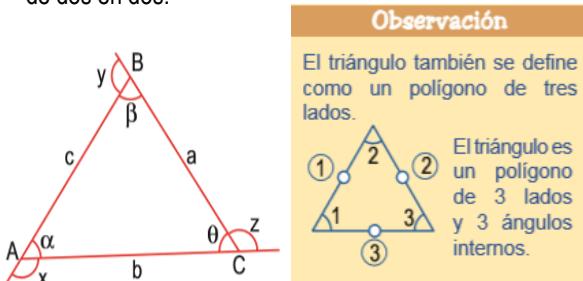


- A) 70° B) 86° C) 98° D) 102° E) 112°

Semana 03:

TRIÁNGULOS

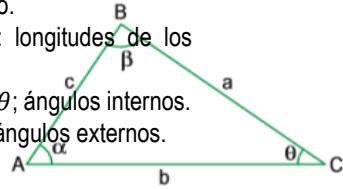
Es la figura geométrica compuesta por tres puntos no colineales y los respectivos segmentos de recta que los unen de dos en dos.



Elementos del $\triangle ABC$:

- A; B; C: vértices del triángulo.
- AB; BC; AC: lados del triángulo.
- a; b; c: longitudes de los lados.
- α ; β ; θ : ángulos internos.
- x; y; z: ángulos externos.

Desigualdad y correspondencia triangular:



En el $\triangle ABC$ se cumplen:

1. **Correspondencia:** a un mayor ángulo interior se opone un lado mayor y viceversa.

2. Desigualdad: un lado del triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos lados, pero menor que su suma.

$$\Rightarrow \text{Si: } \alpha > \beta > \theta \Rightarrow a > b \\ > c$$

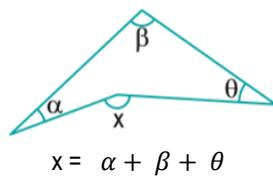
Tenemos: $b - c < a < b + c$

$$a - c > b > c + a$$

$$a - b < c < a + b$$

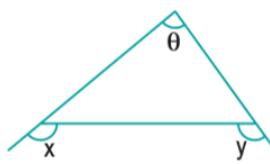
PROPIEDADES ADICIONALES

1.



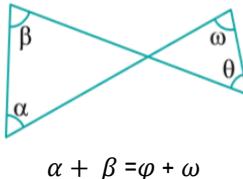
$$x = \alpha + \beta + \theta$$

2.

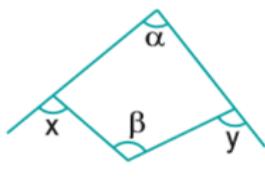


$$\theta + 180^\circ = x + y$$

3.

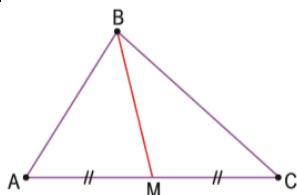


4.



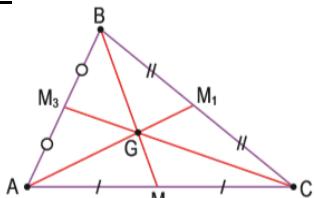
LÍNEAS Y PUNTOS NOTABLES

Mediana:



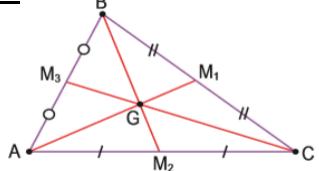
En el $\triangle ABC$, si $\overline{AM} \cong \overline{MC}$
 $\Rightarrow \overline{BM}$: mediana relativa a \overline{AC}

Baricentro



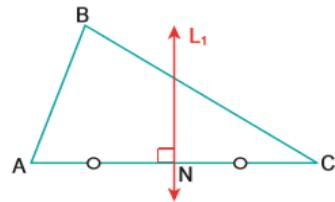
Si: AM_1, BM_2 y CM_3 , son medianas
 $\Rightarrow G$: baricentro del $\triangle ABC$

Baricentro



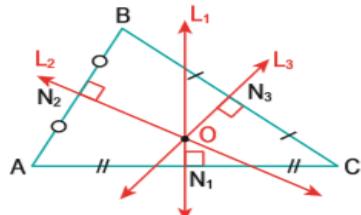
Si: AM_1, BM_2 y CM_3 , son medianas
 $\Rightarrow G$: baricentro del $\triangle ABC$
 Además: $AG = 2GM_1; BG = 2GM_2;$
 $CG = 2GM_3$

Mediatriz:



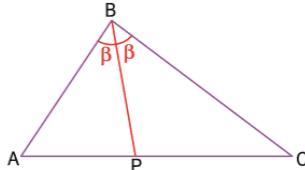
En el $\triangle ABC$, si $AN = NC$ y $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overline{AC}$
 $\Rightarrow \overleftrightarrow{L_1}$: mediatrix relativa a \overline{AC}

Circuncentro:



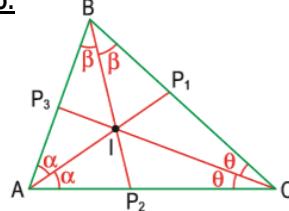
Si $\overleftrightarrow{L_1}, \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3}$, son mediatrix
 $\Rightarrow O$: circuncentro del $\triangle ABC$

Bisectriz:



En el $\triangle ABC$, si $\angle ABP \cong \angle PBC$
 $\Rightarrow \overleftrightarrow{BP}$: bisectriz interior relativa a \overline{AC}

Incentro:

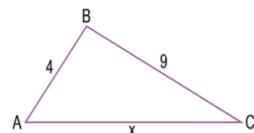


En el $\triangle ABC$, si AP_1, BP_2 y CP_3 son
 bisectrices interiores.
 $\Rightarrow I$: incentro del $\triangle ABC$

Ejemplos:

- Los valores de los lados de un triángulo son: 4; 9 y x. Calcula la suma de todos los valores enteros de x, para que el triángulo exista.

Resolución:



Por desigualdad triangular:

$$9 - 4 < x < 9 + 4$$

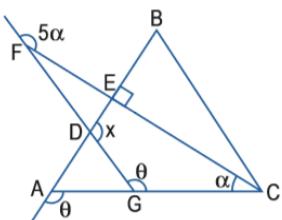
$$5 < x < 13$$

Valores enteros de x: {6; 7; 8; 9; 10; 11; 12}

Piden la suma de valores enteros de x.

$$\Rightarrow 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63$$

2. De la figura, calcula x .



Resolución:

$$\text{En el } \triangle FCG: \theta + \alpha = 5\alpha \Rightarrow \theta = 4\alpha \dots (\text{I})$$

$$\text{En el } \triangle AEC: 90^\circ + \alpha = \theta \dots (\text{II})$$

Reemplazando (I) en (II):

$$90^\circ + \alpha = 4\alpha$$

$$90^\circ = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ y } \theta = 120^\circ$$

$$\text{En el } \triangle ADG: x + \theta + \theta = 360^\circ$$

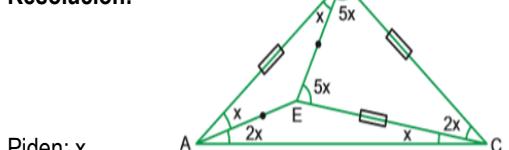
$$x + 2\theta = 360^\circ$$

$$x + 2(120^\circ) = 360^\circ$$

$$\therefore x = 120^\circ$$

3. En el interior de un triángulo ABC, se toma el punto E, de tal manera que $AE = BE$ y $AB = EC$. Si: $m\angle ABE = m\angle ECA = x$, $m\angle EAC = 2x$ y $m\angle EBC = 5x$. Calcula el valor de x .

Resolución:



Piden: x

Completando ángulos, se tiene que el $\triangle BCE$ es isósceles.

También se observa que el $\triangle ABC$ es isósceles.

$$\Rightarrow m\angle BCE = 2x$$

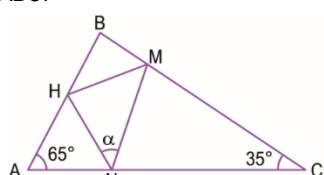
Finalmente, en el $\triangle ABC$:

$$3x + 6x + 3x = 180^\circ$$

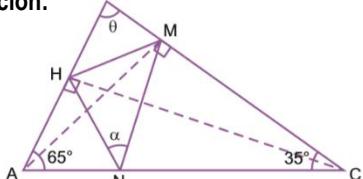
$$12x = 180^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

4. Calcula α , si el triángulo MNH es el triángulo órtico del triángulo ABC.



Resolución:



En el $\triangle ABC$:

$$65^\circ + \theta + 35^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 80^\circ$$

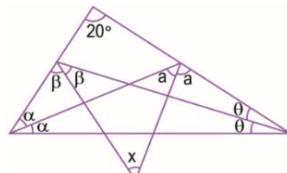
Como el triángulo MNH es el triángulo órtico del triángulo ABC, se cumple:

$$\alpha = 180^\circ - 2\theta$$

$$\alpha = 180^\circ - 2(80^\circ)$$

$$\therefore \alpha = 20^\circ$$

5. Halla x .



Resolución:

$$2\alpha + 2\theta = 180^\circ - 20^\circ$$

$$2\alpha + 2\theta = 160^\circ$$

$$\alpha + \theta = 80^\circ$$

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta + \theta &= 180^\circ \\ 2\theta + 2a + \alpha &= 180^\circ \end{aligned} \quad (+)$$

Luego:

$$\beta + a + x = 100^\circ$$

$$60^\circ + x = 100^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura, calcular la diferencia entre el máximo y el mínimo valor entero que puede tomar "x".

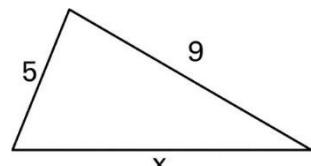
A) 9

B) 8

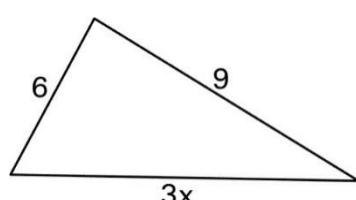
C) 7

D) 6

E) 5



2. En el triángulo escaleno mostrado, calcular los valores enteros que puede tomar "x".



A) 2; 3; 4 B) 3; 4 C) 2; 3 D) 1; 2; 3; 4; 5 **E) 4**

3. Según el grafico, calcular $m\angle ADC$, si : $AE=ED$, $m\angle ACD = 40^\circ$ y el triángulo ABC es equilátero

A) 20°

B) 10°

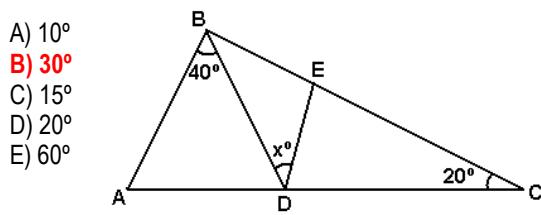
C) 30°

D) 40°

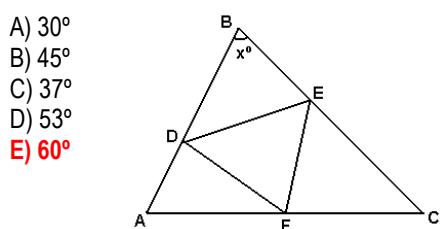
E) 50°



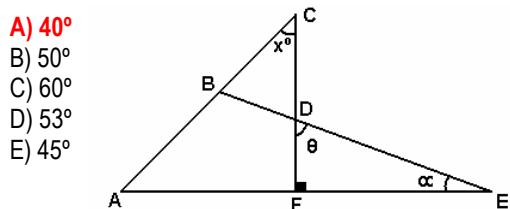
4. Según el grafico: $AB=BD$ y $CD=CE$ Calcular "x"



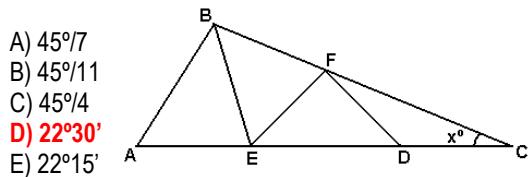
5. Calcular $m\angle ABC$, si $AF=FC=DE=DF=EF$



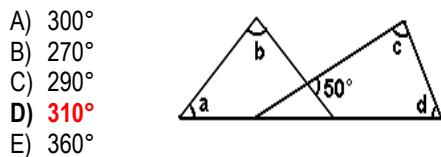
6. Calcular $m\angle ACF$, si $BC=CD$ y $\theta-\alpha=50^\circ$



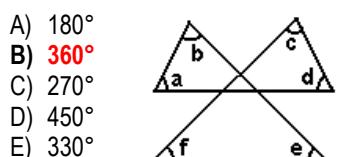
7. Calcular el valor de "x" si : $AE=EB=EF=FD=DC=DC$ y $m\angle BAC=m\angle FDE$



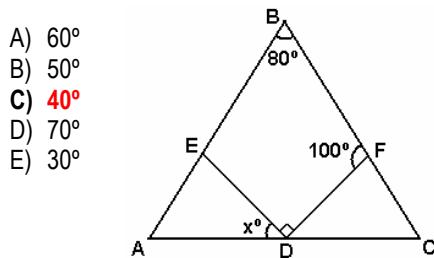
8. Hallar "a+b+c+d"



9. Calcular: "a+b+c+d+e+f"



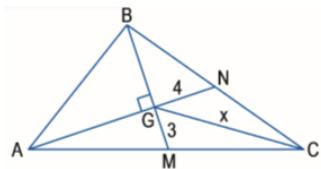
10. En la figura calcular, $AB = BC$, calcular "x"



11. Se tiene un triángulo ABC, se traza la mediana BM, tal que: $AM = MC = BM$. Calcula la $m\angle ABC$.

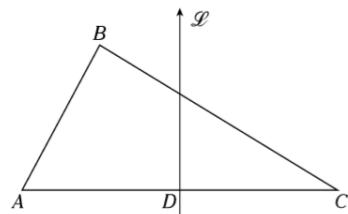
A) 40° B) 60° C) 70° D) 80° **E) 90°**

12. Si G es baricentro del $\triangle ABC$, calcula $2x$.



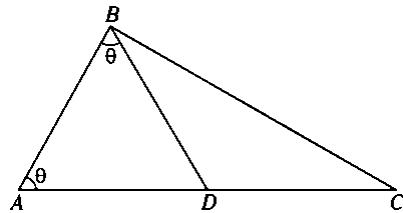
A) 20° B) 12° C) 14° D) 16° E) 18°

13. Del gráfico, L es mediatrix de AC y $DC=6$. Calcule AC .



A) 12 B) 24 C) 9 D) 15 E) 21

14. En el gráfico, BD es mediana. Calcule DC/BD .



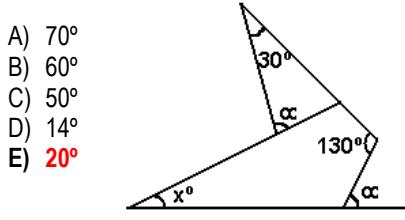
A) 1 B) 0,5 C) 4 D) 1,5 **E) 1**

15. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, tal que $BD=DC$ y $m\angle BCD=20^\circ$. Calcule $m\angle ADB$.

A) 60° B) 45° **C) 40°** D) 50° E) 75°

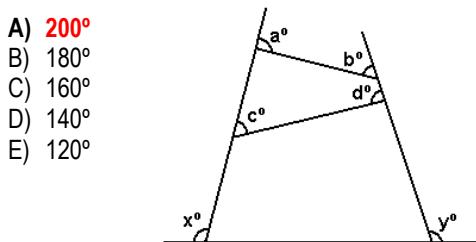
TAREA

1. En el gráfico, calcule "x"



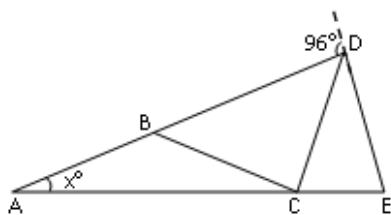
- A) 70°
B) 60°
C) 50°
D) 14°
E) 20°

2. En el gráfico, $x+y = 260^\circ$, calcule $a^\circ+b^\circ+c^\circ+d^\circ$



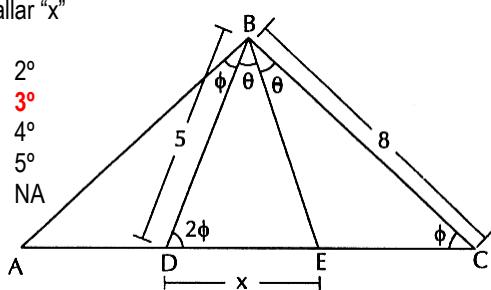
3. En la figura $AB = BC = CD = DE$. Calcular "x".

- A) 16°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 26



4. Hallar "x"

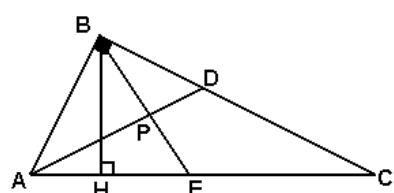
- A) 2°
B) 3°
C) 4°
D) 5°
E) NA



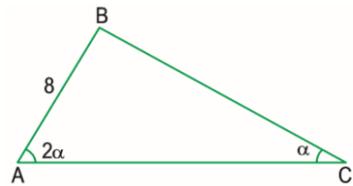
5. Según la figura AD y BE son bisectrices de los ángulos BAC y HBC respectivamente y $m\angle APB = 3m\angle BCA$, calcular:

$$\frac{m\angle BCA}{m\angle BAC}$$

- A) 1
B) $2/3$
C) $1/2$
D) $1/3$
E) $1/4$

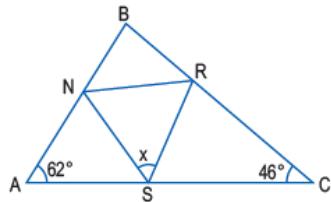


6. Un valor entero para BC puede ser.



- A) 15°**
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 35°

7. Calcula x , si el triángulo NRS es el triángulo tangencial del triángulo ABC.



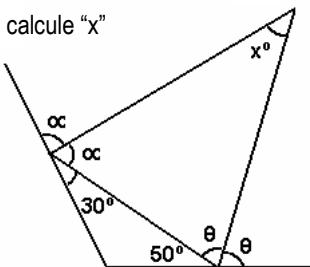
- A) 50°
B) 54°
C) 58°
D) 64°
E) 74°

8. Hallar el ángulo formado por la intersección de las bisectrices de los ángulos exteriores de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

- A) 60°
B) 45°
C) 30°
D) 65°
E) 90°

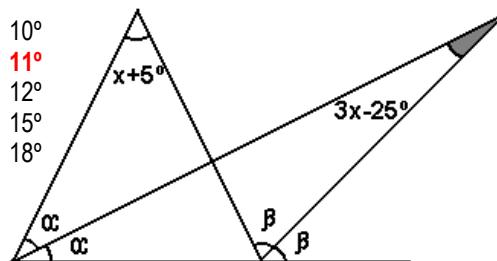
9. Del gráfico calcule "x"

- A) 35°
B) 40°
C) 60°
D) 35°
E) NA



10. Hallar "x"

- A) 10°
B) 11°
C) 12°
D) 15°
E) 18°

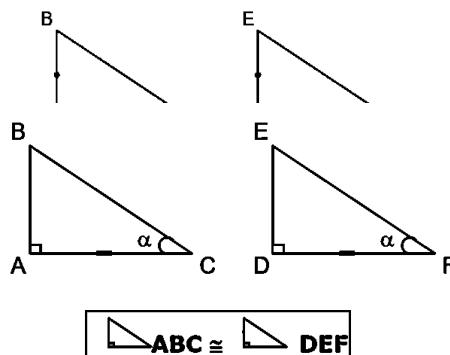


CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

Dos triángulos son congruentes, si tienen todos sus elementos (lados y ángulos) respectivamente congruentes.

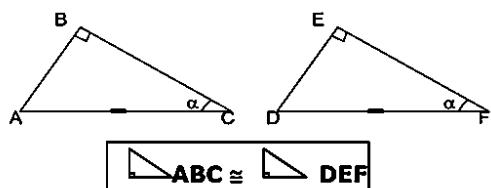
Para que dos triángulos sean congruentes es necesario que cumplan con uno de los siguientes casos generales:

1º Caso (L.A.L.): Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y congruente el ángulo comprendido entre dichos lados.



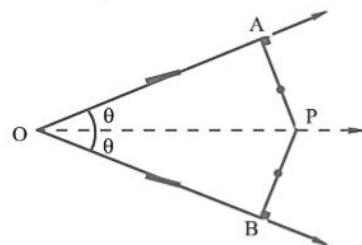
2º Caso (A.L.A.): Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes y congruente el lado comprendido entre dichos ángulos.

3º Caso: (L.L.L.): Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes.



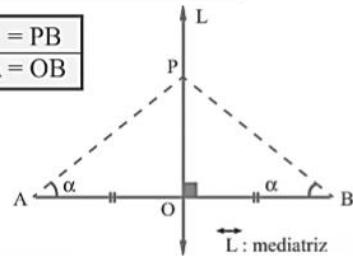
Propiedades de la bisectriz:

$PA = PB$
$OA = OB$

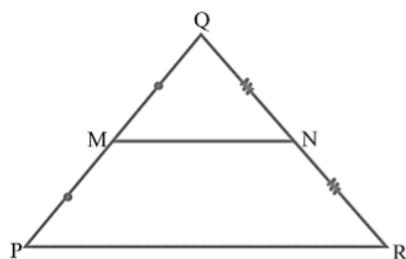
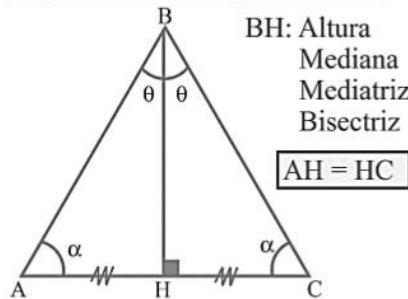


Propiedades de la mediatrix:

$PA = PB$
$OA = OB$

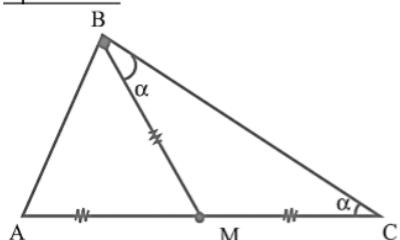


Propiedades del triángulo isósceles:



$$MN = \frac{PR}{2}$$

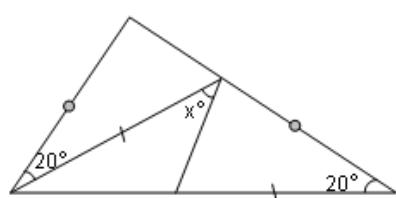
Propiedad de la mediana relativa a la hipotenusa:



$$BM = AM = MC$$

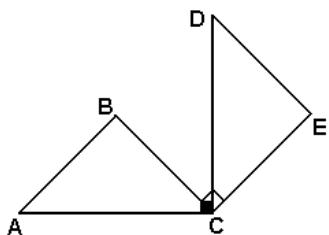
1. Calcular "x"

- A) 10°
B) 30°
C) 20°
D) 50°
E) 40°



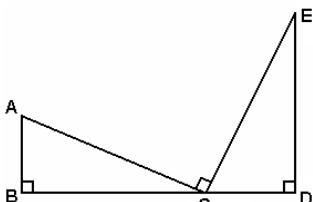
2. Si: $AC = DC$, $BC = EC$, $AB = 12$. Calcular DE

- A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 24

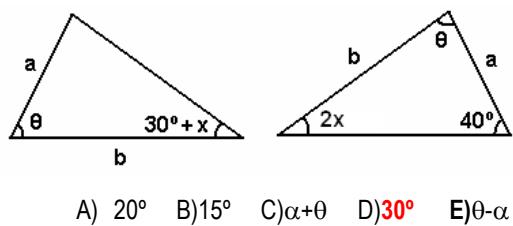


3. Si : $AC = EC$, $AB = 6$; $ED = 9$. Calcular BD

- A) 10
B) 12
C) 15
D) 18
E) 20



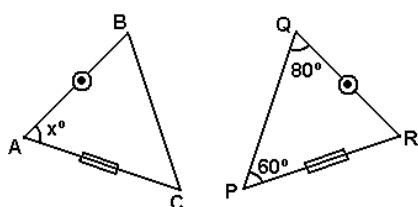
4. Calcular "x"



- A) 20° B) 15° C) $\alpha + \theta$ D) **30°** E) $\theta - \alpha$

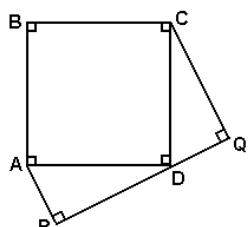
5. Si el $\triangle ABC$ es congruente al $\triangle PQR$, entonces, hallar "x".

