# Aula 00 – Equações e Funções

*Curso Intensivo para Vestibulares 2020*

*Professor Marçal*

# Sumário

# Introdução

Olá, pessoal!

Com satisfação começamos aqui nosso curso preparatório para o vestibular.

Meu nome é Marçal, graduado em Matemática pela UFSJ, Universidade Federal de São João del Rei, professor em cursos pré-vestibulares desde 1999. Como tutor, orientei dezenas de estudantes ao longo do espinhoso caminho até a aprovação em exames vestibulares de alto desempenho como Fuvest, Unicamp, ITA, AFA, entre outros. Ao longo da vida, com satisfação, elegi a Matemática como ferramenta pessoal para construção do conhecimento.

Minha missão aqui é dar a você todos os recursos e condições de aprovação, construindo seu conhecimento desde o conhecimento básico aos mais avançados.

Como costumo dizer aos meus alunos, aproveite ao máximo o conteúdo e tenha em mente que nada se conquista sem esforço. Se por um lado estamos oferecendo a você um material de alta qualidade, por outro você terá que se preparar para muitas e muitas horas de trabalho duro. Não negligencie o seu desenvolvimento.

Ah, e se aparecer aquela dúvida enquanto estuda? É só entrar em contato, teremos prazer em ajudar. Pergunte pelo fórum de dúvidas no site do Estratégia ou, se preferir, as alternativas:

FALE COMIGO

/professormarcal /professor.marcal /professormarcal

# Metodologia do curso

Nossas aulas abrangerão todo o conteúdo cobrado nas provas dos principais vestibulares do país, de forma ampla, com centenas de exercícios resolvidos detalhadamente para que você possa construir seu conhecimento a cada passo, em cada detalhe.

E a Matemática é cheia deles, os detalhes, não é mesmo?

Nosso curso é composto por PDFs, com teoria e exercícios, e videoaulas.

A parte teórica é completa, porém objetiva, trazendo as informações necessárias à parte subsequente, os exercícios direcionados. Nesse ponto, o material traz uma análise minuciosa dos assuntos comumente cobrados nos processos seletivos para ingresso no ensino superior.

Desse modo, não será necessário que você procure materiais de diversas fontes como complemento, economizando, além de dinheiro, um tempo precioso a ser utilizado efetivamente na sua preparação.

Neste curso, utilizaremos questões de vestibulares, na maior quantidade possível, questões inéditas e questões didáticas, quando pertinentes ao momento de seu aprendizado.

Ao final do curso, com literalmente centenas de exercícios em sua experiência, você terá todas as condições para fazer uma excelente prova e alcançar sua almejada aprovação.

Vamos começar?

# Cronograma de aulas

CRONOGRAMA DE AULAS

| Aula | Tópico |
|---|---|
| **Aula 00** | Aritmética |
| | Conjuntos |
| | Introdução à Álgebra |
| **Aula 01** | Introdução à Função |
| **Aula 02** | Funções Racionais |
| | Módulos e<br>Funções Modulares |
| **Aula 03** | Exponenciais e Logaritmos |
| | Introdução à Trigonometria |
| **Aula 04** | Progressão Aritmética e Progressão Geométrica |
| **Aula 05** | Matrizes |
| **Aula 06** | Sistemas Lineares |
| **Aula 07** | Análise Combinatória |

| | |
|---|---|
| **Aula 08** | Probabilidades |
| **Aula 09** | Complexos |
| **Aula 10** | Polinômios e Equações Polinomiais |
| **Aula 11** | Introdução à Geometria Plana |
| **Aula 12** | Figuras Planas |
| **Aula 13** | Construções Geométricas |
| **Aula 14** | Geometria Espacial |
| **Aula 15** | Introdução à Geometria Analítica |
| **Aula 16** | Geometria Analítica Aplicações |
| **Aula 17** | Matemática Financeira |
| **Aula 18** | Estatística |

Bem, temos muito a estudar, vamos começar?

# 1. Conceitos iniciais

Provavelmente você já deve ter estudado algo sobre a disciplina que começamos agora, mas você sabe definir o que é a Matemática?

Para início de conversa, Matemática é uma ciência e seu foco de estudo é a relação entre objetos abstratos, sobretudo pelo método dedutivo.

A Matemática tem muitas ramificações e estudaremos um pouco delas neste curso, com ênfase dada à resolução de exercícios para o vetibular.

Mas professor, já li muitos materiais sobre matemática e sempre tenho dificuldades. Como me aconselha a estudar?

Essa é simples: teoria + exercícios. Não tem remédio, a prática é necessária para aprender algo da Matemática.

O Professor Elon Lages Lima, em seu livro *Curso de Análise, Vol. 1* diz: “Matemática não se aprende passivamente”.

De início, vamos esclarecer alguns conceitos que serão importantíssimos para o bom transcorrer de nosso curso.

Muito do que veremos agora você já viu nos anos finais do ensino fundamental ou no ensino médio, mas a citação deles é vital para seguirmos de forma segura.

## 1.1. Diferença entre Expressões, Igualdades, Equações, Inequações e Funções

Mesmo bons alunos tendem a aproximar o significado de todas estas palavras: **expressões, igualdades, equações, inequações e funções**.

Talvez seja por causa de seu núcleo comum, alicerçado fortemente na aritmética e na álgebra, quando resolvíamos centenas de exercícios com o mesmo enunciado, “Simplifique as expressões”.

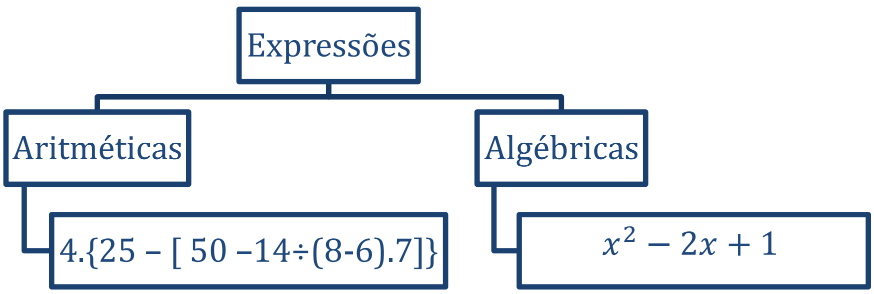
Daí a considerar as igualdades, equações, inequações e até mesmo as funções como expressões foi um passo. Tudo o que se via com sinais matemáticos era colocado na mesma categoria.

Oras, professor, mas não são sinônimos?

De forma alguma!

Nessa aula, veremos a diferença entre elas e aprofundaremos nosso conhecimento.

Comecemos pelas expressões. Elas podem ser tanto aritméticas (ou numéricas) quanto algébricas. As aritméticas apresentam apenas números em sua composição, enquanto as algébricas, variáveis.




Simplificando a expressão aritmética

$$4\{25 - [50 - 14 \div (8 - 6).7]\}$$

verá que seu resultado é 96.

Vamos detalhar os métodos para essa transformação ainda nessa aula, mas não agora. Aqui eu preciso que você foque apenas na diferenciação entre as maneiras de escrita que usaremos em todo o curso. Aliás, você as usará em toda a sua carreira acadêmica em exatas!

Retomemos.

Escrever

$$4\{25 - [50 - 14 \div (8 - 6).7]\}$$

é exatamente o mesmo que escrever 96, são equivalentes.

Para usar uma expressão popular antiga, você trocou seis por meia dúzia.

Com expressões algébricas não é diferente, veja o nosso exemplo:

$$x^2 - 2x + 1$$

O que você faz com isso?

Bom, você pode escrever de outra maneira, simplificar, fatorar, expandir...

Se você se lembra dos produtos notáveis, perceberá rapidamente que

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Ou seja, escrever

$$x^2 - 2x + 1$$

é exatamente o mesmo que escrever

$$(x - 1)^2$$

porém, na forma fatorada.

É extremamente importante que você perceba que não podemos fazer um gráfico dessa expressão, não podemos falar sobre o comportamento da função nem falar sobre quanto vale a incógnita x. Tudo o que podemos fazer é escrevê-la de outro modo.

Lembre-se, expressões trazem um valor, numérico ou algébrico.

Agora uma mudança importante, o símbolo de igualdade, também conhecido como sinal de igual $(=)$. Com ele as coisas mudam de significado.

Ao usar o sinal de igual entre expressões aritméticas, temos literalmente uma igualdade, que pode admitir valores lógicos ou de Verdadeiro (V) ou de Falso (F) (mas não ambos). Acompanhe.

$$4 \,.\, 3 = 12 \ \rightarrow (V)$$

$$4 \,.\, 3 = 29 \ \rightarrow (F)$$

Já ao adicionarmos o sinal de igual na Expressão Algébrica

$$x^2 - 2x + 1 = 9$$

o que era uma expressão, passa a ser uma pergunta, uma equação.

A equação

$$x^2 - 2x + 1 = 9$$

é exatamente o mesmo que a pergunta: qual o número de cujo quadrado foi subtraído seu dobro e, a essa diferença somado um, resultou em nove?

Perceba que a pergunta na forma escrita é um pouco indigesta. A notação matemática, apesar dos pesares, vem para facilitar a comunicação e o entendimento.

Outro ponto a ser notado é que, enquanto a equação aritmética admite valores ou de Verdadeiro (V) ou de Falso (F), não podemos dizer o mesmo sobre equações algébricas. Não se pode olhar para uma equação do tipo

$$x^2 - 2x + 1 = 9$$

e dizer se é verdadeira ou falsa. A esse tipo de informação matemática chamamos sentença aberta; uma sentença que não admite valores de verdadeiro ou falso.

Muito bem. O exemplo acima trouxe uma Equação do segundo grau. Com equações do primeiro grau, o pensamento é o idêntico. A equação

$$2x + 3 = 11$$

é equivalente a perguntar: qual é o número cujo dobro somado a três resulta em onze?

Perceba que, em ambos os casos, espera-se uma resposta, que pode conter de nenhum a vários números, mas sempre uma resposta.


Ao fazer um exercício sobre expressões você também oferece uma resposta, mas é preciso que você entenda: não foi a própria expressão que trouxe a pergunta e sim o enunciado do exercício na forma de comando ou questão propriamente dita. "Simplifique as expressões" ou "Qual é o valor da expressão?" são comandos muito comuns nas provas.

Falaremos sobre as técnicas de resolução para essas equações mais adiante, o importante aqui é que fique absolutamente claro para você até aqui a diferença entre **Expressão** e **Equação**.

Vamos adiante?

Agora é a vez das Inequações:

Como as Equações, as Inequações também fazem pergunta. No caso

$$2x + 3 > 11$$

a pergunta seria algo do tipo: quais são os números possíveis cujos dobros somados a 3 são maiores que onze?

Enquanto na igualdade tínhamos, para

$$2x + 3 = 11$$

apenas um valor como resposta, o número 4, na inequação

$$2x + 3 > 11$$

temos infinitos valores.

São respostas igualmente válidas para essa inequação os números $\{8, 12, \sqrt{50}, 10\pi \ldots\}$.

Na verdade, qualquer número superior a 4 satisfaz a condição da inequação em voga. A esse conjunto de valores, damos o nome de intervalo. Dessa forma, uma resposta mais apropriada seria, naturalmente,

$$x > 4$$

Detalharemos o método de resolução das inequações mais à frente nessa aula, não se preocupe com isso agora.

O próximo passo é muito importante, pois vamos diferenciar Equação de Função.

Enquanto Equação e Inequação fazem uma pergunta acerca do(s) valor(es) da incógnita, que chamamos até aqui de "x" (pode, literalmente, ser qualquer símbolo) a Função traz informação, ela não pergunta coisa alguma!

São vários os modos de se representar uma função, vejamos os principais:

$$y = 2x + 3$$

$$y(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = 2x + 3$$

Todas essas notações representam a mesma função, uma variável "em função" da outra, uma variável dependente da outra.

Vamos a um exemplo prático. Você trabalha em uma loja de aparelhos de som e seu salário é composto por um salário fixo de R$ 1 000,00 somado à comissão de R$ 500,00 a cada aparelho vendido no mês.

| | |
|---|---|
| Salário fixo | R$ 1 000,00 |
| Comissão a cada aparelho de som vendido | R$ 500,00 |

Uma maneira para representar seu salário no mês é por meio da função, seu salário **S** em função do número **n** de vendas:

$$S(n) = 1\,000 + 500.\,n$$

Assim, caso você venda 3 aparelhos de som em um mês, seu salário será:

$$S(3) = 1\,000 + 500.3$$

$$S(3) = 2\,500$$

Perceba que esse não é seu salário sempre, é só para quando você fizer exatamente 3 vendas. Não é possível saber quanto você ganhará no próximo mês, ou no próximo natal.

Função não faz perguntas, lembra? Ela só informa algo a você.

**RESUMINDO**

| Expressão | Equação | Inequação | Função |
|---|---|---|---|
| 2x+3 | 2x+3=11 | 2x+3>11 | y=2x+3 |
| Não faz pergunta | Faz pergunta | Faz pergunta | Não faz pergunta |
| Traz um valor | Respostas pontuais | Intervalo de resposta | Traz relação entre duas ou mais variáveis |
| | x = 4 | x > 4 | |

# 2. Expressões

## 2.1. Expressões aritméticas

Como já deve estar claro para você, expressões podem ser manipuladas, fatoradas, simplificadas, expandidas.

Estudemos com mais cuidado essas possiblidades.

Expressões algébricas marcam por demandarem conhecimentos básicos das quatro operações. Para resolver à expressão exposta como exemplo, precisamos ter em mente alguns conceitos do ensino fundamental.

Os elementos parênteses, colchetes e chaves devem ser resolvidos nessa ordem, obrigatoriamente.

As operações também têm ordem certa para serem resolvidas. Multiplicações e divisões têm precedência sobre somas e subtrações.

Ordem de resolução

Elementos → ( ) → [ ] → { }

Operações → x ÷ → + -

Professor, não sei se entendi bem. Entendi que primeiro se resolve o que estiver entre parênteses, depois entre colchetes e, finalmente, entre chaves. Mas como fica a prioridade entre uma multiplicação e uma divisão, quem tem precedência? E entre soma e subtração?

Excelente pergunta.

Pois bem, se não houver operador algum para ditar a ordem, deve-se resolver a operação que aparecer primeiro na ordem de escrita, ou seja, da esquerda para a direita. Isso vale tanto para **multiplicações e divisões** quanto para somas e subtrações.

TOME NOTA!

**Para prioridades, consideraremos as potências e raízes semelhantes à multiplicação!**

Como fica, então, a resolução da expressão algébrica anterior? Fácil, veja:

$$4\{25-[50-14\div(8-6).7]\}$$

Primeiro os parênteses, claro.

$$4\{25-[50-14\div(8-6).7]\}$$

$$4\{25-[50-14\div 2.7]\}$$

Agora, os colchetes. Mas vá com calma! Perceba que há tanto uma divisão quanto uma multiplicação a fazer. Qual deles faremos primeiro? Isso, a divisão, pois ela aparece à esquerda, na ordem de escrita.

$$4\{25-[50-14\div 2.7]\}$$

$$4\{25-[50-7.7]\}$$

Os colchetes ainda não foram resolvidos, então continuamos nele.

$$4\{25-[50-49]\}$$

$$4\{25-1\}$$

Finalmente, as chaves.

$$4\{25-1\}$$

$$4.24$$

$$96$$

Atualmente, a escrita mais comum para a expressão que acabamos de resolver é

$$4\{25-[50-14\div(8-6).7]\}=4\left\{25-\left[50-\frac{14}{(8-6)}7\right]\right\}$$

Essa escrita acaba por eliminar boa parte das dúvidas sobre precedência por ser uma escrita mais intuitiva. No entanto, atenção é sempre necessária.

## 2.2. Expressões algébricas

As expressões algébricas têm uma característica marcante: a presença de incógnitas; letras simbolizando números desconhecidos, incógnitos, daí o nome.

Atenção, todas as expressões algébricas apresentam incógnitas, porém nem tudo o que apresenta incógnitas é expressão algébrica.

Existem vários tipos de expressões algébricas. Temos as de primeiro grau, de segundo grau, racionais, trigonométricas, para citar somente algumas.

As expressões algébricas estão sujeitas à modificação na escrita, fatoração, simplificação, expansão. O que não conseguimos é encontrar o valor da incógnita, pois, para isso, necessitaríamos de uma equação.

Veja um exemplo de questão que deixa explícito a transformação de uma expressão:

ESTA CAI NA PROVA!

**(ESPN/2018)**

O valor numérico da expressão

$$\frac{x^3-y^3}{x^3+x^2y+xy^2}$$

Para $x = 0{,}8$ e $y = 0{,}3$ é igual a:

a) $0{,}325$

b) $0{,}125$

c) $0{,}415$

d) $0{,}625$

e) $0{,}275$

**Comentários**

Muito bem. Perceba que o exercício informa uma expressão algébrica e os valores a serem substituídos em $x$ e $y$. Não temos aqui que interpretar um problema, achar raízes de equações ou descrever funções. Basta-nos transformar a expressão de algébrica para aritmética, ou seja, reescrever a expressão, para chegar à resposta do exercício. Acompanhe.

$$\frac{x^3-y^3}{x^3+x^2y+xy^2}$$

Como precisamos dos valores $x = 0{,}8$ e $y = 0{,}3$, façamos a substituição direta:

$$\frac{0{,}8^{\,3}-0{,}3^3}{0{,}8^3+0{,}8^2.0{,}3+0{,}8.0{,}3^2}$$

$$\frac{0{,}512-0{,}027}{0{,}512+0{,}64.0{,}3+0{,}8.0{,}09}$$

$$\frac{0{,}485}{0{,}512+0{,}192+0{,}072}$$

$$\frac{0{,}485}{0{,}776}$$

$$0{,}625$$

Nesse tipo de questão, onde precisamos substituir os valores diretamente, precisamos estar cientes de que se trata de uma expressão cujo valor será calculado e, além disso, ter alguma habilidade com as operações fundamentais: soma, subtração, multiplicação e divisão.

