89110-06 [illegible] 313498888

מבנ"ת תרגיל 2 - תיאורטי

1

$T1(n)=6n^2$

$T2(n)=n^2\log(n)$

האם זה חסם מלמעלה שאינו הדוק

a) האם $T_1(n)=o(n^2\log(n))$? כן, כלומר עבור ערכי n-ים גדולים מאוד $6n^2<n^2\log(n)$?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_1}{T_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2\log(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\log(n)}=0$$

מכאן $T_1<T_2$ עבור ערכי n אינסופיים, כלומר קיים N_0 כך שלכל n הגדול מ-N_0 מתקיים: $T_1(n)\le 1\cdot T_2(n)$

ולכן: $T_1(n)=O(T_2(n))$ כלומר $T_2(n)$ חוסמת את $T_1(n)$ מלמעלה.

b) האם $6n^2=\Omega(n^2\log(n))$? כלומר עבור ערכי n-ים גדולים האם $n^2\log(n)<6n^2$?

לא, נניח בשלילה שקיימים $N_0>0$ ו-$c>0$ ($c\in\mathbb{R}$) כך שלכל $n>N_0$ מתקיים:

$T_1(n)\ge c\cdot T_2(n)$ (כי T_2 הוא Ω [חסם מלמטה] של T_1).

כלומר: $6n^2\ge cn^2\log(n)\Leftarrow 6\ge c\log(n)\Leftarrow\frac{6}{c}\ge\log(n)$, סתירה!

קיבלנו שמספר אינסופי ($\log(n)$ עבור ערכי n אינסופיים שואף לאינסוף),

קטן ממספר קבוע כלשהו ולכן לא ייתכן!

c) לגבי Θ, מכיוון שצריך ש-$T_1(n)$ הוא גם חסם עליון (O) וגם חסם תחתון (Ω),

ואנחנו ראינו ש: $T_1(n)=O(T_2(n))$, אבל $T_1(n)\neq\Omega(T_2(n))$.

d) הייתי בוחר ב-A_1 ($T_1(n)$) כי ראינו שזמן הריצה שלו קצר יותר,

מכיוון ש: $T_1(n)=O(T_2(n))$.

$T_1(n) = \frac{3}{2}n^2 + 7n - 4$
$T_2(n) = 8n^2$

a) $\overbrace{\frac{3}{2}n^2+7n-4}^{T_1} = O(\overbrace{8n^2}^{T_2})$ כלומר האם $T_2(n)$ חסם מלעיל של $T_1(n)$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1(n)}{T_2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}n^2+7n-4}{8n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{3}{2}+\overbrace{\frac{7}{n}-\frac{4}{n^2}}^{\text{זניח}}\right)}{n^2\cdot 8} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{8}{1}} = \frac{3}{16}$$

מצאנו שהמנה שלהם שואפת למספר קבוע, כלומר ההבדל ביניהם זניח,
ולכן $T_1(n)=\Theta(T_2(n))$.
מכיוון שתטא הוא חלק של $O(T_1)$, עפ"י ההגדרה, תטא הוא ודאי גם חסם עליון.
מה הכוונה ש T_2 הוא חסם עליון של T_1?
כלומר האם קיים מספר קבוע וממשי $(c\in\mathbb{R})$ כלשהו שכאשר נכפול אותו ב- T_2, T_2 יהיה גדול יותר מ- T_1? (עבור ערכי n אינסופיים - החל ממקום מסוים)
כן! לדוגמה עבור $C=1$: $1\cdot 8n^2 \geq \frac{3}{2}n^2+7n-4$. ולכן הוא חסם עליון.

b) האם $T_2(n)$ הוא אומגה (Ω) של T_1?
כן! כי קיים c עבורו $T_1>T_2$, לדוגמה: $C=6$:
$6\left(\frac{3}{2}n^2+7n-4\right) = 9n^2+42n-24 > 8n^2$,
ולכן הוא גם חסם תחתון.

c) כלומר ש- T_2 הוא גם חסם עליון (O) וגם חסם תחתון (Ω אומגה) של T_1, מתקיים שהוא גם תטא (כמו שראינו ב- a).

$T_1(n) = n^4$
$T_2(n) = n^3\log(n)$

a) האם $n^4 = O(n^3\log(n))$? כלומר האם T_2 חסם מלעיל של T_1?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_1(n)}{T_2(n)} = \frac{n^4}{n^3\log(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log(n)} = \infty$$

כלומר, עבור ערכי n אינסופיים $T_1 > T_2$
ולכן לא מתקיים $T_1(n)=O(T_2(n))$!

b) האם $n^4=\Omega(n^3\log(n))$ כלומר האם T_2 חסם תחתון של T_1?
כן! כי קיים c עבורו $T_1 > T_2$ עבור n-ים גדולים)
לדוגמה $c=1$: $n^4 > 1\cdot n^3\log(n)$.
(ויש עוד דוגמאות)

c) על פי הגדרה, Θ יכול להתקיים רק אם 2 הסעיפים הקודמים מתקיימים
ולכן $T_1(n)\neq\Theta(T_2(n))$.

