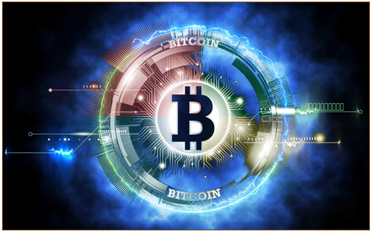
Bitcoin y Mas Allá: Modelando el Nuevo Paradigma Monetario

XVII Semana Internacional de la Estadística y la Probabilidad

Israel Cervantes Juárez
Eduardo Eleno Encarnación
José Juan Castro Alva
Rei Israel Gutiérrez Ortega

Introducción

La digitalización del dinero y la aparición de criptomonedas, como Bitcoin, han transformado los sistemas financieros globales. Lanzado en 2008 por **Satoshi Nakamoto**, Bitcoin inauguró una nueva era financiera con su enfoque descentralizado basado en *blockchain*, cuestionando el papel de intermediarios tradicionales y demostrando el potencial de esta tecnología para transacciones seguras y transparentes[1].



El desarrollo de Bitcoin ha impulsado la expansión de nuevas tecnologías como los contratos inteligentes y las plataformas *DeFi*. Sin embargo, su alta volatilidad y percepción de riesgo generan incertidumbre. Este artículo utiliza el modelo de Movimiento Browniano Geométrico (GBM) con ajustes de deriva y estacionalidad para predecir el comportamiento futuro de Bitcoin, evaluando su precio medio esperado y rangos de precios probables, con el objetivo de mejorar la comprensión de su volatilidad y apoyar decisiones informadas en el mercado.

Método

Recopilación de Datos

Los datos son tomados del sitio Yahoo Finance con el ticker "BTC-USD", la ventaja de hacer esto es que no se tiene que descargar la base de datos y esta en tiempo real.
En los últimos años se ha hecho tendencia Bitcoin, pero ¿por qué?

Recopilación de Datos

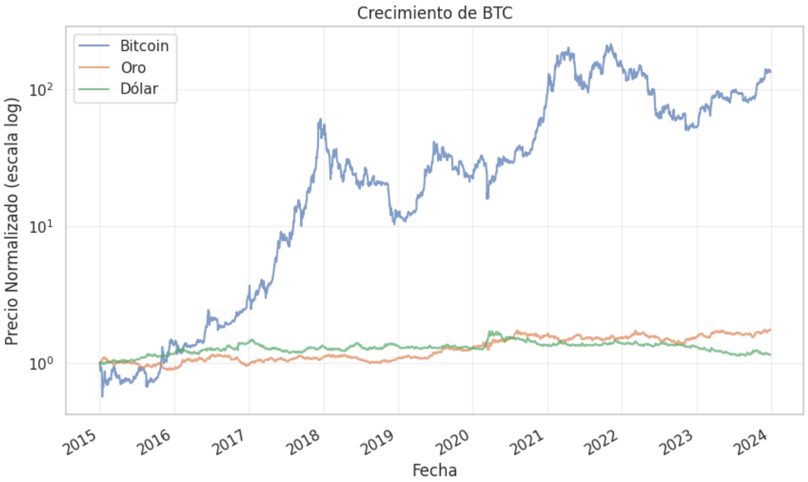


Figura: Comparación dólar, oro y Bitcoin

En el análisis de los mercados financieros, entender cómo se relacionan distintos activos es crucial para evaluar la diversificación y los riesgos en una cartera de inversión.