**Gabarito: d)**

A questão pediu exatamente para transformar uma expressão por meio de outra. Um caso de substituição.

Poderíamos, alternativamente, ter os casos de fatoração ou de expansão, que veremos no próximo tópico.

### 2.2.1 Expressões algébricas de segundo grau

São expressões do tipo

$$ax^2 - bx + c$$

Onde a, b e c representam coeficientes numéricos e x, a incógnita.

Atenção, nem toda letra é incógnita. Nesse exemplo, estamos considerando apenas o x como incógnita, ok? Os coeficientes variarão de exercício para exercício e x está representando a incógnita do problema. Alternativamente você pode usar qualquer letra para coeficientes e para incógnitas. No entanto, é comum usarmos as letras iniciais do alfabeto para coeficientes e as finais para incógnitas, todas em minúsculo.

Um exemplo é a expressão já utilizada anteriormente

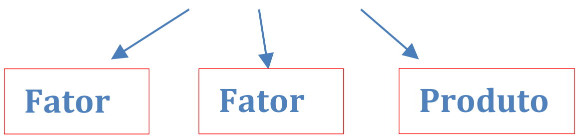
$$x^2 - 2x + 1$$

E o que podemos fazer com essa expressão? Bem, uma opção é fatorá-la. Às vezes isso facilita bastante nossa vida nas resoluções.

### 2.2.2. Fatoração e desenvolvimento

Fatorar significa transformar em fatores, “partes” de uma multiplicação cujo resultado é o produto. Ao se multiplicar 4 por 3, obtém-se 12. O 4 e o 3 são os fatores e o 12, o produto.

$$4\,.\,3 = 12$$




Do mesmo modo que podemos fatorar um número, que sozinho é uma expressão aritmética, podemos também fatorar uma expressão algébrica. As técnicas para a fatoração são distintas, mas ambas são fatorações.

Para isso, ambas as expressões devem, obviamente, ser equivalentes, uma seja escrita na forma expandida e a outra, na forma fatorada.

Os produtos notáveis são excelentes exemplos disso, pois são produtos, resultado de multiplicações.

**TOME NOTA!**

Algumas fatorações nos serão muito úteis durante as aulas:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = \boldsymbol{(a-b)^2}$$

$$a^2 - b^2 = \boldsymbol{(a+b)(a-b)}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \boldsymbol{(a+b)^3}$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = \boldsymbol{(a-b)^3}$$

$$ax^2 + bx + c = \boldsymbol{a(x+x')(x+x'')}$$

$$a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n = \boldsymbol{(a+b)^n}$$

$$a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \cdots \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots b^n = \boldsymbol{(a-b)^n}$$

Onde $\binom{n}{k}$ representa, os valores da enésima linha (Ln) e késima coluna (Ck) do Triângulo de Pascal, a saber:

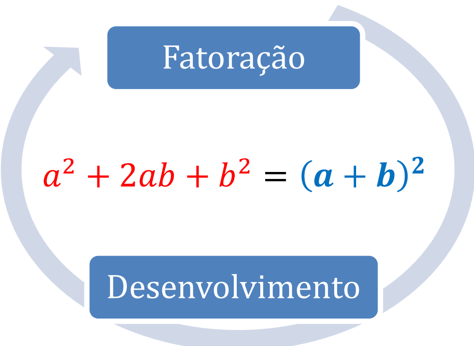
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C0 | | | | | | |
| L0 | 1 | C1 | | | | | |
| L1 | 1 | 1 | C2 | | | | |
| L 2 | 1 | 2 | 1 | C3 | | | |
| L 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | C4 | | |
| L 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | C5 | |
| L 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | C6 |
| L6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . |

Assim, o número binomial $\binom{4}{2} = 6$, pois está na quarta linha e segunda coluna do Triângulo de Pascal.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C0 | | | | | | |
| L0 | 1 | C1 | | | | | |
| L1 | 1 | 1 | C2 | | | | |
| L 2 | 1 | 2 | 1 | C3 | | | |
| L 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | C4 | | |
| L 4 | 1 | 4 | **6** | 4 | 1 | C5 | |
| L 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | C6 |
| L6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . |

Se você não está confortável com essas fatorações, ou com os números binomiais $\binom{n}{k}$, é hora de revisar. Nos PDFs do nosso curso você encontra aula específica sobre fatorações e produtos notáveis de forma completa e com muitos exercícios resolvidos.

Importante ressaltar que a fatoração transforma uma expressão expandida em uma fatorada, enquanto os produtos notáveis se dão no sentido oposto: estão expandindo, desenvolvendo, uma expressão algébrica. Em que pese, as fórmulas são exatamente as mesmas.




Agora já podemos fatorar nossa expressão de exemplo:

$$x^2 - 2x + 1$$

Verificamos se tratar do caso de diferença de dois quadrados e explicitamos os coeficientes a, b e c constantes de nossa fórmula:

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$x^2 - 2.x.1 + 1^2$$

E usamos nossa fórmula no sentido da fatoração:

$$x^2 - 2.x.1 + 1^2 = (x-1)^2$$

HORA DE
PRATICAR!

**(IFSC/2018)**

Considere $x$ o resultado da operação $525^2 - 523^2$.

Assinale a alternativa CORRETA, que representa a soma dos algarismos de $x$.

a) $18$

b) $13$

c) $02$

d) $17$

e) $04$

**Comentários:**

Aqui temos dois caminhos interessantes a seguir. Um mais trabalhoso (fazer a conta diretamente) e outro mais tranquilo (utilizar fatoração).

Resolvamos de ambas as formas para que você tenha amplitude de conhecimento e, consequentemente, possa definir sua preferência na hora da prova.

Primeiro, façamos pelo método direto: fazer os cálculos diretamente.

$$525^2 - 523^2$$

$$275\,625 - 273\,529$$

$$2096$$

Mas professor, foram só três linhas para chegar ao resultado! Tem maneira mais fácil que essa?

Pois é, tem sim. Na verdade, aqui não está a operação de multiplicação propriamente dita, que foi necessária para calcular os quadrados. Essa é justamente a parte mais trabalhosa.

No intuito de evitarmos esse trabalho, podemos utilizar nossos conhecimentos sobre fatoração.

Perceba que a questão traz, diretamente, a diferença entre dois quadrados.

Oras, diferença entre dois quadrados é um dos produtos notáveis, lembra?

$$a^2 - b^2 = \boldsymbol{(a+b)(a-b)}$$

Reescrevendo com os dados do exercício, temos:

$$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$$

$$\mathbf{525}^2 - \mathbf{523}^2 = (\mathbf{525} + \mathbf{523})(\mathbf{525} - \mathbf{523})$$

$$525^2 - 523^2 = 1048.2$$

$$525^2 - 523^2 = 2096$$

Mesmo que tenhamos escrito um pouquinho mais, usando o produto notável conseguimos reduzir consideravelmente a complexidade dos cálculos, diminuindo bastante o tempo na resolução da questão.

Mas professor, não há resposta com esse valor!

Calma, não acabamos ainda. É extremamente importante estarmos cientes do que estamos calculando. Veja que o enunciado pede a SOMA dos algarismos e não o resultado diretamente.

Sendo assim, a soma solicitada é dada por:

$2096 \rightarrow Soma = 2 + 0 + 9 + 6 = 17$

Portanto, alternativa d) para essa questão.

Ressalto que não há um jeito "mais certo" que outro. O melhor jeito mesmo é o que você consegue enxergar na hora da prova e executar corretamente.

O que acontece é que, com experiência em resolução de exercícios e conhecimento teórico adequado, você acabará por ter suas preferências de resolução, otimizando seus resultados.

**Gabarito: d)**

# 3. Equações

As equações, de forma geral, carregam uma pergunta: quais são os valores para uma certa incógnita que satisfazem uma condição pré-determinada?

Como visto na introdução, consideraremos aqui equação como igualdade envolvendo expressão algébrica.

A princípio, estudaremos as equações de primeiro grau, de segundo grau e modulares. Existem muitos outros tipos de equações, como as equações logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, e estas serão estudados dentro de seus tópicos específicos.

Na verdade, é improvável que você faça uma prova de vestibular sem o auxílio de expressões, equações ou funções. Esse conteúdo inicial é vital para seu entendimento de todos os outros tópicos que veremos no curso, portanto, dedique-se a ele com carinho.

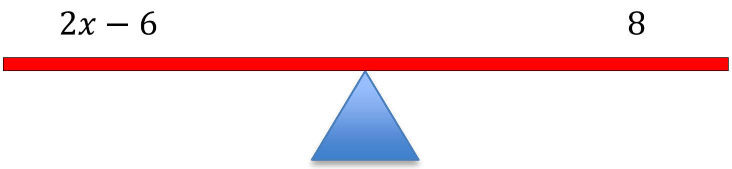
## 3.1. Equações de primeiro grau

Uma equação do primeiro grau é algo do tipo:

$$ax + b = 0$$

Onde a incógnita é representada pela letra $x$ e os coeficientes $a$ e $b$ variam de equação pra equação. Podemos representar as incógnitas e os coeficientes por quaisquer letras, como já vimos, mas daremos preferência ao modelo padrão apresentado.

Para resolver uma equação de primeiro grau, tenhamos em mente uma balança de pratos, ou uma gangorra, se preferir, onde cada lado representa um membro da equação.

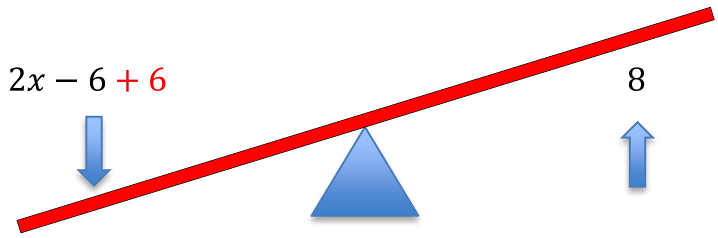



O equilíbrio da estrutura, representado pela horizontalidade da barra, é representado pelo sinal de igual. Assim,

$$2x - 6 = 8$$

é a representação matemática do equilíbrio.

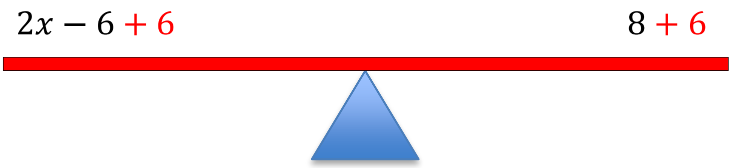
Muito bem, o que aconteceria a esse equilíbrio se adicionássemos, digamos, 6 unidades ao lado esquerdo?




É evidente que essa adição desequilibraria a estrutura. O lado adicionado seria maior que o lado não adicionado.

Então, o que podemos fazer para restaurar o equilíbrio sem ter que retirar o que somamos?

Isso mesmo, adicionamos quantidade igual ao outro lado também!




Se a equação

$$2x - 6 = 8$$

representava o equilíbrio original, podemos pensar nas operações que fizemos como:

$$2x - 6 + 6 = 8 + 6$$

Não é costume escrevermos dessa forma nas resoluções, normalmente suprimimos a expressão

$$-6 + 6$$

e deixamos apenas

$$2x = 8 + 6$$

Isso dá a nítida impressão que o 6 “pulou” para o segundo membro da equação, o que não é verdade. Quando fazemos essa operação, de mudar alguém de lado, estamos, na verdade, realizando a mesma operação em ambos os lados da equação.

Dessa forma, acompanhemos o processo até o final para descobrirmos o valor da incógnita x.

$$2x - 6 = 8$$

$$2x = 8 + 6$$

$$2x = 14$$

Dividindo ambos os lados por 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Assim, dizemos que a solução, ou conjunto solução, da equação

$$2x - 6 = 8$$

É

$$S = \{7\}$$

Toda operação aqui é feita em pares. Aplicou em um membro da equação, aplica no outro. Não há exceções. Podemos usar uma gama imensa de operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, logaritmos, integrais, derivadas, para citar somente algumas.

Uma vez chegando no resultado, podemos testar sua validade, substituindo-o no lugar da variável na equação que lhe deu origem, veja

$$2x - 6 = 8$$

$$S = \{7\}$$

$$2.7 - 6 = 8$$

$$14 - 6 = 8$$

$$8 = 8 \ \rightarrow (V)$$

Chegamos a uma igualdade válida, isso quer dizer que nossa solução está correta e que 7 é realmente solução de $2x - 6 = 8$.


A ideia é extremamente simples, mas não a menospreze. Saiba que, ao resolvermos exercícios, não escrevemos todos os passos como acima. No entanto, é vital que você entenda o processo de resolução de equações, pois nós o utilizaremos durante todo o curso e você, durante toda a sua carreira em exatas.

## 3.2. Equações do segundo grau

Equações do segundo grau têm a seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Há várias maneiras de encontrarmos as soluções desse tipo de equação, mas antes precisamos notar alguns detalhes.

As equações do segundo grau podem ser incompletas ou completas.

O que as diferencia é a presença ou não de todos os termos:

Termo de segundo grau $\boldsymbol{ax^2}$

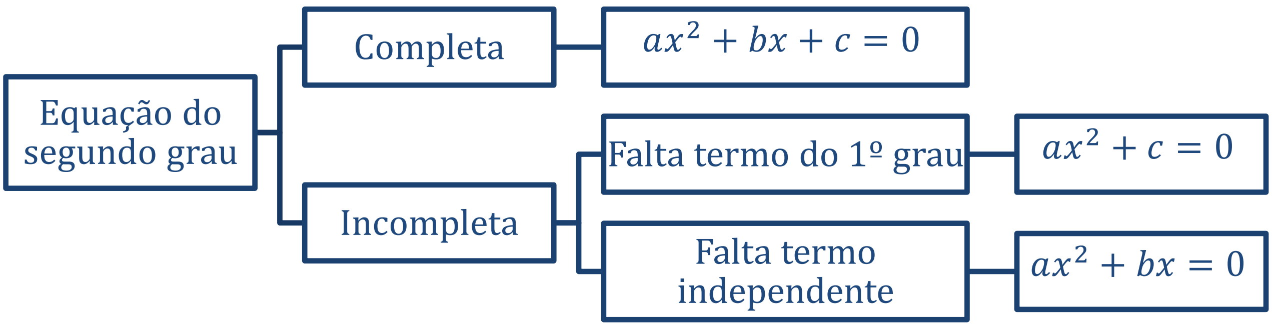
Termo de primeiro grau $\boldsymbol{bx}$

Termo independente $\boldsymbol{c}$

Para que a equação seja de segundo grau, não pode faltar o termo quadrático, ou não teríamos uma equação do segundo grau.

Entretanto, é plenamente possível termos equações do segundo grau sem os termos do primeiro grau ou independente.

ESQUEMATIZANDO




Para equações do segundo grau, podemos aplicar o mesmo método de resolução que aplicamos para as equações do primeiro grau. No entanto, para que possamos aplicar a técnica diretamente, equação do segundo grau deve estar incompleta.

Veja como é simples.

### 3.2.1. Equações do segundo grau da forma $ax^2 + c = 0$

A equação do segundo grau

$$3x^2 + 4 = 79$$

está incompleta, pois o coeficiente do termo de primeiro grau é zero, $b = 0$.

Para resolvê-la, basta aplicar os princípios que aprendemos para as equações de primeiro grau:

$$3x^2 + 4 = 79$$

$$3x^2 + 4 - 4 = 79 - 4$$

$$3x^2 = 75$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{75}{3}$$

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = 5$$

$$x = \pm 5$$

Professor, por que esse módulo apareceu ali?

Daremos mais ênfase nos módulos em capítulo específico. Por enquanto, basta saber que $\sqrt{x^2}$ não é $x$ e sim $|x|$. Voltaremos nesse assinto com mais profundidade no decorrer do curso, ok?

**ESCLARECENDO**

$$\sqrt{25} = 5$$

Não é $\pm 5$, não é $+5$ e $-5$, não é $+5$ ou $-5$.

É $5$.

Ou $+5$ se quiser.

A raiz de um número é única e, para o caso de números positivos, a raiz é somente positiva.

É muito comum a confusão, pois, ao economizar alguns passos nas resoluções, acabamos por escrever

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$x = \pm 5$$

E o pior: essa notação está correta!

Então, professor, por que raios a raiz de 25 não é $\pm 5$?

Calma. A notação está correta, mas são coisas diferentes. A a resposta apresentada não é para a pergunta “Qual a raiz de 25?” e sim para “Qual número, elevado ao quadrado, resulta em 25?”.

Percebeu a diferença?

A equação

$$x^2 = 25$$

como aprendemos no início da aula, é uma pergunta e

$$x = \pm 5$$

É a resposta para a pergunta dessa equação, “Qual número, elevado ao quadrado, resulta em 25?”, e não para “Qual a raiz de 25?”.

Somente avance quando essa informação estiver bem clara para você.

Agora é um bom momento para notarmos que as equações de primeiro grau apresentam apenas uma resposta, enquanto as de segundo grau podem ter até duas respostas distintas.

### 3.2.2. Equações do segundo grau da forma ax² + bx = 0

Vejamos o caso das equações incompletas, mas com a ausência do termo independente, feito em

$$2x^2 - 10x = 0$$

Aqui também se aplica o método das equações de primeiro grau, mas há um passo precedente importante: fatorar a expressão do primeiro membro colocando o x em evidência.

$$2x^2 - 10x = 0$$
$$x(2x - 10) = 0$$

Precisamos desse passo para fazer a seguinte análise: como há uma multiplicação de dois fatores e o produto é zero, um dos fatores, obrigatoriamente, deve ser zero.