- A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 30°
E) 25°



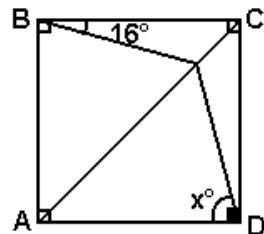
6. Hallar "PQ", Si: ABCD es un cuadrado y $AP=3$; $CQ=7$.

- A) 8
B) 10
C) 12
D) 6
E) 9



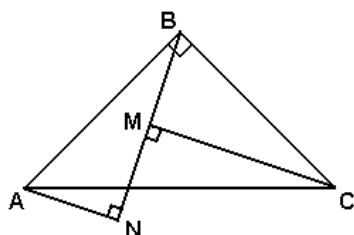
7. Si: ABCD es un cuadrado, calcular "x".

- A) 70°
B) 72°
C) 74°
D) 79°
E) 80°

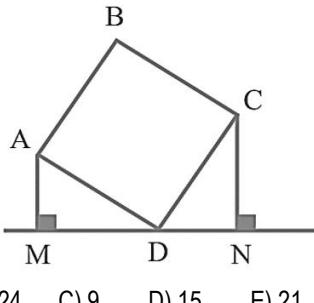


8. Si: $AB=BC$, calcular "AN", si: $BM=4$.

- A) 4**
B) $4\sqrt{2}$
C) 3
D) $3\sqrt{2}$
E) 5

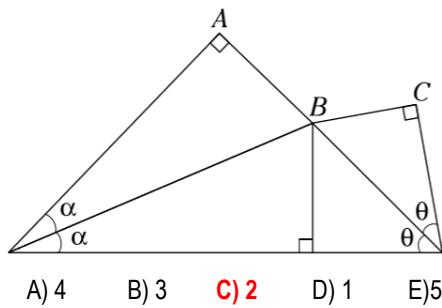


9. Si ABCD es un cuadrado, $AM = 6$ y $CN = 8$, calcular AB.



- A) 10** B) 24 C) 9 D) 15 E) 21

10. En el gráfico, $AB=2$. Calcule BC.



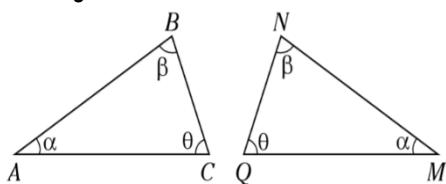
- A) 4 B) 3 **C) 2** D) 1 E) 5

11. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, de modo que $CD=2(AB)$, $m<BAC=20^\circ$ y $m<CBD=90^\circ$. Calcule $m<ABD$.

- A) 80° **B) 60°** C) 45° D) 70° E) 53°

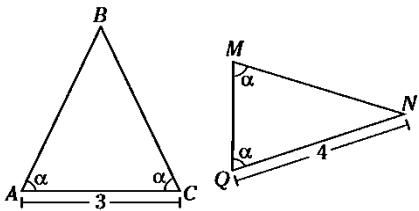
TAREA

1. En el gráfico, ABC y MNQ son triángulos congruentes. Calcule AB/MN.



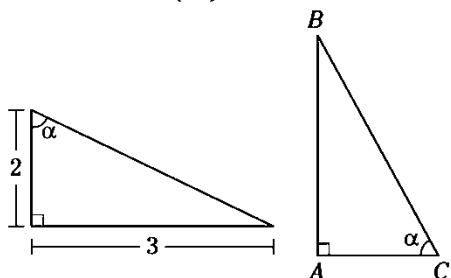
- A) 0,5 B) 2 C) 0,25 D) 1 E) 4

2. Del gráfico, los triángulos ABC y MNQ son congruentes. Calcule MQ/AB.



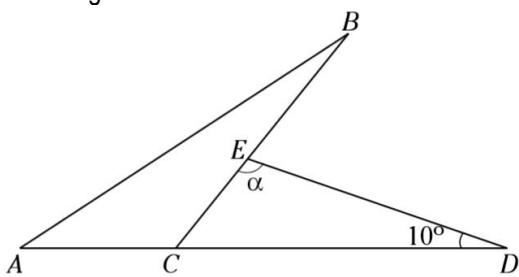
- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

3. Segundo el gráfico, los triángulos son congruentes. Calcule AB+2(AC).



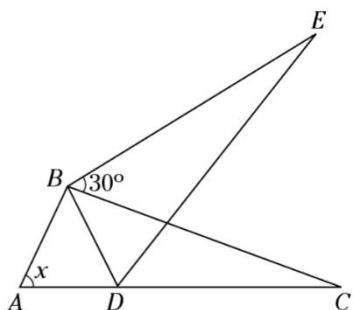
- A) 8 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

4. Del gráfico, ABC y EDC son triángulos congruentes. Calcule alfa.



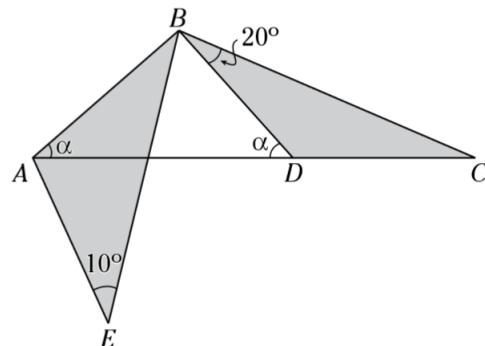
- A) 70° B) 100° C) 80° D) 90° E) 65°

5. Del gráfico, ABC y DBE son triángulos congruentes, tal que AC=DE. Calcule x.

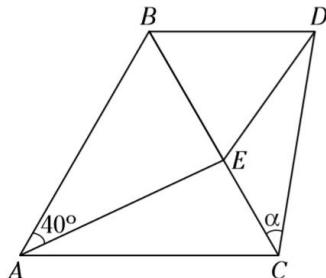


- A) 60° B) 75° C) 50° D) 85° E) 65°

6. En el gráfico, AE=DC y BE=BC. Calcule alfa.
- A) 40° B) 30° C) 28° D) 50° E) 35°



7. En el gráfico, ABC y EBD son triángulos equiláteros. Calcule alfa.



- A) 30° B) 20° C) 60° D) 50° E) 40

8. Se tiene un triángulo isósceles ABC recto en B. Se ubica el punto M en la región exterior relativa a AC, tal que m<AMB=90°. Si AM=1 y BM=4, calcule MC.

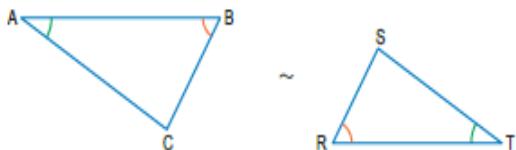
- A) 13 B) 8 C) 23 D) 7 E) 5

SEMANA 5:

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

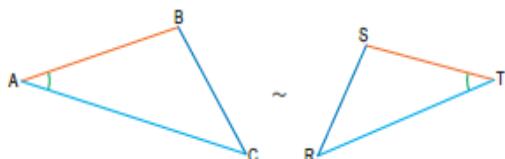
Dos triángulos son semejantes si y solo si ambos cumplen con uno de los siguientes casos:

- A) Caso I:** dos triángulos son semejantes cuando ambos poseen dos pares de ángulos respectivamente congruentes.



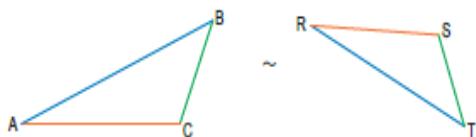
$$\begin{aligned} &\text{Si } \angle A \approx \angle T \wedge \angle B \approx \angle R \\ &\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle TRS \\ &\therefore \frac{AB}{TR} = \frac{AC}{TS} = \frac{BC}{SR} = k \end{aligned}$$

- B) Caso II:** dos triángulos son semejantes cuando ambos poseen un par de ángulos congruentes y además los lados que comprenden a dicho ángulo en ambos triángulos son proporcionales.



$$\begin{aligned} &\text{Si } \angle A \approx \angle T \text{ y } \frac{AB}{TS} = \frac{AC}{TR} \\ &\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle TSR \\ &\therefore \frac{AB}{TS} = \frac{BC}{SR} = \frac{AC}{TR} = k \end{aligned}$$

- C) Caso III:** dos triángulos son semejantes cuando los tres lados de uno son respectivamente proporcionales a los otros tres lados del otro.

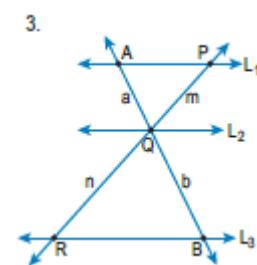
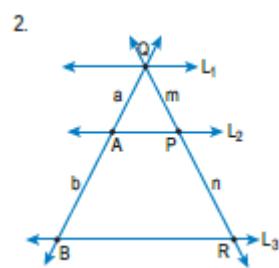
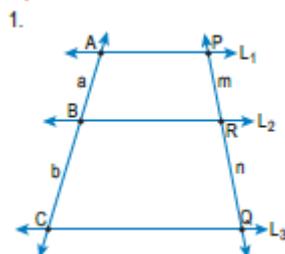


$$\begin{aligned} &\text{Si } \frac{AB}{RT} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RS} \\ &\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle RTS \end{aligned}$$

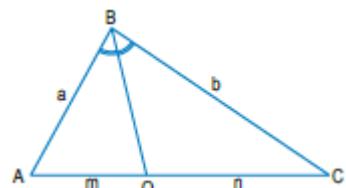
❖ TEOREMAS DE PROPORCIONALIDAD:

A) Teorema de Thales:

Si en los tres casos $\vec{L}_1 // \vec{L}_2 // \vec{L}_3$, entonces se cumple: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

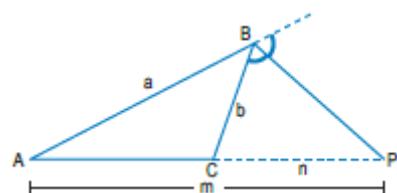


B) Teorema de la bisectriz interior



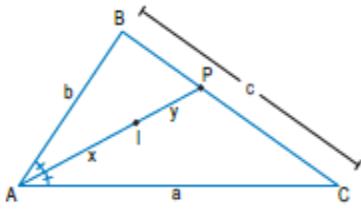
Si \overline{BQ} es una bisectriz interior
 $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

C) Teorema de la bisectriz exterior



Si \overline{BP} es una bisectriz interior
 $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

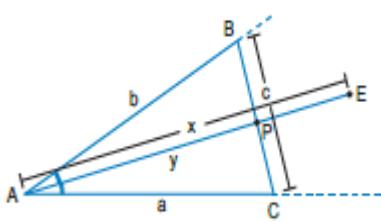
D) Teorema del incentro



Si I es el incentro del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$$

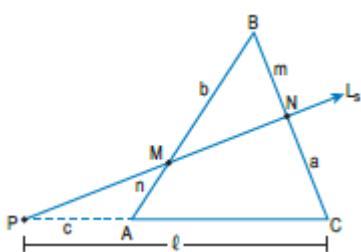
E) Teorema del excentro



Si E es el excentro relativo a \overline{BC}

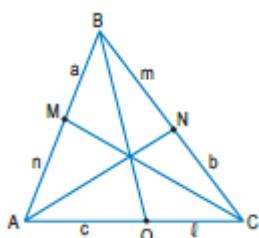
$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$$

F) Teorema de Menelao



Si \vec{L}_s es una recta transversal al $\triangle ABC$
 $\Rightarrow abc = mnl$

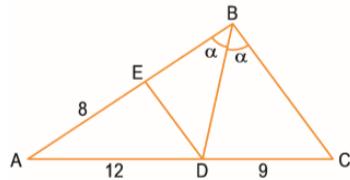
G) Teorema de Ceva



Si \overline{AN} , \overline{BN} y \overline{CM} son cevianas internas concurrentes
 $\Rightarrow abc = mn\ell$

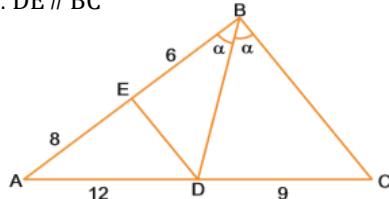
Ejemplos:

1. Calcula BC, si: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Resolución:

Piden: BC
 Datos: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



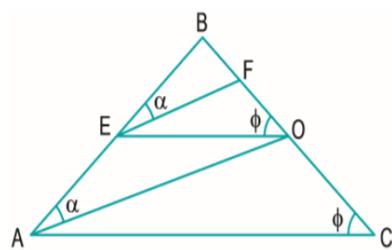
Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, por Thales:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{12}{9} \Rightarrow EB = 6$$

Luego en el $\triangle ABC$, por el teorema de la bisectriz interior:

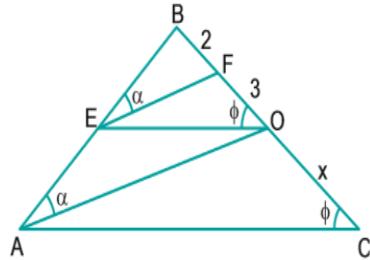
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{14}{12} = \frac{BC}{9} \Rightarrow BC = 10,5$$

2. En la figura, $BF = 2$ y $FO = 3$. Calcula OC.



Resolución:

Piden: $OC = x$



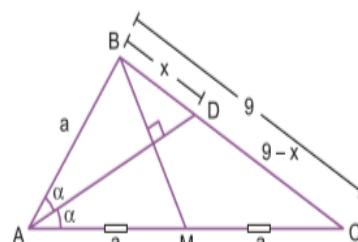
En el $\triangle ABO$: $\frac{BE}{EA} = \frac{2}{3}$

En el $\triangle ABC$: $\frac{BE}{EA} = \frac{5}{x}$

Luego: $\frac{BE}{EA} = \frac{2}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 7,5$

3. En un triángulo ABC ($BC = 9$) se trazan la bisectriz AD y la mediana BM que son perpendiculares. Calcula BD.

Resolución:



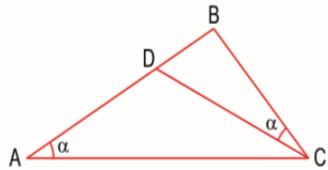
Pide: $BD = x$

Del gráfico: $\triangle AMB$ isósceles

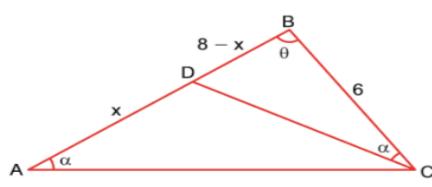
Luego en el $\triangle ABC$, por el teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{a}{x} = \frac{2a}{9-x} \Rightarrow x = 3$$

4. En la figura calcula AD , si: $AB = 8$ y $BC = 6$



Resolución:



Del gráfico: $\triangle ABC \sim \triangle CBD$

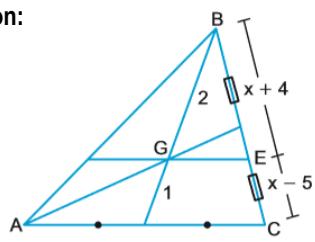
$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{6}{8-x}$$

$$\Rightarrow 36 = 64 - 8x \\ 8x = 28$$

$$\therefore x = 3,5$$

5. En un triángulo ABC , por el baricentro se traza una paralela a \overline{AC} que interseca a \overline{BC} en E . Si: $BE = x + 4$ y $EC = x - 5$, calcula BC .

Resolución:



$$\text{Del gráfico tenemos: } \frac{x+4}{x-5} = \frac{2}{1}$$

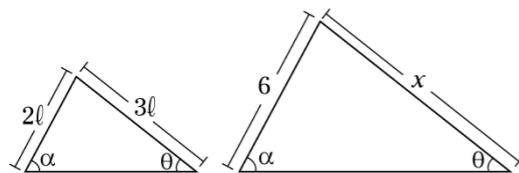
$$x + 4 = 2x - 10$$

$$14 = x$$

Piden : $BC = 2x - 1 = 27$

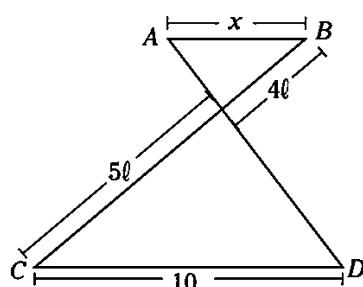
PROBLEMAS

1. A partir del gráfico, calcule x .



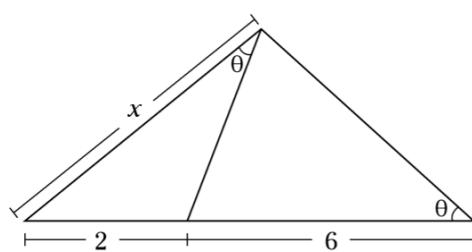
- A) 12 B) 15 C) 9 D) 8 E) 18

2. Si $AB \parallel CD$, calcule x .



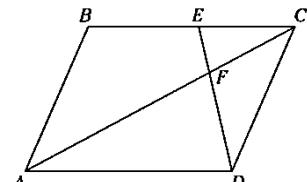
- A) 8 B) 12 C) 3 D) 6 E) 9

3. A partir del gráfico, calcule x .



- A) 23 B) 5 C) 26 D) 32 E) 4

4. Si $ABCD$ es un paralelogramo y $AD=2(EC)$, calcule DF/FE .

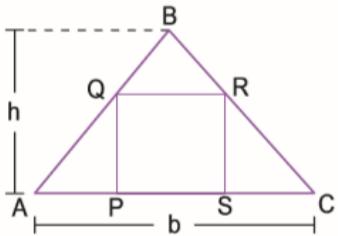


- A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 4

5. En los lados de un triángulo ABC se cumple que: $AB + BC = 4(AC)$ y su altura BH mide 5. Halla la longitud del inradio de dicho triángulo.

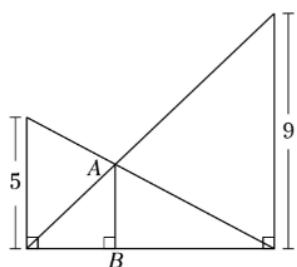
- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

6. En la figura, sabiendo que $b = 12$ m y $h = 8$ m, calcula el lado del cuadrado PQRS



A) 1,4 m B) 2,6 C) 4,8 D) 6,2 E) 8,4

7. Según el gráfico, calcule AB

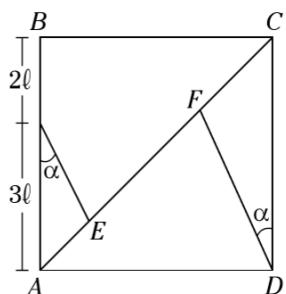


A) $51/13$ B) $20/3$ C) $45/14$ D) $29/6$ E) $35/16$

8. En un triángulo ABC: $AB = 10$, $BC = 18$. La bisectriz interior del ángulo B divide a \overline{AC} en dos segmentos cuya diferencia de sus medidas es 6. Calcula AC.

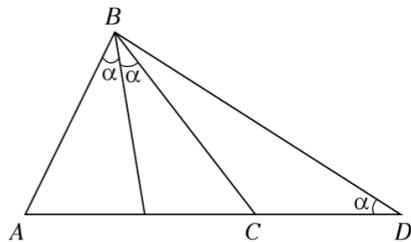
A) 21 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

9. Según el gráfico, ABCD es un cuadrado. Calcule AE/FC .



A) $2/5$ B) $5/4$ C) $3/5$ D) $1/5$ E) $5/3$

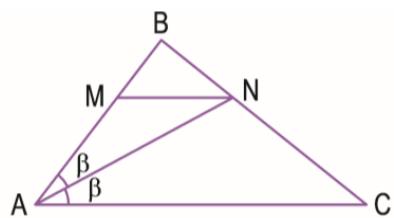
10. Según el gráfico, $AB=6$, $BC=8$ y $AC=7$. Calcule CD .



A) 4 B) 3 C) 6 D) 5 E) 2

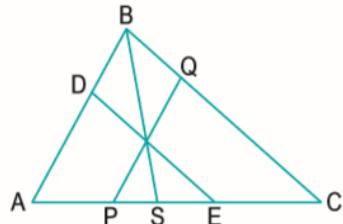
TAREA

1. En la figura, $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$; $AB = 6$ m y $AC = 14$ m. Calcula MN.



A) 2,4 m B) 3,8 C) 4,2 D) 6,2 E) 8,2

2. Si: $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $AP = 8$, $PS = 6$, $SE = 5$, calcula EC.



A) 4,6 B) 5,6 C) 6,6 D) 7,6 E) 8,6

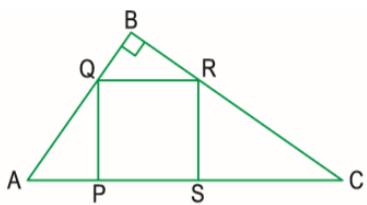
3. Sobre los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC se ubican los puntos P, Q y R, respectivamente, de modo que PBQR es un rombo cuyo lado se pide calcular sabiendo que $AB = 4$ y $BC = 6$.

A) 2,4 m B) 3,8 C) 4,2 D) 6,2 E) 8,2

4. En un triángulo ABC, $AB = 6$ y $BC = 14$. Halla AC, sabiendo que la mediana BM y la bisectriz BD, determinan sobre \overline{AC} , el segmento MD = 3.

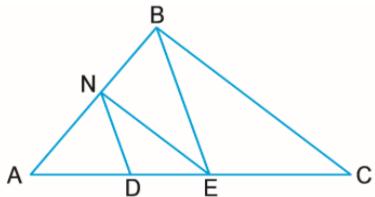
A) 12 B) 14 C) 15 D) 18 E) 20

5. En la figura, PQRS es un cuadrado. Si: $AP = 9$ m y $SC = 16$ m. Calcula el lado del cuadrado.



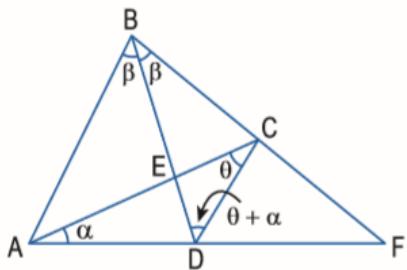
- A) 50 m B) 10 C) 21 D) 15 E) 12

6. En la figura, calcula EC si: $\overline{DN} \parallel \overline{BE}$, $\overline{NE} \parallel \overline{BC}$, $AD = 4$ y $DE = 1$.



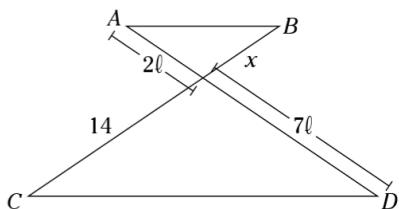
- A) 1,25 m B) 2,5 C) 4,25
D) 6,25 E) 8,45

7. Si: $5DE = 2AD$ y $BC = 12$, calcula AB.



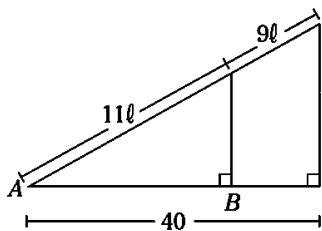
- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

8. Si $AB \parallel CD$, calcule x.



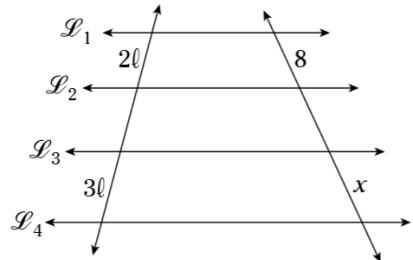
- A) 8 B) 6 C) 12 D) 1 E) 4

9. A partir del gráfico, calcule AB.



- A) 18 B) 11 C) 34 D) 22 E) 20

10. En el gráfico, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$; Calcule x.

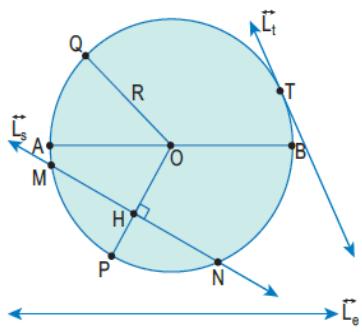


- A) 12 B) 6 C) 15 D) 18 E) 9

Semana 06:

CIRCUNFERENCIAS.

Es el conjunto de puntos coplanares que determinan una línea cerrada, además dichos puntos equidistan de un único punto ubicado en la región plana que determina aquella línea cerrada.