Recopilación de Datos

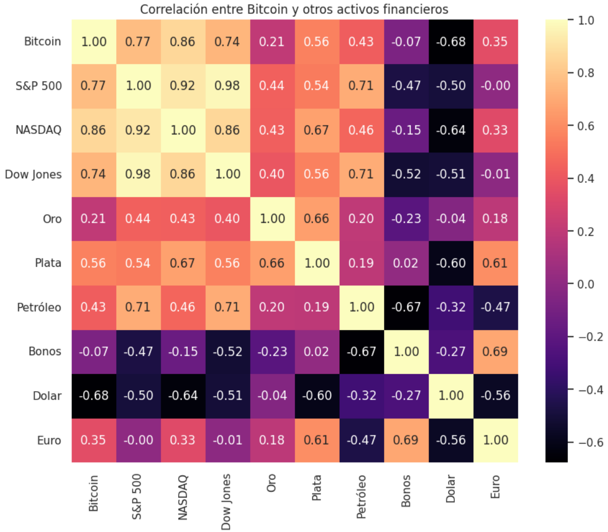


Figura: Matriz de correlación

Este comportamiento indica que Bitcoin está cada vez más sincronizado con los índices bursátiles tradicionales, sugiriendo que sus precios están influenciados por factores macroeconómicos comunes y las dinámicas del mercado de acciones. La alta correlación observada con el NASDAQ y el S&P 500 sugiere que BTC no solo responde a las condiciones específicas del mercado de criptomonedas, sino también a las fluctuaciones en los mercados bursátiles, lo que podría reflejar una integración creciente de Bitcoin en el sistema financiero tradicional.

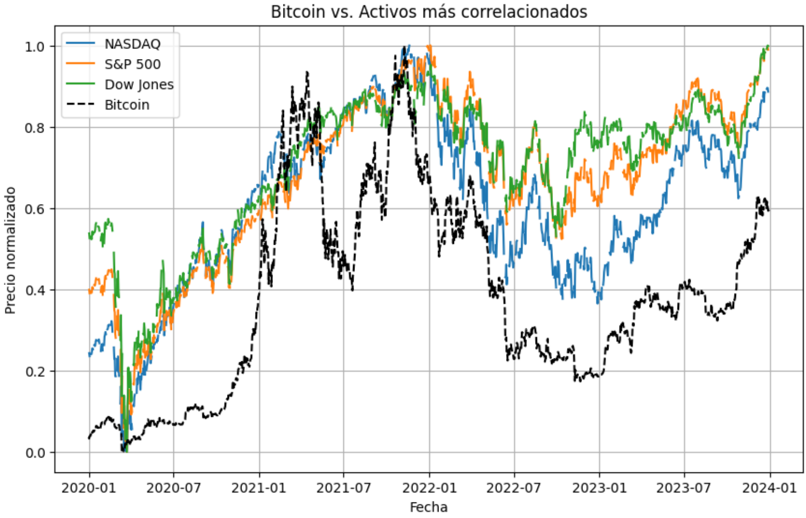


Figura: Correlación significativa positiva con indices bursátiles

La correlación inversa observada entre Bitcoin y el dólar estadounidense sugiere que, en general, cuando el valor del dólar se fortalece, el precio de Bitcoin tiende a disminuir, y viceversa. Este comportamiento refleja cómo Bitcoin puede actuar como un refugio alternativo frente a la depreciación del dólar, ya que los inversores pueden recurrir a la criptomoneda como una forma de diversificar su exposición y proteger su poder adquisitivo.

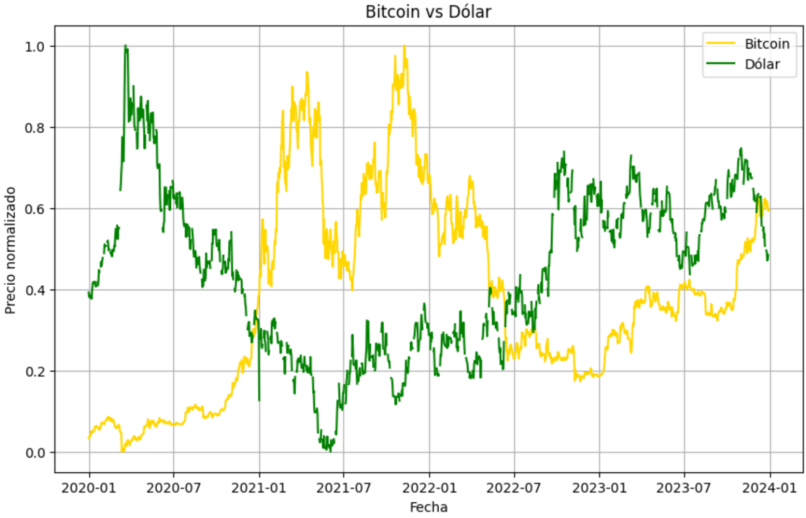


Figura: Correlación negativa entre USD y BTC

Teoría Matemática

Definición 1

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{B(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $Z = (-\infty, \infty)$ es llamado un **Movimiento Browniano** unidimensional con parámetro σ si cumple las siguientes condiciones:

