370019 (Israel Vidal) **CK0031: Homework 05**

Exercise 05.00.

A: Show by direct evaluation that this distribution has the property that a and b are marginally dependent, so that $p(a, b) \neq p(a)p(b)$, but that they become independent when conditioned on c, so that $p(a, b \mid c) = p(a \mid c)p(b \mid c)$ for both c = 0 and c = 1.

B: Evaluate the distributions $p(a)$, $p(b \mid c)$, and $p(c \mid a)$ corresponding to the joint above and show by direct evaluation that $p(a, b, c) = p(a)p(c \mid a)p(b \mid c)$ and show the corresponding directed graph.

Solution: As probabilidades utilizadas nessa questão foram obtidas ao fazer a devida marginalização das variáveis na tabela dada.

A: Para provar a desigualdade precisamos mostrar apenas que existe um caso onde $p(a, b) \neq p(a)p(b)$. Seja $a = 1$ e $b = 1$. Temos:
$p(a, b) = 0.096 + 0.048 = 0.144$
$p(a) = 0.192 + 0.064 + 0.048 + 0.096 = 0.4$
$p(b) = 0.048 + 0.216 + 0.048 + 0.096 = 0.408$
Portanto temos que $p(a)p(b) = 0.1632 \neq p(a, b)$

$p(a, b \mid c) = p(a \mid c)p(b \mid c)$
Nesse caso, como queremos provar a igualdade, é necessário mostrar que a equação é válida para todos os casos.

Seja c = 0:
Através da tabela temos:
$p(a = 0, b = 0 \mid c = 0) = \frac{0.192}{0.192+0.048+0.192+0.048} = 0.4$

$p(a = 0 \mid c = 0) = \frac{0.192+0.048}{0.192+0.048+0.192+0.048} = \frac{0.24}{0.48} = 0.5$

$p(b = 0 \mid c = 0) = \frac{0.192+0.192}{0.48} = 0.8$

Logo, temos que:
$p(a = 0 \mid c = 0)p(b = 0 \mid c = 0) = 0.5 * 0.8 = 0.4 = p(a = 0, b = 0 \mid c = 0)$

$p(a = 0, b = 1 \mid c = 0) = \frac{0.048}{0.48} = 0.1$

$p(a = 0 \mid c = 0) = \frac{0.192+0.048}{0.48} = \frac{0.24}{0.48} = 0.5$

$p(b = 1 \mid c = 0) = \frac{0.048+0.048}{0.48} = 0.2$

Logo, temos que:
$p(a = 0 \mid c = 0)p(b = 1 \mid c = 0) = 0.5 * 0.2 = 0.1 = p(a = 0, b = 1 \mid c = 0)$

$p(a=1, b=0 \mid c=0) = \frac{0.0192}{0.48} = 0.4$

$p(a=1 \mid c=0) = \frac{0.192+0.048}{0.48} = \frac{0.24}{0.48} = 0.5$

$p(b=0 \mid c=0) = \frac{0.192+0.192}{0.48} = 0.8$

Logo, temos que:
$p(a=1 \mid c=0)p(b=0 \mid c=0) = 0.5 * 0.9 = 0.4 = p(a=1, b=0 \mid c=0)$

$p(a=1, b=1 \mid c=0) = \frac{0.048}{0.48} = 0.1$

$p(a=1 \mid c=0) = \frac{0.192+0.048}{0.48} = \frac{0.24}{0.48} = 0.5$

$p(b=1 \mid c=0) = \frac{0.048+0.048}{0.48} = 0.2$

Logo, temos que:
$p(a=1 \mid c=0)p(b=1 \mid c=0) = 0.5 * 0.2 = 0.1 = p(a=1, b=1 \mid c=0)$

Seja c = 1:
$p(a=0, b=0 \mid c=1) = \frac{0.144}{0.144+0.216+0.064+0.096} = 0.2769$

$p(a=0 \mid c=1) = \frac{0.144+0.216}{0.52} = \frac{0.36}{0.52} = 0.6923$

$p(b=0 \mid c=1) = \frac{0.144+0.064}{0.52} = 0.4$

Logo, temos que:
$p(a=0 \mid c=1)p(b=0 \mid c=1) = 0.6923 * 0.4 \approx 0.2769 = p(a=0, b=0 \mid c=1)$