Elementos de la circunferencia

- Radio: \overline{OQ} ($OQ = OT = OB = OP = OA = R$)
- Cuerda: \overline{MN} (\overline{AB} también es una cuerda).
- Diámetro: \overline{AB} ($O \in \overline{AB}$ y $AB = 2R$)
- Arco: \widehat{MN} (\widehat{AB} , \widehat{BN} y \widehat{MA} también son arcos)
- Sagita: \overline{HP} ($H = \overline{OP} \cap \overline{MN}$ y $\overline{MP} \cong \overline{PN}$)
- Apótema: \overline{OH} ($\overline{OH} \perp \overline{MN}$ y $\overline{MH} \cong \overline{HN}$)

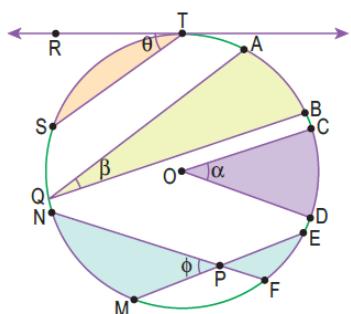
Rectas asociadas a la circunferencia

- Recta secante (L_s): M y N únicos puntos comunes.
- Recta tangente (L_t): T es único punto en común.
- Recta externa (L_e): No tiene puntos en común.

El punto "O" es el centro de la circunferencia.

ÁNGULOS DE LA CIRCUNFERENCIA:

Son ángulos cuyos vértices son puntos de la circunferencia o pertenecen a la región interna limitada por esta.



I. Ángulo central (α): $\alpha = m\widehat{CD}$

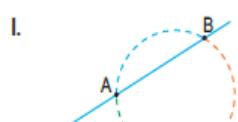
II. Ángulo inscrito (β): $\beta = \frac{m\widehat{AB}}{2}$

III. Ángulo semiinscrito (θ): $\theta = \frac{m\widehat{TS}}{2}$

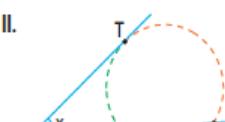
IV. Ángulo interior (ϕ): $\phi = \frac{m\widehat{MN} + m\widehat{EF}}{2}$

Donde: O es el centro de la circunferencia y T es un punto de tangencia.

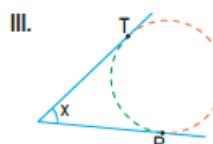
❖ Ángulos exteriores a la circunferencia



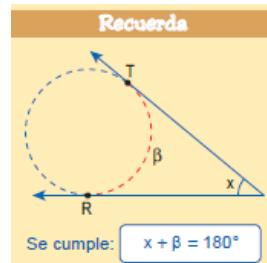
$$x = \frac{m\widehat{BN} - m\widehat{AM}}{2}$$



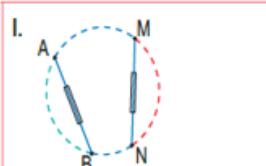
$$x = \frac{m\widehat{TN} - m\widehat{TM}}{2}$$



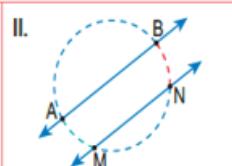
$$x = \frac{m\widehat{TSR} - m\widehat{TR}}{2}$$



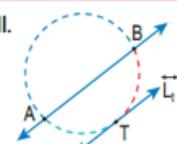
❖ Propiedades fundamentales



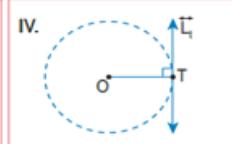
$$\text{Si: } \overline{AB} \cong \overline{MN} \Rightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{MN}$$



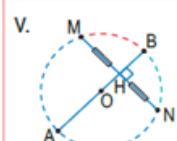
$$\text{Si: } \overline{AB} \parallel \overline{MN} \Rightarrow \widehat{AM} \cong \widehat{BN}$$



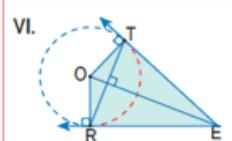
$$\text{Si: } \overline{AB} \parallel \overline{L_t} \Rightarrow \widehat{AT} \cong \widehat{BT}$$



Si: O es centro de la circunferencia y T es punto de tangencia.
 $\Rightarrow \overline{OT} \perp \overline{L_t}$



Si: \overline{AB} es diámetro y \overline{MN} es una cuerda perpendicular a este.
 $\Rightarrow \widehat{MB} \cong \widehat{BN}$ y $\widehat{MH} \cong \widehat{HN}$



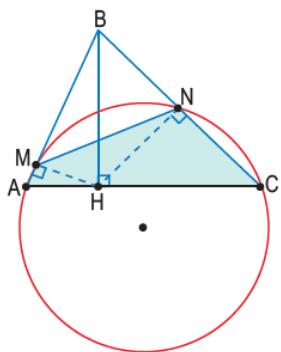
Si: \overline{ET} y \overline{ER} son rectas tangentes y O es centro de la circunferencia.
 $\Rightarrow \overline{ET} \cong \overline{ER}$ y $\overline{EO} \perp \overline{TR}$

TEOREMAS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA:

A) Teorema de Taylor

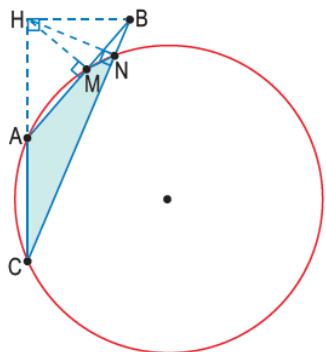
En todo triángulo oblicuángulo las proyecciones ortogonales del pie de una de sus alturas sobre los otros dos lados y los extremos del lado relativo a dicha altura, son los vértices de un cuadrilátero inscriptible.

I. Teorema de Taylor en un triángulo acutángulo



Si \overline{BH} es una altura, y $\overline{HN} \perp \overline{BC}$ y $\overline{HM} \perp \overline{AB}$
 $\Rightarrow \square AMNC$ es inscriptible.

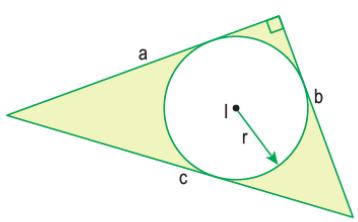
II. Teorema de Taylor en un triángulo obtusángulo



Si \overline{BH} es una altura, y $\overline{HM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HN} \perp \overline{BC}$
 $\Rightarrow \square AMNC$ es inscriptible.

B) Teorema de Poncelet.

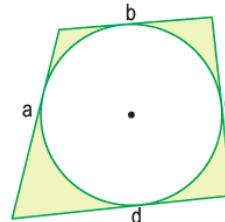
En un triángulo rectángulo la magnitud de los catetos es igual a la magnitud de la hipotenusa más el doble de la magnitud de su inradio.



$$a + b = c + 2r$$

C) Teorema de Pitot

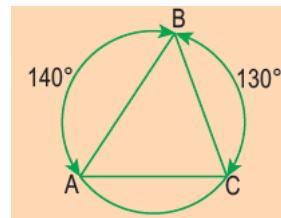
En un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia la magnitud de los lados opuestos es igual a la magnitud de los otros lados opuestos.



$$a + c = b + d$$

Ejemplos:

1. De la figura, calcula la $m\angle ABC$.



Resolución:

Sea: $m\angle ABC = x$

Sabemos:

$$m\angle BAC = \frac{m\widehat{BC}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$m\angle BCA = \frac{m\widehat{AB}}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

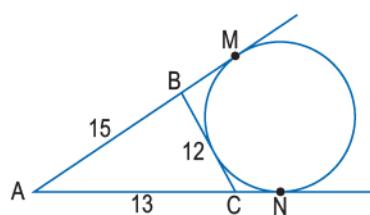
En el $\triangle ABC$:

$$65^\circ + 70^\circ + x = 180^\circ$$

$$135^\circ + x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

2. Si: $AB = 15$, $BC = 12$ y $AC = 13$. Calcula CN.



Resolución:

Por propiedad:

$$AN = p$$

p: semiperímetro del $\triangle ABC$

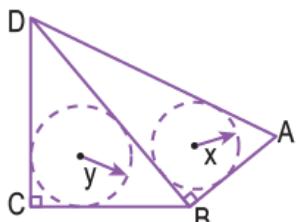
$$p = \frac{15+13+12}{2}$$

$$p = 20$$

Del gráfico: $AC + CN = AN$
 $13 + CN = 20$

$$\therefore CN = 7$$

3. Si: $AD = BC + CD$ y $AB = 28$, calcula $x + y$.

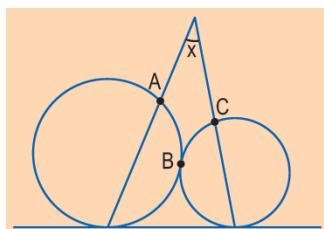


Resolución:

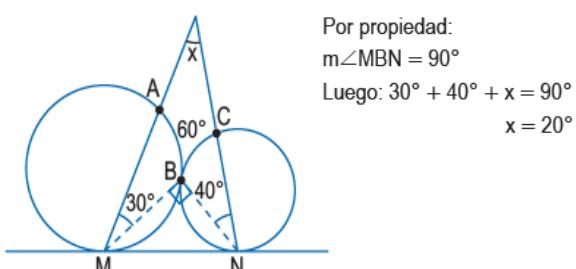
Aplicamos el teorema de Poncelet en los triángulos ABD y BCD :

$$\begin{aligned} AB + BD &= AD + 2x \quad \text{Sumamos ambas} \\ BC + CD &= BD + 2y \quad \text{expresiones} \\ AB + BD + \cancel{BC + CD} &= AD + \cancel{BD} + 2(x + y); \text{ pero } AD = BC + CD \\ AB + AD &= AD + 2(x + y); \text{ Pero } AB = 28 \\ \text{Reemplazando: } 28 &= 2(x + y) \\ \Rightarrow x + y &= 14 \end{aligned}$$

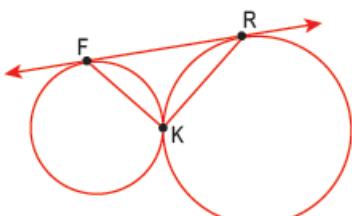
4. Si: $m\widehat{AB} = 60^\circ$ y $m\widehat{CB} = 80^\circ$. Halla: x



Resolución:

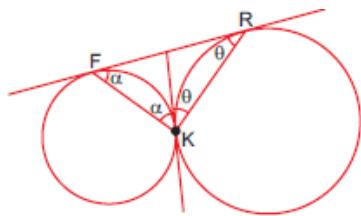


5. Halla $m\angle FKR$ si F, K y R son puntos de tangencia.



Resolución:

Piden: $m\angle FKR$



$$\text{Piden: } x = \alpha + \theta \quad \dots(1)$$

En el triángulo FKR:

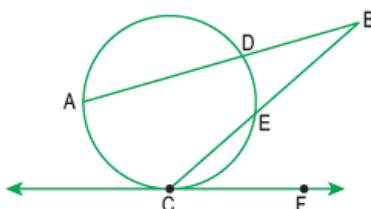
$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + \theta + \theta &= 180^\circ \\ \alpha + \theta &= 90^\circ \quad \dots(2) \end{aligned}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\therefore x = 90^\circ$$

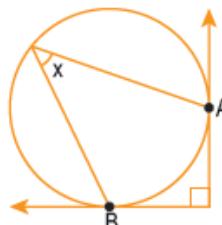
PROBLEMAS

1. En la figura C es punto de tangencia, $m\angle BCF = 50^\circ$. Halla $m\angle ABC$, si $m\widehat{AC} = 4m\widehat{DE}$, además $m\widehat{AD} = 120^\circ$.



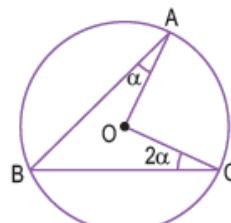
- A) 40° B) 44° C) 46° D) 42° E) 43°

2. Si A y B son puntos de tangencia, calcula x.



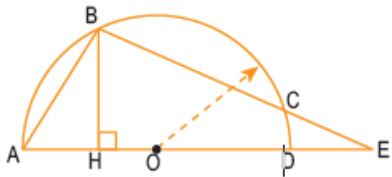
- A) 30° B) 45° C) 15° D) 20° E) 25°

3. En la figura O es el centro de la circunferencia; la medida del arco AC es 84° . Calcula α .



- A) 14° B) 16° C) 12° D) 18° E) 15°

4. En la figura mostrada $BC = 2(BH)$ y $m\angle ABH = 27^\circ$. Calcula $m\angle BED$.

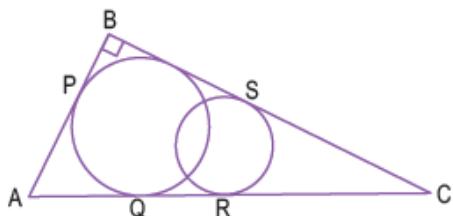


- A) 12° B) $13,5^\circ$ C) 15° D) 18° E) 24°

5. Se tienen dos circunferencias tangentes exteriores. Si las tangentes comunes exteriores forman un ángulo que mide 60° , calcula la razón entre los radios.

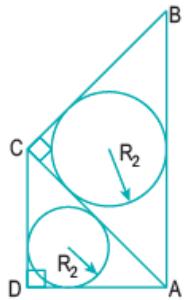
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

6. Calcula la medida del inradio del triángulo ABC, si $BP = QR$ y $BS = 4$.



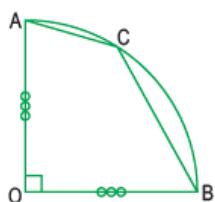
- A) 4 B) 2 C) 3 D) 1 E) 2,5

7. Calcula $R_1 + R_2$, si: $BC = 10$ y $AB = CD + DA$.



- A) 10 B) 8 C) 3 D) 5 E) 4

8. Calcula OB, si $AC = 2$ y $BC = 6\sqrt{2}$.



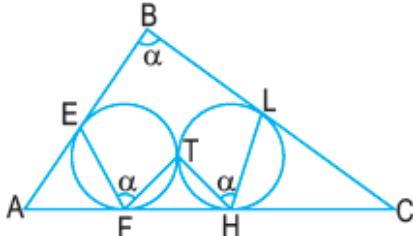
- A) $4\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{6}$
D) $5\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

9. Sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se construye exteriormente

el cuadrado ACEF de centro O. Calcula la medida del ángulo CBO.

- A) 30° B) 37° C) 60° D) 53° E) 45°

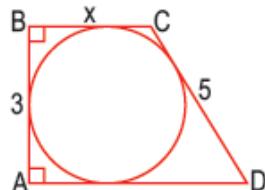
10. Calcula α , si: E, F, H, L y T son puntos de tangencia.



- A) 76° B) 72° C) 68° D) 64° E) 60°

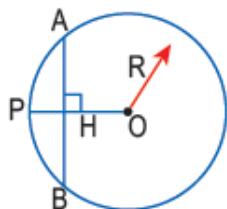
TAREA

1. En la figura, calcula x.



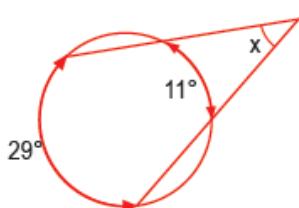
- A) 1,5 B) 3 C) 4 D) 2,5 E) 2

2. Si $AB = 6$ y $PH = 1$, calcula R.



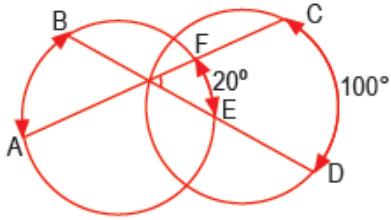
- A) 7 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. Halla x.



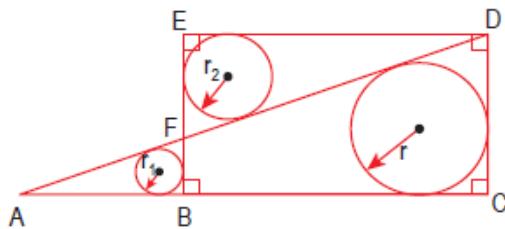
- A) 11° B) 8° C) 13° D) 7° E) 9°

4. Calcula la $m\widehat{AB}$.



- A) 50° B) 80° C) 40° D) 60° E) 30°

5. En la figura, BEDC es un rectángulo. Calcula r , si $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$.



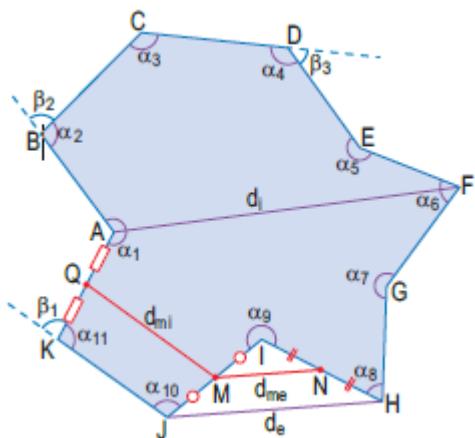
- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Semana 07:

POLÍGONOS Y ÁREAS

❖ POLÍGONOS

Se denomina polígono a la porción de plano limitado por una secuencia finita y cerrada de segmentos de recta consecutivos y no colineales.



Elementos del polígono

- Vértices: A; B; C; D; E; F; G; H; I; J; K
- Lados: \overline{AB} ; \overline{BC} ; \overline{CD} ; \overline{DE} ; \overline{EF} ; \overline{FG} ; \overline{GH} ; \overline{HI} ; \overline{IJ} ; \overline{JK} ; \overline{KA}
- Ángulos internos: α_1 ; α_2 ; α_3 ; α_4 ; α_5 ; α_6 ; α_7 ; α_8 ; ...
- Ángulos externos: β_1 ; β_2 ; β_3 ; ...

- Diagonal interior: d_i
- Diagonal exterior: d_e
- Diagonal media interior: d_{mi}
- Diagonal media exterior: d_{me}

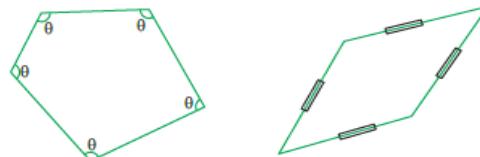
➤ Clasificación de polígonos simples

A) Por el número de sus lados

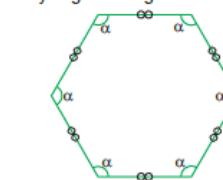
• Triángulo: 3 lados	• Heptágono: 7 lados	• Endecágono: 11 lados
• Cuadrilátero: 4 lados	• Octágono: 8 lados	• Dodecágono: 12 lados
• Pentágono: 5 lados	• Eneágono: 9 lados	• Tridecágono: 13 lados
• Hexágono: 6 lados	• Decágono: 10 lados	• Icoságono: 20 lados

C) Por la regularidad de sus elementos

- I. **Polygono equiángulo:** posee ángulos congruentes. II. **Polygono equilátero:** posee lados congruentes.



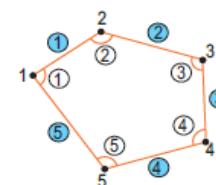
- III. **Polygono regular:** posee lados y ángulos congruentes.



➤ Propiedades de los polígonos convexos

- a) El número de lados es igual al número de vértices e igual al número de ángulos.
Si n° de lados = n ; entonces:

$$n^{\circ} \text{ ángulos} = n^{\circ} \text{ vértices} = n$$



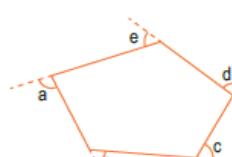
- b) La suma de las medidas de sus ángulos internos está dada por la siguiente relación:

$$S_{m\angle i} = 180^{\circ}(n - 2)$$



- c) La suma de las medidas de sus ángulos externos siempre será 360° .

$$S_{m\angle e} = 360^{\circ}$$



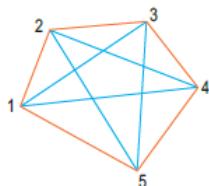
- d) El número de diagonales trazadas desde un solo vértice:

$$D_{1v} = (n - 3)$$



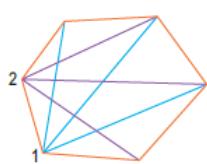
e) El número total de diagonales:

$$D_T = \frac{n(n-3)}{2}$$



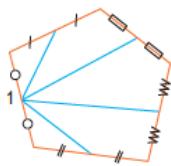
f) El número de diagonales trazadas desde v vértices consecutivos:

$$D_V = nv - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$



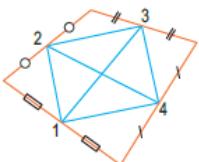
g) El número de diagonales medias trazadas desde un solo lado:

$$D_{IM} = (n-1)$$



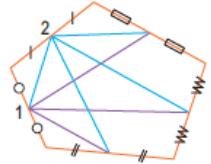
h) El número total de diagonales medias:

$$D_M = \frac{n(n-1)}{2}$$



i) El número de diagonales medias trazadas desde k puntos medios consecutivos:

$$D_k = nk - \frac{k(k+1)}{2}$$



EJEMPLOS

1. ¿Cuántos lados tiene un polígono en el cual el número de diagonales excede en 25 al número de vértices?

Resolución:

$$\begin{aligned} D_T - n &= 25 \\ \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} - n &= 25 \\ n(n-3) - 2n &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 - 5n &= 50 \\ n(n-5) &= 50 \\ \therefore n &= 10 \end{aligned}$$

2. ¿En qué polígono convexo se cumple que el número de vértices es la mitad del número de diagonales?

Resolución:

$$n = \frac{D_T}{2}$$

$$n = \frac{n(n-3)}{2(2)}$$

$$4n = n(n-3)$$

$$4 = n - 3$$

$$n = 7$$

∴ El polígono es un heptágono.

3. Calcula el número de lados de un polígono convexo sabiendo que si se incrementa en 2 el número de lados, el número de diagonales aumenta en 15.

Resolución:

Sea n es el número de lados del polígono, entonces:

$$\frac{(n+2)(n+2-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 15$$

$$(n+2)(n-1) - n(n-3) = 30$$

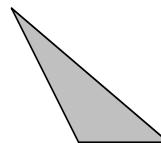
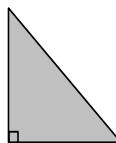
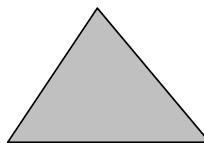
$$n^2 + n - 2 - n^2 + 3n = 30$$

$$4n - 2 = 30; \quad \therefore n = 8.$$

❖ ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES.

Región triangular:

Es una figura geométrica (conjuntos de puntos) que consiste en un triángulo más su interior.



Región poligonal

Es una figura geométrica formada por la reunión de un número finito de regiones triangulares en un plano, de modo que si dos cualesquieras de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento.

Postulado

A toda región poligonal, le corresponde un número real positivo único.

Área de una región poligonal

El área de una región poligonal es el número real positivo que se le asigna según el postulado anterior.

Unidad de área

Por costumbre se escoge como unidad de área a la unidad longitudinal al cuadrado; o sea:

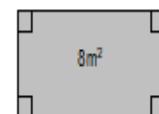
u: unidad de longitud

U: unidad de Área

OBSERVACIONES

* Entendemos el área de un triángulo, área de un cuadrilátero, área de un polígono, como el área de la región correspondiente.

* Dos regiones cualesquieras que tienen igual área se llaman equivalentes, independiente de la forma que tenga cada región. Ejemplo: el triángulo y el rectángulo que tiene igual área, son equivalentes.



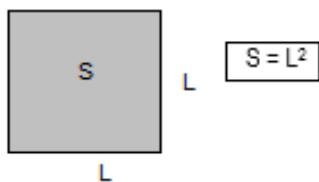
FIGURAS EQUIVALENTES

* Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares tienen la misma área.

* Es a partir del postulado de la unidad de área (área del cuadrado) que se demuestran las fórmulas básicas para el cálculo de área de las diferentes regiones elementales: rectángulo, triángulo, trapezo, etc.

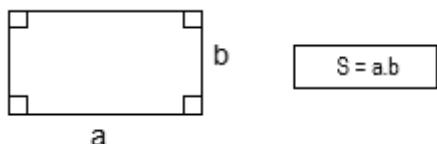
AREA DEL CUADRADO

El área de un cuadrado es igual a la longitud de su lado al cuadrado; o sea:



AREA DEL RECTANGULO

El área de un rectángulo es el producto de su base por la altura.