a) $B(0) = 0$.
b) $\{B(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos homogéneos e independientes.
c) $B(t)$ se distribuye normal con

$$E[B(t)] = 0 \qquad Var[B(t)] = \sigma^2 t,$$

con $t \geq 0$.

Observación: De la definición anterior se puede deducir el siguiente resultado:
Si $\sigma = 1$, entonces $\{B(t) : t \geq 0\}$ es llamado **Movimiento Browniano Estándar** y será denotada como $\{W(t) : t \geq 0\}$. Para cualquier movimiento browniano con parámetro σ

$$S(t) = \sigma W(t).$$

Definición 2

Sea $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $S_0 > 0$, se define al **Movimiento Browniano Geométrico** como el proceso estocástico a tiempo continuo $\{S(t) : t \geq 0\}$ que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

donde

- $S(t)$ es el precio del activo en el tiempo t. Por consecuencia, S_0 es el valor inicial del proceso.
- μ es conocido como el **drift** o la tasa de crecimiento del activo.
- σ es la **volatilidad**.
- $W(t)$ es un movimiento browniano estándar.

Note que $S(t)$ representa el precio del activo en el tiempo t y $dW(t)$ es conocido como **ruido blanco**.
Si se logra hallar la solución de esta ecuación diferencial estocástica, el problema estará resuelto ya que se podrá saber el precio en cualquier tiempo $t > 0$. Sin embargo, para resolver la ecuación diferencial es necesaria más teoría matemática.

Lema De Itö

- **Cálculo Real**: Sea t es una variable independiente, si $dt \approx 0$ entonces
$$(dt)^2 = 0.$$
- **Cálculo Estocástico**: El cuadrado de una cantidad infinitesimal normal si es significativa. Si $\{B(t) : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano entonces:
$$(dS(t))^2 = dt.$$

El lema anterior se puede ver resumido en la siguiente tabla:

Tabla: Regla Del Cálculo Estocástico

	dt	$dS(t)$
dt	0	0
$dS(t)$	0	dt

Se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Sea $dy = \ln(S(t)) = f(S(t), t)$, denotando a $S(t) = S$, $W(t) = W$ y usando la expansión de la serie de Taylor de 2do orden, obtenemos:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial t}(dS)(dt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2.$$

Aplicando la regla del cálculo estocástico Tabla(1) y sustituyendo $dS(t)$:

$$\begin{aligned}
dy &= \frac{\partial f}{\partial S} dS + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt + 0 + 0\right) \\
&= \frac{1}{S}(\mu S dt + \sigma S dW) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S^2}(\mu S dt + \sigma S dW)^2\right) \\
&= \mu dt + \sigma dW - \frac{1}{2S^2}\mu^2 S^2 (dt)^2 \\
&- \frac{1}{2S^2} 2\mu\sigma S^2 dt dW - \frac{1}{2S^2}\sigma^2 S^2 (dW)^2 \\
&= \mu dt + \sigma dW - \frac{1}{2S^2}\sigma^2 S^2 dt \\
&= \mu dt + \sigma dW - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW.
\end{aligned}$$

Así

$$d(\ln S(t)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW(t).$$

Discretizando con $\Delta t = T - t$, $t < T$ (dt ahora es Δt) se tiene:

$$\ln(S(T)) - \ln(S(t)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\,\varepsilon_t$$

$$\ln\left(\frac{S(T)}{S(t)}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\,\varepsilon_t.$$

Aplicando la exponencial en ambos lados de la ecuación y multiplicando por $S(t)$ se obtiene que

$$S(T) = S(t)e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\ \varepsilon_t}.$$