Assim podemos dividir nossos cálculos em duas partes

| | |
|---|---|
| $x = 0$ | $(2x - 10) = 0$ |
| $x = 0$ | $2x = 10$ |
| $x = 0$ | $x = 5$ |

Temos, então:

$$2x^2 - 10x = 0$$
$$S = \{0; 5\}$$

Ou seja, se colocarmos tanto o zero quanto o cinco na equação de origem, chegaremos a uma igualdade verdadeira. Vamos testar?

| | |
|---|---|
| Teste para $x = 0$ | Teste para $x = 5$ |
| $2.0^2 - 10.0 = 0$ | $2.5^2 - 10.5 = 0$ |
| $0 + 0 = 0$ | $2.25 - 50 = 0$ |
| $0 = 0 \rightarrow (V)$ | $50 - 50 = 0$ |
| | $0 = 0 \rightarrow (V)$ |

Como ambas as igualdades são verdadeiras, ambas as respostas satisfazem à equação proposta e são válidas.

### 3.2.3. Equações do segundo grau completas (ax² + bx + c = 0)

Você pode estar pensando: porque será que não podemos aplicar diretamente o método das equações de primeiro grau nas de segundo?

A resposta é simples: podemos, mas não devemos se queremos ganhar tempo.

Ao aplicar o método em questão nas equações de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

concluímos que suas duas respostas possíveis $x'$ e $x''$, são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

conhecida como fórmula de Bhaskara, apesar de não ter sido este seu criador.

Alguns livros didáticos trazem uma notação alternativa

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

As duas são idênticas em termos de significado, a segunda versão apenas isola o termo argumento da raiz quadrada e o nomeia discriminante, representado pela letra grega delta. Anote-a, pois usaremos essa separação para algumas análises futuras importantes.

Assim, a fórmula de Bhaskara é o resultado da aplicação prévia do método que utilizamos nas equações de primeiro grau.

Outra opção para resolvermos equações do segundo grau se dá pelas Relações de Girard. No entanto, veremos esse conteúdo e detalhes quando estudarmos polinômios.

Já sobre a fórmula de Bhaskara, a conversa é outra.

Vamos aplicá-la em uma resolução e verificar sua efetividade?

Dada a equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Perceba que já não conseguimos fatorá-la como um trinômio quadrado perfeito, como fizemos anteriormente. Sendo assim, a fórmula de Bhaskara ajuda bastante.

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = \dfrac{5 + 1}{2} \rightarrow x' = 3 \\ x'' = \dfrac{5 - 1}{2} \rightarrow x'' = 2 \end{cases}$$

Nossa solução, então, é

$$S = \{0; 5\}$$

INDO MAIS FUNDO!

Você deve ter notado que, na fórmula de Bhaskara, há uma raiz quadrada.

Bem, para que raízes quadradas existam nos números reais, ela precisa ser não negativa, ou seja, pode ser nula ou positiva.

E o que acontece se o discriminante ($\Delta$), que é o argumento da raiz quadrada, for negativo? Pode isso?

Pode, mas, nesse caso, não existirão raízes reais para a equação. Mais à frente no curso você verá que existirão raízes complexas, que vêm aos pares, mas isso é conversa para aula específica.

Por enquanto, dizemos apenas que não existem raízes reais que satisfaçam às condições da equação, ou somente que não há raízes reais para a equação.

Vejamos na prática?

**(Fuvest/2008)**

A soma dos valores de $m$ para os quais $x = 1$ é raiz da equação

$$x^2 + (1 + 5m - 3m^2)x + (m^2 + 1) = 0$$

é igual a

$a)\ ^{5}/_{2}$

$b)\ ^{3}/_{2}$

$c)\ 0$

$d)\ -\,^{3}/_{2}$

$e)\ -\,^{5}/_{2}$

**Comentários:**

Os pontos importantíssimos que não podemos deixar passar antes de iniciar a resolução:

1) Temos uma equação do segundo grau na incógnita $x$ com coeficientes:

$$a = 1$$

$$b = (1 + 5m - 3m^2)$$

$$c = (m^2 + 1)$$

2) O exercício já forneceu o valor para a incógnita $x$, não precisamos calculá-la!

3) O exercício colocou uma condição e, por meio dessa condição, calcularemos o valor de $m$.

Dessa forma, mesmo $m$ não sendo a incógnita da equação quadrática em $x$, ao substituirmos o valor $x = 1$ na equação, teremos uma nova equação cuja incógnita passará a ser $m$.

Sei que parece um pouco confuso no início, mas é importante que façamos essas observações desde o início do nosso curso para que você fique cada vez mais ciente do que se passa nas resoluções, caso contrário você se limitaria a memorizar processos e, na matemática, o entendimento holístico do processo é primordial.

Para ficar mais claro, sigamos passo a passo as orientações do enunciado.

Comando: $x = 1$ é raiz da equação

Desenvolvimento do comando:

$$x^2 + (1 + 5m - 3m^2)x + (m^2 + 1) = 0$$
$$1^2 + (1 + 5m - 3m^2).1 + (m^2 + 1) = 0$$
$$1 + 1 + 5m - 3m^2 + m^2 + 1 = 0$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$-2m^2 + 5m + 3 = 0$$

Perceba que, aqui, temos uma nova equação cuja incógnita é justamente $m$ e cujos coeficientes não são iguais aos da equação original, fique de olho!

$$a = -2$$
$$b = 5$$
$$c = 3$$

Voltemos ao enunciado.

Comando: A soma dos valores de $m$.

Desenvolvimento do comando:

Aqui temos duas possibilidades: Podemos calcular os valores de $m$ e soma-los ou podemos usar as relações de Girard. Essas relações serão demonstradas mais à frente nessa mesma aula, então não se preocupe muito com isso agora. Em uma segunda leitura da aula você já terá condições plenas de utilizá-las na resolução, ok?

Calculando os possíveis valores de $m$ com a fórmula de Bhaskara

$$\Delta = (5)^2 - 4.(-2).3 = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2.(-2)} = \frac{-5 \pm 7}{-4} = \begin{cases} x' = \frac{-5+7}{-4} = \frac{2}{-4} \rightarrow x' = -\frac{1}{2} \\ x'' = \frac{-5-7}{-4} = \frac{-12}{-4} \rightarrow x'' = 3 \end{cases}$$

Lembrando que estamos calculando a soma dos valores de $m$, então:

$$S = -\frac{1}{2} + 3$$

Para soma de Frações, MMC. Não se lembra disso? Sem problema, revisaremos esse conteúdo mais à frente também. Por ora, concentremo-nos no problema.

$$S = -\frac{1}{2} + 3$$
$$S = \frac{-1+6}{2}$$
$$S = \frac{5}{2}$$

O que nos leva à alternativa a) como nosso gabarito.

Professor, e como seria a resolução usando as relações de Girard?

Simples, olhando para a equação

$$-2m^2 + 5m + 3 = 0$$

E definindo os coeficientes

$$a = -2$$

$$b = 5$$

$$c = 3$$

Uma das relações de Girard nos diz que a soma das raízes é dada por

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Por enquanto, essa resolução usando as relações de Girard está figurando apenas como curiosidade. Lá na aula sobre polinômios, veremos essas relações em detalhes, não fique assustado, combinado?

**Gabarito: d)**

# 4. Inequações

Inequações, também chamadas de desigualdades, são informações acerca de duas expressões que não são, necessariamente, iguais; podem trazer as relações de maior que, maior ou igual a, menor que, menor ou igual a.

Vejamos a simbologia matemática usada para expressar essas informações:

$$a > b \Rightarrow a \text{ é } maior\ que\ b$$

$$a \geq b \Rightarrow a \text{ é } maior\ ou\ igual\ a\ b$$

$$a < b \Rightarrow a \text{ é } menor\ que\ b$$

$$a \leq b \Rightarrow a \text{ é } menor\ ou\ igual\ a\ b$$

Perceba que inequação não é a mesma coisa que diferença!

A afirmação $a$ é diferente de $b$ é simbolizada matematicamente por:

$$a \neq b$$

É muito comum necessitarmos das desigualdades envolvendo expressões e é exatamente esse nosso próximo tópico de estudos.

## 4.1. Inequação do primeiro grau

Quando temos desigualdades que podem ser reduzidas a

$$f(x) > 0$$

$$f(x) < 0$$

$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 0$$

onde $f(x)$ é, necessariamente, uma função do primeiro grau, temos uma inequação do primeiro grau.

Para resolvê-las, basta seguir a premissa de realizar as operações em ambos os membros.

Vamos resolver

$$6x + 5 > 8$$
$$6x > 8 - 5$$
$$6x > 3$$
$$\frac{6x}{6} > \frac{3}{6}$$
$$x > \frac{1}{2}$$

Sem novidades. Vejamos mais um exemplo:

$$-5x > 12 + x$$
$$-5x - x > 12$$
$$-6x > 12$$
$$-6x > 12$$
$$\frac{-6x}{-6} < \frac{12}{-6}$$
$$x < -2$$

Professor, o que aconteceu ali com o sinal de $>$ ? Por que ele virou $<$ ?

Essa é uma peculiaridade das inequações e é muito importante.

Vejamos o motivo de isso acontecer.

Acompanhe o raciocino: quem está em situação mais favorável, ou menos desvantajosa financeiramente; quem tem sobra de R$100,00 na conta poupança ou quem tem R$100 000,00?

Se o fator for somente o saldo, é óbvio que quem tem R$100 000,00 está em situação mais favorável.

Invertamos as coisas agora. Quem está em situação mais favorável, ou menos desvantajosa financeiramente; quem tem deve R$100,00 no cheque especial ou quem deve R$100 000,00?

Imagino que você tenha respondido: quem deve R$100 000,00.

Essa relação de maior e menor é graças à reta dos números reais que ordena os números da esquerda para a direita e nos diz, diretamente, que quem está à esquerda é sempre menor do que quem está à direita. É por isso que colocamos uma setinha na ponta da reta. Não, não se deve colocar a setinha em ambas as pontas!

Veja.


É por isso que podemos dizer, entre tantas outras possibilidades de comparação, que

| | |
|---|---|
| 100 000 é maior que 100 | 100 000 está à direita de 100 |
| 0 é maior que -100 | 0 está à direita de -100 |
| -100 é maior que -100 000 | -100 está à direita de -100 000 |

Quando falamos que

$$-6x > 12$$

Estamos informando que $-6x$ é maior que ou igual a 12, ou seja, está em cima ou à direita de 12.

Do mesmo modo que a comparação entre 100 e 100 000 é invertida quando falamos em ambos negativos, ao trocarmos os sinais de $-6x$ e de 12, precisamos inverter a relação de desigualdade.

E onde foi que invertemos isso? Você pode se perguntar.

Foi quando dividimos ambos os lados por $-6$. À parte da relação numérica, quando dividimos ou multiplicamos por um número negativo, alteramos o sinal do resultado de forma a inverter a desigualdade.

Foi o que aconteceu.

Há uma alternativa para o caso, que é não se utilizar de multiplicações ou divisões por negativos.

$$-5x > 12 + x$$

$$-5x - x > 12$$

$$-6x + 6x - 12 > 12 + 6x - 12$$

$$-12 > 6x$$

$$\frac{-12}{6} > \frac{6x}{6}$$

$$-2 > x$$

Não precisamos inverter o sinal e chegamos à uma desigualdade equivalente, pois

$$x < -2$$

e

$$-2 > x$$

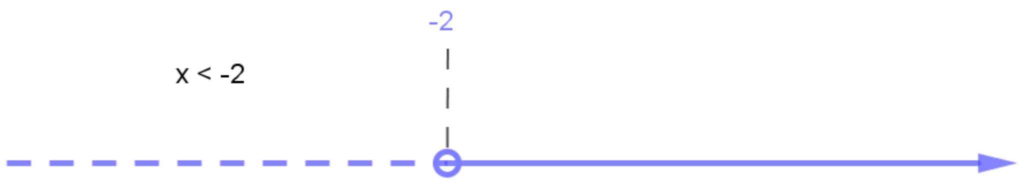
São equivalentes, informando que x está à esquerda ou em cima de $-2$ na primeira ou que $-2$ está à direita ou em cima de $x$ na segunda.

Em todo caso, a informação é


E quanto, afinal, vale o x? Pois bem, não sei.

Só sabemos que ele está à esquerda de $-2$, ou seja, é menor que $-2$.

Graficamente, representamos os possíveis valores de x hachurando a reta dos reais na região da possibilidade demarcada pela inequação. Valores inclusos pelo sinal de igual na inequação são representados por uma bolinha preenchida, enquanto os valores excluídos pela ausência do sinal de igual, por uma bolinha não preenchida.




Vejamos como esse assunto pode ser cobrado em uma prova.

**(PUC-RJ/2017)**

Assinale a menor solução inteira da inequação $4x - 10 > 2$.

a) 2

b) 3

c) 4

d) 12

c) 60

**Comentário**

O exercício é simples, mas necessário para consolidar o conhecimento.

Apliquemos os conceitos vistos para a resolução da inequação.

$$4x - 10 > 2$$

$$4x > 2 + 10$$

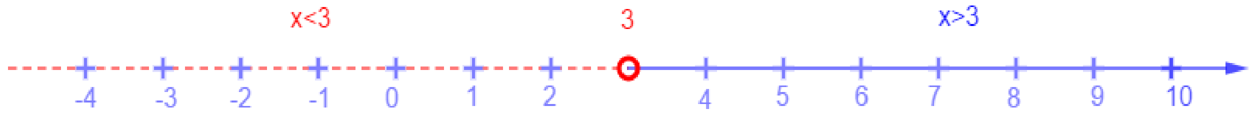
$$4x > 12$$

$$x > \frac{12}{4}$$

$$x > 3$$

Muito cuidado aqui para não assinalar a alternativa a). Nossos valores para $x$ devem ser maiores que 3, não podem ser iguais a 3.

Vejamos como fica a representação de nossa resposta na reta dos reais.




Perceba que qualquer número maior que 3 já está incluso, por exemplo, 3,000000000001. No entanto, o próprio 3 não está.

Assim, o menor inteiro que satisfaz a condição solicitada pelo exercício é, naturalmente, 4.

**Gabarito: c)**

## 4.2. Inequação simultânea

Podemos, alternativamente, utilizar duas inequações simultâneas para simbolizar um intervalo.

As inequações

$$\begin{cases} x > 2 \\ x \leq 10 \end{cases}$$

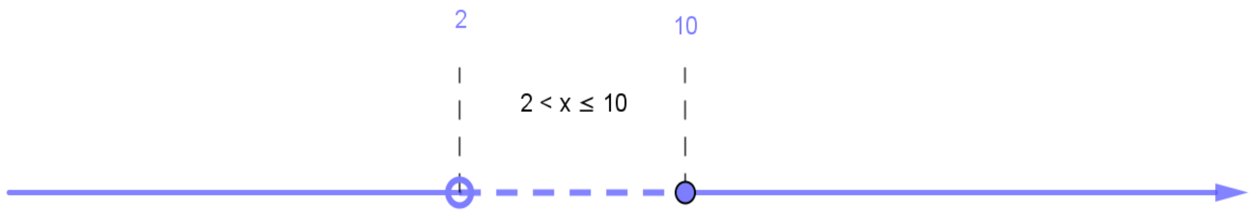
Significam, em conjunto, todos os números reais entre 2 e 10, excluindo-se o 2 e incluindo-se o 10.

Podemos representar essa situação das seguintes formas:

Com apenas uma inequação:

$$2 < x \leq 10$$

ou graficamente




Podemos, também, resolver inequações simultâneas algebricamente, acompanhe:

$$\frac{3x-1}{9} \leq 2 + x < \frac{x+1}{3}$$

$$9 \cdot \frac{3x-1}{9} \leq 9 \cdot (2+x) < 9 \cdot \frac{x+1}{3}$$

$$3x - 1 \leq 18 + 9x < 3(x+1)$$

$$3x - 1 - 3x \leq 18 + 9x - 3x < 3x + 3 - 3x$$

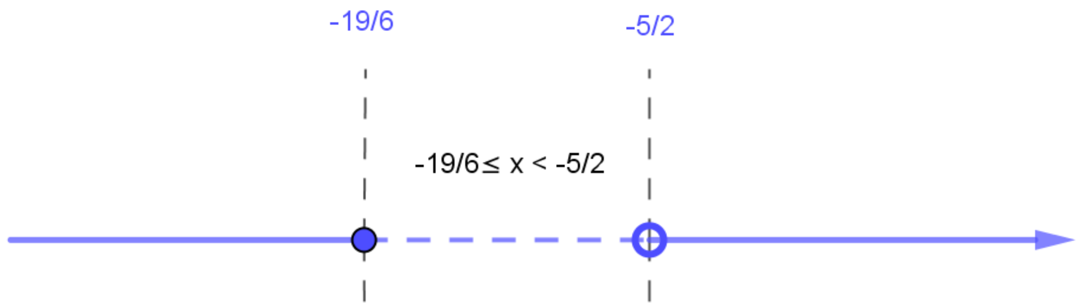
$$-1 < 18 + 6x < 3$$

$$-1 - 18 \leq 18 + 6x - 18 < 3 - 18$$

$$-19 \leq 6x < -15$$

$$\frac{-19}{6} \leq \frac{6x}{6} < \frac{-15}{6}$$
$$-\frac{19}{6} \leq x < -\frac{5}{2}$$

Cuja representação gráfica é




Também podemos pensar na inequação

$$\frac{3x-1}{9} \leq 2 + x < \frac{x+1}{3}$$

como uma comparação entre três funções; $f(x)$, $g(x) e$ $h(x)$.