$p(a=0, b=1 \mid c=1) = \frac{0.216}{0.52} \approx 0.41538$

$p(a=0 \mid c=1) = \frac{0.144+0.216}{0.52} = 0.6923$

$p(b=1 \mid c=1) = \frac{0.216+0.096}{0.52} = 0.6$

Logo, temos que:
$p(a=0 \mid c=1)p(b=1 \mid c=1) = 0.6923 * 0.6 = 0.41538 = p(a=0, b=1 \mid c=1)$

$p(a = 1, b = 0 \mid c = 1) = \frac{0.064}{0.52} = 0.12308$

$p(a = 1 \mid c = 1) = \frac{0.064+0.096}{0.52} = 0.30769$

$p(b = 0 \mid c = 1) = \frac{0.144+0.064}{0.52} = 0.4$

Logo, temos que:
$p(a = 1 \mid c = 1)p(b = 0 \mid c = 1) = 0.4 * 0.30769 \approx 0.12308 = p(a = 1, b = 0 \mid c = 0)$

$p(a = 1, b = 1 \mid c = 1) = \frac{0.096}{0.52} = 0.1846$

$p(a = 1 \mid c = 1) = \frac{0.064+0.096}{0.52} = 0.30769$

$p(b = 1 \mid c = 1) = \frac{0.216+0.096}{0.52} = 0.6$

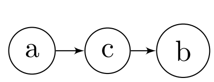
Logo, temos que:
$p(a = 1 \mid c = 1)p(b = 1 \mid c = 1) = 0.6 * 0.30769 \approx 0.1846 = p(a = 1, b = 1 \mid c = 0)$

Como mostramos que a igualdade é verdadeira para todos os casos, provamos que $p(a \mid c)p(b \mid c) = p(a, b \mid c)$

B: Os valores abaixo foram obtidos através da marginalização.

$p(a = 0) = 0.192 + 0.144 + 0.048 + 0.216 = 0.6$
$p(a = 1) = 0.192 + 0.064 + 0.048 + 0.096 = 0.4$
$p(b = 0/c = 0) = \frac{0.192+0.192}{0.48} = 0.8$
$p(b = 1c = 0) = \frac{0.048+0.048}{0.48} = 0.2$
$p(b = 0c = 1) = \frac{0.144+0.064}{0.52} = 0.4$
$p(b = 1c = 1) = \frac{0.216+0.096}{0.52} = 0.6$
$p(c = 0 \mid a = 0) = \frac{0.192+0.048}{0.6} = 0.4$
$p(c = 1 \mid a = 0) = \frac{0.144+0.216}{0.6} = 0.6$
$p(c = 0 \mid a = 1) = \frac{0.192+0.048}{0.4} = 0.6$
$p(c = 1 \mid a = 1) = \frac{0.064+0.096}{0.4} = 0.4$

$p(a = 0, b = 0, c = 0) = 0.6 * 0.4 * 0.8 = 0.192$
$p(a = 0, b = 0, c = 1) = 0.6 * 0.6 * 0.4 = 0.144$
$p(a = 0, b = 1, c = 0) = 0.6 * 0.4 * 0.2 = 0.048$
$p(a = 0, b = 1, c = 1) = 0.6 * 0.6 * 0.6 = 0.216$
$p(a = 1, b = 0, c = 0) = 0.4 * 0.6 * 0.8 = 0.192$
$p(a = 1, b = 0, c = 1) = 0.4 * 0.4 * 0.4 = 0.064$
$p(a = 1, b = 1, c = 0) = 0.4 * 0.6 * 0.2 = 0.048$
$p(a = 1, b = 1, c = 1) = 0.4 * 0.4 * 0.6 = 0.096$



Exercise 05.01.

A: State if these conditional independence relations are true or false and motivate your answers.

A1: Tuberculosis$\perp\!\!\!\perp$ $Smoking$ | Shortness of breath

A2: Lung cancer$\perp\!\!\!\perp$ $Bronchitis$ | Smoking

A3: Visit to Asia$\perp\!\!\!\perp$ $Smoking$ | Lung cancer

A4:Visit to Asia$\perp\!\!\!\perp$ $Smoking$ | Lung cancer, Shortness of breath

B: Calculate by hand (that is, show your working) the values for p(d),$p(d \mid s = true)$ and $p(d \mid s = false)$

Solution:

A: Lembrando que para que dois eventos sejam codicionalmente independentes, todos os caminhos entre os dois vértices(eventos) devem ser bloqueados. Um caminho é dito bloqueado se: 1) dado um colisor x no caminho, nem x nem seus filhos estão presentes das condições. 2) dado um vértice não colisor y no caminho, y está na condição.