Una vez resuelta la ecuación, se convierte de nuevo al caso continuo[2]. Además, pensando en el modelo, se trabajará con el intervalo $(0, T)$. Por lo tanto, la solución es:

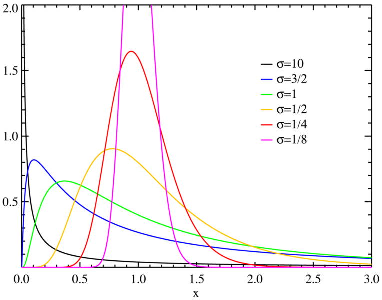
$$S(t) = S_0\, e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)}.$$

¿Por qué usar el Movimiento Browniano Geométrico?

En realidad, el movimiento Browniano geométrico es una transformación de un movimiento Browniano y se ve de la siguiente forma:

$$S(t) = e^{B(t)},$$

donde $B(t)$ es un movimiento Browniano.
A diferencia del movimiento Browniano, las amplitudes muestrales de un movimiento Browniano geométrico no pueden volverse negativas. Por lo tanto, y por conveniencia analítica, el movimiento Browniano geométrico es una herramienta favorita en matemáticas financieras para modelar precios de acciones, tasas de interés, etc.



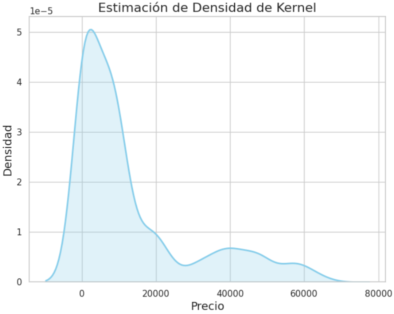


Figura: Distribución log-normal (izquierda); Estimación de la distribución de los datos de BTC (derecha)

Desarrollo del Modelo Predictivo

Dada una serie temporal Y_t con $t = 1, 2, \ldots, T$, la descomposición multiplicativa se expresa como $Y_t = T_t \times S_t \times R_t$[3]. Esta descomposición divide la serie en tres componentes principales:

1. **Tendencia (T_t)**: Representa la evolución general y a largo plazo de la serie temporal. Se calcula mediante un promedio móvil:

$$T_t = \frac{1}{m} \sum_{j=-k}^{k} Y_{t+j},$$

   donde $m = 2k + 1$.

2. **Estacionalidad (S_t)**: Describe patrones periódicos y repetitivos en los datos. Se calcula dividiendo la serie temporal original por la tendencia:

$$S_t = \frac{Y_t}{T_t}.$$

3. **Residuos (R_t)**: Representan las fluctuaciones no explicadas por la tendencia y la estacionalidad. Se calculan dividiendo la serie temporal original por el producto de la tendencia y la estacionalidad:

$$R_t = \frac{Y_t}{T_t \times S_t}.$$

Desarrollo del Modelo Predictivo

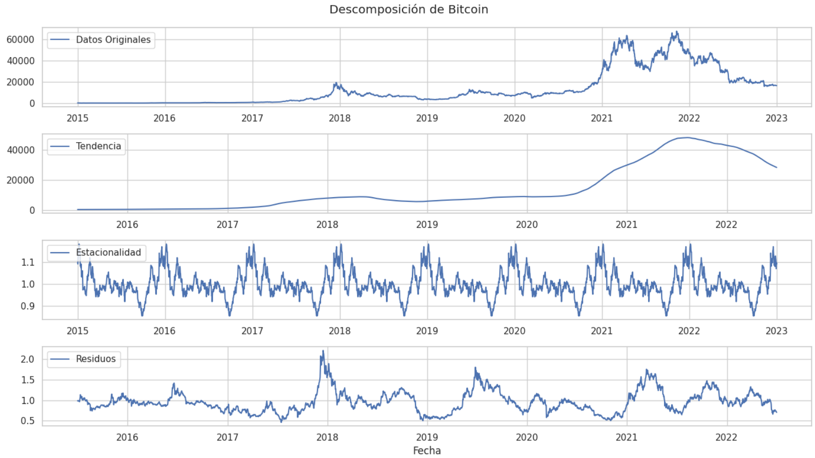


Figura: Descomposición multiplicativa de BTC

Rendimientos logarítmicos: Miden el cambio porcentual en el precio de un activo financiero entre dos períodos consecutivos y se calculan como:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right),$$

donde P_t es el precio en el tiempo t y P_{t-1} es el precio en el tiempo anterior. Son útiles para evaluar la tasa de crecimiento o decrecimiento del activo.