2) הלולאה רצה על המספרים הזוגיים עד n, ולכן בסה"כ רצה $\frac{n}{2}$ פעמים,
ובכל פעם מבצעת 3 פעולות. סה"כ בכל קריאה זמן הריצה הוא $\frac{3n}{2}$.

$$T(n) = \underbrace{T(n-2)}_{\text{הקריאה הרקורסיבית הבאה}} + \underbrace{\frac{3n}{2}}_{\text{זמן הריצה של כל קריאה}}$$
הקריאות הנוכחית

$$T(n-2)=T(n-4)+\frac{3(n-2)}{2}$$

$$T(n-4)=T(n-6)+\frac{3(n-4)}{2} \Rightarrow T(n-6)=T(n-8)+\frac{3(n-6)}{2}$$

$$T(n)=\overbrace{T(n-4)+\frac{3(n-2)}{2}}^{T(n-2)}+\frac{3n}{2}=\overbrace{T(n-8)+\frac{3(n-6)}{2}}^{T(n-6)}+\frac{3(n-4)}{2}+\frac{3(n-2)}{2}+\frac{3n}{2}$$

$\frac{i\cdot 3n-3i(i-1)}{2}=3i(n-(i-1))$

$T(n-2i)$

(נבדוק את התקיימות (של הנוסחה) כי העכבה לא משתנה):

$i=1$: $T(n-2)+\frac{3n}{2}$

$i=2$: $T(n-4)+\frac{3(n-2)}{2}+\frac{3n}{2}=T(n-4)+\frac{6n-6}{2}$

$i=3$: $T(n-6)+\frac{3(n-4)}{2}+\frac{6n-6}{2}=T(n-6)+\frac{9n-18}{2}$

$$T(n-2i)+\frac{i\cdot 3n-3i(i-1)}{2}$$

$T(0)=1$ תנאי עצירה,

הצבה $i=\frac{n}{2} \Leftarrow T(n-2i)+\dfrac{\frac{n}{2}\cdot 3n-3\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2} = T(0)+\dfrac{\frac{3n^2}{2}-\frac{3n^2}{4}+\frac{3n}{2}}{2}$

$$=\dfrac{\frac{6n^2}{4}-\frac{3n^2}{4}+\frac{6n}{4}}{2}=\dfrac{\frac{3n^2+6n}{4}}{2}=\dfrac{3n^2+6n}{8}$$

החזקה הכי גבוהה היא n^2, ולכן זמן הריצה האסימפטוטי הוא $O(n^2)$.

3) 1a $T(1)=d$.

$T(n)=T(n-1)+c\cdot\log(n)$ כלל

נפתח את נוסחת הנסיגה עבור הקריאות הבאות:

$T(n-1)=T(n-2)+c\cdot\log(n-1)$

$T(n-2)=T(n-3)+c\cdot\log(n-2)$

$\vdots$

תנאי עצירה בסיס הרקורסיה $T(i)=\overset{d}{\overset{\shortparallel}{T(1)}}+c\cdot\log(i)=d+c\log(i)$

זמן ריצה כולל (סכום כל הקריאות) $T(n)=c\cdot\log(n)+c\cdot\log(n-1)+c\cdot\log(n-2),\dots+c\cdot\log(i)+d$

$$=c(\log(n)+\log(n-1)+\log(n-2)+\dots+\log(i))+d$$

$$=c(\log(n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(i))+d$$

$$=c\cdot\log(n!)+d$$

$$\Rightarrow \Theta(T(n))=\Theta(\log(n!))$$

b)

$T(n)=6T\left(\frac{1}{2}n\right)+n^3,\ T(1)=T(2)=T(3)=d$

כל בסיס הרקורסיה מתבצעת עבור $\frac{n}{2}$ ולכן נוכל להשתמש במשפט המאסטר:

$T(n)=\underset{\underset{6}{\downarrow}}{a}\cdot T\Big(\underset{\underset{\frac{n}{2}=b}{\downarrow}}{\frac{n}{b}}\Big)+\underset{\underset{n^3}{\downarrow}}{f(n)}$

תרומת כל הבסיסים (3 בסיסים) ביחד $n^{\log_b a}=n^{\log_2 6}\approx n^{2.585}\ [<\overset{f(n)}{\overset{\shortparallel}{n^3}}]\Rightarrow$

השורש גדול מהתרומות של כל הבסיסים

$\downarrow$

(מקרה 1 של משפט המאסטר)

$f(n)=n^3=\Omega(n^{\log_2 6+\overset{\varepsilon\text{ אפסילון}}{\overset{\shortparallel}{0.1}}})\rightarrow$ עדיין קטן מ-3

$\Rightarrow T(n)=\Theta(f(n))=\Theta(n^3)$

בגלל שהשורש גדול מהבסיסים,
הוא שלו זה מה שקובע את זמן הריצה
(ע"פ משפט המאסטר)