Demostración

En la figura, $A_1 = a^2$, $A_2 = b^2$

$$S + S + A_1 + A_2 = S_{\text{total}}$$

$$2S + a^2 + b^2 = (a+b)^2$$

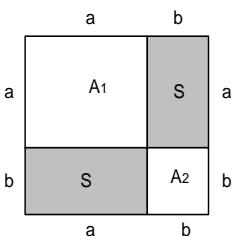
$$2S + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cancelando a^2 y b^2

$$2S = 2ab$$

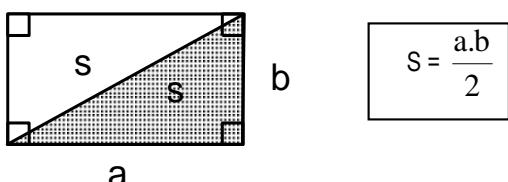
Mitad

$$S = a \cdot b$$



AREA DE UN TRIANGULO RECTÁNGULO

El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de las longitudes de los catetos.



Demostración

Por área del rectángulo

$$2S = a \cdot b \Rightarrow S = \frac{a \cdot b}{2}$$

AREA DE UN TRIANGULO CUALQUIERA

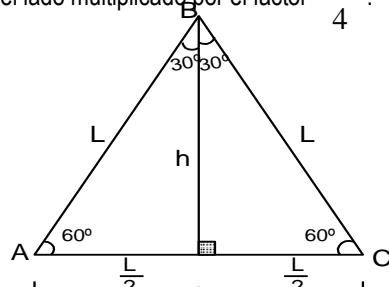
El área de todo triángulo es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura relativa a dicho lado.

$$S = \text{Area } (\Delta ABC)$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

AREA DE UN TRIANGULO EQUILATERO

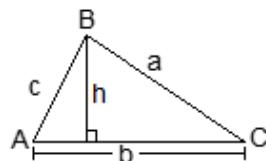
El área de todo triángulo equilátero es igual al cuadrado de la longitud del lado multiplicado por el factor $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



$$S = \text{Area } (\Delta ABC)$$

$$S = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$$

AREA DEL TRIANGULO EN FUNCION DE SUS LADOS (Teorema de Herón)



$$S = \text{Area } (\Delta ABC)$$

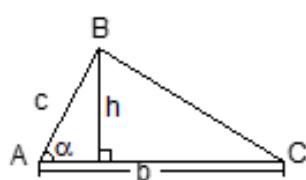
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p : semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

FORMULA TRIGONOMETRICA

En todo triángulo, el área se puede expresar como el semiproducto de dos lados, por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

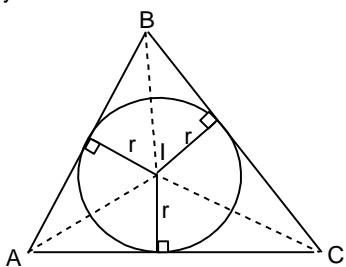


$$S = \text{Area } (\Delta ABC)$$

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{Sen} \alpha}{2}$$

AREA DE UN TRIANGULO EN FUNCION DEL INRADIO

El área de todo triángulo es igual al producto del semiperímetro y el inradio.



$$S = \text{Area } (\triangle ABC)$$

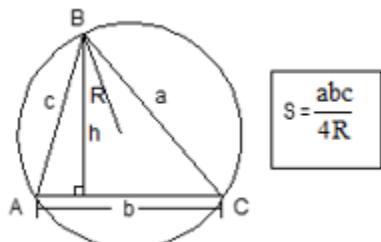
r: Inradio

P: semiperímetro

$$S = p \cdot r$$

AREA DE UN TRIANGULO EN FUNCION DEL CIRCUNRADIO

El área de todo triángulo es igual al producto de las longitudes de los tres lados, dividido por el cuádruple del circunradio



$$S = \text{Area } (\triangle ABC)$$

R : Circunradio

$$S = \frac{abc}{4R}$$

PROBLEMAS

1. Calcula el número de lados de un polígono regular, tal que si tuviera seis lados menos, la medida de su ángulo externo aumentaría en 80° .

A) 9 B) 43 C) 18 D) 23 E) 7

2. En un polígono regular, su ángulo exterior disminuye en 10° al aumentar en 3 su número de lados. Calcula la medida del ángulo central de dicho polígono.

A) 30° B) 45° C) 40° D) 36° E) 24°

3. Si el número de lados de un polígono aumenta en 2, su número de diagonales aumenta en 13. Halla su número de lados.

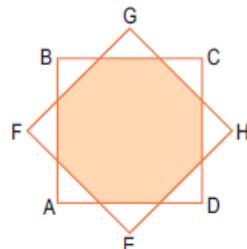
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

4. En un polígono convexo, su número de diagonales es igual a $(x + 6)$ y su número de

diagonales medias es $(x + 18)$. Calcula su número de lados.

A) 6 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

5. En la figura ABCD y EFGH son cuadrados. Si $AD = 2 + 2\sqrt{2}$, halla el perímetro del polígono regular sombreado.

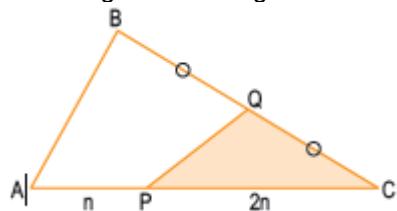


A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

6. Halla el número de lados de un polígono regular, sabiendo que la longitud de cada lado es 3 cm, y el número de diagonales es numéricamente igual a 2 veces su perímetro.

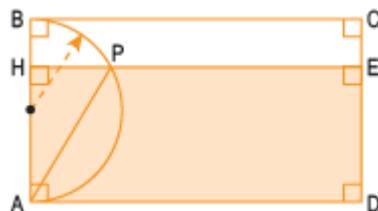
A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

7. Calcula el área de la región sombreada, si el área de la región del triángulo ABC es 120 m^2 .



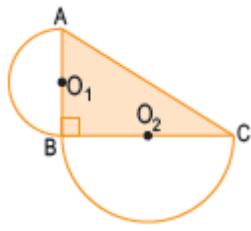
A) 20 m^2 B) 50 C) 30 D) 40 E) 60

8. Del gráfico, calcula el área de la región AHED siendo $AP = 6$ y $5(AB) = 4(BC)$.



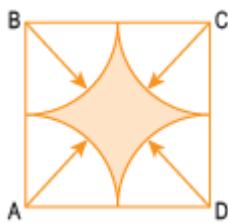
A) 18 B) 36 C) 24 D) 45 E) 48

9. Las áreas de los semicírculos son de $18\pi \text{ cm}^2$ y $32\pi \text{ cm}^2$. Halla el área de la región sombreada.



- A) 106 cm^2
D) 96
- B) 86
E) 76
- C) 116

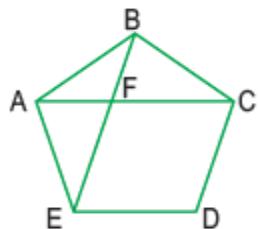
10. Calcula el área de la región sombreada, si $AB = 20 \text{ cm}$. Además, ABCD es un cuadrado.



- A) 100 cm^2
D) 400
- B) 314,16
E) 85,84
- C) 80

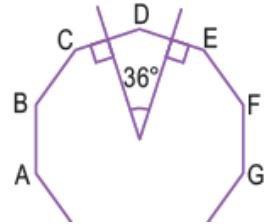
TAREAS

1. En la figura se presenta el polígono regular ABCDE, si $EF = 5$, calcula la medida del lado del polígono.



- A) $4\sqrt{5}$
B) $5\sqrt{5}$
C) $\sqrt{5}$
D) 5
- E) 10

2. En la figura se muestra el polígono equiángulo ABCDEFGH..., donde se han trazado las medianas de los lados CD y DE determinando un ángulo de 36° . Calcula el número de diagonales totales del polígono.

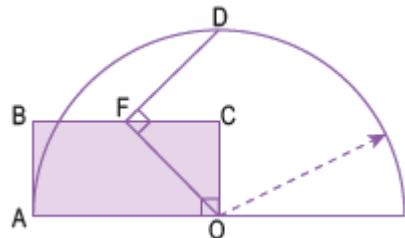


- A) 30
B) 56
C) 38
D) 40
E) 35

3. En un polígono convexo la suma de los ángulos internos excede en 720° a la suma de los ángulos exteriores. Calcula su número de diagonales.

- A) 27
B) 35
C) 44
D) 14
E) 20

4. En el gráfico, calcula el área de la región rectangular ABCO, si $OF = 4 \text{ cm}$.



- A) 12 cm^2
B) 16
- C) 15
D) 8
E) 19

5. Calcula el área de una región triangular equilátera, si su circunradio mide 4.

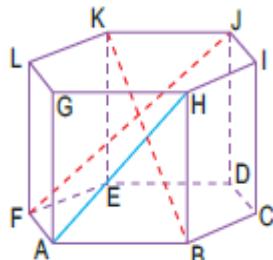
- A) 4
B) $6\sqrt{3}$
C) 6
D) $12\sqrt{3}$
E) $4\sqrt{6}$

Semana 08:

POLIEDROS Y VOLUMENES

POLIEDROS:

Es una región del espacio limitada por regiones poligonales planas las cuales se denominan caras del poliedro.



Elementos:

Vértices : A; B; C; D; E; ...

Aristas : \overline{AB} ; \overline{IC} ; \overline{FE} ; \overline{JI} ; ...

Caras : ABHG; EDJK; LGAF; ...

Diagonal de una cara : \overline{GB} ; \overline{AH} ; \overline{LI} ; ...

Diagonal del poliedro : \overline{FJ} ; \overline{KB} ; \overline{FH} ; ...

Teoremas

- En todo poliedro convexo, el número de caras aumentadas en el número de vértices es igual al número de aristas más dos. Se conoce como Teorema de Euler.

$$C + V = A + 2$$

C: números de caras

V: números de vértices

A: números de aristas

- Para todo poliedro, la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es:

$$S_{m\angle \text{caras}} = 360^\circ(V - 2)$$

$S_{m\angle \text{caras}}$: suma de la medida de los ángulos internos

V: número de vértices

- En todo poliedro cuyas caras tienen igual número de lados, el número de aristas es igual al semiproducto del número de caras con el número de lados de una cara:

$$A = \frac{CM}{2}$$

A: número de aristas

C: número de caras

M: número de lados de una cara

- En todo poliedro, el número de diagonales es igual al valor de combinación del número de vértices del poliedro tomados de dos en dos, menos el número de aristas y menos la suma de los números de diagonales de todas las caras de dicho poliedro.

$$ND_p = C_2^V - A - ND_{\text{caras}}$$

ND_p : número de diagonales del poliedro.

A: número de aristas.

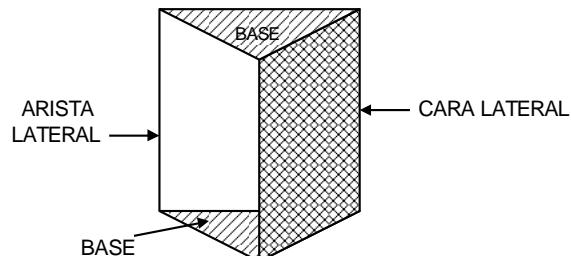
ND_{caras} : suma de los números de diagonales de todas sus caras.

C_2^V : número de vértices tomados de dos en dos.

VOLUMEN DE SOLIDOS:

PRISMA

Es el sólido geométrico que tiene por bases polígonos paralelos e iguales y por caras laterales paralelogramos.



CLASIFICACIÓN

Los prismas se clasifican según sus bases en:

- Prisma triangular, si su base es un triángulo.
- Prisma cuadrangular, si su base es un cuadrilátero.
- Prisma pentagonal, si su base es un pentágono.

I. PRIMA RECTO.

Es aquel prisma que tiene sus aristas laterales perpendiculares a las bases; sus caras laterales son rectángulos; arista lateral igual a la altura del prisma.

A_L = Área Lateral

$2p_B$ = Perímetro de la base

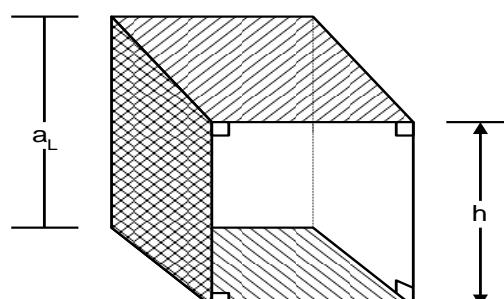
S_B = Área de la base

$$A_L = (2p_B)(h)$$

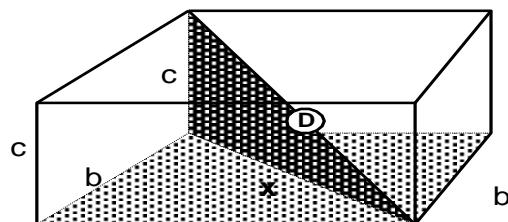
h = Altura

A_T = Área total

$$A_T = A_L + 2S_B$$



$$\text{Volumen} = S_B \cdot h$$



$$\text{Volumen} = abc$$

$$A_L = 2ac + 2bc$$

$$A_T = A_L + 2S_B$$

$$A_T = 2ac + 2bc + 2ab$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

II. PRISMA REGULAR

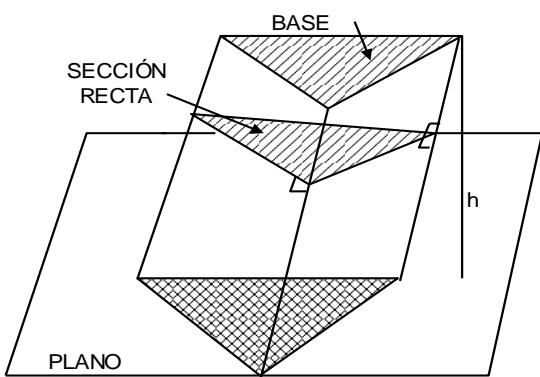
Es un prisma recto, cuyas bases son polígonos regulares.

III. PRISMA OBLICUO

Es aquel prisma cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases, sus caras laterales son paralelogramos (rombooides), la altura es menor que la arista lateral.

Sección Recta del Prisma (S_R)

Es la sección del prisma con un plano perpendicular a las aristas laterales.



S_R = Área de la sección recta.

$2p_{SR}$ = Perímetro de la sección recta.

$$A_L = (2p_{SR})(a_L)$$

a_L = Arista lateral

$$A_T = A_L + 2S_B$$

$$\text{Volumen} = S_B \cdot h$$

$$\text{Volumen} = S_R \cdot a_L$$

IV. PARALELEPÍPEDOS

Son prismas cuyas caras son todos paralelogramos.

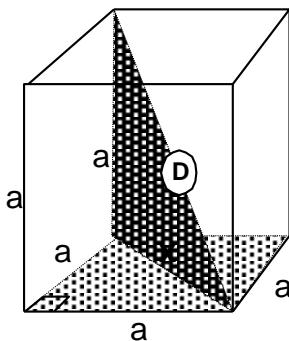
Clasificación:

a) Paralelepípedo Rectangular

Es un prisma, llamado también caja rectangular, ortoedro o rectoedro. Todas sus caras son rectángulos.

b) Cubo o hexaedro regular

Es paralelepípedo en el cual todas sus caras son cuadrados.



$$\text{Volumen} = a^3$$

$$A_L = 4a^2$$

$$A_T = 6a^2$$

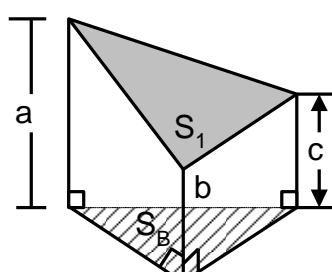
$$D = a\sqrt{3}$$

c) Romboedro

Es un paralelepípedo oblicuo. Todas sus caras son rombos.

V. TRONCO DE UN PRISMA TRIANGULAR RECTO

Es el sólido que se determina al interceptar a una prima recto con un plano no paralelo a su base.



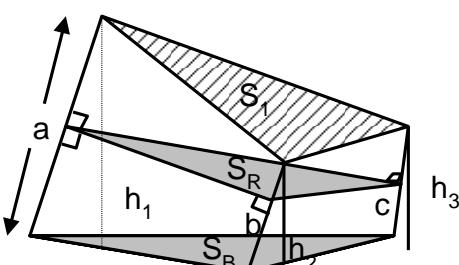
$$\text{Volumen} = S_B \left(\frac{a + b + c}{3} \right)$$

$$A_T = A_L + S_B + S_1$$

VI. TRONCO DE UN PRISMA RECTANGULAR OBLICUO

Es el sólido que se determina al interceptar a un prisma oblicuo con un plano no paralelo a su base.

$$A_T = A_L + S_B + S_1$$

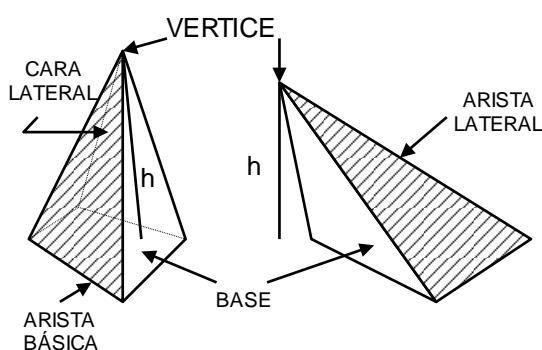


$$\text{Volumen} = S_R \left(\frac{a + b + c}{3} \right)$$

$$\text{Volumen} = S_B \frac{(h_1 + h_2 + h_3)}{3}$$

❖ PIRÁMIDE

Es el sólido geométrico que tiene como base un polígono que tienen un vértice común que viene a ser el vértice de la pirámide y los otros dos vértices de cada triángulo coinciden con los vértices de la base respectivamente.



Clasificación:

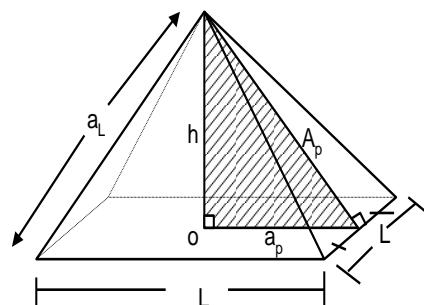
Por el número de lados de su base en:

- Pirámide triangular, si su base es un triángulo, llamado también tetraedro.
- Pirámide cuadrangular, si su base es un cuadrilátero.
- Pirámide pentagonal, si su base es un pentágono, etc.

I. PIRÁMIDE REGULAR.

Es una pirámide cuya base es un polígono regular, sus caras laterales son triángulos isósceles iguales. El pie de la altura coincide con el centro de la base.

APOTEMA DE UNA PIRÁMIDE REGULAR: Es el segmento perpendicular trazado desde el vértice de la pirámide a una arista básica.



A_p = Apotema de la Pirámide
 a_p = Apotema de la base.

$$A_p^2 = h^2 + a_p^2$$

$$a_L^2 = h^2 + R^2$$

R = Radio de la circunferencia circunscrita a la base.

$$A_L = \text{Semiperímetro de la base} \times A_p$$

$$A_T = A_L + S_B$$

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Área de la base} \times h}{3}$$

II. PIRAMIDE IRREGULAR:

Es aquella que no cumple con las condiciones de la pirámide regular.

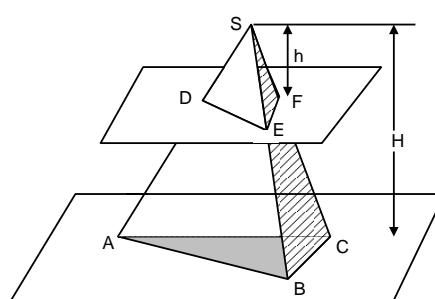
Teorema

Si se corta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base se obtiene una pirámide parcial semejante a la pirámide total.

Propiedades

- Si dos pirámides son semejantes, las áreas de sus bases son proporcionales a los cuadrados de sus dimensiones homólogas.
- Los volúmenes de dos pirámides semejantes, son proporcionales a los cubos de sus dimensiones homólogas.

Pirámide S-DEF ~ Pirámide S – ABC



$$\frac{SD}{SA} = \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SC} = \frac{h}{H}$$

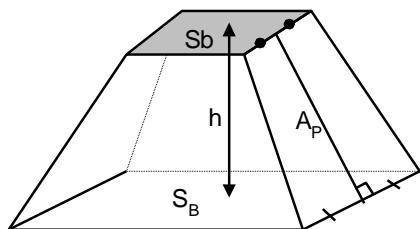
$$\frac{\text{Area}(\Delta DEF)}{\text{Area}(\Delta ABC)} = \frac{SD^2}{SA^2} = \dots \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{\text{Volumen de la pirámide } S-DEF}{\text{Volumen de la pirámide } S-ABC} = \frac{SD^3}{SA^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

III. TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es el sólido que se determina al interceptar a una pirámide regular con un plano paralelo a su base. Sus caras laterales son trapecios isósceles iguales.

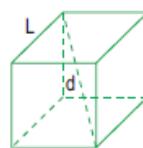
Apotema del Tronco de Pirámide Regular: Es el segmento que une los puntos medios de las bases de una cara lateral.



$A_L = (p_b + p_B) A_p$
$A_T = A_L + S_b + S_B$
p _b y p _B : Semiperímetro de bases.

2. La diagonal de un cubo mide $10\sqrt{3}$. Halla el área total de un tetraedro regular de lado igual a la mitad del lado del cubo.

Resolución:

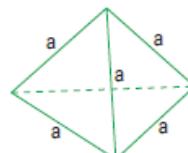


Sea L el lado del cubo, entonces la diagonal es:

$$d = L\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} = L\sqrt{3}$$

$$L = 10$$



Por dato el lado del tetraedro será:

$$a = 5$$

Sabemos que el área total del tetraedro de lado a es:

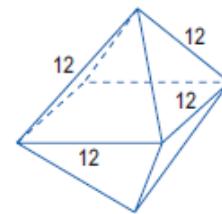
$$A_T = a^2\sqrt{3}$$

$$\therefore A_T = 25\sqrt{3}$$

3. Si la arista de un octaedro mide 12 m, halla la diagonal y el volumen del octaedro.

Resolución:

$$a = 12$$



Cálculo de la diagonal: $d = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow d = 12\sqrt{2} \text{ m}$$

Cálculo del volumen: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow V = \frac{(12)^3\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore V = 576\sqrt{2} \text{ m}^3$$

4. El área de una cara de un tetraedro regular es $\sqrt{6}$. Calcula el área total del tetraedro.

EJEMPLOS

1. Un poliedro convexo tiene 8 vértices y 6 caras. Halla el número de aristas.

Resolución:

Piden: A

Dato: V = 8; C = 6

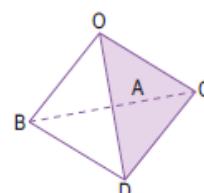
Por la ecuación de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$\Rightarrow 6 + 8 = A + 2$$

$$\therefore A = 12$$

Resolución:



Por dato: el área de una cara del tetraedro regular es:

$$\Rightarrow A = \sqrt{6}$$

Como en un tetraedro regular las 4 caras son iguales, entonces el área total será:

$$A_T = 4A = 4(\sqrt{6})$$

$$\therefore A_T = 4\sqrt{6}$$

5. Halla el número de diagonales de un octaedro regular y calcula la suma del resultado obtenido con el número de vértices.

Resolución:



En un octaedro se tiene:

$$V = 6 \wedge A = 12$$

Entonces:

$$N_D = C_2^V - A - \Sigma D_C$$

$$N_D = C_2^6 - 12 - 0$$

$$N_D = 15 - 12 = 3$$

Piden:

$$n.^o \text{ diagonales} + n.^o \text{ vértices} = 3 + 6 = 9$$

PROBLEMAS

1. Un poliedro convexo tiene 20 caras y 30 aristas. Halla el número de vértices.

A) 10 **B) 12** C) 20 D) 15 E) 30

2. En un poliedro convexo, el número de caras, más el número de vértices, y más el número de aristas, es 28. Si las medidas de los ángulos en todas las caras suman 1800° . Halla el número de caras.

A) 2 B) 4 **C) 8** D) 6 E) 5

3. La suma de las medidas de las caras de un poliedro convexo, es 3600° . Si el número de aristas excede en 2 al doble del número de caras. Halla el número de caras.

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 10

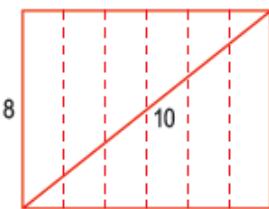
4. Calcula el área total del hexaedro regular cuya diagonal mide $\sqrt{6}$.