Assim definidas:

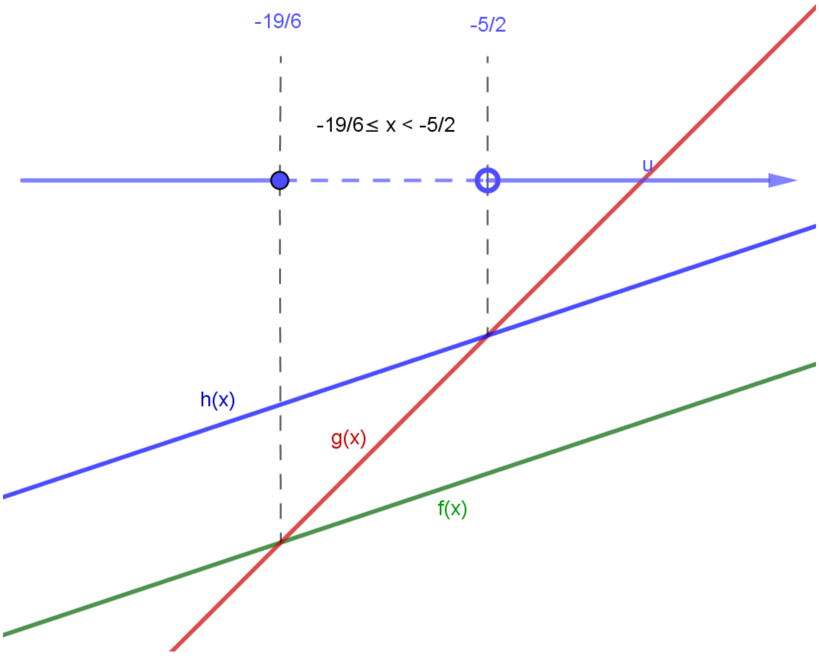
$$f(x) = \frac{3x-1}{9}$$
$$g(x) = 2 + x$$
$$h(x) = \frac{x+1}{3}$$

Dessa forma, a desigualdade se torna

$$\frac{3x-1}{9} \leq 2 + x < \frac{x+1}{3}$$
$$f(x) \leq g(x) < h(x)$$

E podemos interpretar essa pergunta como: quando a altura do gráfico de $g(x)$ está entre $f(x)$ e $h(x)$?

Se fizermos os gráficos das três funções no mesmo plano cartesiano, veremos claramente que estes valores são exatamente os da nossa resposta algébrica.




Nesse caso, resolver a inequação de forma algébrica seria mais prático que desenhar os três gráficos. No entanto, há casos em que um esboço do gráfico ajuda muito na resolução. Isso acontece frequentemente com as inequações do segundo grau, que veremos na próxima aula.

# 5. Noções intuitivas sobre Funções

Funções significam, literalmente, que uma variável depende de outra. Como no caso do salário, discutido no início da aula, a remuneração depende das vendas. Retomando o exemplo, temos:

$$S(n) = 1\,000 + 500.n$$

Como representação algébrica em que $S$ representa a remuneração mensal, $n$ o número de vendas, 1 000 a parte fixa do salário e 500 o coeficiente das vendas, a comissão.

Por praticidade, na maioria dos casos, simplificamos a notação, sem perda de generalidade. Dessa forma, nomeamos:

$$S(n) = 1\,000 + 500.n$$

$$S = 1\,000 + 500.n$$

Variável dependente Variável independente

Quando estudamos funções sem o contexto, é praxe simbolizarmos a variável dependente por $y$ e a independente por $x$.

Reescrevendo a fórmula dos rendimentos, mas em termos mais genéricos, teremos:

$$y = 500x + 1\,000$$

Com essa função, podemos descobrir quais são todos os salários para todas as vendas possíveis. Basta informar a venda que informamos o salário.

E o contrário também é verdade, ao se informar um salário, pode-se inferir diretamente qual foi a venda correspondente.

No entanto, essa é apenas uma representação para a situação desse salário particular, está longe de ser a única.

Vamos explorar algumas dessas representações?

Poderíamos, ao invés de escrever uma função, escrever um texto. Aliás, foi o primeiro modo usado para expor a situação do salário na aula, não foi? Somente após o entendimento textual é que passamos à representação por meio de uma função.

A representação textual, apresentada no início da aula, foi:

Você trabalha em uma loja de aparelhos de som e seu salário é composto por um salário fixo de R$ 1 000,00 somado à comissão de R$ 500,00 a cada aparelho vendido no mês.

É uma representação válida e muito usada em contratos, inclusive de trabalho.

Ainda seria perfeitamente possível passar a mesma informação por meio de uma tabela, veja:

| Salário Base | # Vendas | Comissão por venda | Salário total |
|---|---|---|---|
| 1 000 | **0** | 500 | **1 000** |
| 1 000 | **1** | 500 | **1 500** |
| 1 000 | **2** | 500 | **2 000** |
| 1 000 | **3** | 500 | **2 500** |
| 1 000 | **4** | 500 | **3 000** |
| 1 000 | **5** | 500 | **3 500** |
| 1 000 | **6** | 500 | **4 000** |
| 1 000 | **7** | 500 | **4 500** |

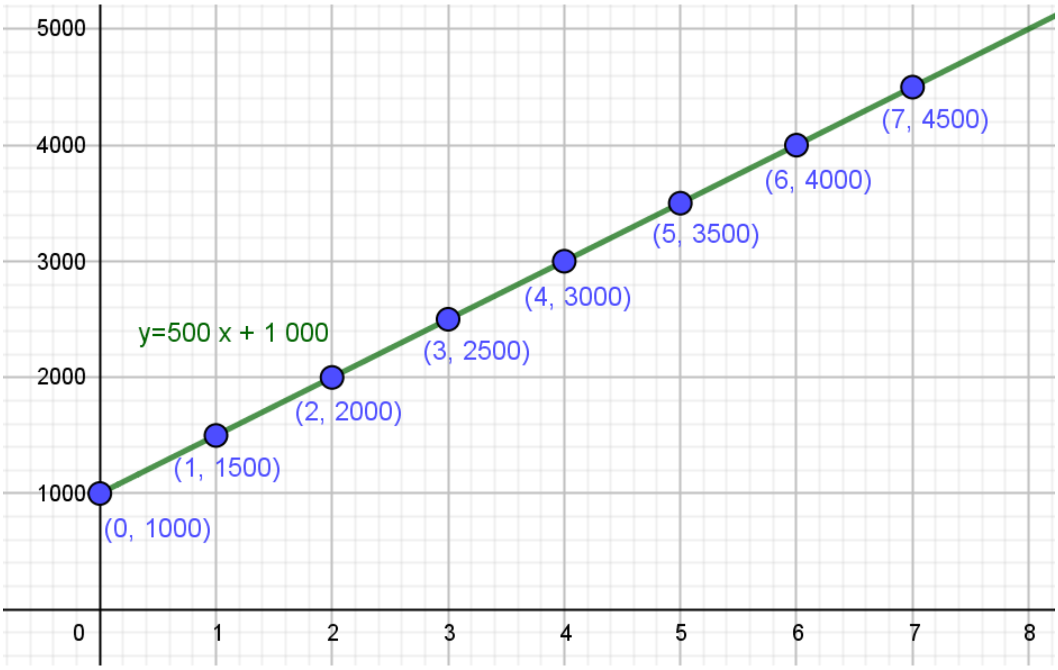
E assim por diante.

Não é a melhor representação, pois apresenta uma certa dificuldade em inferir rapidamente quais são os salários em todos os casos, mas é plenamente plausível.

Outra opção para a mesma representação é o gráfico.

Como temos duas variáveis, a dependente $y$ e a independente $x$, podemos fazer dois eixos e representar os salários por meio de pontos no plano cartesiano.

Veja.




Nesse gráfico, usamos a configuração padrão para os eixos:

| Eixo | Horizontal | Vertical |
|---|---|---|
| variável | x | y |
| nomenclatura | abcissas | ordenadas |

Nessa representação percebemos características da função muito rapidamente, daí a grande aplicabilidade desse tipo de representação.

Em nosso curso, daremos ênfase em dois tipos de representação para as funções: a representação algébrica e os gráficos.

Como exemplo usamos uma função do primeiro grau, uma variável dependente em igualdade a uma equação do primeiro grau. Esse é um tipo, mas há inúmeras variações de função. Estudaremos adiante alguns tipos especiais de funções, a saber: as funções de primeiro grau, de segundo grau, modulares, compostas e inversas. Os demais tipos, pertinentes ao escopo do vestibular, veremos durante o curso dentro dos temas específicos.

# 6. Conjuntos

Um conjunto, também chamado de coleção, é uma reunião de elementos que apresentam determinada propriedade em comum.

Entre um elemento e um conjunto, existe a relação de pertinência, onde o elemento $x$ pode ou não pertencer ao conjunto $A$. As notações usadas para a relação de pertinência são:

$$x \in A \Rightarrow x\ \textbf{pertence}\ ao\ conjunto\ A$$

$$x \notin A \Rightarrow x \text{ não pertence ao conjunto } A$$

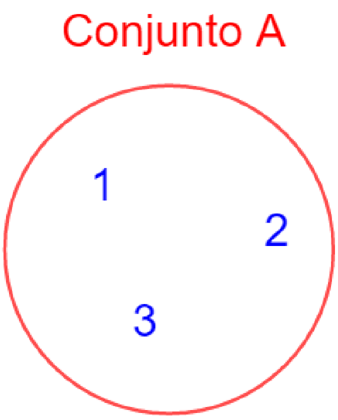
Para definir um conjunto qualquer, precisamos determinar uma regra que permita julgar se um elemento pertence ou não à coleção.

Segunda-feira é um elemento que não pertence ao conjunto dos meses do ano, enquanto o retângulo é um elemento que pertence ao conjunto dos quadriláteros.

Podemos simbolizar os conjuntos de várias maneiras, vejamos algumas possibilidades.

Pensemos no conjunto de todos os números inteiros positivos e menores que 4, denominado conjunto A. Seus elementos são, conforme descrição: 1, 2 e 3.

Podemos simbolizar essa mesma informação usando uma linguagem mais visual, onde uma linha fechada delimita os elementos do conjunto:




Essa notação é chamada de Diagrama de Venn-Euler e é muito útil para trabalhar visualmente com vários conjuntos simultaneamente, veremos isso logo adiante.

Outra maneira interessante é fazer uso da álgebra, veja:

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* / x < 4\} \Rightarrow \text{ Lê} - se\text{: } x \text{ pertence aos Naturais não nulos tal que } x \text{ é menor que } 4.$$

## 6.1. Aplicação dos diagramas de Venn-Euler

**(Unicamp/2017)**

Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,

a) pelo menos uma pessoa leu os dois livros.

b) nenhuma pessoa leu os dois livros.

c) pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

d) todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

**Comentários**

O enunciado nos traz várias informações importantes para a resolução:

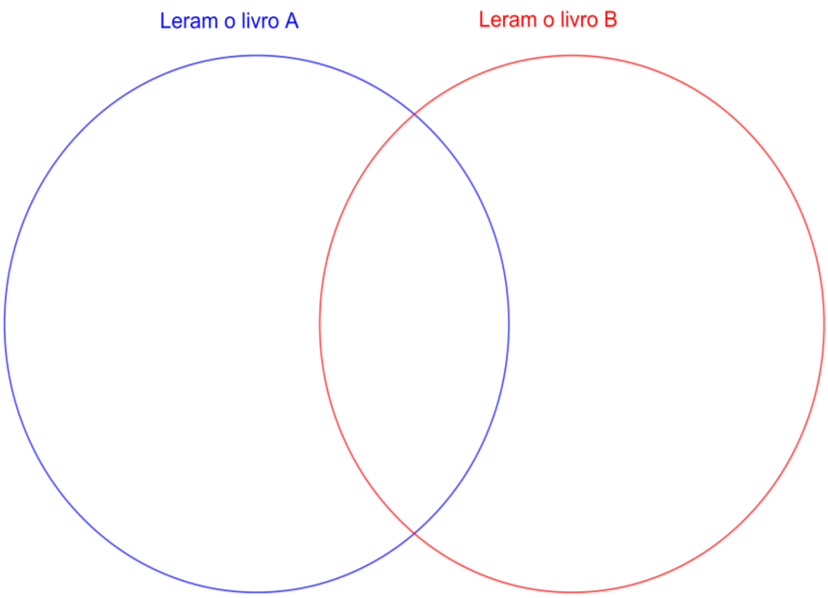
O total de pessoas no grupo é de 10 pessoas

Essas pessoas estão divididas em dois grupos principais: pessoas que leram o livro A e pessoas que leram o livro B.

O número de pessoas em cada conjunto.

A rigor, poderíamos pensar em um terceiro grupo, o de pessoas que, porventura, não leram livro algum. No entanto, é mais prático pensarmos apenas em dois conjuntos, A e B, e colocarmos as pessoas que não leram livro algum fora desses conjuntos.

Dessa forma, vamos representar esses dados na forma de diagrama.

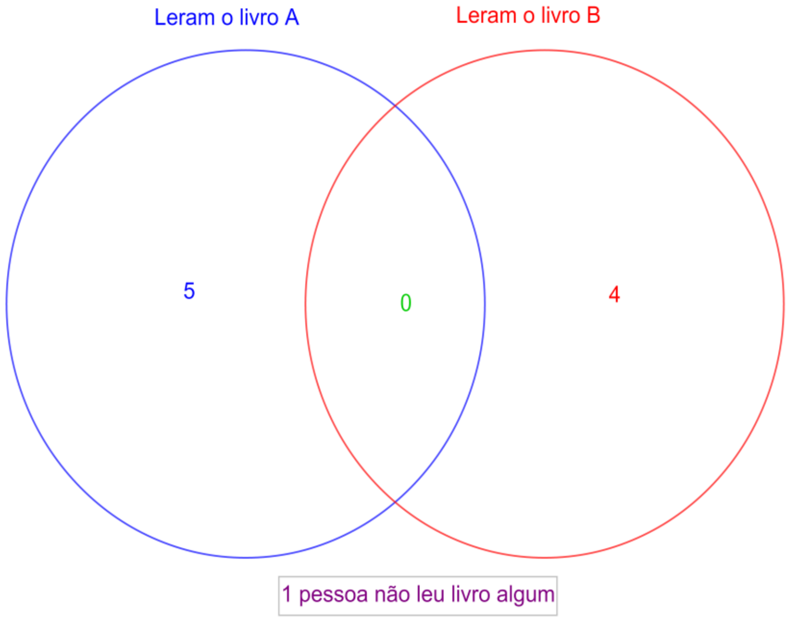



A priori, somente com as informações dadas, não conseguimos colocar com exatidão os valores fornecidos, ficando em aberto a posição das pessoas no diagrama.

Como a questão não solicita alocar as pessoas no diagrama e sim julgar as alternativas e assinalar a correta (única), analisaremos alternativa a alternativa, sempre procurando encontrar um meio para prova-la falsa. A que não for possível provar falsa, será nosso gabarito. Sigamos.

a) pelo menos uma pessoa leu os dois livros.

Obedecendo ao enunciado, é possível dispormos as pessoas da seguinte forma:



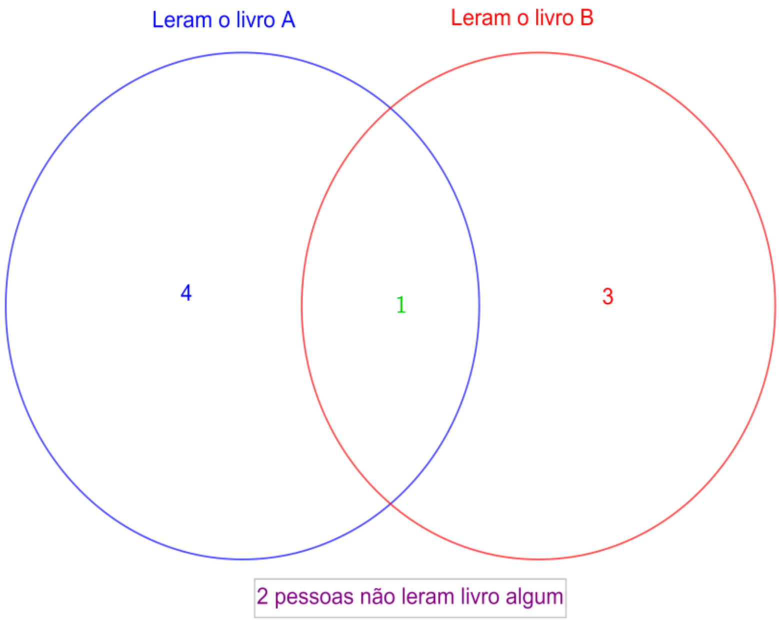

Atenção: essa não é a **única** maneira de dispor as pessoas nos conjuntos, mas é, certamente, **uma maneira possível**, visto que não infringe nenhuma regra do enunciado.

Dessa forma, teríamos total concordância com o enunciado e não teríamos pessoa alguma na intersecção, ou seja, **não podemos afirmar com certeza que há alguém na região de leitura dos dois livros, A e B, simultaneamente.**

Alternativa falsa, passemos à próxima.

b) nenhuma pessoa leu os dois livros.

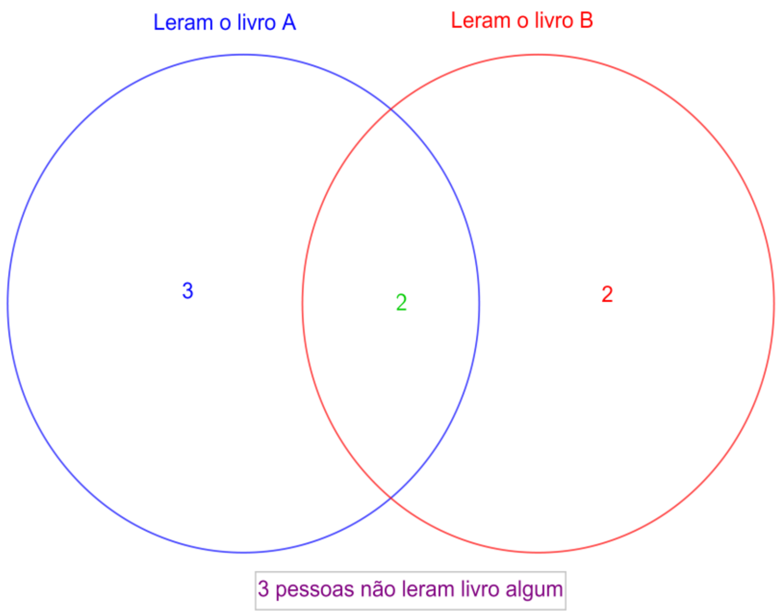
Novamente, tentemos provar a alternativa como falsa.