A1: $t \perp\!\!\!\perp s \mid d$: Temos dois caminhos entre t,s: 1)t,e,l,s: temos que 'e' é colisor e 'd', filho de 'e' pertence às condicionais. Note também que não existem vértices não colisores no caminho que satisfaçam à condição 2, logo esse caminho é não bloqueado e temos que 'l' e 's' são condicionalmente dependentes com relação à 'd'.

A2: $l \perp\!\!\!\perp b \mid s$: temos dois caminhos entre l,b: 1) l,s,b: temos que 's' é não colisor nesse caminho e pertence às condições, logo esse caminho é bloqueado. 2) l,e,d,b: 'd' é colisor no caminho e nem 'd' nem seus filhos estão nas condições, logo o caminho é bloqueado. Como todos os caminhos estão bloqueados, a independência condicional está comprovada.

A3: $a \perp\!\!\!\perp s \mid l$: temos dois caminhos entre a,s: 1) a,t,e,d,b,s: nem o colisor 'd' no caminho nem seus filhos estão nas condições, então o caminho é bloqueado. 2) a,t,e,l,s: nem o colisor 'e' nem seus filhos estão nas condicionais, então o caminho é bloqueado. Como todos os caminhos estão bloqueados, a independencia condicional está comprovada.

A4: $a \perp\!\!\!\perp s \mid l, d$: temos que no caminho a,t,e,d,b,s: 'd' é colisor e pertence às condições e para todo vértice não colisor a condição 2 não é satisfeita, portanto esse caminho não é bloqueado e temos que 'a' e 's' são condicionalmente dependentes com relação à 'l,d'

B: Observando a rede sabemos que:

$$p(a,s,t,l,b,e,x,d) = \sum_{a,s,t,l,b,e,x,d} p(a)p(t \mid a)p(s)p(l \mid s)p(b \mid s)p(e \mid t,l)p(x \mid e)p(d \mid e,b)$$

$$= \sum_{a,s,t,l,b,e,d} p(a)p(t \mid a)p(s)p(l \mid s)p(b \mid s)p(e \mid t,l)p(d \mid e,b) \sum_{x} p(x \mid e)$$

Temos que

$$\sum_{x} p(x \mid e) = 1$$

Portanto temos agora que:

$$p(a,s,t,l,b,e,d) = \sum_{a,s,t,l,b,e,d} p(a)p(t \mid a)p(s)p(l \mid s)p(b \mid s)p(e \mid t,l)p(d \mid e,b)$$

Podemos agora nos beneficiar da seguinte igualdade:

$$p(t \mid a)p(a) = p(a, t)$$

Fazendo a marginalização temos que

$$\sum_a p(a, t) = p(t)$$

O que nos dá que: $p(t = 1) = (0.05 * 0.01) + (0.01 * 0.99) = 0.0104$ e $p(t = 0) = 0.9896$
Temos, portanto:

$$p(s, t, l, b, e, d) = \sum_{s,t,l,b,e,d} p(s)p(l \mid s)p(b \mid s)p(e \mid t, l)p(d \mid e, b)p(t)$$

Agora utilizaremos a seguinte igualdade:

$$p(e, t, l) = p(e \mid t, l)p(t \mid l)p(l)$$

Através do grafo podemos concluir que $t \perp\!\!\!\perp l$, portanto $p(e, t, l) = p(e \mid t, l)p(t)p(l)$
Note que

$$p(e, l) = \sum_t p(e \mid t, l)p(t)p(l) = p(l) \sum_t p(e \mid t, l)p(t)$$

Veja também que

$$p(e, l) = p(e \mid l)p(l)$$

Portanto,

$$p(e \mid l) = \sum_t p(e \mid t, l)p(t)$$

Logo:

$$p(e = 1 \mid l = 1) = (1 * 0.0104) + 0.9896 = 1$$
$$p(e = 1 \mid l = 0) = (1 * 0.0104) + 0 = 0.0104$$

Temos então que:

$$p(s, l, b, e, d) = \sum_{s,l,b,e,d} p(s)p(l \mid s)p(b \mid s)p(d \mid e, b)p(e \mid l)$$