A) 12 B) 8 C) 6 D) 13 E) 9

5. Calcula el volumen de un cubo cuya arista es igual a la arista de un tetraedro regular de $49\sqrt{3}$ de área total.

A) 343 B) 297 C) 336 D) 286 E) 534

6. En la figura se muestra el desarrollo de la superficie lateral de un prisma hexagonal regular, calcula el volumen del prisma.

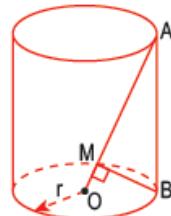


A) **12\sqrt{3}** B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

7. Halla el volumen del tronco de prisma recto cuya base es un triángulo isósceles ABC de lados AB = AC = 116 m y BC = 8 m; las aristas laterales están en progresión aritmética, midiendo la intermedia 3 m.

A) 100 m³ **B) 120** C) 110
D) 140 E) 150

8. Calcula el área lateral del cilindro de revolución mostrado, si OA = 14 cm y BM = 6 cm.



A) $84\pi \text{ cm}^2$ B) 112π C) 126π
D) 160π **E) 168\pi**

9. El área de la superficie lateral de una pirámide cuadrangular regular es 6300 m^2 y la medida del ángulo diedro formado por una cara lateral y la base es 74° . Calcula la distancia del centro de gravedad de la base a una cara lateral de la pirámide.

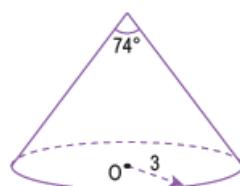
A) 20,16m³ B) 20 C) 22 D) 20,15 E) 21

10. Calcula el volumen de un cono equilátero cuya generatriz mide $2\sqrt{3}$ m.

A) $3\pi \text{ m}^3$ B) π C) 5π D) 4π E) 2π

TAREA

1. Calcula el volumen del cono recto mostrado.



A) 8π B) 6π C) 10π D) 14π **E) 12π**

2. Calcula a qué distancia del vértice de una pirámide triangular, cuya altura es 3, se debe trazar un plano paralelo a la base para que las dos partes resultantes estén en la razón de 8/19.

A) 1,6 B) 5/2 C) 3/2 D) 3 **E) 2**

3. El radio de la sección recta de un cilindro oblicuo mide 23, la generatriz está inclinada 60° respecto a la base y la altura es el doble del diámetro de la sección recta. Calcula el volumen del cilindro.

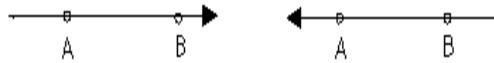
A) 180π **B) 192π** C) 200π
D) 177π E) 195π

4. Halla el volumen de un prisma recto cuyas aristas laterales miden 16 cm y su base es un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.

A) 400 cm^3 B) 500 C) 600
D) 1200 **E) 800**

5. Halla la altura del tetraedro regular de arista 3.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ **C) $\sqrt{6}$** D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{2}$



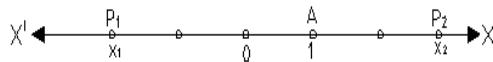
Si el segmento de A a B se considera "positivo", entonces el de B a A es "negativo".

2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos se define como el valor numérico (valor absoluto) de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos.

a). DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN UN SISTEMA COORDENADO LINEAL.

Un sistema coordenado lineal consta de una recta $x \neq x$ con dirección positiva de izquierda a derecha y un punto fijo 0 como en la figura.



En la figura la distancia de 0 a A es la unidad. Estando P_2 a la derecha de 0, el segmento OP_2 es de longitud positiva. OP_1 tiene longitud negativa.

La distancia "d" de un segmento como en la figura es:

$$d = |P_1 P_2| = |x_2 - x_1| = |3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5$$

$$d = |P_2 P_1| = |x_1 - x_2| = |-2 - 3| = |-5| = 5$$

$$d = |5| = |-5| = 5$$

b). DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN UN PLANO CARTESIANO.

Un punto en un plano se representa por un par ordenado de números reales llamadas coordenadas (x, y) ; "x" es la abscisa y "y" es la ordenada.

c) DEDUCCIÓN DE LA FORMULA DE LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

En la figura, la distancia entre los puntos P_1 y P_2 se determina empleando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Semana 09:

GEOMETRIA ANALITICA

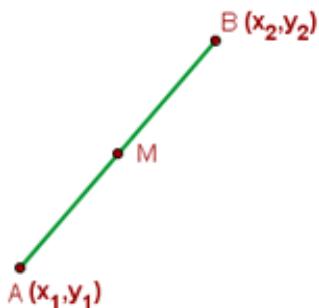
1. INTRODUCCION

A los conceptos ya conocidos de segmento de recta; en este curso, es necesario agregar que un segmento de recta tiene su "SENTIDO" o "DIRECCIÓN". Un segmento de recta es generado por un punto en movimiento desde una posición inicial (origen) hasta una posición final (extremo). El sentido de un segmento se registra con una flecha que señala hacia el punto final o extremo como en las figuras.

3. COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO EN EL PLANO

Si los puntos extremos extremos de un segmento son A y B:

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$



Las coordenadas del punto medio del segmento coinciden con la semisuma de las coordenadas de los puntos extremos.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y_M &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \Rightarrow M &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \end{aligned}$$

PROBLEMAS

1. Se tiene un triángulo ABC cuyas coordenadas de sus vértices son: A (1;0), B (11;8) y C (x;0). Si M es punto medio de \overline{AB} y la medida del ángulo agudo MCA es α ($\operatorname{tg} \alpha = 0,4$). Halle la suma de las coordenadas del baricentro del triángulo AMC.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

2. Halle la distancia entre los puntos A (3:-5); B (-1:-2).

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Halle las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son A(2:5) y B(-3:2)

A) $(\frac{-1}{2}; \frac{7}{2})$ B) $(\frac{1}{5}; \frac{4}{7})$ C) $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$
 D) $(\frac{1}{3}; \frac{3}{4})$ E) $(\frac{7}{2}; \frac{-3}{5})$

4. Calcula la distancia entre los puntos medios de los puntos A(5:0), B(7:4) y C(2:3), D(4:-1).

A) $\sqrt{20}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{13}$ } D) $\sqrt{10}$
 E) $\sqrt{5}$

5. El punto medio del segmento AB es M(2:3). Halla las coordenadas del punto A, si se sabe que B(-1:2)

A) (5:4) B) (5:3) C) (3:7)
 D) (4:7) E) (5:7)

6. Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles, si las coordenadas de la hipotenusa A y B son (3:4) y (9:12) respectivamente. Halle las coordenadas del tercer vértice.

A) (1:5) B) (12 :5) C) (3 :10)
 D) (10:5) E) (5:14)

7. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(5:4) y B(7:5).

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{8}$

8. Determina el ángulo de inclinación de una recta que pasa por los puntos A(-1:3) y B(7:9).

A) 75° B) 37° C) 45° D) 30° E) 60°

9. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 10 es el punto A (-3, 6); si la abscisa del otro extremo es (3), hallar su ordenada (dos soluciones).

10. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos A (3,1) y B (-1, 1); hallar las coordenadas del tercer vértice. dos soluciones.

TAREA.

1. Halla la distancia entre A y B en cada caso:

a. A(-7, 4), B(6, 4)
 b. A(3, 4), B(3, 9)
 c. A(-5, 11), B(0, -1)

2. Calcula el valor de k para que la distancia de A(-1, 4) a B(k , 1) sea igual a 5.

3. Halla las coordenadas de dos puntos tales que la distancia entre ellos sea igual a 4.

4. Calcula el perímetro de los siguientes triángulos y clasificalos según la longitud de sus lados:

a. A(-2, 2), B(1, 6), C(6, -6)
 b. A(-5, -2), B(0, 6), C(5, -2)

5. Hallar la distancia entre:

- a) A (5,2) y B (3,-2)
b) C (-1,-5) y D (3,-4)

2. Sean A,B,C Y D puntos colineales y consecutivos.
Si M es punto medio de AD, y se verifica que:
 $AB+CD=10m$ Y $BM-MC=2m$; calcular CD.

A) 6m B) 12 C) 8 D) 10 E) 16

3. Determinar el ángulo en el que se cumple que el CS + SC sea igual al suplemento de su triple.

A) 30° B) 36° C) 40° D) 45° E) 60°

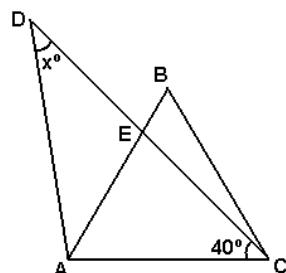
4. Si al suplemento de un ángulo se le resta el séxtuplo de su complemento resulta la mitad del valor del ángulo. Hallar el suplemento del suplemento del suplemento del complemento del complemento del complemento del ángulo.

A) 130° B) 160° C) 170° D) 175° E) 100°

5. En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza su altura BH, la bisectriz del Ángulo HBC corta a HC en F, sobre la prolongación de BF se toma un punto D. Calcular FD, si $m\angle ACB = 260$, $m\angle HDB = 290$ y $AB - AH = 10$.

A) 12 B) 15 C) 10 D) 16 E) 20

6. Según en el grafico, calcular $m\angle ADC$, si : AE=ED, $m\angle ACD = 40^\circ$ y el triángulo ABC es equilátero



A) 20° B) 10° C) 30° D) 40° E) 50°

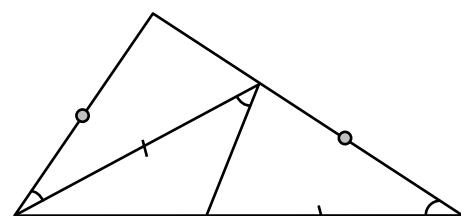
7. Calcular "x"

Semana 10:

MISCELANEA

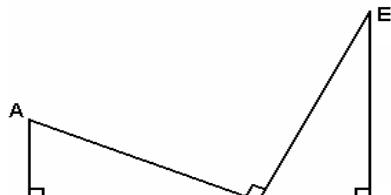
1. A, C, D y E, son puntos colineales y consecutivos tal que D sea punto medio CE y $AC + AE = 50$. Hallar AD.

A) 18m B) 25 C) 27 D) 33 E) 39



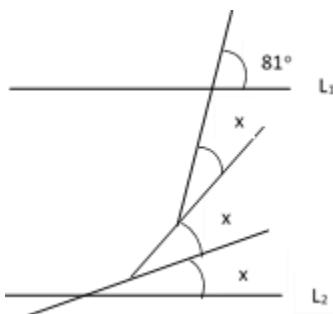
A) 10° B) 30° C) 20° D) 50° E) 40°

8. Si : $AC = EC$, $AB = 6$; $ED = 9$. Calcular BD



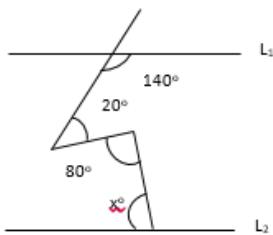
- A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

9. Si : $L_1 \parallel L_2$, Calcular X



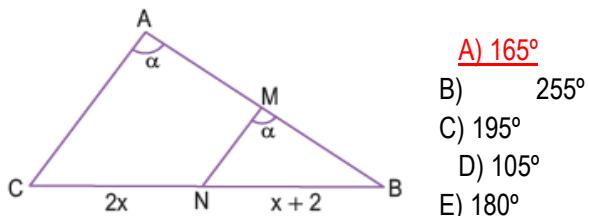
- A) 35° B) 35° C) 35° D) 35° E) 270

10. Si : $L_1 \parallel L_2$. Calcular x



- A) 65° B) 62° C) 80^o D) 70° E) 60°

11. Al sumar el ángulo interno de un hexágono regular con el ángulo externo de un octágono regular se obtiene:



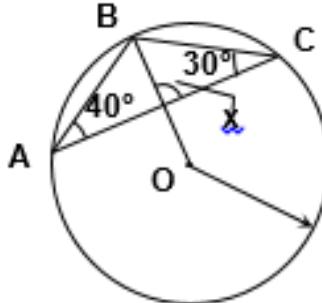
A) 165^o

- B) 255°
C) 195°
D) 105°
E) 180°

12. ¿Cuál es el número de lados del polígono convexo cuyo número de diagonales es mayor en 133 que su número de lados?

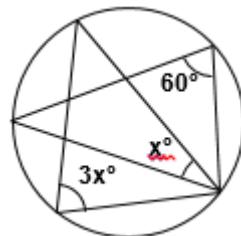
- A) 16 B) 23 C) 19 D) 24 E) 25

13. Del gráfico, calcular "x":



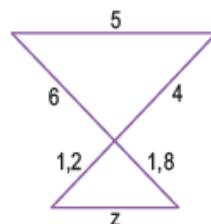
- A) 70°
B) 90°
C) 100^o
D) 110°
E) 120°

14. Del gráfico, calcular "x":



- A) 15° B) 20° C) 30^o D) 40° E) 36°

15. En la figura, calcule "Z".

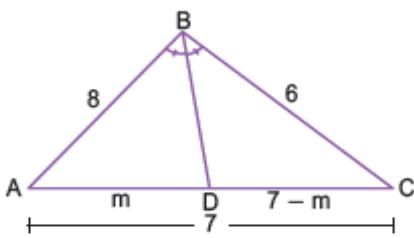


- A) 1,2 B) 1,5 C) 2 D) 1 E) 1,3

16. Calcula x , si $3(MB) = 2(AM)$.

- A) 4 B) 5 C) 4,5 D) 6 E) 5,5.

17. En un triángulo ABC; $3(AB) = 4(BC) = 24$ y $AC = 7$. Luego se traza la bisectriz interior BD, calcula $(AD - DC)$.

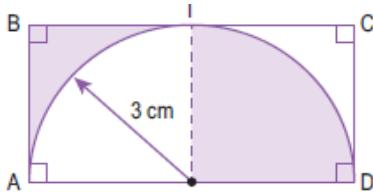


- A) 3 B) 4 C) 1 D) 6 E) 5

18. Halla el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 3 cm.

- A) 18 cm^2 B) 19 cm^2 C) 20 cm^2
D) 21 cm^2 E) 22 cm^2

19. Calcula el área de la región sombreada.



- A) $9\pi \text{ cm}^2$ B) 5 cm^2 C) 9 cm²
D) $5\pi \text{ cm}^2$ E) $6\pi \text{ cm}^2$

20. En un poliedro convexo, el número de caras, más el número de vértices, y más el número de aristas, es 28. Si las medidas de los ángulos en todas las caras suman 1800° . Halla el número de caras

- A) 2 B) 4 C) 8 D) 6 E) 5

PROPÓSITO:

Resolver problemas en el que se aplique el sistema de medidas angulares en situaciones diversas de la realidad.

PROPIEDADES:

Sistema sexagesimal o inglés (S)

Sistema centesimal o francés (C)

Sistema radial, circular o internacional (R)

Sabemos que: $180^\circ = 200^g = \pi \text{ rad}$

Entonces: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \dots \dots \text{Formula General}$

De donde podemos establecer las siguientes consideraciones:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \quad S = \frac{180R}{\pi} \quad C = \frac{200R}{\pi}$$

Observación:

$$\text{De: } \frac{S}{9} = \frac{C}{10} = K \Rightarrow \begin{cases} S = 9K \\ C = 10K \end{cases} \quad K = \frac{20R}{\pi}$$

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Exprese 180° en grados centesimales, y 45^g en grados sexagesimales.

a). $180^\circ = 180^\circ \left(\frac{10^g}{9^g}\right) = 200^g$

b). $45^g = 45^g \left(\frac{9^g}{10^g}\right) = \frac{405^g}{10} = 40,5^g$

2. Hallar $E = \frac{2^g}{1^g} + \frac{1^g}{1^m} + \frac{9^g}{5^g}; E = \frac{60'}{1'} + \frac{100m}{1^m} + \frac{10g}{5g}$

$$E = 120 + 100 + 2 = 222$$

3. Un ángulo positivo mide S° o C^g , calcular el valor simplificado de:

$$P = \sqrt[4]{\frac{C+S}{C-S}} - \sqrt[3]{\frac{C+S}{C-S}} + 8$$

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = K \rightarrow \begin{cases} S = 9K \\ C = 10K \end{cases}$$

Calculamos en forma particular:

$$\frac{C+S}{C-S} = \frac{10K+9K}{10K-9K} = \frac{19K}{K} = 19$$

Luego remplazamos en P y nos da $P=2$

4. Halla el ángulo en radianes que genera "el horario", en un reloj convencional, durante 20 minutos.

Solución:

*En 12 horas el horario es de $2\pi \text{ rad}$

* En 1 hora el horario es de $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$

$$\left. \begin{array}{l} 12 \text{ horas} \rightarrow 2\pi \text{ rad} \\ 1 \text{ hora} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

TRIGONOMETRIA

SEMANA 01

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

$$\left. \begin{array}{l} 60 \text{ minutos} \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ 20 \text{ minutos} \rightarrow y \end{array} \right\} y = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

5. Hallar: $a+b$ sabiendo que $\frac{\pi}{8} \text{ rad} = a^\circ b'$

Resolución: Equivalencia: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

$$\frac{\pi}{8} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{8} = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow 22,5^\circ = 22^\circ + 0,5^\circ = 22^\circ 30'$$

Luego: $\frac{\pi}{8} \text{ rad} = 22^\circ 30' = a^\circ b'$

Efectuando: $a=22$; $b=30$

Entonces: $a+b = 52$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN:

1. Si $27^\circ 27' <> \overline{3A^g} \overline{5B^m}$, halle el valor de: $2A+B$.

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

2. Seis veces el número de grados sexagesimales de un ángulo sumado a dos veces el números de sus grados centesimales es 222. ¿Hallar el número de radianes de dicho ángulo?

- A) $\frac{3\pi}{20}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{20}$ D) $2\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{2\pi}{20}$

3. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 36° y su diferencia es 20° ¿Cuál es el mayor?

- A) $\frac{\pi}{20} \text{ rad}$ B) $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$ C) $\frac{3\pi}{20} \text{ rad}$ D) $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$

4. Si la suma de dos ángulos es $\frac{4\pi}{9} \text{ rad}$ y su diferencia es 20° Calcular el mayor ángulo.

- A) 49° B) 31° C) 55° D) 44° E) 50°

5. Si un ángulo mide $\left(\frac{a^\circ a'}{a'}\right)' \left(\frac{a'' a'''}{a'''}\right)'''$ y se puede expresar como $x^\circ y' z''$, entonces al transformar a radianes $(x+2y+z)^\circ$ se obtiene.

- A) $\frac{\pi \text{ rad}}{30}$ B) $\frac{\pi \text{ rad}}{8}$ C) $\frac{\pi \text{ rad}}{20}$ D) $2\frac{\pi \text{ rad}}{8}$

6. Calcular: $E = \frac{\frac{\pi}{6} \text{ rad} + 110^\circ - 21^\circ}{20^\circ + \frac{\pi}{2} \text{ rad}}$

- A) 23/18 B) 18/23 C) 1 D) 13/9 E) 13

7. Si se cumple lo convencional reducir la expresión:

$$P = \frac{\pi^2(C-S)(C+S)}{380R^2}$$

- A) 10 B) 20 C) 40 D) 60 E) NA

8. Sabiendo que "S" y "C" son lo conocido para un mismo ángulo, no nulo, simplificar:

$$K = \sqrt{\frac{2C+S}{C-S} + 7}$$

- A) 10 B) 6 C) 40 D) 60 E) NA

9. Si se cumple lo convencional reducir la expresión:

$$K = \sqrt{\frac{2S-C}{C-S}}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) 3 C) 2 D) 4 E) NA

10. Calcular el valor de: $\sqrt{\frac{70^\circ - 18^\circ}{\frac{\pi}{4} \text{ rad} - 40^\circ}}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Convertir a sexagesimales y radianes la siguiente magnitud angular. $\alpha = 16^\circ$

2. Convertir $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$ a grados sexagesimales y centesimales.

3. Si: $46^\circ 21' <> A^g B^m$, calcular $A - B$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. Si: $\frac{7\pi}{64} \text{ rad} <> A^\circ B' C''$, calcular $\frac{A+B}{C}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. Si se cumple lo convencional reducir la expresión:

$$P = \sqrt{\frac{2C-S}{C-S} + 5}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. Siendo S, C y R lo convencional, donde:

$$S = X + 2; C = X + 4$$

Halle R. X.

- A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{20}$ D) $2\frac{\pi}{8}$

7. Calcular: U + N + O

Si: $22.22^\circ < U^\circ N' O''$

- A) 41 B) 42 C) 3 D) **47** E) 46

8. Un mismo ángulo es medido por 2 personas;

Juan → encontró $(x - 1)^\circ$

José → encontró $(x + 1)^\circ$

Calcular el número de radianes de éste ángulo.

- A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{45\pi}{8}$ C) $\frac{20\pi}{90}$ D) $32\frac{\pi}{8}$

9. En un cierto ángulo se cumple:

$\sqrt{S} + \sqrt{90C} = 33$, Calcular el suplemento del ángulo en radianes.

- A) $\frac{19\pi}{20}$ B) $\frac{45\pi}{20}$ C) $\frac{20\pi}{90}$ D) $32\frac{\pi}{8}$

10. Del gráfico; hallar "2x".

- A) 70°

- B) **160°**

- C) 90°

- D) 60°

- E) 75°

SEMANA 02

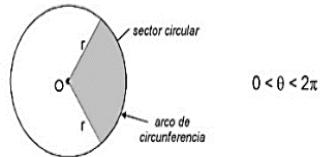
LONGITUD DE ARCO Y AREA DE SECTOR CIRCULAR

PROPOSITO:

Aplicar la medida en radianes de un ángulo para calcular la longitud de un arco y el área de un sector circular.

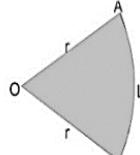
PROPIEDADES:

Sector circular:



$$0 < \theta < 2\pi$$

Longitud de arco y Área del sector circular

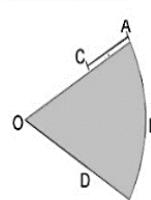


• L: Longitud de arco $\Rightarrow L = \theta r$

$$L = \theta r$$

• S: Área del sector circular $\Rightarrow S = \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}Lr = \frac{1}{2}L^2$

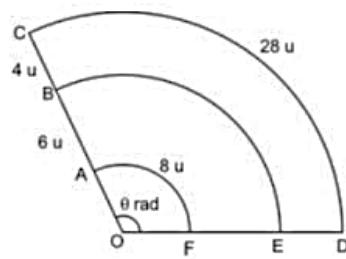
Trapecio circular:



• Área del trapecio circular $\Rightarrow S = \left(\frac{\ell+L}{2}\right)h$

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. En la figura AOF, BOE y COD son sectores circulares. Halle la longitud del arco BE.



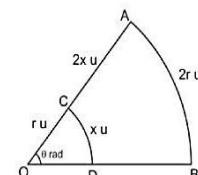
Solución: $28 = \theta(R + r)$, entonces
 $\rightarrow 10\theta + \theta R = 10\theta + 8$
 $\rightarrow 10\theta = 20$
 $\theta = 2\text{rad}$ y $R = 4u$

Luego: $L = \theta(R + r) = 20u$

2. Si AOB y COD son sectores circular es con centro en O, calcule el valor de $\frac{1-\theta^2}{\theta}$

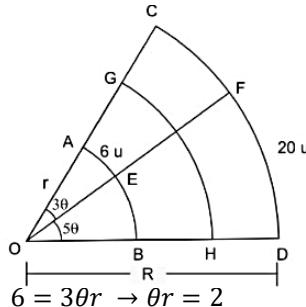
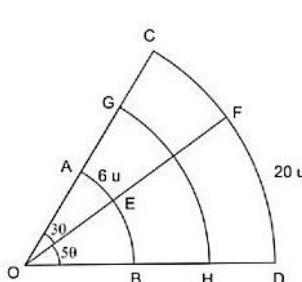
Solución:

$$\begin{aligned} \text{sea } & \theta r \text{ y } 2r = \theta(r + 2x) \\ \rightarrow \text{luego } & 2r = \theta r + 2\theta x \\ \rightarrow & 2r = \theta r + 2\theta(r) \\ \rightarrow & 2 = \theta + 2\theta^2 \\ \rightarrow & 2(1 - \theta^2) = 0 \\ \frac{1 - \theta^2}{\theta} & = 1/2. \end{aligned}$$



3. En la figura AOB, COD Y GOH son sectores circulares. Si AG=GC, determinar la longitud del arco GH.

Solución: Notemos



$$\rightarrow \text{luego Long. Arc EB} = 5\theta r = 10$$

$$\rightarrow 20 = 5\theta r \rightarrow 4 = \theta R$$

$$\rightarrow \text{Long. Arc. CF} = 3\theta R = 12$$

Finalmente la longitud del arco GH

$$\text{es } \frac{16 + 32}{2} = 24u$$

4. La longitud de arco de un sector circular es 16π cm. Calcule el radio del sector circular

Si: $3\sqrt{\frac{R}{\pi}} + 2\sqrt{\frac{\pi}{R}} = 5$, donde R representa la medida del menor ángulo α en radianes.