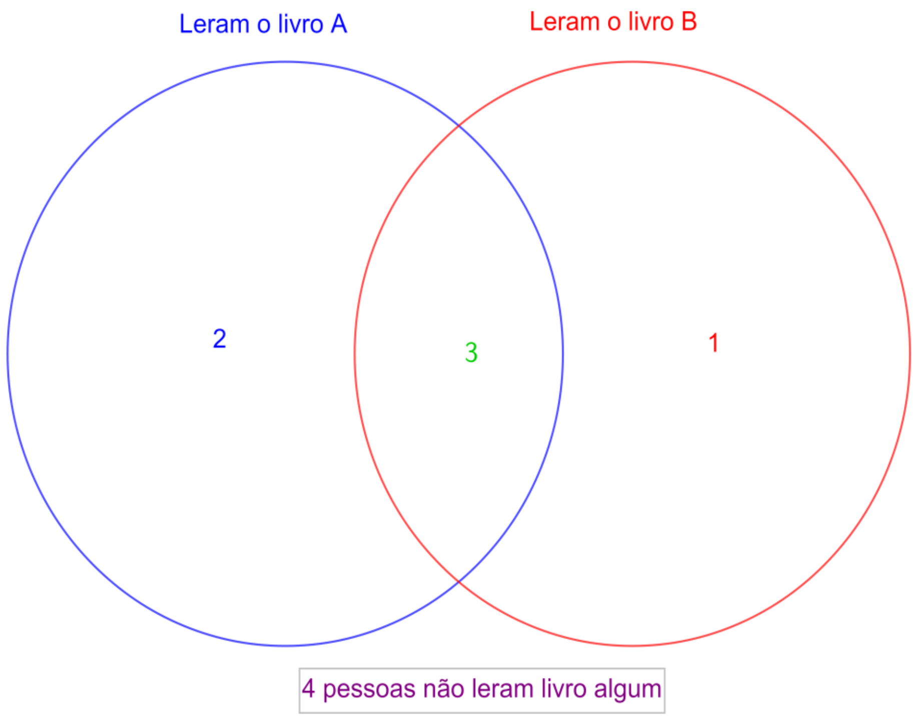


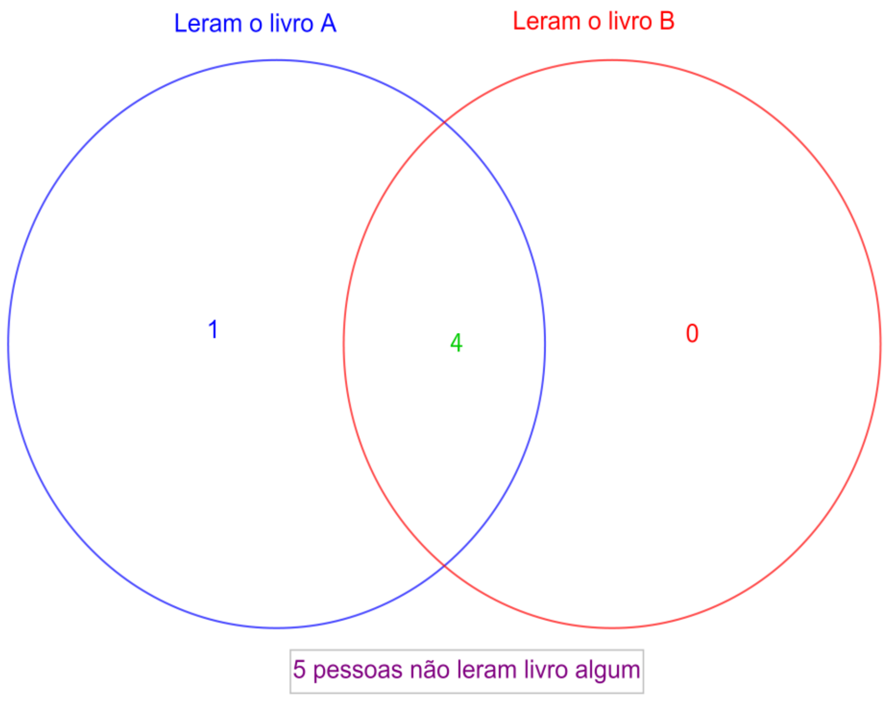

Todos os dados do enunciado satisfeitos e, ainda assim, há a possibilidade de alguém ter lido os dois livros, portanto, alternativa falsa.

c) pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

Analisando os dois primeiros diagramas, percebemos que, quanto mais pessoas lerem os dois livros, também mais pessoas ficariam sem ler livro algum, veja o que acontece com os números quando aumentamos sistematicamente o número de pessoas na intersecção:






A sequência de diagramas evidencia o fato de que, se temos 10 pessoas no grupo e 5 leram um tipo de livro e 4, outro, temos, necessariamente, pelo menos uma pessoa que não leu livro algum. Alternativa correta e nosso gabarito.

Achemos, então, o erro da alternativa d).

d) todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

Essa alternativa diz exatamente o contrário da anterior, se é verdadeiro que há alguém que não leu pelo menos um dos livros (conclusão da alternativa anterior), não podemos ter todas as pessoas lendo pelo menos um livro.

**Gabarito: d)**

## 6.2. Conjuntos numéricos

Lembra-se de que definimos o conjunto como sendo: uma reunião de elementos que apresentam determinada propriedade em comum?

Pois é, os conjuntos numéricos se enquadram perfeitamente nessa definição, só que, dessa vez, as propriedades são numéricas.

Uma característica do conhecimento humano é a de ser dividido em partes para melhor entendimento e, ao estudar os números, faremos exatamente isso.

Obviamente, se você chegou até esse ponto da aula, já teve contato com números e tem uma ideia, mesmo que intuitiva, do que eles são.

O que faremos aqui é uma análise dos tipos de números que precisaremos para seguir no estudo da matemática e essa divisão é feita exatamente em cima dessas propriedades que definem os elementos dos conjuntos.

### 6.2.1. Números Naturais $\mathbb{N}$

Pensando historicamente, é muito mais provável que as primeiras contagens tenham sido feitas usando números inteiros e positivos. Sem esse conceito, é improvável que ideias como a de frações ou a de números negativos pudessem ser formuladas de forma prática.

Desse modo, é didaticamente interessante começarmos nossos estudos sobre conjuntos numéricos com esse tipo de conjunto, os números inteiros e positivos.

Para escrever na forma de conjuntos, os inteiros positivos são números do tipo $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

Não poderíamos escrever todos os números nessa condição, exatamente por isso a definição dos elementos de um conjunto é importante e as reticências ao final são o sinal de que o conjunto se estende com elementos dessa condição indefinidamente.

Você deve ter percebido que não incluímos, nesse conjunto, o zero. Oras, a ideia era colocar os números inteiros positivos. O zero é um número inteiro, mas não é positivo (nem negativo na verdade), por isso não foi incluído.

Aliás, demorou um tempo até que a humanidade formalizasse como número o zero. Ele só apareceu séculos após a ideia de contagem.

Com o advento do zero, podemos inserir um conjunto novo, com uma nova característica: Os números inteiros e não negativos, o que incluiria o zero no conjunto anterior, resultando $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

Chamamos a esse conjunto de Números naturais, simbolizado pela letra $\mathbb{N}$.

Assim, definimos nosso primeiro conjunto na matemática, o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Uma observação interessante. Para nós, o início do estudo dos números é justamente o conjunto dos naturais e, caso queiramos nos referir somente aos números positivos, ditos estritamente positivos, basta-nos colocar um asterisco para simbolizar essa exclusão:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

### 6.2.2. Números Inteiros $\mathbb{Z}$

Após a consolidação dos números naturais, veio o advento do oposto de um número, ou seja, os números negativos.

Dessa forma, o oposto de $5$ é $-5$, o oposto de $10$ é $-10$ e assim por diante.

Professor, e o oposto de zero?

Excelente pergunta, o oposto de zero é ele mesmo, por isso não é comum escrevermos $-0$, apesar de não ser um erro.

Se quisermos expressar um conjunto que contenha todos os números naturais e seus opostos, teremos o conjunto dos inteiros, representado por $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$$

Perceba que o conjunto $\mathbb{Z}$ tem reticências em ambas as extremidades, significando que ele segue indefinidamente tanto para o lado negativo quanto para o lado positivo. Isso decorre diretamente do fato de que cada número natural, exceto o zero, tem um oposto diferente dele mesmo. Se há infinitos números naturais positivos, é de se esperar que haja um correspondente número de infinitos números negativos correspondentes, um a um, a cada um dos infinitos números naturais positivos.

### 6.2.3. Números Racionais $\mathbb{Q}$

Após a utilização dos números inteiros se tornar rotineira, começaram a aparecer problemas que esses números não podiam resolver, por exemplo:

Se uma família de 4 membros possui 6 galinhas, quantas galinhas correspondem a cada membro da família?

Perceba que a ideia de fração ainda não existe e aí surge uma necessidade numérica diferente.

Eis o nascimento dos números "quebrados"!

Números fracionários simbolizam exatamente uma divisão que não é necessariamente exata e sua simbologia moderna é:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } {}^{a}/_{b} \text{ ou } a \div b$$

Essa fração, também chamada de quociente ou razão, conta com um número natural no numerador (a parte de cima da fração, $a$) e outro número natural no denominador (a parte de baixo da fração, $b$).

Todos os números, sejam positivos ou negativos, que podem ser representados dessa forma são chamados de números racionais (de razão, divisão), ainda que o denominador $\boldsymbol{b}$ seja **1**.

Simbolizamos o conjunto dos racionais por $\mathbb{Q}$, de quociente, assim:

$$\mathbb{Q} = \{\dots -5, -\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}, 0, \frac{2}{5}, 6, \dots\}$$

Mas professor, estou vendo alguns números inteiros ali, ó!

Calma, eles também podem ser escritos na forma de fração, por isso estão ali. Um número racional, quando o seu denominador é 1, também é inteiro, veja:

$$\frac{10}{1} = 10$$

Aliás, podemos também incluir a notação decimal, não é necessário que tenhamos apenas a expressão do número na forma fracionária.

$$\frac{13}{99} = 0,\overline{13}$$

$$\frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$-\frac{7}{3} = -2,\overline{3}$$

Assim, os números racionais incluem, também, todos os inteiros e, por consequência, todos os naturais.

Note que, aqui, alguns números têm um número de casas decimais limitado, enquanto outros apresentam dízimas periódicas. Quando a dízima é periódica, ela resulta de uma fração, guarde isso!

### 6.2.4. Números Irracionais $\mathbb{I}$

Avançando mais um pouco no tempo, surgiram alguns problemas que mesmo os números fracionários não resolviam, como a razão entre o raio de uma circunferência e seu comprimento, a diagonal de um quadrado e seu lado, entre tantos outros.

Surgiram números especiais cujos valores não se deixavam exprimir por meio de frações. Com certeza você já deve ter visto alguns deles: $\sqrt{2}, \pi, \Phi, \mathrm{e}$, entre tantos outros. Essa classificação de números passou a ser conhecida como os números irracionais, visto que não são expressos por razões (quocientes).

Professor, mas quanto valem esses números na forma decimal?

Tecnicamente seria impossível escrever seus valores de forma completa, visto que eles apresentam um número de casas decimais infinitos e não sequenciais, exatamente por isso não conseguimos expressá-los na forma de fração.

No entanto, podemos apresentar uma aproximação de seus valores:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623 \ldots$$

$$\pi = 3{,}14159265359 \ldots$$

$$\Phi = 1{,}61803398875 \ldots$$

$$\mathrm{e} = 2{,}81828182846 \ldots$$

Perceba que esse novo conjunto, o dos números irracionais, não engloba o anterior. Quando um número pertence aos racionais, não pode pertencer aos irracionais e vice versa.

O conjunto dos irracionais é simbolizado por $\mathbb{I}$:

$$\mathbb{I} = \{\ldots -\sqrt{2}, \Phi, \mathrm{e}, \pi, \sqrt{10} \ldots\ \}$$

Não se preocupe com esses números caso não os tenha visto antes, daremos ênfase a cada um deles no decorrer do curso. Por ora, basta saber que esses números não têm seus valores expressos por meio de frações e suas dízimas não são periódicas.

Todos os números vistos aqui têm uma característica, expressam diretamente quantidades do mundo real, uma diagonal, um tamanho, uma circunferência, etc.

Até por esse motivo, podemos definir um conjunto que seja a soma de todos esses conjuntos citados, o conjunto dos números reais, simbolizado por $\mathbb{R}$. Assim:

$$\mathbb{R} = \{\mathbb{Q} + \mathbb{I}\}$$

### 6.2.5. Números Complexos $\mathbb{C}$

Há, também, um conjunto que não exprime exatamente uma quantidade no mundo real, mas que é muito útil ao resolver problemas mais complexos nas ciências. Trata-se dos números imaginários, cujo conjunto numérico que os contém é chamado conjunto dos complexos e é simbolizado pela letra $\mathbb{C}$.

A base dos números imaginários é a raiz quadrada da unidade negativa, o que é impossível de ser calculada dentro dos números reais.

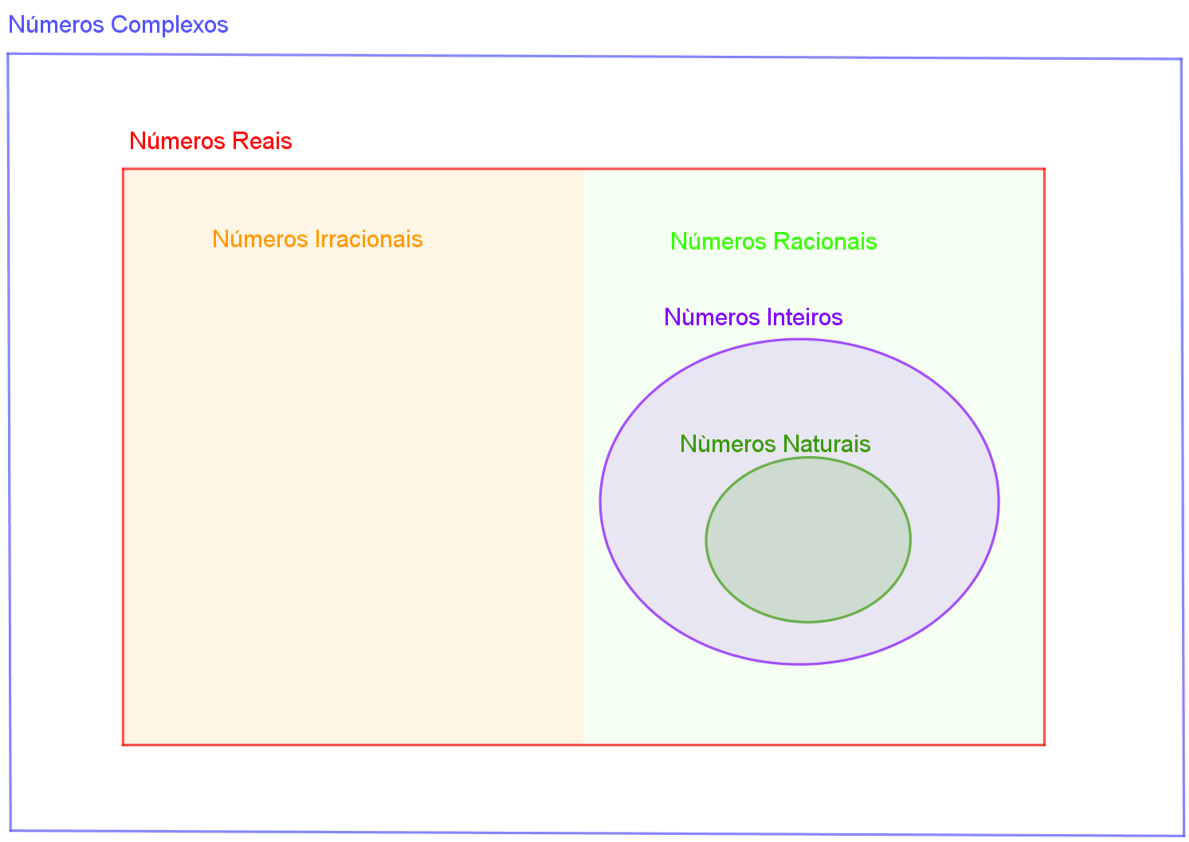
Essa base imaginária é dada por $i = \sqrt{-1}$.

Um número complexo é formado de duas partes, uma real e uma imaginária e é comum vermos representações desses números como $(2; 5)\ ou\ (2 + 5i)$.

Teremos aulas específicas sobre esse conjunto, então deixarei os detalhes para esse momento, ok?

Para ficar mais claro, veja como se relacionam esses conjuntos em um diagrama de Venn-Euler que estudamos anteriormente.

ESQUEMATIZANDO




Utilizaremos muitas vezes esses conceitos, portanto, não siga sem os compreender, combinado?

### 6.2.6. Múltiplos de um número

Lembra-se das tabuadas?

Aqui elas serão muito, muito úteis.

Imagine que eu queira contar, mas apenas de dois em dois, iniciando do próprio dois, como seria essa contagem?

Exatamente, $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 \dots\}$

Podemos notar que são todos os números pares. Mesmo que não escrevamos todos os elementos desse conjunto, você possivelmente afirmará que 1001 não pertence a ele.

Pois bem, esses números são exatamente os múltiplos de dois.

Para encontrar os múltiplos de um número, basta iniciarmos a contagem por ele e seguirmos contando com passos exatamente do tamanho do número inicial.

