

# Otimização de Carteira de Investimentos

## 1 Justificativa e Fórmulas

### 1.1 1. Cálculo do Desempenho da Carteira

```
def portfolio_performance(weights, mean_returns, cov_matrix):  
    """Calcula o retorno esperado e o risco (volatilidade) da carteira."""  
    returns = np.sum(mean_returns * weights)  
    risk = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov_matrix, weights)))  
    return returns, risk
```

#### 1.1.1 Justificativa

**Retorno Esperado:** O retorno esperado de uma carteira é calculado como a soma ponderada dos retornos esperados dos ativos. A fórmula para o retorno esperado  $R_p$  da carteira é dada por:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot R_i$$

onde:

- $w_i$  = peso do ativo  $i$  na carteira.
- $R_i$  = retorno esperado do ativo  $i$ .
- $n$  = número total de ativos na carteira.

**Risco (Volatilidade):** O risco de uma carteira é medido pela volatilidade, que é a raiz quadrada da variância da carteira. A fórmula para o risco  $\sigma_p$  da carteira é dada por:

$$\sigma_p = \sqrt{w^T \cdot \Sigma \cdot w}$$

onde:

- $w$  = vetor de pesos dos ativos.
- $\Sigma$  = matriz de covariância dos retornos dos ativos.

### 1.2 2. Cálculo do Sharpe Ratio Negativo

```
def neg_sharpe_ratio(weights, mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate):  
    """Calcula o Sharpe Ratio negativo, para maximização."""  
    returns, risk = portfolio_performance(weights, mean_returns, cov_matrix)  
    sharpe_ratio = (returns - risk_free_rate) / risk  
    return -sharpe_ratio
```

#### 1.2.1 Justificativa

**Sharpe Ratio:** O Sharpe Ratio é uma medida de desempenho ajustada ao risco, que quantifica o retorno adicional por unidade de risco. É definido como:

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

onde:

- $S$  = Sharpe Ratio.
- $R_p$  = retorno esperado da carteira.
- $R_f$  = taxa livre de risco.
- $\sigma_p$  = volatilidade da carteira.

A função `neg_sharpe_ratio` retorna o valor negativo do Sharpe Ratio porque estamos utilizando um método de minimização (`sco.minimize`). Minimizar o negativo do Sharpe Ratio é equivalente a maximizar o Sharpe Ratio.

### 1.3 3. Otimização da Carteira

```
def optimize_portfolio(mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate):
    """Otimiza a carteira usando o Sharpe Ratio."""
    num_assets = len(mean_returns)
    args = (mean_returns, cov_matrix, risk_free_rate)
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1})
    bounds = tuple((0, 1) for asset in range(num_assets))
    result = sco.minimize(neg_sharpe_ratio, num_assets * [1. / num_assets,], args=args,
                          method='SLSQP', bounds=bounds, constraints=constraints)

    return result
```

#### 1.3.1 Justificativa

**Otimização:** A função `optimize_portfolio` utiliza o método de otimização SLSQP (Sequential Least Squares Programming) para maximizar o Sharpe Ratio. Os passos incluem:

- **Pesos Iniciais:** Inicia a otimização com pesos iguais para todos os ativos:  $\frac{1}{n}$ .
- **Restrições:** A primeira restrição garante que a soma dos pesos dos ativos na carteira seja igual a 1:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

- **Limites:** Os limites (0,1) asseguram que os pesos sejam não negativos e não excedam 100% do capital total investido em cada ativo.

## 2 Conclusão

Essas funções juntas implementam um algoritmo de otimização de carteira que utiliza o problema da mochila para maximizar o retorno esperado, respeitando um limite de risco aceitável. A escolha do Sharpe Ratio como critério de maximização é justificada por sua capacidade de medir a eficiência do retorno em relação ao risco associado. A otimização se torna um processo eficaz para ajudar investidores a construir carteiras que equilibrem retorno e risco de maneira quantificável.