Resolución:

$$\rightarrow \text{sea } X = \sqrt{\frac{R}{\pi}}, \text{ entonces } 3x + \frac{2}{x} = 5$$

$$\text{luego } 3x^2 - 5x + 2 = 0, \quad x = 2/3$$

$$\text{Luego } R = \frac{4\pi}{9} \text{ rad}$$

$$\text{Por lo tanto, } 16\pi = \frac{4\pi}{9}r \rightarrow r = 36 \text{ cm}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN:

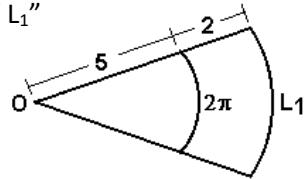
1. Calcular el radio de una circunferencia tal que un arco de 15cm de longitud subtiente un ángulo central de 3 rad.

A) 1cm B) 3cm C) 5cm D) 4cm E) 6cm

2. Calcular la longitud de arco en un sector circular cuyo ángulo central mide 40° y el radio es de 15 cm.

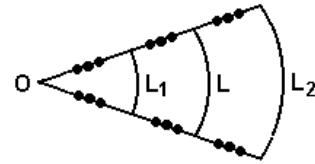
A) $\frac{10\pi}{3}$ B) $\frac{45\pi}{20}$ C) $\frac{20\pi}{90}$ D) $32\frac{\pi}{8}$

3. Del gráfico calcular "L₁"



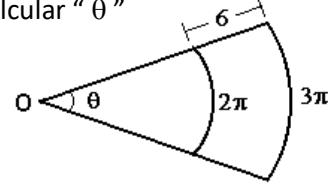
A) $\frac{19\pi}{20}$ B) $\frac{14\pi}{5}$ C) $\frac{20\pi}{90}$ D) $32\frac{\pi}{8}$

4. Del gráfico; calcular "L"; si: $L_1 + L_2 = 6\pi$



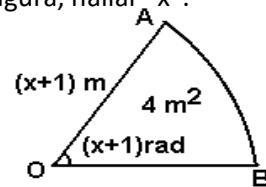
A) 3π B) $\frac{45\pi}{20}$ C) $\frac{\pi}{90}$ D) $32\frac{\pi}{8}$

5. Del gráfico; calcular " θ "



A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{20}$ C) $\frac{\pi}{90}$ D) $\frac{\pi}{8}$

6. A partir de la figura, hallar "x".



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

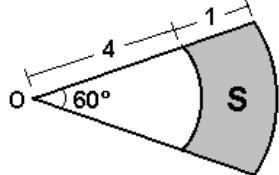
7. En un sector circular, el ángulo central mide 54° y el arco correspondiente mide 6cm. ¿Cuál es la longitud del radio de dicho sector?

A) $\frac{20\pi}{3}$ B) $\frac{20}{\pi}$ C) $\frac{30}{\pi}$ D) $\frac{40}{\pi}$

8. En un sector circular, el ángulo central mide 30° y el arco correspondiente mide 9π . ¿Cuánto mide el radio del sector?

- A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 60

9. Del gráfico mostrado, calcular el área de la región sombreada.



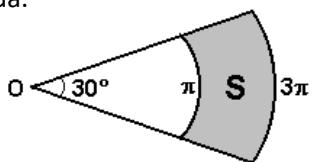
- A) $\frac{2\pi}{9}$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{10\pi}{90}$ D) $32\frac{\pi}{8}$

10. Las áreas de un sector circular y la región encerrada por un cuadrado son iguales y además de igual perímetro; determine el número de radianes del ángulo central de dicho sector.

- A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) 5

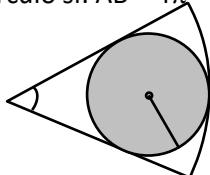
EJERCICIOS DOMICILIARIOS

1. Del gráfico calcular el área de la región sombreada.



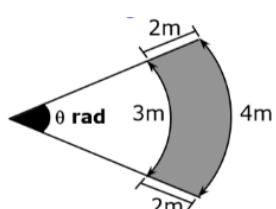
- A) 24π B) 25π C) 26π D) 27π

2. Calcular el área del círculo si: $AB = 4\pi$



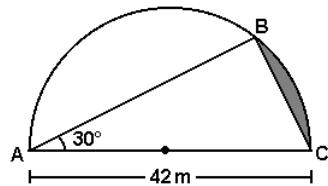
- A) $24\pi u^2$ B) $16\pi u^2$ C) $26\pi u^2$ D) $27\pi u^2$

3. A un alumno se le pide calcular el área de un sector circular cuyo ángulo central es x° , pero al aplicar la fórmula escribe "x" rad obteniendo un área de valor "M", si el área correcta es "N". ¿A que es igual N/M ?



- A) $\frac{\pi}{60}$ B) $\frac{\pi}{200}$ C) $\frac{\pi}{90}$ D) $\frac{\pi}{180}$

4. Hallar el perímetro de la región: ($\pi=22/7$)

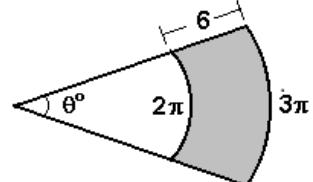


- A) 43 B) 42 C) 23 D) 44 E) 45

5. Se tiene un sector circular de ángulo central 36° . ¿Cuánto hay que aumentar al ángulo central de dicho sector para que su área no varíe si su radio disminuye en un cuarto del anterior.

- A) 49° B) 31° C) 55° D) 44° E) 28°

6. Del gráfico mostrado calcular el área de la región sombreada.



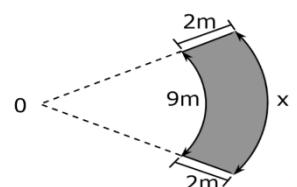
- A) 15π B) 25π C) 26π D) 27π

7. Determine el perímetro de un sector circular AOB cuyo radio tiene por longitud 4m, y la amplitud del ángulo es 0,5 radianes.

- A) 11m B) 21m C) 10m D) 4m E) 5m

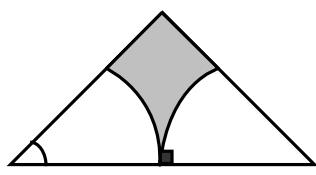
8. Calcular el valor del área del trapecio, y encontrar la medida del ángulo central en la figura mostrada.

9. Hallar "x" si el área del trapecio circular es 21 metros cuadrados.



- A) 11m B) 21m C) 10m D) 4m E) 5m

10. Calcule el área de la región sombreada si $BH = 1$. Dato: Triángulo ABC es rectángulo



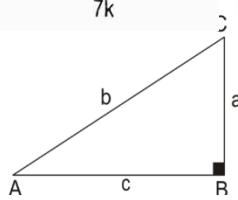
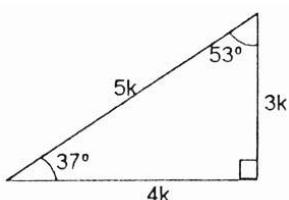
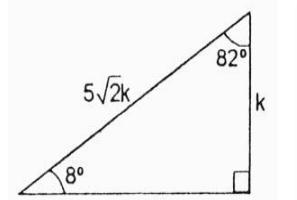
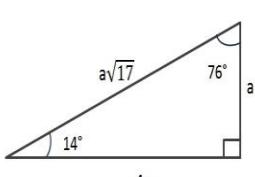
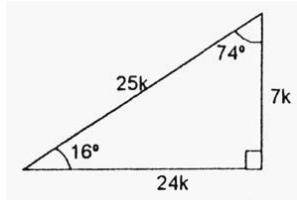
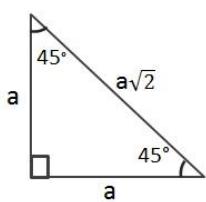
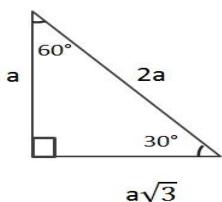
- A) $\frac{4 - \pi}{4}$ B) $\frac{4 - \pi}{2}$ C) $\frac{4 - \pi}{8}$ D) $\frac{4 - \pi}{6}$

SEMANA 03

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS NOTABLES Y AGUDOS

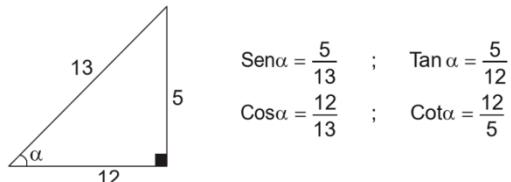
PROPOSITO:

Analizar y comprender la definición de las razones trigonométricas de ángulos agudos, aplicándolos a casos de la vida práctica.



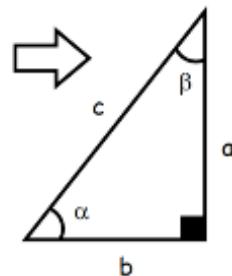
a y c : catetos
b : hipotenusa
 \widehat{B} : \neq recto
 \widehat{A} y \widehat{C} : \neq s agudos

$\text{Sen}A = \frac{CO}{H} = \frac{a}{b}$	$\text{Csc}A = \frac{H}{CO} = \frac{b}{a}$
$\text{Cos}A = \frac{CA}{H} = \frac{c}{b}$	$\text{Sec}A = \frac{H}{CA} = \frac{b}{c}$
$\text{Tan}A = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{c}$	$\text{Cot}A = \frac{CA}{CO} = \frac{c}{a}$



Si: α y β son dos ángulos complementarios, siempre se cumple que:

$\text{sen}\alpha = \cos\beta$
$\text{tg}\alpha = \text{ctg}\beta$
$\text{seca} = \csc\beta$



Es decir: $\alpha + \beta = 90^\circ$

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Resolver el menor valor positivo de "x" verifique: $\text{Sen}5x = \text{Cos}x$

Solución:

Dada la ecuación: $\text{Sen}5x = \text{Cos}x$

Luego los ángulos deben sumar 90° , entonces:
 $5x + x = 90^\circ \rightarrow 6x = 90^\circ \rightarrow x = 15^\circ$

2. Hallar "x" en $\text{Sec}x \cdot \text{Sec}x = 4$

Solución:

$\text{Sec}x \cdot \text{Sec}x = 4$; $\text{Sec}x \cdot \text{Sec}x = 2.2$

$\text{Sec } x = \frac{2}{1} = \frac{H}{CA}$ Como la Sec x es igual a $\frac{CA}{H}$; observamos el triángulo rectángulo entonces $\text{sec}60^\circ = 2$.

3. Resolver "x" el menor positivo que verifique: $\text{Sen}3x - \text{Cos}y = 0$; $\text{Tg}2y \cdot \text{Ctg}30^\circ - 1 = 0$

Solución:

Nótese que el sistema planteado es equivalente a:

$\text{Sen}3x = \text{Cos}y \Rightarrow 3x + y = 90^\circ$ (R.T. complementarios)

$\text{Tg}2y \cdot \text{Ctg}30^\circ = 1 \Rightarrow 2y = 30^\circ$ (R.T. recíprocas)

$y = 15^\circ$. Reemplazando en la primera igualdad:

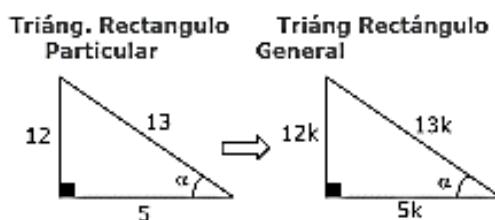
$$3x + 15^\circ = 90^\circ \rightarrow 3x = 75^\circ \rightarrow x = 25^\circ$$

4. Calcular el cateto de un triángulo rectángulo de 330m de perímetro, si la tangente de uno de sus ángulos agudos es 2,4.

Resolución:

a) Sea " α " un ángulo agudo del triángulo que cumpla con la condición:
 $\operatorname{tg} \alpha = 2,4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$; Ubicamos " α " en un triángulo rectángulo, cuya relación de catetos guardan la relación de 12 a 5. La hipotenusa se calcula por pitágoras.

- b) El perímetro del triángulo es: Según la figura:
 $5k + 12k + 13k = 30k$; Según dato del enunciado = 330m Luego: $30k = 330 \rightarrow k = 11m$



- c) La pregunta es calcular la longitud del menor cateto es decir: Cateto menor = $5k = 5.11m = 55m$

5. Calcular: $F = \frac{4\operatorname{Sen}30^\circ + \sqrt{3}\operatorname{Tg}60^\circ}{10\operatorname{Cos}37^\circ + \sqrt{2}\operatorname{Sec}45^\circ}$

Resolución:

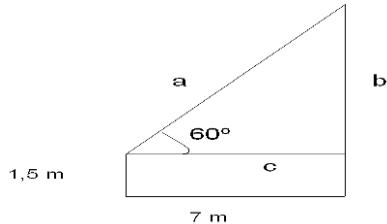
Según la tabla mostrada notamos:

$$F = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1}}{10 \cdot \frac{4}{5} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1}} = \frac{2 + 3}{8 + 2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

6. Calcula la altura de la torre si nuestro personaje está a 7 m de la base de la torre, el ángulo con el que está observando la cúspide es de 60° y sostiene el artilugio a una altura de 1,5 m.



Solución: Para comenzar, vamos a hacer un dibujo que aclare un poco la situación poniendo los datos que conocemos.



Si nos fijamos en el triángulo, el lado c mide 7 m y una vez que tengamos calculado el lado b, para calcular la altura de la torre sólo tendremos que sumarle los 1,5 m. Así pues, vamos a calcular el lado b.

Para el ángulo 60° , el lado que conozco es el cateto contiguo y el que quiero calcular es el cateto opuesto, así pues planteo la tangente de 60° .

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{7} \rightarrow b = 7 \operatorname{tg} 60^\circ = 7 * 1.73 = 12.11m$$

Por tanto la altura de la torre es:

$$12.11m + 1.5m = 13.61m$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Si " θ " es la medida de un ángulo agudo y se cumple que: $\operatorname{Tg} \theta = \frac{2}{3}$; calcular:
 $T = \sqrt{13} \operatorname{Sen} \theta + 12 \operatorname{Ctg} \theta$.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

2. En un triángulo rectángulo ABC recto en "C" se cumple que: $4 \operatorname{Sen} A = 7 \operatorname{Sen} B$.

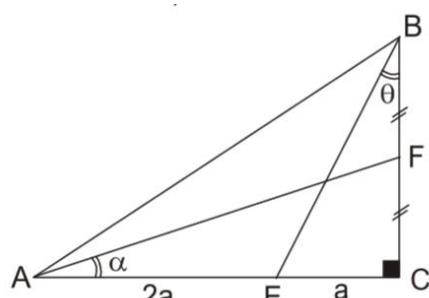
Calcular: $E = 65 \operatorname{Sen}^2 A - 42 \operatorname{Tg} B$

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

3. El perímetro de un triángulo rectángulo es 150u y la cosecante de uno de los ángulos agudos es 2,6. Calcular la longitud del mayor cateto.

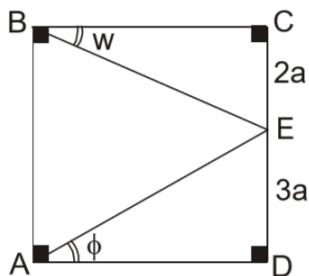
A) 20u B) 30u C) 40u D) 50u E) 60u

4. Del gráfico mostrado, calcular: " $\operatorname{Cot} \alpha \cdot \operatorname{Cot} \theta$ "



A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 3/2

5. Del gráfico mostrado, calcular: "TgØ - Tgw", si: ABCD es un cuadrado.



- A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,4 E) 0,5
6. Si se cumple que: $\operatorname{Sen}2x=\operatorname{Cos}3x$ para "x" agudo, calcular: $E=4\operatorname{Tg}(2x+1^\circ)+3\operatorname{Tg}(3x-1^\circ)$.

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9
7. Si: $13 \cos x - 12 = 0$; $0^\circ < x < 90^\circ$.

Calcular $A = \csc x + \operatorname{ctg} x$.

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

8. Para que el ángulo "x" es;

$$\operatorname{Cos}(60^\circ-x) = \operatorname{Sen}(70^\circ-3x).$$

- A) 11° B) 13° C) 14° D) 9° E) 10°

9. Si $\frac{\operatorname{Tg}A+1}{\operatorname{Tg}A-1} = 2$; $0^\circ < A < 90^\circ$

$$\text{Calcular } N = 6\operatorname{Ctg} A + \sqrt{40}\operatorname{Cos} A$$

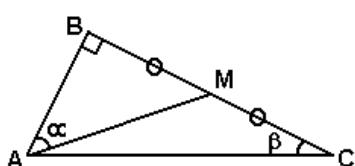
- A) 4 B) 6 C) 5 D) 18 E) 9

10. Dado: $\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, Calcular: $1 + \operatorname{sec}^2 x$

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{5}{2}$

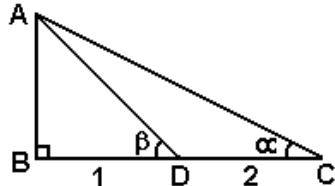
EJERCICIOS DOMICILIARIOS

1. Del gráfico; calcular: $L = \tan\alpha \cdot \tan\beta$



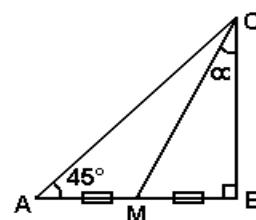
- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{2}$

2. Del gráfico; calcular: $L = \tan\alpha \cdot \cot\beta$



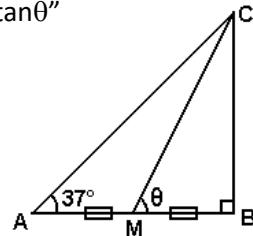
- A) $1/3$ B) 3 C) 2 D) $1/2$ E) 15

3. Del gráfico mostrado, calcular "Tgα".



- A) $1/3$ B) 3 C) 2 D) $1/2$ E) 15

4. Del gráfico, calcular "tanθ"



- A) $3/2$ B) 3 C) 2 D) $1/2$ E) 15

5. Siendo "α" un ángulo agudo donde se cumple: $\operatorname{Tg}3\alpha \cdot \operatorname{ctg}(2\alpha + 10^\circ) = \operatorname{sen}50^\circ \cdot \operatorname{sec}40^\circ$

Calcular: $A = 1 + \operatorname{Tag}3\alpha \cdot \operatorname{Tang}4\alpha \cdot \operatorname{Tag}5\alpha \cdot \operatorname{Tag}6\alpha$

- A) 2 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6. En un triángulo rectángulo se cumple que la diferencia de las medidas de la hipotenusa con uno de los catetos es $8u$ y con el otro es $9u$. Calcular el valor de la tangente del mayor ángulo de dicho triángulo.

- A) $21/20$ B) $21/19$ C) 7 D) $5/8$ E) 9

7. Calcular el perímetro de un triángulo RST, sabiendo que el valor de la tangente del ángulo opuesto al lado ST es 2,4 y el de la cotangente del ángulo opuesto al lado RS es 0,75, además RT mide 42cm.

- A) 120cm B) 124cm C) 125cm **D) 126cm** E) 100cm

8. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se trazan las medianas BM y CN de tal manera que dichos segmentos se intersectan formando un ángulo de 90° . Calcular el valor del Seno de A. ($a < b$)

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

9. Si se cumple que: $\text{Sen}(3x-17^\circ) \cdot \text{Csc}(x+13^\circ) = 1$

Calcular: $E = \text{Csc}2x + \text{Cot}3x + \text{Sec}4x$

- A) 5** B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 338 m. Si la tangente de uno de los ángulos agudos es 2,4. ¿Cuánto mide el cateto menor?

- A) 13m B) 33,8m C) 50m **D) 56,33m** E) 55m

SEMANA 04

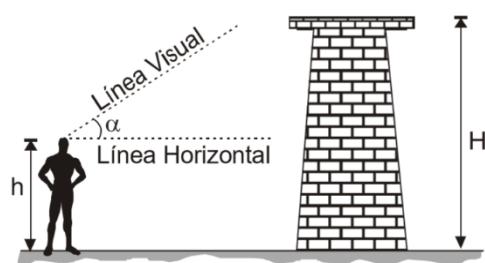
ANGULOS DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN

PROPOSITO:

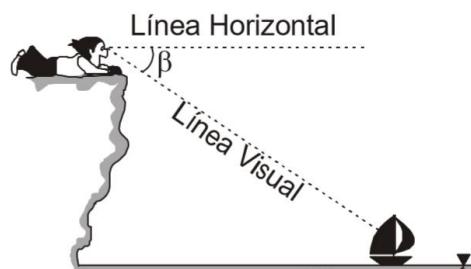
Aplicar los triángulos rectángulos en casos de nuestra vida cotidiana.

MARCO TEÓRICO

Ángulos de elevación y depresión.- son aquellos formados por la horizontal, considerada a nivel del ojo del observador y la línea de mira, según que el objeto observado este por sobre o bajo esta última.



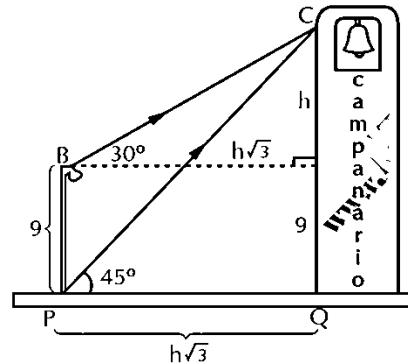
α : Ángulo de Elevación



β : Ángulo de Depresión

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Desde el pie de un poste, se observa la parte más alta de un campanario con ángulo de 45° ; si desde la parte superior del poste, que tiene 9m de altura, el ángulo de elevación es altura de 30° , ¿cuál es la altura del campanario?



$$\triangle PCQ: h = h\sqrt{3} + 9 \Rightarrow h = \frac{9}{\sqrt{3} - 1}$$

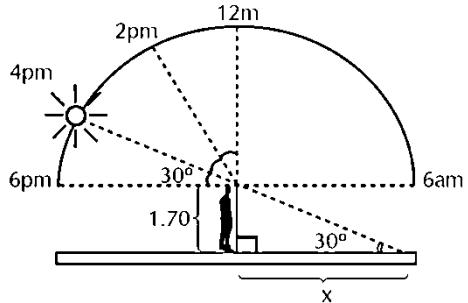
$$\text{Altura del campanario} = h + 9$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3} - 1} + 9$$

$$\text{Altura de campanario} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

2. Un hombre mide 1,70m de estatura y observa su sombra a las 4 de la tarde. Asumiendo que amanece a las 6.00 am y que el sol hace un semicírculo sobre el hombre, ¿cuánto mide su sombra?

Resolviendo



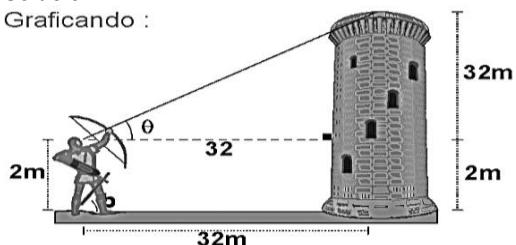
Longitud de la sombra: x

$$\text{Tenemos: } \frac{x}{1.70} = \cot 30^\circ = \sqrt{3} = 1.73 \\ \therefore x = 2.94$$

3. Una persona de 2 metros de estatura, ubicada a 32 metros de una torre de 34 metros de altura, divisa la parte más alta con un ángulo de elevación de:

Solución:

Graficando :

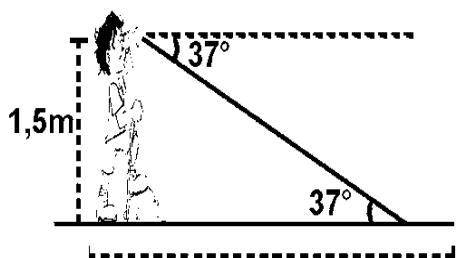


$$\text{Se deduce que: } \operatorname{tg} \theta^\circ = \frac{32}{32} \rightarrow \operatorname{tg} \theta^\circ = 1 \rightarrow \theta = 45^\circ$$

4. Un niño de 1,5 de altura divisa una piedra en el suelo con un anillo de depresión de 37° . ¿A qué distancia del niño se encuentra la piedra?