Se quisermos construir os múltiplos de 3, iniciamos com o 3 e seguimos de 3 em 3: $\{3, 6, 9, 12, 15, 18 \dots\}$.

Percebeu que são exatamente os números da tabuada? Mas não se limitam a ela, visto que estudamos poucos múltiplos nas tabuadas. Essa relação de multiplicidade é, como nos conjuntos numéricos vistos anteriormente, infinita.

A essa altura, você já não deve ter dificuldade em construir os múltiplos de um número qualquer, não é?

Apenas como exercício, quais seriam os múltiplos de $5, 17, 102$ e de um número desconhecido $n$?

Simples, esses múltiplos são:

$Múltiplos\ de\ 5 = \{5, 10, 15, 20, 25 \dots\}$

$Múltiplos\ de\ 17 = \{17, 34, 51, 68, \dots\}$

$Múltiplos\ de\ 102 = \{102, 204, 306, 408 \dots\}$

$Múltiplos\ de\ n = \{n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n \dots\}$

Esse conceito, apesar de simples, nos é a base para o próximo passo.

### 6.2.7. Números Primos

Primo significa primeiro, o primeiro de vários elementos.

Assim, voltemos à contagem que fizemos anteriormente quando estávamos a estabelecer os múltiplos de um número. Porém, agora, faremos em sequência, a partir do 2, e com uma regra adicional: nenhum número pode ser reescrito; se já apareceu em alguma listagem, não pode aparecer novamente.

Comecemos.

$$2 \Rightarrow \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 \dots\}$$

$$3 \Rightarrow \{3, 9, 15, 21 \dots\}$$

Aqui os números $6, 12, 18$ não apareceram na listagem do $3$, pois já haviam sido escritos na listagem do $2$, ok?

Continue comigo.

O $4$ não pode iniciar uma listagem, pois já consta na listagem do $2$.

O $5$ pode, então sigamos.

$$5 \Rightarrow \{5, 25, 35, 55 \dots\}$$

Novamente, os números $10, 15, 20, 30, 40, 45, 50$ não configuraram na listagem do $5$, pois já haviam sido listados em listagens anteriores.

O 6 não pode iniciar listagem.

$$7 \Rightarrow \{7, 49 \dots\}$$

$8, 9$ $e$ $10$ não podem iniciar listagem...

$$11 \Rightarrow \{11, 121 \dots\}$$

Pois bem, vamos escrever todas as listagens que fizemos até agora.

$$2 \Rightarrow \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 \dots\}$$

$$3 \Rightarrow \{3, 9, 15, 21 \dots\}$$

$$5 \Rightarrow \{5, 25, 35, 55 \dots\}$$

$$7 \Rightarrow \{7, 49 \dots\}$$

$$11 \Rightarrow \{11, 121 \dots\}$$

Os números passíveis de iniciarem esse tipo de lista vão ficando mais escassos enquanto preenchemos novas e novas listas e, ainda hoje, não sabemos todos os números com essa característica.

Aos números colocados como primeiros nas listas, até aqui $2, 3, 5, 7$ $e$ $11$, damos os números de primos, pois são os primeiros a serem listados.

Aos demais, os que não puderam iniciar lista alguma, chamamos de números compostos.

Mas professor, 1 não é primo?

Excelente pergunta, caro pupilo!

Pensemos...

Caso o 1 seja considerado primo, perceba que sua lista seria:

$$1 \Rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 \dots\}$$

Dessa forma, não poderíamos iniciar outras listas, o que acabaria com a nossa brincadeira e não teríamos quaisquer outros primos exceto o 1. Exatamente por esse motivo, o 1 não é considerado primo.

E o zero, professor?

Pois é, a lista do zero seria ainda mais pitoresca que a do 1, veja:

$$0 \Rightarrow \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \dots\}$$

Assim, o zero também não é um número primo, pois não gera números múltiplos de zero, ou ainda, compostos.

### 6.2.8. Mínimo Múltiplo Comum - MMC

Como já conhecemos os múltiplos de um número, podemos ampliar essa análise para quando temos dois ou mais números.

Quais seriam os múltiplos dos números, digamos, 6, 8 e 12?

Simples, sigamos como fizemos anteriormente:

$$Múltiplos\ de\ 6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, \dots\}$$

$$Múltiplos\ de\ 8 = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96 \dots\}$$

$$Múltiplos\ de\ 12 = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 \dots\}$$

Perceba que há, nesses múltiplos, alguns números que são comuns a 6, 8 e 12:

$$Múltiplos\ de\ 6 = \{6, 12, 18, \mathbf{24}, 30, 36, 42, \mathbf{48}, 54, 60, 66, \mathbf{72}, 78, \dots\}$$

$$Múltiplos\ de\ 8 = \{8, 16, \mathbf{24}, 32, 40, \mathbf{48}, 56, 64, \mathbf{72}, 80, 88, 96 \dots\}$$

$$Múltiplos\ de\ 12 = \{12, \mathbf{24}, 36, \mathbf{48}, 60, \mathbf{72}, 84 \dots\}$$

Existem muitos números que são múltiplos comuns a estes três números, 6, 8 e 12, e todos eles são múltiplos de 24.

Dessa forma, é muito comum que, ao precisarmos de múltiplos comuns a um conjunto de números, opte-se pelo menor múltiplo comum, por praticidade.

Assim, dentre os múltiplos comuns a 6, 8 e 12, percebemos que o mínimo deles é 24 e simbolizamos essa informação da seguinte forma:

$$MMC(6, 8, 12) = 24$$

Há maneiras mais práticas para calcularmos o MMC entre dois ou mais números, por exemplo, a fatoração simultânea, você deve se lembrar dela da época da escola.

Escrevemos os números que queremos saber qual é o MMC e utilizamos os números primos, do menor para o maior, para irmos "fatorando" os números. Acompanhe.

$$\begin{array}{ccc|c}
6 & 8 & 12 & 2 \\
3 & 4 & 6 & 2 \\
3 & 2 & 3 & 2 \\
3 & 1 & 3 & 3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 2^3.3=24
\end{array}$$

$$MMC(6, 8, 12) = 2^3.3 = 8.3 = 24$$

Nesse exemplo, utilizamos 3 números, mas podemos calcular o $MMC$ entre quantos números precisarmos.

Utilizamos muito o $MMC$ para somar frações, e frações aparecerão bastante em nosso curso.

### 6.2.9. Divisores de um número

Para os divisores de um número, pensamos em quantas partes podemos dividi-lo sem que obtenhamos um resultado não inteiro. Vejamos alguns exemplos.

$$Divisores\ de\ 6 \Rightarrow \{1, 2, 3, 6\}$$

$$Divisores\ de\ 10 \Rightarrow \{1, 2, 5, 10\}$$

$$Divisores\ de\ 11 \Rightarrow \{1, 11\}$$

$$Divisores\ de\ 200 \Rightarrow \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$$

FIQUE ATENTO!

O conjunto dos divisores de um número não é infinito, como o conjunto dos múltiplos.

Números primos só têm dois números em seu conjunto de divisores, eles mesmos e o número 1.

### 6.2.10. Máximo Divisor Comum - MDC

Para calcular o Máximo Divisor Comum – MDC entre dois ou mais números, podemos pensar, inicialmente, no método da listagem, abordado anteriormente.

Vamos calcular, digamos, o MDC entre 20 e 30, ou seja, $MDC(20,30)$.

$$Divisores\ de\ 20 \Rightarrow \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$Divisores\ de\ 30 \Rightarrow \{1, 2, 3, 5, 6,10, 15, 30\}$$

Quais seriam os divisores comuns entre 20 e 30?

Simples, basta olhar nas listagens de seus divisores.

$$Divisores\ de\ 20 \Rightarrow \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$Divisores\ de\ 30 \Rightarrow \{1, 2, 3, 5, 6,10, 15, 30\}$$

Assim, podemos dizer que o maior divisor comum a 20 e 30, é 10, ou $MDC(20,30) = 10$.

Alternativamente, podemos trabalhar com a fatoração para encontrar o $MDC$ entre números. Veja.

| | |
|---|---|
| 20 | 2 |
| 10 | 2 |
| 5 | 5 |
| 1 | $2^2.5$ |

| | |
|---|---|
| 30 | 2 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | 2.3.5 |

Para encontrar o $MDC(20,30)$, basta multiplicarmos os primos que se repetem em todas as fatorações, com seus menores expoentes:

$$MDC(20,30) = 2.5 = 10$$

O $MDC$ é uma ferramenta muito útil em certos tipos de problemas de divisão e voltaremos a esse assunto em breve.

# 7. Questões de vestibulares anteriores

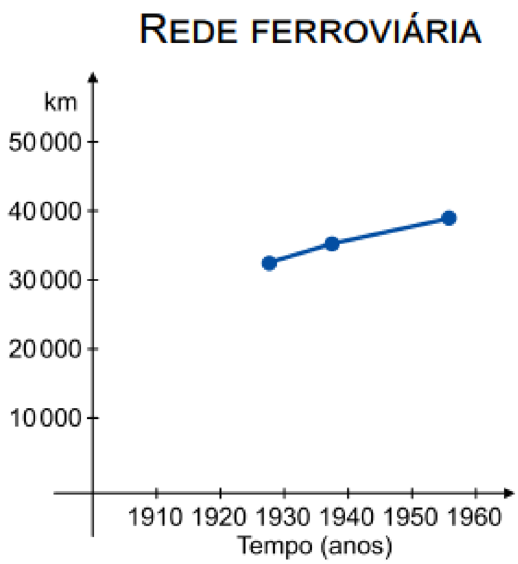
**1. (Unicamp/2019)**

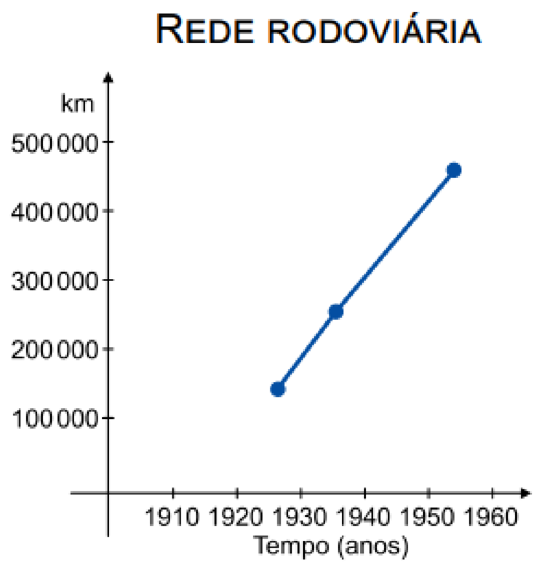
A representação decimal de certo número inteiro positivo tem dois algarismos. Se o triplo da soma desses algarismos é igual ao próprio número, então o produto dos algarismos é igual a

a) 10. b) 12. c) 14. d) 16.

**2. (Unesp/2019)**

Os gráficos indicam a expansão das redes de transporte ferroviário e rodoviário no Brasil (em $km$) em função do tempo (ano).




(Dados extraídos de: Paul Singer. "Interpretação do Brasil: uma experiência histórica de desenvolvimento". *In*: Boris Fausto (org.). *História geral da civilização brasileira*, tomo III, vol. 4, 1986.)

As informações dos dois gráficos estão traduzidas na tabela:

a)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 31.851,2 | 113.570,0 |
| 1938/39 | 34.206,6 | 258.390,0 |
| 1955 | 37.092,0 | 459.714,0 |

b)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 36.441,4 | 98.673,0 |
| 1938/39 | 25.004,0 | 240.221,0 |
| 1955 | 32.533,8 | 501.342,0 |

c)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 31.851,2 | 254.722,0 |
| 1938/39 | 41.436,3 | 213.870,0 |
| 1955 | 21.984,6 | 440.657,0 |

d)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 22.389,6 | 302.793,0 |
| 1938/39 | 44.376,0 | 266.134,0 |
| 1955 | 50.328,9 | 115.681,0 |

e)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 32.231,0 | 109.273,0 |
| 1938/39 | 30.579,2 | 260.991,0 |
| 1955 | 27.774,6 | 155.832,0 |

**3. (Fatec/2019-1)**

Entre as tarefas de um professor, está a elaboração de exercidos. Professores de Matemática ainda hoje se inspiram em Diofanto, matemático grego do século III, para criar desafios para seus alunos. Um exemplo de problema diofantino é: "Para o nascimento do primeiro filho, o pai esperou um sexto de sua vida; para o nascimento do segundo, a espera foi de um terço de sua vida. Quando o pai morreu, a soma das idades do pai e dos dois filhos era de 240 anos. Com quantos anos o pai morreu? "

Considerando que, quando o pai morreu, ele tinha x anos, assinale a equação matemática que permite resolver esse problema.

$$a)\ x+\frac{5x}{6}+\frac{2x}{3}=240 \qquad b)\ x+\frac{x}{6}+\frac{x}{3}=240 \qquad c)\ x+\frac{4x}{5}+\frac{3x}{4}=240$$

$$d)\ x+\frac{x}{6}+\frac{3x}{2}=240 \qquad e)\ x+\frac{6x}{5}+\frac{3x}{4}=240$$

**4. (Fatec/2019-2)**

A divisão é uma das quatro operações fundamentais da Aritmética e pode ser representada utilizando o algoritmo:

| *Dividendo* | *Divisor* |
|---|---|
| *Resto* | *Quociente* |

Considere que, no conjunto dos números naturais, a divisão de 43 por 5 tem quociente $q$. Seja $N$ o número natural tal que $(N + 43)$ dividido por 5 tem como quociente $(q + 500)$.

Nessas condições, o menor valor de $N$ é

a) 2 497. b) 2 498. c) 2 499. d) 2 500. e) 2 501.

**5. (Fatec/2019-2)**

Um grupo de cinco amigos resolveu passar o final de semana em um hotel fazenda no interior do estado de São Paulo. Todos foram juntos no mesmo carro e decidiram dividir, igualmente, a despesa total da viagem entre os cinco participantes.

Dados da viagem de carro:

a distância percorrida ida e volta foi de $432\ km$;

o consumo de gasolina do veículo foi de $9\ km/L$;

o preço da gasolina foi de $R\$\ 4{,}50/L$;

o valor de cada pedágio foi de

$P1$: $R\$\ 10{,}00$

$P2$: $R\$\ 2{,}50$

$P3$: $R\$\ 4{,}40$

$P4$: $R\$\ 2{,}70$

Sabendo que todos os pedágios foram pagos na ida e na volta, cada amigo gastou em transporte, considerando apenas a gasolina e os pedágios, a quantia de

a) $R\$43{,}20$. b) $R\$45{,}24$. c) $R\$47{,}12$. d) $R\$51{,}04$. e) $R\$\ 53{,}08$.

**6. (Fuvest/2018)**

Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;

II. 16 não obtiveram nota mínima em português;

III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês;

IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;

V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;

VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês;

VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

a) 44. b) 46. c) 47. d) 48. e) 49.

**7. (Unicamp/2018)**

Considere três números inteiros cuja soma é um número ímpar. Entre esses três números, a quantidade de números ímpares é igual a

a) $0$ ou $1$. b) $1$ ou $2$. c) $2$ ou $3$. d) $1$ ou $3$.

**8. (Fuvest/2017)**

Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz-se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b.

Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

a) 8 e 9. b) 9 e 11. c) 10 e 12. d) 15 e 20. e) 16 e 25.

**9. (Fuvest/2016)**

A igualdade correta para quaisquer $a$ e $b$, números reais maiores do que zero, é

$a)\ \sqrt[3]{a^3+b^3}=a+b$

$b)\ \dfrac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}=-\dfrac{1}{b}$

$c)\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a-b$

$d)\ \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$e)\ \dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$

**10. (Fuvest/2015)**

Na cidade de São Paulo, as tarifas de transporte urbano podem ser pagas usando o bilhete único. A tarifa é de R$3,00 para uma viagem simples (ônibus ou metrô/trem) e de R$4,65 para uma viagem de integração (ônibus e metrô/trem). Um usuário vai recarregar seu bilhete único, que está com um saldo de R$12,50. O menor valor de recarga para o qual seria possível zerar o saldo do bilhete após algumas utilizações é

a) R$0,85 b) R$1,15 c) R$1,45 d) R$2,50 e) R$2,80

**11. (Fuvest/2014)**

O número real $x$, que satisfaz $3 < x < 4$, tem uma expansão decimal na qual os $999.999$ primeiros dígitos à direita da vírgula são iguais a $3$. Os $1.000.001$ dígitos seguintes são iguais a $2$ e os restantes são iguais a zero.

Considere as seguintes afirmações:

I. $x$ é irracional.

II. $x \geq \dfrac{10}{3}$

III. $x.10^{2.000.000}$ é um inteiro par

Então,

a) nenhuma das três afirmações é verdadeira

b) apenas as afirmações I e II são verdadeiras

c) apenas a afirmação I é verdadeira

d) apenas a afirmação II é verdadeira

e) apenas a afirmação III é verdadeira

**12. (Fuvest/2013)**

As propriedades aritméticas e as relativas à noção de ordem desempenham um importante papel no estudo dos números reais. Nesse contexto, qual das afirmações abaixo é correta?

a) Quaisquer que sejam os números reais positivos a e b, é verdadeiro que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

b) Quaisquer que sejam os números reais a e b tais que $a^2 - b^2 = 0$, é verdadeiro que $a = b$.

c) Qualquer que seja o número real a é verdadeiro que $\sqrt{a^2} = a$.

d) Quaisquer que sejam os números reais a e b não nulos tais que $a < b$, é verdadeiro que $1/_b < 1/_a$.

e) Qualquer que seja o número real a, com $0 < a < 1$, é verdadeiro que $a^2 \leq \sqrt{a}$.

**13. (Fuvest/2010)**

Leia a charge e responda.