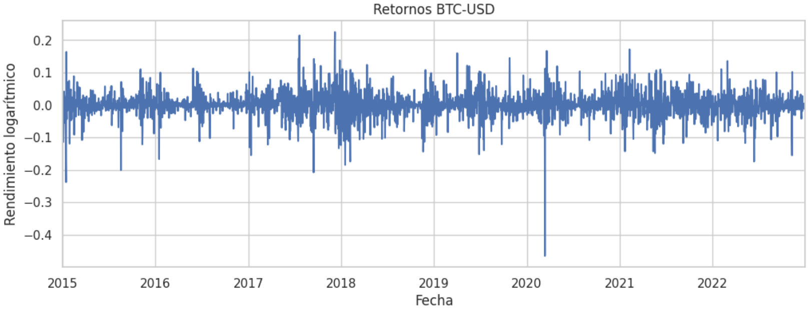


Figura: Retornos logarítmicos de Bitcoin

Media de los rendimientos logarítmicos: Representa el rendimiento promedio de un activo durante un período específico, calculado como:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_t,$$

donde n es el número total de observaciones. Una media positiva indica un crecimiento promedio, mientras que una media negativa señala una disminución.

Desviación estándar de los rendimientos logarítmicos: Mide la volatilidad del activo, indicando la magnitud de las fluctuaciones en relación con su media. Se expresa como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (r_t - \mu)^2}.$$

Una mayor desviación estándar sugiere mayor volatilidad.

Calcular μ y σ a partir de los datos permite obtener estimaciones precisas de la distribución de los rendimientos, reflejando el comportamiento real del activo financiero. Esta metodología ofrece flexibilidad al ajustar los parámetros a diferentes períodos de tiempo, siendo útil para nuestro modelo.

Tabla: Estimaciones de μ y σ

$\boldsymbol{\mu}$	0.0014
$\boldsymbol{\sigma}$	0.0388

La media sugiere que el precio tiende a aumentar con el tiempo, mientras que la desviación estándar indica que el precio puede experimentar movimientos significativos e impredecibles.

Aplicación del modelo matemático al código

La deriva o drift representa la tasa de cambio esperada del precio del activo sin considerar la volatilidad y se calcula como:

$$\text{drift} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \text{deriva ajustada},$$

donde:

- La deriva ajustada es un valor cercano a μ.

Para calcular el precio del activo en el tiempo t, se utiliza la solución de la ecuación diferencial estocástica del Movimiento Browniano Geométrico, reemplazando las variables en el algoritmo:

$$P_t = P_{t-1} \cdot e^{(\text{drift} \cdot dt) + (\sigma \cdot dt \cdot z)},$$

donde:

- P_{t-1} es el precio del activo en el tiempo anterior $t-1$.
- dt es el paso del tiempo.
- z es un número aleatorio que sigue una distribución normal estándar.

La componente $(\sigma \cdot dt \cdot z)$, conocida como proceso Wiener, representa el "ruido" del modelo.

Procedimiento Realizado

Paso 1: Asignación de parámetros

- `S0`: Precio inicial del activo.
- `mean`: Tasa de rendimiento promedio esperada.
- `std_dev`: Desviación estándar de los rendimientos del activo.
- `n_simulations`: Número de simulaciones a realizar.
- `simulation_days`: Número de días para simular.
- `drift_adjustment` (opcional): Ajuste de la deriva del modelo.

Paso 2: Inicialización de la matriz de precios

- Se crea una matriz de ceros de tamaño `n_simulations` ×`simulation_days`.
- El precio inicial `S0` se asigna a todas las simulaciones en el día 0.