Solución:

Como se forma un triángulo rectángulo decimos:

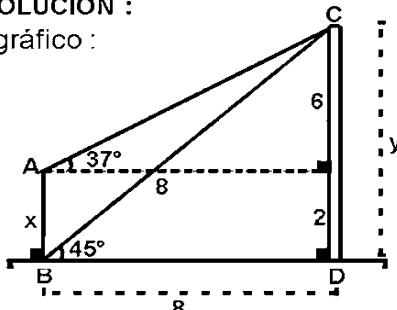


$$1.5 = 3a \rightarrow a = 0.5 \text{ (proporción ya conocida)} \\ x = 4a = 4 * 0.5 \rightarrow x = 2m.$$

5. Desde lo alto y bajo de un muro se observa lo alto de un poste con ángulo de elevación de 37° y 45° respectivamente, si la distancia entre muro y poste es de 8m, halle la suma de las alturas.

RESOLUCIÓN :

Del gráfico :



$$\triangle BDC: BD = 8 \Rightarrow DC = y = 8 \\ AH = BD = 8 \\ \triangle AHC: AH = 8 \Rightarrow HC = 6 \wedge HD = 2 \\ BA = HD \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x + y = 10m$$

EJERCICIOS DOMICILIARIOS

1. Desde un punto de tierra se observa lo alto de un edificio con ángulo de elevación 37° , si la visual mide 30 m, determinar la altura de edificio.

A) 3 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

02. Una persona de 2 m de estatura divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación de 45° . Si la altura del poste es de 20 m. ¿A qué distancia de él se halla la persona?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 32

03. Desde un punto ubicado a 24 m de una torre, se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación de 53° . ¿Cuál es la altura de la torre?

A) 24 B) 36 C) 32 D) 42 E) 48

04. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación de 37° . Si la altura del poste es de 30 m. ¿A qué distancia del poste se encuentra el punto de observación?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

05. Desde dos puntos separados 42 m se observa la parte alta de un farol que se encuentra entre ellos con ángulos de elevación 37° y 45° . Determinar la altura del farol.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

06. Desde un muro de 6 m de altura se observa la parte alta y baja un poste con ángulos de elevación y depresión 60° y 30° respectivamente. Determine la altura del poste.

- A) 15 **B) 24** C) 30 D) 36 E) 48

07. Desde un punto en tierra se ve lo alto de una torre con un ángulo de elevación " θ " ($Tg\theta=1/4$). ¿A qué distancia de la torre se halla el punto de observación, si la altura de la torre es 7 m?

- A) 14 **B) 28** C) 56 D) 21 E) N.A.

08. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación de 37° . Si nos acercamos una distancia igual a la altura del poste, el ángulo de elevación es " θ ". Calcular: " $Tg\theta$ ".

- A) 1 B) 2 **C) 3** D) 4 E) 6

09. Desde un punto ubicado a 15 m de un poste se ve su parte más alta con un ángulo de elevación de 53° . Caminamos 3 m en dirección al poste y el ángulo de elevación para su parte más alta es " θ ". Calcular: " $Ctg\theta$ ".

- A) 1** B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

10. Una hormiga observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 37° , luego se acerca 7 m y observa el mismo punto con un ángulo de elevación de 53° . Calcular la altura del árbol.

- A) 10 **B) 12** C) 14 D) 16 E) 20

EJERCICIOS DOMICILIARIOS

1. Calcular la altura de un árbol en el momento que el sol proyecta con el árbol un ángulo de 30° y su sombra mide 18m.

- A) 12 m B) 14 m C) 15 m **D) 10,38 m** E) 10,28 m

2. Un reflector en la plaza de Pucallpa situado al ras del suelo ilumina un monumento bajo un árbol de 30° , si trasladamos el reflector a 2m más cerca del monumento, éste se ve bajo un ángulo de 45° , calcular la altura del monumento.

A) $(\sqrt{3} + 1)m$ B) $(\sqrt{2} + 1)m$

C) $(\sqrt{3} + 6)m$ D) $(\sqrt{3} - 1)m$

3. Un asta de bandera está clavada verticalmente en lo alto de un edificio, a 6m de distancia de la base del edificio, los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio de 60° y 30° respectivamente. Hállese la longitud del asta.

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ **D) $4\sqrt{3}$**

4. Desde lo alto de un acantilado de 54m de altura una persona observa a dos barcos que están en el mar y en una misma dirección de la persona, con ángulos de depresión de 60° y 45° respectivamente. Hallar la distancia entre los barcos.

A) $20\sqrt{3}m$ **B) $18(3 - \sqrt{3})m$**

C) $17(3 - \sqrt{3})m$ D) $18(3 - \sqrt{2})m$

5. Dos aviones se dirigen al aeropuerto de Pucallpa desde direcciones opuestas y a una misma altura. El piloto informa que está a 25Km de la torre con un ángulo de elevación 37° ; el piloto B informa que está a 30Km de la torre. Cuál es su ángulo de elevación.

A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 60°

6. Una torre está al pie de una colina cuya inclinación respecto al plano horizontal es de 15° . Una persona se encuentra en la colina a 12m de la base de la torre y observa la parte más alta de ésta con un ángulo de elevación de 45° . Cuál es la altura de la torre.

A) $8\sqrt{3}m$ B) $2\sqrt{3}m$ C) $3\sqrt{3}$ **D) $6\sqrt{6}m$**
E) $10\sqrt{3}m$

7. Un niño ubicado en la orilla de un río observa un árbol plantado sobre la ribera opuesta bajo un ángulo de 60° , se aleja 40m y este ángulo mide 30° . Cuál es la altura del árbol.

A) $20\sqrt{3}m$ B) $12\sqrt{3}m$ C) $13\sqrt{3}$

D) $9\sqrt{6}m$ E) $10\sqrt{3}m$

8. Desde un punto situado a 80m, medidos sobre una horizontal del pie de un edificio, el ángulo de elevación es de 60° , hallar la altura del edificio.

A) $40\sqrt{3}m$ B) $25\sqrt{3}m$ C) $80\sqrt{3}m$

D) $30\sqrt{6}m$ E) $33\sqrt{3}m$

9. Cuando observamos una torre desde un punto situado 2m, más que su altura, el ángulo de elevación es " α " pero si observamos de otro punto distante 2m, menos que su altura, el ángulo de elevación es de " 2α ". Calcular la altura de la torre.

A) $20\sqrt{3}m$ B) $(1 + \sqrt{7})m$ C)
 $(3 - \sqrt{3})m$

D) $(3 + \sqrt{2})m$ E) $(2 + \sqrt{3})m$

10. Un hombre que mide 1.70 de estatura observa su sombra a las 4:00 p.m de la tarde, asumiendo que amanece a las 6 a.m y que el sol hace un círculo sobre el hombre. Cuánto mide su sombra.

A) 1.54m B) 1.67m C) 2.00m D) 2.55m E) **2.94m**

11. Una torre de 15m de altura está en el borde de un acantilado. Desde un punto del plano horizontal que pasa por la base del acantilado, las elevaciones angulares de las partes superior e inferior de la torre, se observa que son " α " y " β ", siendo $\operatorname{tg}\alpha=1,26$ y $\operatorname{tg}\beta=1,185$. Hállese la altura del acantilado.

a) 227m b) **237m** c) 247m d) 257m e) 273m

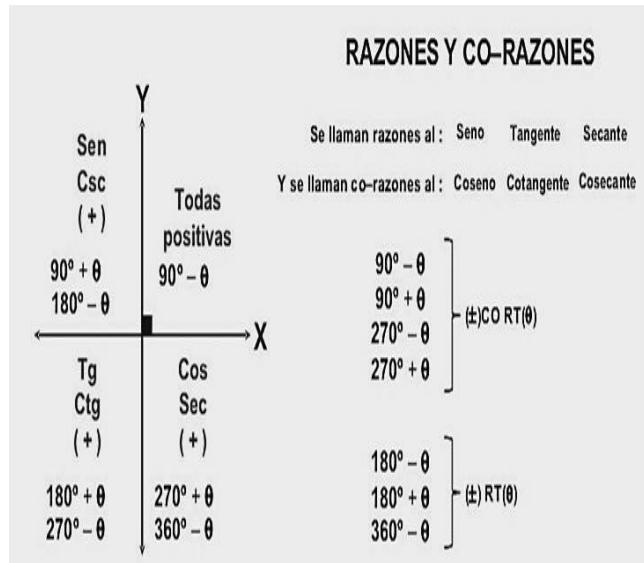
SEMANA 05

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

PROPÓSITO:

Comprender las identidades trigonométricas básicas, reconociendo las formas alternativas de cada una y empleándolas en la comprobación de diversas identidades.

MARCO TEÓRICO



CASOS

- I. Ángulos cuyas medidas están en $<90^\circ ; 360^\circ>$: En este caso, el ángulo original " α " se descompone como la suma o resta de un ángulo cuadrantal (90° ; 180° ; 270° ; 360°) con un ángulo que sea agudo; para luego aplicar :

$$RT(\alpha) = R^+ \begin{cases} 180 \pm \sigma \\ 360 - \sigma \end{cases} = \pm R.T.(\sigma)$$

$$R^+ \begin{cases} 90 + \sigma \\ 220 \pm \sigma \end{cases} = \pm Co - R.T.(\sigma)$$

Donde el signo (\pm) que deberá anteponerse al resultado dependerá del cuadrante al que pertenezca el ángulo original " α ".

Por ejemplo; calculemos:

$$\begin{aligned} * \quad \underbrace{\sin 120^\circ}_{(+)} &= \sin(90^\circ + 30^\circ) = +\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ * \quad \underbrace{\cos 120^\circ}_{(-)} &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ * \quad \underbrace{\tan 240^\circ}_{(+)} &= \tan(270^\circ - 30^\circ) = +\cot 30^\circ = \sqrt{3} \\ * \quad \underbrace{\csc 330^\circ}_{(-)} &= \csc(360^\circ - 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2 \end{aligned}$$

II. Ángulo cuya medida es mayor que 360° : En este caso, se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{R.T. } (\alpha) = \text{R.T. } (\theta) ; \text{ donde } \alpha \mid 360^\circ \atop \theta \qquad \text{Residuo}}$$

Por ejemplo, calculemos:

$$\begin{aligned} * \quad \underbrace{\sin 2580^\circ}_{2520^\circ \atop 60^\circ} &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & * \quad \underbrace{\tan 3285^\circ}_{3240^\circ \atop 45^\circ} &= \tan 45^\circ = 1 \\ 2580^\circ \mid 360^\circ \atop 7 && 3285^\circ \mid 360^\circ \atop 9 & \\ * \quad \underbrace{\sec 1200^\circ}_{1200^\circ \atop 1080^\circ} &= \sec(90^\circ + 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2 & \end{aligned}$$

III. Ángulos de medida negativa: Se procede de la siguiente manera:

$\sin(-x) = -\sin x$	$\csc(-x) = -\csc x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\sec(-x) = \sec x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\cot(-x) = -\cot x$

Por ejemplo, calculemos:

$$\begin{aligned} * \quad \underbrace{\sin(-45^\circ)}_{(-)} &= -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ * \quad \underbrace{\cos(-60^\circ)}_{(-)} &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ * \quad \underbrace{\tan(-120^\circ)}_{(-)} &= -\tan 120^\circ = -\tan(90^\circ + 30^\circ) = -(-\cot 30^\circ) = \sqrt{3} \\ * \quad \underbrace{\cos(-200^\circ)}_{(-)} &= \cos 200^\circ \end{aligned}$$

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Reducir al primer cuadrante: $\cos 4910^\circ$

Solución:

Dividimos entre 360° , entonces nos queda 230° de residuo, luego: $\cos 230^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ)$
Entonces: $\cos 4910^\circ = -\cos 50^\circ$

EJERCICIO 1 :

Reduzca al primer cuadrante: **Sen 110°**

RESOLUCIÓN:

$$\sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) \Rightarrow ? \sin 70^\circ$$

A continuación, el signo se consigue a partir del siguiente hecho:

$$110^\circ \in \text{IIC} \Rightarrow \sin 110^\circ = (+)$$

$$\rightarrow \sin 110^\circ = + \sin 70^\circ$$

ángulos

EJERCICIO 2 :

Calcule:

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 179^\circ + \cos 180^\circ$$

RESOLUCIÓN:

Aplicando lo visto en la teoría sobre ángulos suplementarios, tendremos:

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \underbrace{\cos 178^\circ}_{\cos 2^\circ} + \underbrace{\cos 179^\circ}_{\cos 1^\circ} + \cos 180^\circ$$

Luego de hacer las simplificaciones indicadas, tendremos:

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots - \cos 2^\circ - \cos 1^\circ - 1 = -1$$

EJEMPLO 3 :

Calcular : **Sen 750°**

RESOLUCIÓN:

$$750^\circ \mid 360^\circ \rightarrow \sin 750^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$30^\circ \quad 2$$

EJEMPLO 4 :

Calcular : **Cos 540°**

RESOLUCIÓN :

$$540^\circ \mid 360^\circ \rightarrow \cos 540^\circ = \cos 180^\circ = -1$$

$$180^\circ \quad 1$$

Reducza al primer cuadrante:

$$\text{I) } \sin 1990^\circ \quad \text{II) } \tan 5555^\circ$$

RESOLUCIÓN:

I) Dividimos 1990° entre 360° para obtener el número de vueltas que tiene el ángulo

$$\sin 1990^\circ = \sin 190^\circ$$

$$= \sin(180^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

II) Dividimos 5555° entre 360° para obtener el número de vueltas que tiene el ángulo .

$$\tan 5555^\circ = \tan 155^\circ$$

$$= \tan(180^\circ - 25^\circ) = -\tan 25^\circ$$

EJERCICIO 5:

EJEMPLO 3 :Calcular : $\operatorname{Sen} 750^\circ$ **RESOLUCIÓN :**

$$\begin{array}{rcl} 750^\circ & | 360^\circ \Rightarrow \operatorname{Sen} 750^\circ = \operatorname{Sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \\ 30^\circ & 2 \end{array}$$

EJEMPLO 4 :Calcular : $\operatorname{Cos} 540^\circ$ **RESOLUCIÓN :**

$$\begin{array}{rcl} 540^\circ & | 360^\circ \Rightarrow \operatorname{Cos} 540^\circ = \operatorname{Cos} 180^\circ = -1 \\ 180^\circ & 1 \end{array}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Sean α y β las medidas de dos ángulos complementarios en un triángulo.

$$\text{Si } \operatorname{Cos}\beta = \frac{\operatorname{Sen}(90^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{Cos}(90^\circ - \beta)}{\operatorname{Sen}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\alpha},$$

Calcular $\operatorname{Tg}^2\alpha$.

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

2. Simplificar: $16\operatorname{Tg}^2 397^\circ - 9\operatorname{Sec}^4 210^\circ - (2\operatorname{Ctg} 315^\circ)^3$

- A) 0 B) 1 C) -10 D) -13 E) -24

3. Calcular el valor de

$$M = \frac{\operatorname{Sen} 1^\circ + \operatorname{Sen} 2^\circ + \dots + \operatorname{Sen} 89^\circ}{\operatorname{Cos} 1^\circ + \operatorname{Cos} 2^\circ + \dots + \operatorname{Cos} 89^\circ}$$

- A) $\frac{1}{8}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{2}{5}$ E) 5

4. Para un ángulo β se cumple:

$$\operatorname{Cos}(60^\circ - \beta) = \operatorname{Sen}(70^\circ - 3\beta)$$

- A) 15° B) 35° C) 10° D) 20° E) 25°

5. La simplificación de

$$M = \frac{\operatorname{Sen}(180+x)}{\operatorname{Cos}(90+x)} + \frac{\operatorname{Tg}(180-x)}{\operatorname{Ctg}(270+x)}$$

- A) 2 B) 7 C) 6 D) 8 E) 12

6. Simplificar:

$$E = \frac{\operatorname{Sen}(-120^\circ) - \operatorname{Cos}(210^\circ) + \operatorname{Sec} 300^\circ}{\operatorname{Tg}(-135^\circ) + \operatorname{Sec}(-225^\circ) + \operatorname{Sec}(-315^\circ)}$$

- A) 2 B) -3 C) -6 D) -1 E) -23

7. Si se sabe que:

$$\operatorname{Sen}(\theta - 5^\circ) \cdot \operatorname{Sec}(2\theta + 20^\circ) - 1 = 0. \text{ Calcular el valor de } \theta$$

- A) 35° B) 25° C) 15° D) 10° E) 5°

8. Calcular el signo de:

$$K = \frac{\operatorname{Sen} 300^\circ \cdot \operatorname{Cos} 100^\circ \cdot \operatorname{Tg} 200^\circ}{\operatorname{Sec} 100^\circ + \operatorname{Csc} 340^\circ}$$

- A). + B) - C) + y - D) + ó -

9. Calcular el signo de:

$$E = \frac{\operatorname{Sen}^3 260^\circ \cdot \operatorname{Ctg} 115^\circ \cdot \operatorname{Cos}^3 116^\circ}{\operatorname{Csc} 195^\circ \cdot \operatorname{Tg} 336^\circ}$$

- A) + B) - C) + y - D) + ó -

10. Calcular el valor de:

$$E = \frac{2\operatorname{Sen} 180^\circ + \operatorname{Cos} 0 - \operatorname{Tg} 360^\circ}{\operatorname{Csc} 270^\circ + \operatorname{Sec} 180^\circ}$$

- A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-1/2$ E) -1

EJERCICIOS DOMICILIARIOS

1. Indicar el signo de:

$$\operatorname{Tg} 332^\circ \cdot \operatorname{Tg}^4 130^\circ \cdot \operatorname{Csc}^5 210^\circ \cdot \operatorname{Sen}^4 180^\circ$$

- A) + D) - C) + y - D) + ó -

E) No tiene

2. Calcular el valor de:

$$E = \frac{3\operatorname{cos} 180^\circ - \operatorname{Sen} 0^\circ + \operatorname{Ctg} 90^\circ}{\operatorname{Sen} 270^\circ + \operatorname{Tg} 180^\circ}$$

- A) 1 B) 0 C) 3 D) -3 E) -1

3. Si $\sin(270^\circ + q)\csc(180^\circ - q) = 3$, calcule $\csc 2q$.

A) 5 B) 17 C) 26 D) **10** E) 37

4. Calcule el máximo valor de la expresión.

$$2\cos(270^\circ - q) + 3\sin(180^\circ - q) + 4\sin(90^\circ + q)$$

A) 10 B) 4 C) **17** D) 5 E) 23

5. Calcule el valor de la expresión.

$$\sin 1110^\circ + \cos 1500^\circ$$

A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B) -1 C) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ D) -3 E) **1**

SEMANA 06

A). FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ARCOS

$$\Sen(\alpha + \beta) = \Sen \alpha \cdot \Cos \beta + \Sen \beta \cdot \Cos \alpha$$

$$\Cos(\alpha + \beta) = \Cos \alpha \cdot \Cos \beta - \Sen \alpha \cdot \Sen \beta.$$

$$\Tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \cdot \tg \beta}$$

B). FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA RESTA DE DOS ARCOS

$$\Sen(\alpha - \beta) = \Sen \alpha \cdot \Cos \beta - \Cos \alpha \cdot \Sen \beta$$

$$\Cos(\alpha - \beta) = \Cos \alpha \cdot \Cos \beta + \Sen \alpha \cdot \Sen \beta.$$

$$\Tg(\alpha - \beta) = \frac{\tg \alpha - \tg \beta}{1 + \tg \alpha \cdot \tg \beta}$$

$$\text{Ojo: } \Ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{\Ctg \alpha \cdot \Ctg \beta + 1}{\Ctg \beta \pm \Ctg \alpha}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Efectúa:

$$T = \sin 8 \cdot \cos 22 + \cos 8 \cdot \sin 22$$

A) 1 B) **1/2** C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 1/3 E) 3/4

2. Calcula:

$$I = \sin 4 \cdot \cos 2 - \cos 4 \cdot \sin 2$$

A) **sen6** B) 1 C) **sen2** D) 1/3 E) 3/4

3. Calcula:

$$M = \cos 40 \cdot \cos 13 - \sin 40 \cdot \sin 13$$

A) 4/5 B) 2/3 C) 1/3 D) 7/12 E) **3/5**

4. Efectúa:

$$R = \cos 80 \cdot \cos 50 + \sin 80 \cdot \sin 50$$

A) **cos130** B) **sen130** C) **sen10** D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1/2

5. Calcular:

$$A = \frac{\tan 70 - \tan 10}{1 + \tan 70 \cdot \tan 10}$$

A) **$\sqrt{3}$** B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Reduce la siguiente expresión:

$$A = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} - \tan y + \sec x \cdot \operatorname{sen} x$$

A) 0 B) $\tan y$ C) $\tan x$ D) $2\tan x$ E) $-2\tan g x$

7. Si $\tan \alpha = \frac{3}{4}$; $\tan \theta = \frac{5}{12}$
 Calcular: $\tan(\alpha + \theta)$

A) $\frac{37}{33}$ B) $\frac{59}{31}$ C) $\frac{56}{33}$ D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{8}{31}$

8. Si $\tan \alpha = \frac{3}{4}$; $\tan \beta = \frac{1}{4}$
 Calcular: $\tan(\alpha - \beta)$

A) $\frac{17}{19}$ B) $\frac{11}{19}$ C) $\frac{13}{19}$ D) $\frac{14}{19}$ E) $\frac{8}{19}$

9. Calcula:
 $M = \operatorname{sen} 27 \cdot \cos 10 + \cos 27 \cdot \operatorname{sen} 10$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) 1

10. Efectúa:
 $M = \frac{\tan 20 + \tan 17}{1 - \tan 20 \cdot \tan 17}$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

EJERCICIOS DOMICILIARIOS

1. Simplificar:
 $M = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} - \tan y$

A) $\tan x$ B) $\cos y$ C) $\cot x$ D) $\operatorname{sen} x$ E) $\operatorname{sen} y$

2. Calcular:
 $A = \frac{\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

A) 2 B) $\tan x$ C) 1 D) $\tan(x+y)$ E) $\tan y$

3. Calcula:
 $A = \sqrt{2} \cos(\alpha + 45) + \operatorname{sen} \alpha$

A) 2 B) $\operatorname{sen} \alpha$ C) -2 D) 0 E) $\cos \alpha$

4. Si: $x-y=60$
 Calcular:
 $M = (\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^2$

A) 2 B) 8 C) 3 D) 0 E) 5

- $$R = \operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}^2 y$$

SEMANA 07

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ARCO DOBLE Y ANGULO MITAD

I). FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ARCO DOBLE

5

$$Tg\ 2\alpha = \frac{2Tg\alpha}{1 - Tg^2\alpha}$$

Del triángulo rectángulo:

$$* \quad \text{Sen } 2\alpha = \frac{2Tg\alpha}{1 + Tg^2\alpha}$$

$$* \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - Tg^2\alpha}{1 + Tg^2\alpha}$$

➤ *Especiales:*

$$* \quad Ctg\alpha + Tg\alpha = 2Csc2\alpha$$

$$* Ctg\alpha - Tg\alpha = 2Ctg2\alpha$$

$$* \sec 2\alpha - 1 = Tg 2\alpha \cdot Tg \alpha$$

$$3\sin^4 \alpha = 3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$$

$$+ \cos^4 \alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}$$

$$+ \cos^6 \alpha = \frac{5 + 3 \cos 4\alpha}{8}$$

II). FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ARCO MITAD

- $$1.- \text{ Seno de } \frac{\alpha}{2}:$$

$$2 \operatorname{Sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \operatorname{Cos} \alpha$$

$$\operatorname{Sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{2}}$$

- ## 2.- Coseno de $\frac{\alpha}{2}$:

$$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

EJERCICIOS DE CLASES

1. Al reducir la expresión $E = \frac{1+\cos 20}{\sin 20}$ se obtiene:

A) $\tan 10$. B) $\cot 10$. C) $\tan 20$. D) $\cot 20$. E) $\tan 15$.