Fonte: **Toda Mafalda**. Quino. Martins Fontes, 1999.

a) Que motivo levou Mafalda a pedir para ir ao banheiro?

b) Enuncie e resolva o problema matemático apresentado à Mafalda.

# 8. Gabarito das questões de vestibulares anteriores

| | |
|---|---|
| 1. | C |
| 2. | A |
| 3. | A |
| 4. | A |
| 5. | D |
| 6. | E |
| 7. | D |
| 8. | E |
| 9. | E |
| 10. | B |
| 11. | E |
| 12. | E |
| 13. | 291 |

# 9. Questões de vestibulares anteriores resolvidas e comentadas

**1. (Unicamp/2019)**

A representação decimal de certo número inteiro positivo tem dois algarismos. Se o triplo da soma desses algarismos é igual ao próprio número, então o produto dos algarismos é igual a

a) 10. b) 12. c) 14. d) 16.

**Comentários**

Tomemos o número inteiro positivo como $n = 10 \cdot a + b$, onde $a$ representa o algarismo das dezenas e $b$, o das unidades.

Reescrevendo parte do enunciado como equação, temos:

"... o triplo da soma desses algarismos é igual ao próprio número..."

$$3(a+b) = 10 \cdot a + b$$

$$3a + 3b = 10 \cdot a + b$$

$$2b = 7a$$

$$\frac{2b}{7} = a$$

Como $a$ e $b$ são, necessariamente, inteiros e positivos, temos que $b$ deve ser múltiplo de 7, pois $a$ é inteiro.

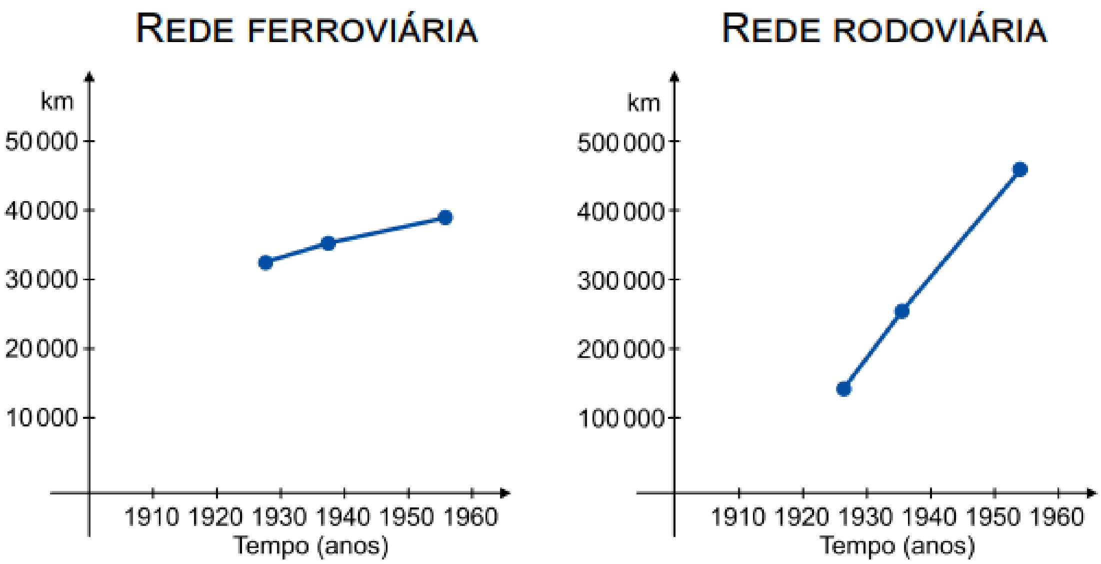
Como $0 < b < 9$, afinal, estamos falando de dígitos de um número, o único valor possível para $b$ é $7$, o que retorna $a = 2$. Assim, temos $a \cdot b = 2 \cdot 7 = 14$.

**Gabarito: c)**

---

**2. (Unesp/2019)**

Os gráficos indicam a expansão das redes de transporte ferroviário e rodoviário no Brasil (em $km$) em função do tempo (ano).




(Dados extraídos de: Paul Singer. "Interpretação do Brasil: uma experiência histórica de desenvolvimento". *In*: Boris Fausto (org.). *História geral da civilização brasileira*, tomo III, vol. 4, 1986.)

As informações dos dois gráficos estão traduzidas na tabela:

a)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 31.851,2 | 113.570,0 |
| 1938/39 | 34.206,6 | 258.390,0 |
| 1955 | 37.092,0 | 459.714,0 |

b)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 36.441,4 | 98.673,0 |
| 1938/39 | 25.004,0 | 240.221,0 |
| 1955 | 32.533,8 | 501.342,0 |

c)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 31.851,2 | 254.722,0 |
| 1938/39 | 41.436,3 | 213.870,0 |
| 1955 | 21.984,6 | 440.657,0 |

d)

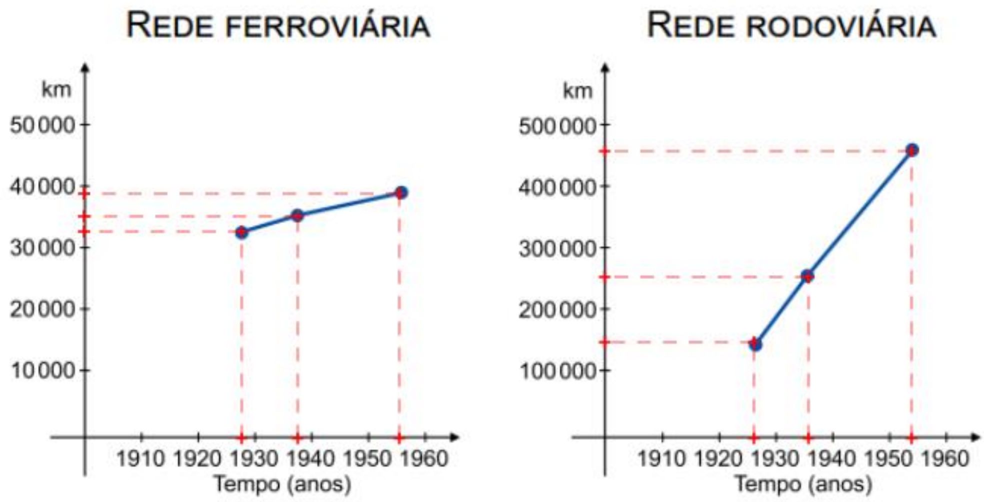
| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 22.389,6 | 302.793,0 |
| 1938/39 | 44.376,0 | 266.134,0 |
| 1955 | 50.328,9 | 115.681,0 |

e)

| | Rede ferroviária | Rede rodoviária |
|---|---|---|
| 1928 | 32.231,0 | 109.273,0 |
| 1938/39 | 30.579,2 | 260.991,0 |
| 1955 | 27.774,6 | 155.832,0 |

**Comentários**

Utilizemos o próprio gráfico do enunciado como guia para os dados.




A questão pede somente o cruzamento dos dados na forma de tabela.

Uma forma de fazer esse tipo de questão mais rapidamente é por eliminação. Vamos analisar ponto a ponto e excluir as alternativas que não estejam de acordo.

O primeiro ponto do primeiro gráfico, sobre a Rede Ferroviária, mostra um ano que antecede 1930. Pelas alternativas, podemos inferir que seja algo em torno de 1928. Para esse ponto, temos uma leitura no eixo vertical que supera, por pouco, os 30 000 km. Dessa forma, podemos excluir as alternativas b) e d), pois não estão de acordo com a informação gráfica.

O segundo ponto, ainda do primeiro gráfico mostra um ponto que representa um ano inferior a 1940. Novamente, pelas alternativas, tomemo-lo como 1938/1939. Nossa leitura, para esse ponto, no eixo vertical, mostra algo acima da leitura anterior. Pelo gráfico, algo em torno de 35 000 km. Perceba que, com esse novo dado, podemos eliminar as alternativas c) e e) restantes.

Dessa forma, só nos restou a alternativa a) como gabarito, o que é confirmado comparando todos os outros pontos com os dados da tabela apresentada.

**Gabarito: a)**

---

**3. (Fatec/2019-1)**

Entre as tarefas de um professor, está a elaboração de exercidos. Professores de Matemática ainda hoje se inspiram em Diofanto, matemático grego do século III, para criar desafios para seus alunos. Um exemplo de problema diofantino é: “Para o nascimento do primeiro filho, o pai esperou um sexto de sua vida; para o nascimento do segundo, a espera foi de um terço de sua vida. Quando o pai morreu, a soma das idades do pai e dos dois filhos era de 240 anos. Com quantos anos o pai morreu? “

Considerando que, quando o pai morreu, ele tinha $x$ anos, assinale a equação matemática que permite resolver esse problema.

$$a)\ x+\frac{5x}{6}+\frac{2x}{3}=240 \qquad b)\ x+\frac{x}{6}+\frac{x}{3}=240 \qquad c)\ x+\frac{4x}{5}+\frac{3x}{4}=240$$

$$d)\ x+\frac{x}{6}+\frac{3x}{2}=240 \qquad e)\ x+\frac{6x}{5}+\frac{3x}{4}=240$$

**Comentários**

Na data da morte do pai, o próprio pai, $p$, tinha $x$ anos de idade, ou seja, $p=x$.

Nessa data, a idade do primeiro filho, $f_1$, era a diferença de tempo entre seu nascimento e o falecimento do pai, ou seja, $f_1=x-\frac{x}{6}=\frac{5x}{6}$.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao segundo filho, $f_2$, assim $f_2=x-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$.

Assim, a soma das idades do pai e dos dois filhos é dada por:

$$S=p+f_1+f_2=x+x-\frac{x}{6}+x-\frac{x}{3}=x+\frac{5x}{6}+\frac{2x}{3}$$

**Gabarito: a)**

---

**4. (Fatec/2019-2)**

A divisão é uma das quatro operações fundamentais da Aritmética e pode ser representada utilizando o algoritmo:

| *Dividendo* | *Divisor* |
|---|---|
| *Resto* | *Quociente* |

Considere que, no conjunto dos números naturais, a divisão de 43 por 5 tem quociente $q$. Seja $N$ o número natural tal que $(N\ +\ 43)$ dividido por 5 tem como quociente $(q\ +\ 500)$.

Nessas condições, o menor valor de $N$ é

a) 2 497. b) 2 498. c) 2 499. d) 2 500. e) 2 501.

**Comentários**

Segundo o enunciado, utilizando a divisão de 43 por 5, podemos encontrar o valor do quociente $q$.

| 43 | 5 |
|---|---|
| $Resto=3$ | $q=8$ |

Assim, podemos esquematizar os dados da questão.

| | |
|---|---|
| $N + 43$ | $5$ |
| $Resto = ?$ | $q + 500 = 8 + 500 = 508$ |

Uma vez definido o quociente da divisão, o menor dividendo será o que deixar o menor resto possível, ou seja, $Resto = 0$. Dessa forma, podemos dizer que

$$N + 43 = 5 \cdot 508 + 0$$

$$N + 43 = 2\,540$$

$$N = 2\,540 - 43$$

$$N = 2\,497$$

**Gabarito: a)**

---

**5. (Fatec/2019-2)**

Um grupo de cinco amigos resolveu passar o final de semana em um hotel fazenda no interior do estado de São Paulo. Todos foram juntos no mesmo carro e decidiram dividir, igualmente, a despesa total da viagem entre os cinco participantes.

Dados da viagem de carro:

a distância percorrida ida e volta foi de $432\ km$;

o consumo de gasolina do veículo foi de $9\ km/L$;

o preço da gasolina foi de $R\$\ 4{,}50/L$;

o valor de cada pedágio foi de

$P1$: $R\$\ 10{,}00$

$P2$: $R\$\ 2{,}50$

$P3$: $R\$\ 4{,}40$

$P4$: $R\$\ 2{,}70$

Sabendo que todos os pedágios foram pagos na ida e na volta, cada amigo gastou em transporte, considerando apenas a gasolina e os pedágios, a quantia de

a) $R\$43{,}20$.  b) $R\$45{,}24$.  c) $R\$47{,}12$.  d) $R\$51{,}04$.  e) $R\$\ 53{,}08$.

**Comentários**

O custo para cada amigo, $C$, será dado por

$$C = \frac{custo\ total}{número\ de\ amigos}$$

O enunciado informou os cinco amigos dividirão todos os gastos, ou seja, combustível e pedágio.

$$C = \frac{combustível + pedágio}{5}$$

O veículo andou $432\ km$ consumindo, em média, $9\ km/L$ ao preço de $R\$\ 4{,}50/L$.

Além disso, os pedágios $P1$, $P2$, $P3$ e $P4$ foram pagos duas vezes, na ida e na volta.

$$C = \frac{\frac{432\ km}{9\frac{km}{L}} \cdot \frac{R\$\ 4{,}50}{L} + 2 \cdot (R\$10 + R\$2{,}5 + R\$4{,}4 + R\$2{,}7)}{5}$$

$$C = \frac{432\ km \cdot \frac{1}{9}\frac{L}{km} \cdot \frac{R\$\ 4{,}50}{L} + 2 \cdot (R\$19{,}6)}{5}$$

$$C = \frac{{}^{216}\cancel{432\ km} \cdot \frac{1}{{}_{2}\cancel{9}} \frac{\cancel{L}}{\cancel{km}} \cdot \frac{R\$\ {}^{1}\cancel{4{,}50}}{\cancel{L}} + R\$39{,}20}{5}$$

$$C = \frac{216 \cdot R\$\ 1 + R\$39{,}20}{5}$$

$$C = \frac{R\$\ 216 + R\$39{,}20}{5}$$

$$C = \frac{R\$\ 255{,}2}{5}$$

$$C = R\$\ 51{,}04$$

Note que usamos todas as unidades na equação. Isso facilita para acusar eventuais erros de estrutura. Como estávamos calculando um custo, não seria aceitável chegarmos ao final com uma unidade estranha ao contexto, com litros por exemplo.

No entanto, você pode suprimir as unidades, mas sempre prestando atenção à estrutura do cálculo e, sempre, obedecendo ao comando da questão.

**Gabarito: d)**

---

**6. (Fuvest/2018)**

Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;

II. 16 não obtiveram nota mínima em português;

III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês;

IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;

V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;

VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês;

VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

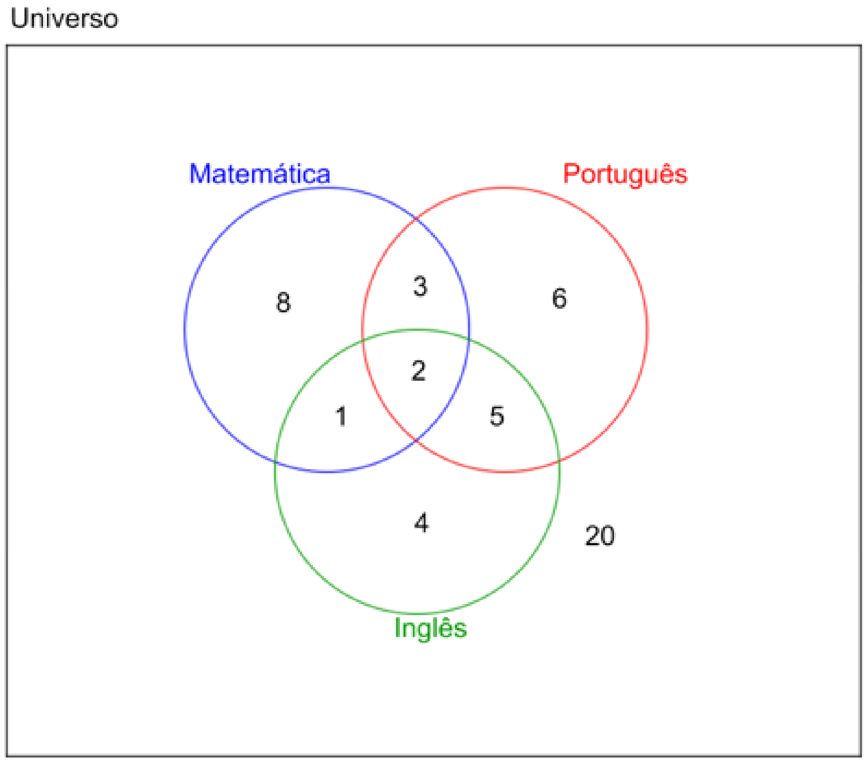
A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

a) 44. b) 46. c) 47. d) 48. e) 49.

**Comentários**

Com o enunciado, percebemos que há várias informações acerca dos alunos. Uma maneira muito interessante para organizar essas informações é a utilização dos diagramas de Venn-Euler, por tratar os dados de maneira visual.

Tome cuidado para não colocar informação duplicada. Se 7 candidatos não obtiveram nota mínima em português e em inglês, mas, destas, 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês, precisamos colocar apenas as 5 restantes ao preencher o diagrama. Veja.




Precisamos entender que há apenas dois tipos de pessoas que participaram do concurso: as que não conseguiram nota mínima (dentro das delimitações Matemática, Português e Inglês) e as que conseguiram (as 20 pessoas fora desses 3 conjuntos).

O número N de pessoas que participaram do concurso é dado por:

$$N = 8 + 3 + 6 + 1 + 2 + 5 + 4 + 20 = 49$$

**Gabarito: e)**

---

**7. (Unicamp/2018)**

Considere três números inteiros cuja soma é um número ímpar. Entre esses três números, a quantidade de números ímpares é igual a

a) 0 ou 1. b) 1 ou 2. c) 2 ou 3. d) 1 ou 3.

**Comentários**

Chamando $p$ um número par e $i$ um número ímpar, temos as seguintes possibilidades:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p+p+p=p$ | $p+p+i=i$ | $p+i+i=p$ | $i+i+i=i$ |

Como o enunciado disse que o resultado é um número ímpar, temos apenas duas possibilidades: ou apenas uma parcela da soma é formada por número ímpar ou as três parcelas da soma são números ímpares.