Paso 3: Bucle de simulación

- Para cada día de simulación `t` desde el día 1 hasta `simulation_days - 1`:
  - Se generan `n_simulations` números aleatorios `z` que siguen una distribución normal estándar.
  - Se calcula el cambio en el precio del activo para cada simulación utilizando la fórmula del modelo GBM.
  - Este cambio se aplica a los precios del día anterior para obtener los precios del día actual para todas las simulaciones.

Paso 4: Retorno de resultados

- La función devuelve la matriz de precios simulados (`prices`), que contiene los precios simulados para cada simulación a lo largo de los días especificados.

Mejora al modelo

El modelo GBM utilizado previamente para simular los precios del activo genera trayectorias que representan la evolución estocástica de un activo financiero. Sin embargo, los precios reales pueden estar influenciados por patrones estacionales.
Para incorporar estos efectos estacionales, se multiplican las trayectorias simuladas por una serie de datos estacionales, ajustando así los precios simulados para reflejar mejor el comportamiento real. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\boldsymbol{P_s = P_t \cdot S_t},$$

donde:

- P_t son las predicciones obtenidas con GBM.
- S_t es la estacionalidad en el tiempo t.

Resultados

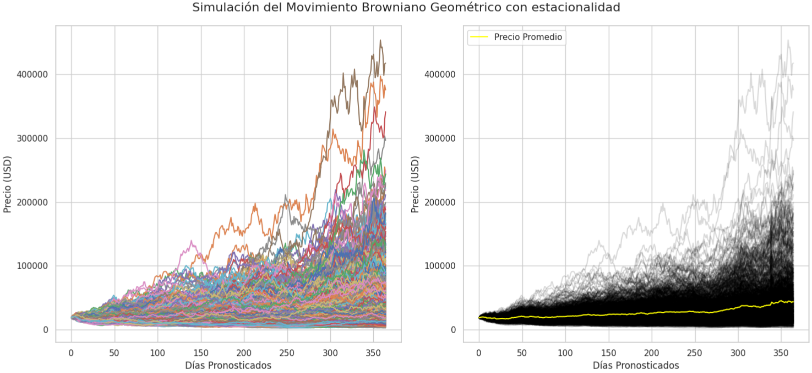


Figura: Simulaciones GBM con estacionalidad

La simulación proporciona una valiosa perspectiva sobre cómo podría comportarse el precio futuro del Bitcoin. Los resultados fueron:

Tabla: Resumen de Estadísticas de Precios

Precio Medio	\$43,608.14
Rango De Precios	\$2,805.06 - \$417,682.00
Intervalo De Confianza	(\$41,621.10, \$45,595.18)
Cambio Porcentual	163.53 %

Resultados

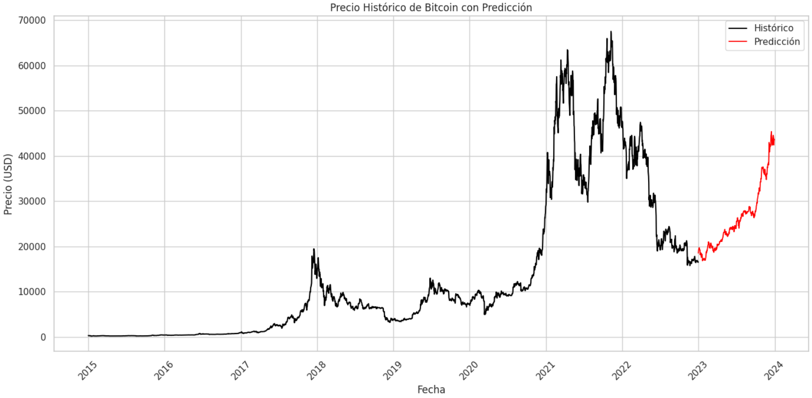


Figura: Precio histórico con predicción

Resultados

Sin embargo hace falta comparar nuestra predicción con los datos reales de ese intervalo de tiempo para sacar conclusiones estadísticas para así comprobar si el modelo es realmente eficiente.