O PASSO A SEGUIR FOI FEITO COM A AJUDA DE ERICK LIMA
Pelo teorema de Bayes temos que:

$$p(s \mid l) = \frac{p(l \mid s)p(s)}{p(l)}$$

Temos também que

$$p(e, l, s) = p(s \mid l, e)p(e \mid l)p(l)$$

Como observando a rede temos que $s \perp\!\!\!\perp e \mid l$, podemos concluir que $p(s \mid l, e) = p(s \mid l)$
Concluímos então que

$$p(e, l, s) = p(s \mid l)p(e \mid l)p(l) = \frac{p(l \mid s)p(s)p(e \mid l)p(l)}{p(l)} = p(l \mid s)p(e \mid l)p(s)$$

Fazendo a marginalização de l, temos:

$$p(e, s) = \sum_l p(l \mid s)p(e \mid l)p(s)$$

Portanto, temos que:

$$p(e \mid s) = \sum_l \frac{p(l \mid s)p(e \mid l)p(s)}{p(s)} = \sum_l p(l \mid s)p(e \mid l)$$

Portanto:

$$p(e = 1 \mid s = 1) = (1 * 0.1) + (0.0104 * 0.9) = 0.10936$$

$$p(e = 1 \mid s = 0) = (1 * 0.01) + (0.0104 * 0.99) = 0.020296$$

Temos agora que:

$$p(s, b, e, d) = \sum_{s,b,e,d} p(b \mid s)p(d \mid e, b)p(s)$$

Sabe-se que $p(d, e, b, s) = p(d \mid e, b, s)p(e \mid b, s)p(b, s)$
Através da rede podemos obter as seguintes independências:
1) $e \perp\!\!\!\perp b \mid s$, portanto $p(e \mid b, s) = p(e \mid s)$
2) $d \perp\!\!\!\perp s \mid e, b$, portanto $p(d \mid e, b, s) = p(d \mid e, b)$
Com as igualdades acima, juntamente com a marginalização de e, temos:

$$p(d, b, s) = \sum_e p(d \mid e, b)p(e \mid s)p(b, s)$$

O que nos dá que

$$p(d \mid b, s) = \sum_e p(d \mid e, b)p(e \mid s)$$

$$p(d = 1 \mid s = 1, b = 1) = (0.9 * 0.10936) + (0.8 * 0.89064) = 0.810936$$

$$p(d = 1 \mid s = 1, b = 0) = (0.7 * 0.10936) + (0.1 * 0.89064) = 0.165616$$

$$p(d = 1 \mid s = 0, b = 1) = (0.9 * 0.020296) + (0.8 * 0.979704) = 0.8020296$$

$$p(d = 1 \mid s = 0, b = 0) = (0.7 * 0.020296) + (0.1 * 0.979704) = 0.1121776$$

Nos restando então:

$$p(b, d, s) = \sum_{b,d,s} p(b \mid s)p(s)p(d \mid s, b)$$

Veja que:

$$p(d, s) = \sum_b p(d \mid s)p(s)p(d \mid s, b)$$

Portanto:

$$p(d \mid s) = \sum_b p(d \mid s)p(d \mid s, b)$$

$$p(d = 1 \mid s = 1) = (0.6 * 0.810936) + (0.4 * 0.16516) = 0.5526256$$

$$p(d = 1 \mid s = 0) = (0.3 * 0.8020296) + (0.7 * 0.1121776) = 0.3191332$$

Logo, temos $p(d, s) = p(d \mid s)p(s)$
Por fim, para obter $p(d = 1)$ basta fazer a marginalização de s, ou seja:

$$p(d) = \sum_s p(d \mid s)p(s) = (0.5526256 * 0.5) + (0.3191332 * 0.5) = 0.4358794$$

Exercise 05.02. You are given two belief networks represented as DAGs A and B with associated adjacency matrices A and B. Write your own code that takes the two matrices A and B as inputs and outputs 1 if A and B are Markov equivalent, and 0 otherwise.

Solution: `https://github.com/israelcvidal/Artificial_Inteligence/blob/master/AI-HW05-Markov_Equivalence/Markov_Equivalence.py`

Exercise 05.03. Use the code you have written for Exercise 05.02 to state if they are Markov equivalent.

Solution: `https://github.com/israelcvidal/Artificial_Inteligence/blob/master/AI-HW05-Markov_Equivalence/Markov_Equivalence.py`