**Gabarito: d)**

---

**8. (Fuvest/2017)**

Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz-se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b.

Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

a) 8 e 9. b) 9 e 11. c) 10 e 12. d) 15 e 20. e) 16 e 25.

**Comentários**

Muito bem. Antes de analisarmos as alternativas, faz-se necessário entender o que o enunciado diz.

A título de esclarecimento, peguemos dois números, digamos 6 e 10. Para saber se eles são equivalentes, façamos o proposto pelo enunciado, somemos seus divisores. Acompanhe:

| Número | Divisores | Soma |
|---|---|---|
| $6$ | $1, 2, 3\ e\ 6$ | $1+2+3+6=12$ |
| $10$ | $1, 2, 5\ e\ 10$ | $1+2+5+10=18$ |

Portanto, pelos dados do enunciado, os números 6 e 10 não são equivalentes.

Para uma análise mais ampla, façamos o mesmo com todos os números citados nas alternativas:

| Número | Divisores | Soma |
|---|---|---|
| $8$ | $1, 2, 4\ e\ 8$ | $1+2+4+8=15$ |
| $9$ | $1, 3\ e\ 9$ | $1+3+9=13$ |
| $10$ | $1, 2, 5\ e\ 10$ | $1+2+5+10=18$ |
| $11$ | $1\ e\ 11$ | $1+11=12$ |
| $12$ | $1, 2, 3, 4, 6\ e\ 12$ | $1+2+3+4+6+12=28$ |
| $15$ | $1, 3, 5\ e\ 15$ | $1+3+5+15=24$ |
| $16$ | $1, 2, 4, 8\ e\ 16$ | $1+2+4+8+16=31$ |
| $20$ | $1, 2, 4, 5, 10\ e\ 20$ | $1+2+4+5+10+20=42$ |
| $25$ | $1, 5\ e\ 25$ | $1+5+25=31$ |

Perceba que apenas os números 16 e 25 apresentam somas iguais, indicando a alternativa e) como nosso gabarito!

Dica: Você não precisaria saber o que são os números equivalentes. É muito comum um exercício trazer uma definição "nova" para você e, dando informações suficientes, solicitando alguma atividade que exija adaptação de seus conhecimentos. Não se desespere com termos diferentes e conceitos novos, a prova dará informações suficientes nessas situações.

**Gabarito: e)**

---

**9. (Fuvest/2016)**

A igualdade correta para quaisquer $a$ e $b$, números reais maiores do que zero, é

$a)\ \sqrt[3]{a^3+b^3}=a+b$

$b)\ \dfrac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}=-\dfrac{1}{b}$

$c)\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a-b$

$d)\ \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$e)\ \dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$

**Comentários**

Mais uma questão que, para resolvê-la, precisamos analisar alternativa a alternativa.

Podemos perceber que teremos que "provar" certas propriedades por meio de equações e há, basicamente, três meios para se provar uma igualdade $A=B$: podemos sair de $A$ e chegar em $B$, sair de $B$ e chegar em $A$ ou ainda sair da própria igualdade $A=B$ e chegar a uma igualdade irrefutavelmente verdadeira (ou falsa, para provar que a igualdade não é válida).

Mãos à obra!

$a)\ \sqrt[3]{a^3+b^3}=a+b$

Nessa igualdade, optaremos pela terceira das possibilidades apresentadas, saindo da igualdade original e tentando chegar a uma igualdade irrefutavelmente válida ou inválida.

$$\sqrt[3]{a^3+b^3}=a+b$$
$$\left(\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)^3=(a+b)^3$$
$$a^3+b^3=(a+b)^3$$

Se você se lembra dos produtos notáveis apresentados no início da aula, já deve ter percebido que a igualdade não é válida, pois o desenvolvimento do cubo da soma não é a soma dos cubos, veja:

$$a^3+b^3\neq(a+b)^3=a^3+3.a^2b+3.ab^2+b^3$$

Portanto a alternativa a) é falsa, vamos para a próxima.

$b)\ \dfrac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} = -\dfrac{1}{b}$

Novamente, partamos da igualdade completa.

$$\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{1}{b}$$

Rearranjando os termos, cientes de que $a$ e $b$ não são nulos, temos:

$$-\frac{b}{a} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Ao olhar a igualdade, sabendo que $a$ e $b$ são maiores do que zero, portanto positivos, podemos perceber que a fração apresentada no primeiro termo da equação será sempre negativa e um resultado negativo nunca poderia ser resultado de a extração de uma raiz quadrada no domínio dos números reais.

Novamente, alternativa falsa.

$c)\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a-b$

Para essa alternativa, vamos sair do primeiro membro e tentar chegar ao segundo para verificar a validade da afirmação.

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a - 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + b$$

Como a expressão a que chegamos não é equivalente ao segundo termo da equação apresentada, classificamos, também, essa alternativa como falsa.

$d)\ \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

Para a análise dessa alternativa, saiamos do segundo membro da equação para tentar chegar ao primeiro.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Para soma de frações, MMC:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$$

Novamente, chegamos a uma expressão não equivalente à informada na igualdade. Alternativa também falsa.

Sem mais alternativas, não nos resta escolha além de assinalar a alternativa e) como nosso gabarito, mas, a título de exercício, vamos analisá-la também para atestar sua validade.

$e)\ \dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = a-b$

Nessa alternativa, vamos partir da expressão apresentada no primeiro termo e verificar se ela é equivalente ao segundo termo.

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

Como vimos nos produtos notáveis apresentados no início, podemos fatorar a expressão $a^3 - b^3$.

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a-b)\cancel{(a^2 + ab + b^3)}}{\cancel{(a^2 + ab + b^3)}} = (a - b)$$

Exatamente o que nossa alternativa afirmou.

**Gabarito: e)**

---

**10. (Fuvest/2015)**

Na cidade de São Paulo, as tarifas de transporte urbano podem ser pagas usando o bilhete único. A tarifa é de R$3,00 para uma viagem simples (ônibus ou metrô/trem) e de R$4,65 para uma viagem de integração (ônibus e metrô/trem). Um usuário vai recarregar seu bilhete único, que está com um saldo de R$12,50. O menor valor de recarga para o qual seria possível zerar o saldo do bilhete após algumas utilizações é

a) R$0,85 b) R$1,15 c) R$1,45 d) R$2,50 e) R$2,80

**Comentários**

Para essa análise, podemos trabalhar com a proposta de exaustão, pois são poucas possibilidades.

Imaginemos, inicialmente, que a pessoa utilize apenas bilhetes para viagens simples, ou seja, de R$3,00 cada. Assim, para que o valor seja superior aos R$12,50 já presentes no bilhete único, teríamos o mínimo de 5 viagens:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 \rightarrow a\ depositar\ R\$2{,}50$$

Caso a pessoa utilize apenas uma viagem de integração, teríamos:

$$3 + 3 + 3 + 4{,}65 = 13{,}65 \rightarrow a\ depositar\ R\$1{,}15$$

Caso a pessoa utilize duas viagens de integração:

$$3 + 3 + 4{,}65 + 4{,}65 = 15{,}30 \rightarrow a\ depositar\ R\$2{,}80$$

Caso a pessoa utilize três viagens de integração:

$$4{,}65 + 4{,}65 + 4{,}65 = 13{,}95 \rightarrow a\ depositar\ R\$1{,}45$$

Caso a pessoa utilize mais viagens do que as citadas, o valor ultrapassaria sempre mais do que os depósitos excedentes calculados.

Dentre as opções, o menor valor a ser depositado deve ser de R$1,15, ou seja, alternativa b).

Mas professor, não tem uma fórmula para resolver esse tipo de exercício?

Pois é, não tem. E isso é muito comum nas provas.

Como no exercício anterior, devemos utilizar os conhecimentos básicos adquiridos nos ensinos fundamental e médio para resolver as situações-problema propostas.

Com a prática adquirida nos exercícios das aulas você será mais do que capaz de escapar dessas armadilhas. Por isto nossas aulas contam com tantos exercícios resolvidos detalhadamente: para proporcionar a você a experiência necessária para fazer uma excelente prova!

Não negligencie a parte de prática, ok? É aqui que você consolida seu conhecimento!

Vamos adiante.

**Gabarito: b)**

---

**11. (Fuvest/2014)**

O número real x, que satisfaz 3 < x < 4, tem uma expansão decimal na qual os 999.999 primeiros dígitos à direita da vírgula são iguais a 3. Os 1.000.001 dígitos seguintes são iguais a 2 e os restantes são iguais a zero.

Considere as seguintes afirmações:

I. $x$ é irracional.

II. $x \geq \frac{10}{3}$

III. $x.10^{2.000.000}$ é um inteiro par

Então,

a) nenhuma das três afirmações é verdadeira

b) apenas as afirmações I e II são verdadeiras

c) apenas a afirmação I é verdadeira

d) apenas a afirmação II é verdadeira

e) apenas a afirmação III é verdadeira

**Comentários**

Muito bem. Antes de julgar as afirmações, vamos explicitar nosso número x:

$$x = 3{,}3333\ldots 33\ 2222\ldots 22\ 0000\ldots$$

Obviamente, respeitados os números de casas decimais fornecidos de 999.999 casas decimais com o algarismo 3, de 1.000.001 casas decimais com o algarismo 2 e de todas as seguintes com o algarismo 0.

Assim, vejamos as afirmações.

I. x é irracional.

Como $x$ tem um número finito de casas decimais diferentes de zero, nesse caso $999.999 + 1.000.001 = 2.000.000$, $x$ é racional, tornando a afirmativa falsa.

II. $x \geq \frac{10}{3}$

$$x \geq \frac{10}{3}$$

$$3{,}3333\ldots 33\ 2222\ldots 22\ 0000\ldots \geq \frac{10}{3}$$

$$3{,}3333\ldots 33\ 2222\ldots 22\ 0000\ldots \geq 3{,}3333\ldots 33\ 3333\ldots 33\ 3333\ldots$$

O que é falso.

III. $x.10^{2.000.000}$ é um inteiro par

Quando multiplicamos um número por uma potência positiva de dez, acabamos por transpor a vírgula para a direita um número de casas decimais igual à potência de dez multiplicada.

Sendo assim, nesse caso, ao multiplicarmos um número por $10^{2.000.000}$, levamos a vírgula para a direita dois milhões de casas.

Se o nosso número $x$ tem exatamente dois milhões de casas diferentes de zero após a vírgula, ao multiplicarmos esse número por $10^{2.000.000}$, ele se tornará um inteiro, pois todas as casas restantes após a vírgula serão iguais a zero.

Desse modo, afirmativa verdadeira.

**Gabarito: e)**

---

**12. (Fuvest/2013)**

As propriedades aritméticas e as relativas à noção de ordem desempenham um importante papel no estudo dos números reais. Nesse contexto, qual das afirmações abaixo é correta?

a) Quaisquer que sejam os números reais positivos a e b, é verdadeiro que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

b) Quaisquer que sejam os números reais a e b tais que $a^2 - b^2 = 0$, é verdadeiro que $a = b$.

c) Qualquer que seja o número real a é verdadeiro que $\sqrt{a^2} = a$.

d) Quaisquer que sejam os números reais a e b não nulos tais que $a < b$, é verdadeiro que $1/_b < 1/_a$.

e) Qualquer que seja o número real a, com $0 < a < 1$, é verdadeiro que $a^2 \leq \sqrt{a}$.

**Comentários**

a) Quaisquer que sejam os números reais positivos a e b, é verdadeiro que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Como comentado anteriormente, nem a potenciação nem a radiciação podem ser desmembradas em somas ou subtrações. Para provar a afirmação como falsa, basta apresentarmos um contraexemplo:

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{1} + \sqrt{1}$$

$$\sqrt{2} = 1 + 1$$

$$\sqrt{2} = 2$$

O que é absurdo, ou seja, a alternativa a) é falsa.

b) Quaisquer que sejam os números reais a e b tais que $a^2 - b^2 = 0$, é verdadeiro que $a = b$.

Ao desenvolver, tomemos cuidado com os sinais envolvidos:

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$a^2 = b^2$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$$

$$\pm a = \pm b$$

$$a = \pm b$$

Ou seja, alternativa falsa.

Em nossa próxima aula, veremos com mais profundidade o que vem a ser a expressão $\sqrt{a^2}$.

Alternativamente, podemos pensar também em um contraexemplo como fizemos na alternativa anterior:

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$a^2 = b^2$$

Peguemos os valores de $a = 1$ e $b = -1$.

$$(1)^2 = (-1)^2$$

$$1 = 1$$

E, apesar de termos $a^2 - b^2 = 0$ temos, claramente, $a \neq b$, tornando a alternativa também falsa.

c) Qualquer que seja o número real a é verdadeiro que $\sqrt{a^2} = a$.

Aqui há o mesmo erro apresentado na alternativa b). Perceba que para $a = -1$ a equação não se sustenta:

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{(-1)^2} = -1$$

Lembre-se da “tia” da escola: “Primeiro os parênteses!”.

$$\sqrt{1} = -1$$

$$1 = -1$$

Como chegamos a um absurdo com $a = -1$, não podemos afirmar que a equação é verdadeira “qualquer que seja o número real $a$”.

Atenção: É plenamente possível encontrarmos algum $a$ que satisfaça a equação, o que não se pode afirmar é que a equação vale para todo $a$, ok?

Como a alternativa fala em "qualquer que seja o número $a$", não há escolha a não ser classificá-la como falsa.

d) Quaisquer que sejam os números reais a e b não nulos tais que $a < b$, é verdadeiro que ${}^{1}/_{b} < {}^{1}/_{a}$.

Vamos para mais um contraexemplo. Assumamos $a = -1$ e $b = 1$. Para esses valores, tem-se como verdadeira a primeira parte $a < b$, pois $-1 < 1$.

Vejamos se a segunda parte se sustenta:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{1} < \frac{1}{-1}$$

$$1 < -1$$

Outro absurdo.

e) Qualquer que seja o número real a, com $0 < a < 1$, é verdadeiro que $a^2 \leq \sqrt{a}$.

Analisemos com calma.

Sabemos que, para todo $0 < a < 1,\ a^2 < a$.

Se você não tomou isso como automático, pense no exemplo da pizza. Se alguém come metade da metade de uma pizza, come menos que a metade, veja:

$$\frac{1}{2} . \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

Desse modo, e como $0 < a < 1$, podemos dizer:

$$0 < a < 1$$

Multiplicando todos os termos por $a$:

$$0 < a^2 < a$$

Extraindo a raiz quadrada de todos os termos:

$$\sqrt{0} < \sqrt{a^2} < \sqrt{a}$$

Como sabemos que $a$ é positivo, $\sqrt{a^2} = a$, então:

$$0 < a < \sqrt{a}$$

Perceba o que conseguimos ao unir duas das informações obtidas:

$$0 < a^2 < a$$

$$0 < a < \sqrt{a}$$

Unindo essas duas informações em uma única inequação, temos:

$$0 < a^2 < a < \sqrt{a}$$

A afirmativa e) diz que

$$a^2 \leq \sqrt{a}$$

O que está de acordo com nossa conclusão.

**Gabarito: e)**

---

**13. (Fuvest/2010)**

Leia a charge e responda.


Fonte: **Toda Mafalda**. Quino. Martins Fontes, 1999.

a) Que motivo levou Mafalda a pedir para ir ao banheiro?

b) Enuncie e resolva o problema matemático apresentado à Mafalda.

**Comentários**

Ok, essa questão não é inteiramente matemática, ainda assim é uma questão interessante.

Vejamos:

a) Que motivo levou Mafalda a pedir para ir ao banheiro?

Analisando a tirinha, Mafalda foi ao banheiro para lidar com sua frustração de não conseguir resolver o problema proposto na aula.

b) Enuncie e resolva o problema matemático apresentado à Mafalda.

Sem dar a mesma desculpa de Mafalda, vamos traduzir o enunciado em linguagem matemática.

Primeiro, limpemos o texto. A tirinha traz as seguintes informações:

"O toneleiro passou 218 litros de um barril de vinho para $g$ garrafas de 75 centilitros."

Ah, professor, está melhorando! Pelo menos agora não foi $x$...

Pois é, usemos, para variar, $g$ para simbolizar o número de garrafas necessárias à situação proposta. Mas não se acostume, viu? Ainda sou fã do $x$...

Vamos lá.

Aqui nós precisaremos de um conhecimento sobre nomenclatura. O prefixo *centi* é usado para quando queremos a centésima parte de algo, exatamente o que acontece com o centímetro (que é a centésima parte do metro). Se preferir, pode pensar no *centi* como sendo a divisão por cem, ou, alternativamente, como a multiplicação de algo por $10^{-2}$.

Assim, 75 centilitros nada mais é do que $^{75}/_{100}$ litros, ou 0,75 litros.

Dessa forma, o número $g$ de garrafas necessárias para conter 218 litros é dado por:

$$g = \frac{218}{0{,}75}$$

$$g = 290{,}\overline{6}$$

Uma observação é necessária antes de darmos nossa resposta. É razoável imaginar que todas as garrafas sejam iguais e que não se possa pegar $0{,}\overline{6}$ garrafas. Dessa forma, uma resposta mais razoável é utilizarmos 291 garrafas.

Essa situação é muito comum em vestibulares. Fique atento ao perguntarem sobre leitos de hospitais, lugares no cinema ou teatro, quantidade de caixas e embalagens... Não podemos contar com frações desses itens, então é necessário adequar a resposta numérica obtida na resolução da equação à situação particular de cada exercício. Fique de olho.

**Gabarito: 291**

# 10. Considerações finais

Ufa!

Passamos boas horas juntos. Agora é revisar e ir para a próxima aula, pois há muito mais pela frente.

Novamente, se surgirem dúvidas (e é natural que elas surjam), utilize o fórum de dúvidas no site do Estratégia. Suas dúvidas são levadas muito a sério por nós.

Grande abraço e bons estudos.

FALE COMIGO

/professormarcal    /professor.marcal    /professormarcal