Validación

RMSE Es de alrededor de $4204.69 indica que las predicciones del modelo difieren, en promedio, del precio real en esa cantidad. Aunque sugiere una significativa variabilidad no explicada, dado el amplio rango de precios del Bitcoin, el RMSE es relativamente bajo.

MAPE Es del 12.49 % señala que las predicciones difieren en ese porcentaje del precio real. A pesar de parecer alto, considerando la volatilidad del Bitcoin, es un nivel de error aceptable en la predicción.

Validación

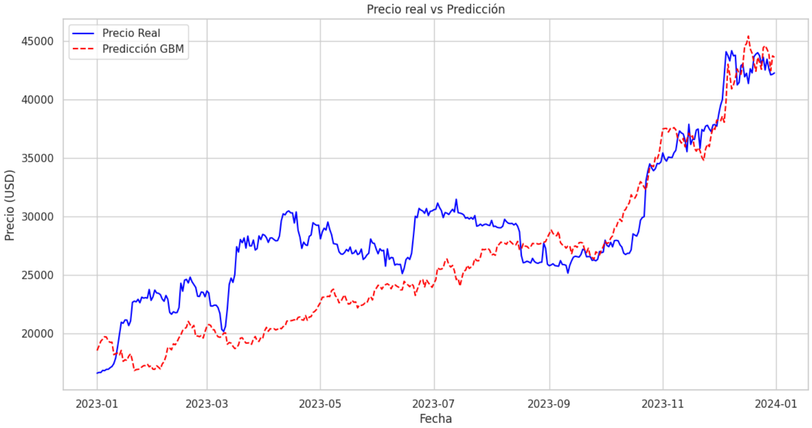


Figura: Valores reales vs predichos

Validación

Observación de los errores de estimación:

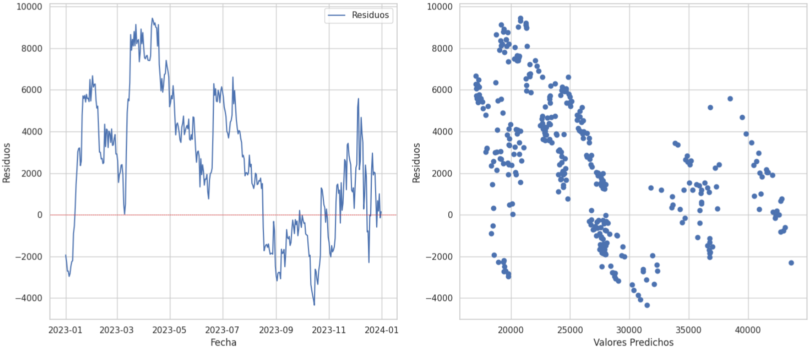


Figura: Errores

Conclusión

Al descomponer la serie temporal y aplicar el modelo GBM utilizando rendimientos logarítmicos, se capturan de manera efectiva las tendencias y variaciones en los datos históricos de Bitcoin, desafiando la percepción de que es solo una burbuja susceptible de colapsar en cualquier momento.
Aunque el mercado de criptomonedas es complejo y volátil, el modelo GBM ofrece una base sólida para comprender y anticipar las tendencias de precio de Bitcoin, lo que resulta invaluable en un entorno donde las criptomonedas están ganando mayor atención y adopción a nivel mundial. Sin embargo, es fundamental reconocer la incertidumbre inherente en este mercado.

El uso de este modelo debe complementarse con precaución y una exploración continua de la teoría matemática, así como la incorporación de algoritmos de aprendizaje automático y profundo. La integración de datos adicionales, como la correlación con otros activos, noticias financieras, sentimiento del mercado y datos de redes sociales, podría enriquecer el análisis y mejorar la capacidad predictiva del modelo.

Referencias

- Álvarez Díaz, L. J., *Criptomonedas: Evolución, crecimiento y perspectivas del Bitcoin*, 25(49), 2019.
- Beichelt, F., *Applied Probability and Stochastic Processes*, 2nd Edition, Taylor & Francis Group, LLC, 2016.
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A., *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3rd Edition, Springer, 2016.
- Nakamoto, S., *Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System*, 2008.