ב) $T(1)=T(2)=T(3)=d$

$T(n)=T(n-2)+\log n$

לא ניתן להשתמש במאסטר, נפתח את נוסחת הנסיגה עבור הקריאות הבאות:

$T(n-2)=T(n-4)+\log(n-2)$

$T(n-4)=T(n-6)+\log(n-4)$

$T(n-6)=T(n-8)+\log(n-6)$

$\vdots$

$T(n)=\log n+\underbrace{\log(n-2)}_{\le \log n}+\underbrace{\log(n-4)}_{\le \log n}+\underbrace{\log(n-6)}_{\le \log n}+\dots\le n\cdot\log n$

$=\log(n(n-2)(n-4)(n-6)\cdot\dots)\le n\cdot\log n$ (חסם עליון $O(n)$)

$\Rightarrow O(n\log n)$

כל לוג קטן מ-$\log n$ חוץ מהראשונה
ולכן סכומן לא יותר מסכום של $n\log(n)$.

ג) $T(1)=1, T(2)=1$.

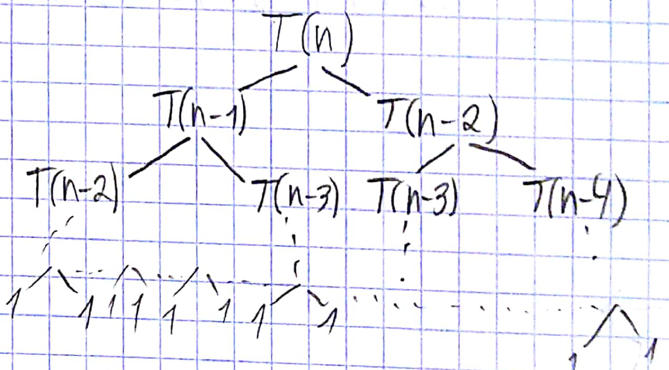
נפתח את הנוסחה:

$T(n)=T(n-1)+T(n-2)$

$T(n-1)=T(n-2)+T(n-3)$

$T(n-2)=T(n-3)+T(n-4)$

$\vdots$



כל שורה עושה 2 קריאות.

מכיוון שהשורש מתפצל לשני עלים, וכל עלה מתפצל ל-2 עלים, נקבל 2^n עלים בסה"כ.
(אם $n=1$ נקבל 2 עלים לשורש, $n=2$ נקבל 4 עלים וכו'...) - קיבלנו סדרת פיבונאצ'י.

$\Rightarrow \Theta(T(n))=2^n$

ד) $T(1)=d$

$T(n)=2T(\frac{n}{2})+n$

נשתמש במשפט המאסטר:

$a=2, b=2, f(n)=n$

$f(n)=\Theta(n^{\log_b a})=\Theta(n^{\log_2 2})=\Theta(n)[=f(n)]$

מקרה שני של המאסטר:

$T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\cdot\log_b n)$

$\Rightarrow T(n)=\Theta(n\cdot\log n)$

f) $T(1)=d$

$T(n)=16T\left(\frac{n}{4}\right)+\sqrt{n^3}$

נשתמש במשפט המאסטר:

$a=16,\ b=4,\ f(n)=\sqrt{n^3}=n^{1.5}$

$f(n)\overset{?}{=}\Theta(n^{\log_4 16})=\Theta(n^2)\ [> \underbrace{n^{1.5}}_{f(n)}]$

לא מתקיים, מכיוון ש- $f(n)=n^{1.5}$ (המשורש) קטן מהחזקה העליונה: n^2.

כלומר מתקיים: $T(n)=\Theta(n^2)$ (כי משקל העליון הוא שקובע ע"פ המאסטר).

g) $T(1)=1$

נפתח את הנוסחא:

$$(*)\begin{cases} T(n)=2T(n-1)+1 \\ T(n-1)=2T(n-2)+1 \end{cases}$$

$T(n-2)=2T(n-3)+1$

$T(n-3)=2T(n-4)+1$

$\vdots$

$T(n-i)=2T(n-i-1)+1$

$K=1\quad T(2)=2\cdot \overset{1}{T(1)}+1=2\cdot 1+1=3$

$K=2\quad T(3)=2\cdot T(2)+1=2(2\cdot 1+1)+1=7$

$K=3\quad T(4)=2\cdot T(3)+1=2\cdot(2(2\cdot 1+1)+1)+1=15$

$\vdots$

$2^K(T(n-K))+C$

$(*)\ T(n)=2(2T(n-2)+1)+1=2^2(T(n-2))+3=2^K(T(n-K))+C$

סה"כ יש n איברים ולכן 2 מוכפלת בעצמה n פעמים (2^n)

נשים לב כי C (סכום כל הקודמים) $\Rightarrow 2^n\cdot \overset{T(1)}{1}+\underbrace{(2^n+1)}_{C}=2\cdot 2^n=2^{n+1}$

$\Rightarrow T(n)=\Theta(2^{n+1})$