2. Calcula

$$\sin 2x, \text{ si: } \tan x + \cot x = 5$$

A) $1/2$ B) $2/5$ C) $3/4$ D) $4/5$ E) $5/6$

3. Resuelve: $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

A) π B) $\pi/3$ C) $\pi/4$ D) $\pi/5$ E) $\pi/6$

4. Calcule el equivalente de la siguiente expresión.

$$E = 8 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$$

A) $\sin 8x$ B) $\cos 4x$ C) $0.5 \sin 8x$ D) $2 \sin 8x$ E) $2 \sin 4x$

5. Calcula $\cos \frac{\theta}{2}$ sabiendo que:

$$\cos \theta = \frac{1}{4}, \theta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ B) $\sqrt{10}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{2}$

6. Calcula $\cos \frac{\alpha}{2}$ sabiendo que:

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}, \alpha \in \left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$$

A) $-1/4$ B) $-\sqrt{7}$ C) $\frac{-\sqrt{7}}{4}$ D) $-\sqrt{7}$ E) $1/4$

7. Si: $\tan \alpha = \frac{2}{3}$, calcula:

$$C = 13 \sin 2\alpha + 1$$

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

8. Si: $\cot \theta = \sqrt{7}$; calcula:

$$L = 4 \cos 2\theta + 3$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

9. Calcula:

$$L = \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta$$

$$\text{Si: } \theta = \frac{\pi}{24}$$

A) $2^{-1} \cdot \sqrt{3}$ B) $2^{-2} \cdot \sqrt{3}$ C) $2^{-3} \cdot \sqrt{3}$ D) $2^{-4} \cdot \sqrt{3}$ E) $2^{-5} \cdot \sqrt{3}$

10. Calcula:

$$C = \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 4\beta \cdot \cos 8\beta$$

$$\text{Si: } 32\beta = \pi$$

$$A) \frac{1}{4} \quad B) \frac{1}{8} \quad C) \frac{\sqrt{3}}{4} \quad D) \frac{\sqrt{3}}{8} \quad E) \frac{1}{16}$$

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Calcular un valor agudo de "x" que cumple:

$$C = \frac{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

A) $\sin \theta$ B) $\cos \theta$ C) $2 \sin \theta$ D) $2 \cos \theta$
E) 2

2. Reduce:

$$C = \frac{1 \cos 2\theta - \sin 2\theta}{2 \sin \theta} + \cos \theta$$

A) 1 B) $\sin \theta$ C) $2 \sin \theta$ D) $\sin 2\theta$ E) $1 + \sin 2\theta$

3. Si: $\sin x = \frac{1}{3}$, calcula $\sin 3x$

$$A) 1 \quad B) \frac{22}{27} \quad C) \frac{23}{27} \quad D) -\frac{22}{27} \quad E) -\frac{23}{27}$$

4. Si: $\cos x = \frac{1}{4}$, calcula $\cos 3x$

$$A) 3/4 \quad B) -11/16 \quad C) 11/16 \quad D) -3/4 \quad E) 11/64$$

5. Si: $\tan x = 2$, halla $\tan 3x$

$$A) 6 \quad B) 11/2 \quad C) 1/6 \quad D) 2/11 \quad E) -11/2$$

SEMANA 08

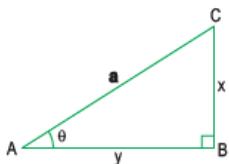
Resolución de triángulos rectángulos

Cuando en un triángulo rectángulo se conoce uno de sus lados y uno de sus ángulos agudos, es posible determinar sus otros dos lados así como también su otro ángulo agudo.

Se presentan 3 casos:

Caso I

Conocidos la hipotenusa (a) y un ángulo agudo (θ)



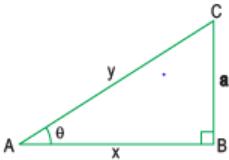
Del gráfico:

$$\frac{x}{a} = \sin\theta \rightarrow x = a\sin\theta$$

$$\frac{y}{a} = \cos\theta \rightarrow y = a\cos\theta$$

Caso II

Conocidos un ángulo agudo (θ) y su cateto opuesto (a)



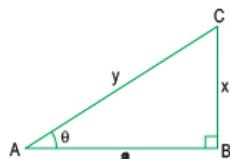
Del gráfico:

$$\frac{x}{a} = \cot\theta \rightarrow x = a\cot\theta$$

$$\frac{y}{a} = \csc\theta \rightarrow y = a\csc\theta$$

Caso III

Conocidos un ángulo agudo (θ) y su cateto adyacente (a)



Del gráfico:

$$\frac{x}{a} = \tan\theta \rightarrow x = a\tan\theta$$

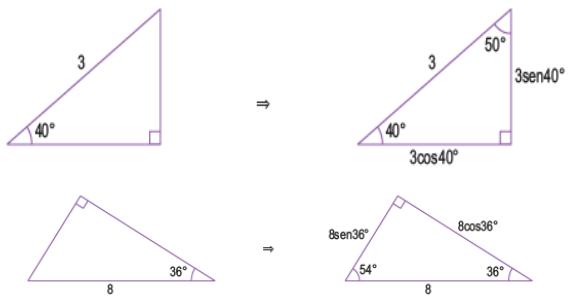
$$\frac{y}{a} = \sec\theta \rightarrow y = a\sec\theta$$

Recuerda

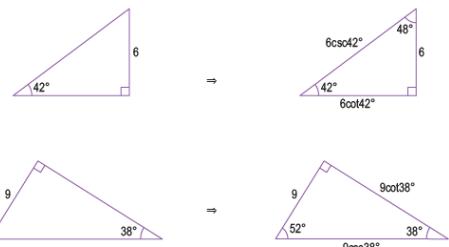
1. $x = a\sin\theta$ $y = a\cos\theta$	2. $x = a\cot\theta$ $y = a\csc\theta$
3. $x = a\tan\theta$ $y = a\sec\theta$	

Ejemplos: Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:

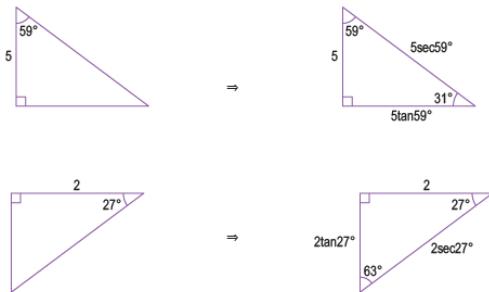
Caso I



Caso II

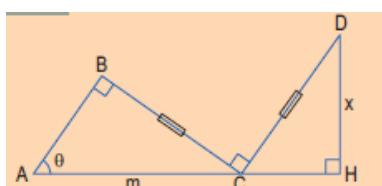


Caso III



Ejemplos resueltos

1. Del gráfico, halla x .



Resolución:

Del gráfico, en el $\triangle ABC$:

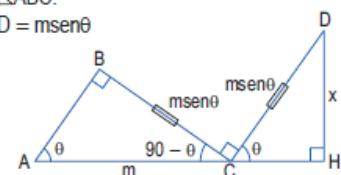
$$BC = m\sin\theta \Rightarrow CD = m\sin\theta$$

En el $\triangle CHD$:

$$x = CD\sec\theta$$

$$x = m\sin\theta\sec\theta$$

$$x = m\sin^2\theta$$



2. En un trapecio isósceles, los lados no paralelos son iguales a la base menor y forman un ángulo agudo q con la base mayor. Si la base menor mide L, ¿cuál es el perímetro del trapecio?

Resolución:

Sea el trapecio ABCD:

$$\text{Perímetro} = AB + BC + CD + AD$$

$$\text{Perímetro} = L + L + L + \overbrace{AP + L + QD}$$

$$\text{Perímetro} = 4L + AP + QD$$

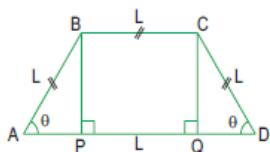
Hallamos AP y QD:

$$AP = L\cos\theta = QD$$

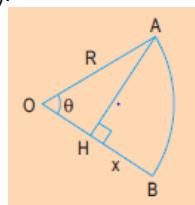
Entonces:

$$\text{Perímetro} = 4L + 2L\cos\theta$$

$$\text{Perímetro} = 2L(2 + \cos\theta)$$



3. Del gráfico, obtén x en función de R y q, (O centro de la circunferencia).



Resolución:

Se deduce que: OB = R

En el $\triangle OHA$ (conocidos un ángulo agudo y la hipotenusa):

$$OH = R\cos\theta$$

$$HA = R\sin\theta$$

Entonces:

$$x = OB - OH \Rightarrow x = R - R\cos\theta \Rightarrow x = R(1 - \cos\theta)$$

4. En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se sabe que los ángulos congruentes miden a , mientras que el lado desigual mide L . Halla uno de los lados congruentes.

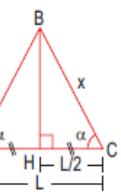
Resolución:

Sea el triángulo ABC:

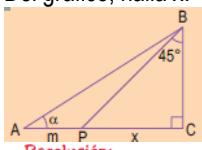
La altura en un \triangle isósceles es también

$$\text{mediana, entonces: } HC = \frac{L}{2}$$

Se conocen un ángulo agudo y el cateto adyacente, entonces: $x = \frac{L}{2}\sec\alpha$



5. Del gráfico, halla x.



Resolución:

Del gráfico:

En el $\triangle PCB(45^\circ, 45^\circ)$: $BC = x$

En el $\triangle ACB$:

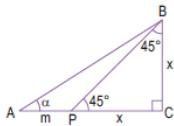
$$BC = x = (m + x)\tan\alpha$$

$$x = m\tan\alpha + x\tan\alpha$$

$$x - x\tan\alpha = m\tan\alpha$$

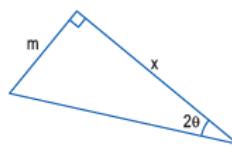
$$x(1 - \tan\alpha) = m\tan\alpha$$

$$x = \frac{m\tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$$



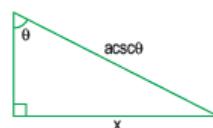
EJERCICIOS DE CLASES

1. Del gráfico, halla x.



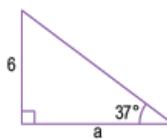
- A) $\operatorname{mcsc}\theta$ B) $\operatorname{mtan}\theta$ C) $\operatorname{mtan}^2\theta$
D) $\operatorname{mcot}^2\theta$ E) $\operatorname{mcsc}^2\theta$

2. Del gráfico, halla x.



- A) 1 B) $\operatorname{asen}\theta$ C) 4 D) a E) $\operatorname{sen}\theta$

3. Del gráfico, halla a.

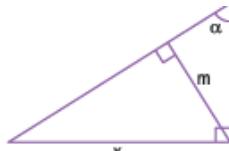


- A) 9 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

4. En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos mide θ y el cateto opuesto a dicho ángulo mide L . Halla la hipotenusa.

- A) $\operatorname{Ltan}\theta$ B) $\operatorname{Lcot}\theta$ C) $\operatorname{Lsec}\theta$ D) $\operatorname{Lcsc}\theta$ E) $\operatorname{Lcos}\theta$

5. Obtén x en:

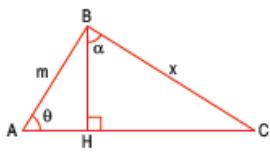


- A) $\operatorname{msen}\alpha$ B) $\operatorname{mcos}\alpha$ C) $\operatorname{msec}\alpha$ D)
 $\operatorname{mcsc}\alpha$ E) $\operatorname{mtan}\alpha$

6. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide β , y el cateto adyacente a él mide L . Expresa el área de la región triangular en términos de β y L .

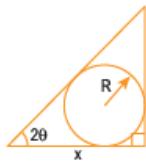
- A) $L^2\tan\beta$ B) $L^2\operatorname{sen}\beta$ C) $L^2\operatorname{cot}\beta$ D) $\frac{L^2}{2}\tan\beta$
E) $\frac{L^2}{2}\operatorname{cot}\beta$

7. Del gráfico determina x.



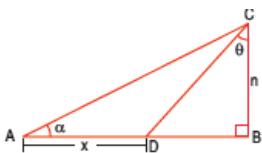
- A) $m \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha$ B) $m \operatorname{sen} \beta \sec \alpha$
 C) $m \cos \beta \operatorname{sen} \alpha$ D) $m \operatorname{sen} \beta \sec \beta$
 E) $m \cos \beta \sec \alpha$

8. Del gráfico, halla x.



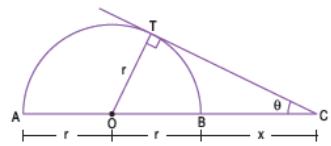
- A) $R \cot \theta$ B) $R \tan \theta$ C) $R(\cot \theta + 1)$
 D) $R(\tan \theta + 1)$ E) $R(\operatorname{sen} \theta + 1)$

9. Del gráfico, halla x.



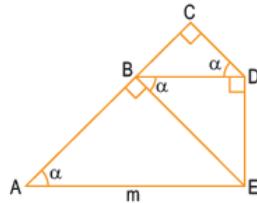
- A) $n(\cos \alpha - \operatorname{sen} \theta)$ B) $n(\cot \alpha - \operatorname{sen} \theta)$
 C) $n(\cot \alpha - \tan \theta)$ D) $n(\tan \alpha - \tan \theta)$
 E) $n(\cot \alpha - \cot \theta)$

10. Halla "x" en términos de "r" y "\theta".



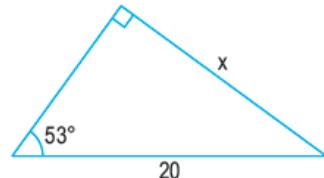
- A) $r(\cos \theta - 1)$ B) $r(\csc \theta - 1)$ C) $r(\sec \theta - 1)$
 D) $r(\operatorname{sen} \theta - 1)$ E) $r(\cot \theta - 1)$

2. Halla BC en función de "a" y "m".



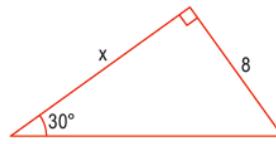
- A) $m \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ B) $m \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha$
 C) $m \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$ D) $m \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha$
 E) $m \operatorname{sen} \alpha \cot \alpha$

3. Del gráfico, halla x.



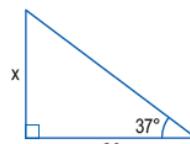
- A) 18 B) 14 C) 16 D) 15 E) 12

4. Del gráfico, halla x.



- A) $8\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) 6 D) 10 E) 9

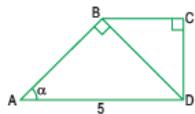
5. Del gráfico, halla x.



- A) 15 B) 16 C) 18 D) 12 E) 14

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Determina BC en términos de "\alpha".



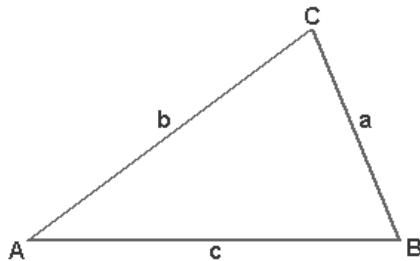
- A) $5 \operatorname{sen}^2 \alpha$ B) $\sec^2 \alpha$ C) $\tan^2 \alpha$ D) $\operatorname{sen}^2 \alpha$ E)
 $5 \sec^2 \alpha$

SEMANA 9

RESOLUCIONES DE TRIANGULOS OBLICUÁNGULOS

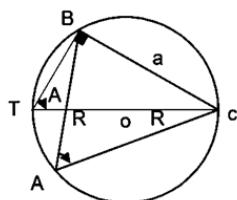
1.- LEY DE SENOS.

Se aplica cuando se conocen las medidas de:
 * Dos lados y uno de los ángulos opuestos a ellos
 * Dos ángulos y un lado.



$$\frac{\operatorname{Sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{Sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{Sen}(C)}{c}$$

COROLARIO DEL TEOREMA DE SENOS



TBA : $\operatorname{Sen} A = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\operatorname{Sen} A}$

$$\frac{a}{\operatorname{Sen} A} = \frac{b}{\operatorname{Sen} B} = \frac{c}{\operatorname{Sen} C} = 2R$$

R = Circunradio

* Observaciones:

$$a = 2R \operatorname{Sen} A, \quad b = 2R \operatorname{Sen} B, \quad c = 2R \operatorname{Sen} C$$

2.- LEY DE COSENOS.

Se aplica cuando se conocen las medidas de:

* Los tres lados.

* Dos lados y el ángulo comprendido por ellos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \operatorname{Cos}(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \operatorname{Cos}(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \operatorname{Cos}(C)$$

$$\operatorname{Cos}(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\operatorname{Cos}(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\operatorname{Cos}(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3.- LEY DE TANGENTES

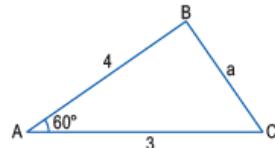
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$

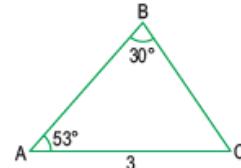
EJERCICIOS DE CLASES

1. De la figura, calcula el valor de a.



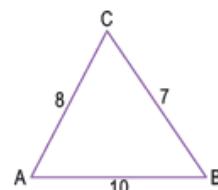
- A) $\sqrt{13}$ B) 5 C) 7 D) $\sqrt{8}$ E) 1

2. Halla la medida del lado BC.



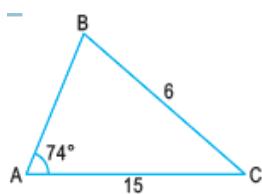
- A) 5/24 B) $24/5$ C) 4 D) 4/3 E) 3/4

3. Calcula el valor de $\operatorname{cos} A$.



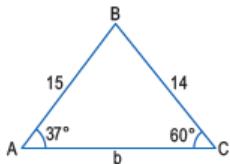
- A) 23/31 B) 17/19 C) 19/24 D) $23/32$ E) 25/32

4. Determina el $\sin B$



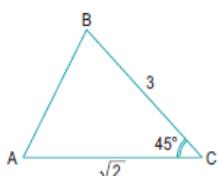
- A) 13/17 B) 9/13 C) 9/5 D) 12/5 E) 11/9

5. Aplica la ley de proyecciones y calcula el valor de b.



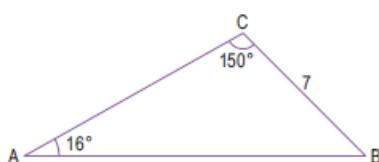
- A) 21 B) 16 C) 19 D) 23 E) 12

6. Calcula la longitud de AB.



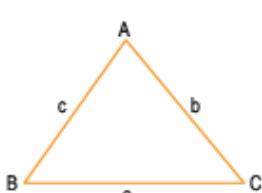
- A) sqrt(2) B) 2sqrt(3) C) 4sqrt(5) D) sqrt(5) E) 9

7. Calcula la medida del lado AB de la figura.



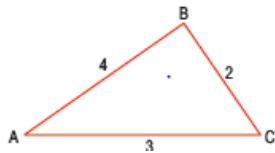
- A) 7 B) 10 C) 12,5 D) 12 E) 24

8. Resuelve un triángulo ABC, $a = \sqrt{2}$; $B=60^\circ$ y $A=45^\circ$. Halla el valor de b.



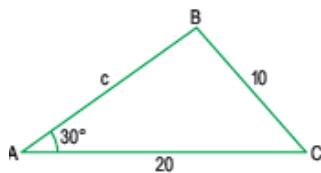
- A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

9. De la figura, calcula: $\cos B$



- A) 1/16 B) 1/11 C) 5/3 D) 16/11 E) 11/16

10. Halla c.



- A) 10 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 5/3 D) 16/11 E) 11/16

EJERCICIOS DOMICILIARIOS

1. Halla el coseno del menor ángulo de un triángulo cuyos lados son proporcionales a 7; 8 y 13.

- A) 17/26 B) 23/26 C) 17/23 D) 19/23 E)
19/26

2. En un $\triangle ABC$ se cumple que:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$$

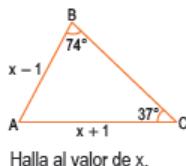
- A) 45° B) 30° C) 90° D) 60° E) 135°

3. En un triángulo PQR, se sabe $p = 3$; $r = 2$, además $m\angle P = 2m\angle R$.

Halla el valor de q.

- A) 1 B) 3/2 C) 2 D) 3 E) 7/2

4. Del siguiente gráfico:



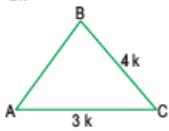
Halla al valor de x.

- A) 11/3 B) 2 C) 7/5 D) 13/3 E) 15/4

5. Simplifica la siguiente expresión:

$$M = \frac{\sin A + \cos B}{\sin A - \cos B}$$

Si:



- A) 9 B) 5/7 C) 7 D) 11/7 E) 5

SEMANA 10

MISELANEA

1. Convierte 80° a radianes.

- A) $\frac{3\pi}{5}$ rad B) $\frac{8r}{5}$ rad C) $\frac{4\pi}{5}$ rad D) $\frac{2\pi}{5}$ rad
E) $\frac{\pi}{5}$ rad

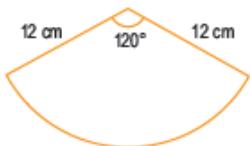
2. Convierte 160° a radianes.

- A) $\frac{8\pi}{5}$ rad B) $\frac{6\pi}{7}$ rad C) $\frac{3\pi}{5}$ rad D) $\frac{4\pi}{5}$ rad
E) $\frac{6\pi}{5}$ rad

3. Un ángulo mide 70° y su suplemento $(11x + 7)^\circ$. ¿Cuál es el valor de x ?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 5 E) 10

4. Halla la longitud del arco.

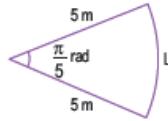


- A) 8π cm B) 6π cm C) 10 cm D) 12 cm
E) 7π cm

5. En un sector circular el ángulo central mide 62° y el radio 1 m. ¿Cuánto mide el arco?

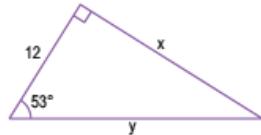
- A) π cm B) 30π cm C) 62π cm
D) 31π cm E) 54π cm

6. Halla la longitud del arco.



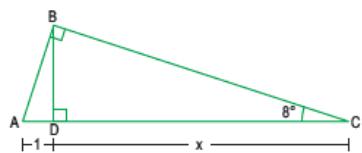
- A) π m B) 3π m C) 5π m D) 25π m
E) 5π m

7. Calcula $x + y$.



- A) 20 B) 36 C) 42 D) 35 E) 21

8. Halla $x + 1$.



- A) 49 B) 22 C) 50 D) 48 E) 8

9. Calcula:

$$P = \sqrt[3]{19 + 4\sqrt{3}\csc 60^\circ}$$

- A) 3 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

10. Martín observa la parte superior de un muro con un ángulo de elevación θ . Cuando la distancia que los separa se ha reducido a su tercera parte, el ángulo de elevación se ha duplicado. Calcula la medida del ángulo θ .

- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

11. Si a 20 m de un poste se observa su parte superior, con un ángulo de elevación de 37° , luego nos acercamos una distancia igual a su altura, siendo el nuevo ángulo de elevación θ . Calcula $\tan \theta$.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. Desde un punto en el suelo se ubica la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación de 37° , nos acercamos 5 m y el nuevo ángulo de elevación es 45° , halla la altura del árbol.

- A) 8 m B) 10 m C) 12 m D) 15 m E) 18 m

13. Calcula:

$$P = \frac{\cos 330 \cdot \cot 300 \cdot \csc 135}{\sec 315 \cdot \sin 300 \cdot \tan 330}$$

- A) 0 B) 1 C) -1 D) 3 E) $\frac{1}{2}$

14. Efectúa:

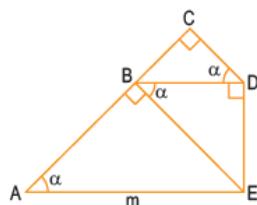
$$R = \sin(x+y)\sin(x-y) + \sin^2 y$$

- A) $\sin^2 x$ B) 0 C) 1 D) $\cos^2 y$ E) $\sin^2 y$

15. Si: $\cos x = \frac{1}{4}$, calcula $\cos 3x$

- A) 3/4 B) -11/16 C) 11/16 D) -3/4 E) 11/64

16. Halla BC en función de "a" y "m".

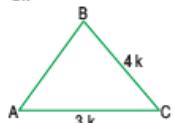


- A) $m \sin \alpha \cos \alpha$ B) $m \sin \alpha \cos^2 \alpha$
C) $m \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ D) $m \sin^2 \alpha \cos \alpha$
E) $m \sin \alpha \cot \alpha$

17. Simplifica la siguiente expresión:

$$M = \frac{\sin A + \cos B}{\sin A - \cos B}$$

Si:



- A) 9 B) 5/7 C) 7 D) 11/7 E) 5