Laboratorio N°1 - Algoritmos Númericos

Israel Arias Panez
Departamento de Ingeniería Informática
Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile
israel.arias@usach.cl

***Resumen*—En el presente documento se presentan los resultados del Laboratorio N°1 de la asignatura Algoritmos Númericos. Se muestra un análisis de distintos métodos numéricos para resolución de ecuaciones no lineales implementados en Matlab, el análisis contempla una comparación de los errores, errores a priori, costos espaciales y costos temporales obtenidos por cada método. Además se realiza un análisis comparando tres medidas de error distintas obtenidas en la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales ocupando el método de Newton multivariable.**

I. Introducción

En el presente laboratorio se efectuó la resolución de ecuaciones no lineales mediante métodos numéricos. “Un método numérico es un procedimiento mediante el cual se obtiene, casi siempre de manera aproximada, la solución de ciertos problemas realizando cálculos puramente aritméticos y lógicos (operaciones aritméticas elementales, cálculo de funciones, consulta de una tabla de valores, cálculo preposicional, etc.)” [1]. Los procedimientos de los métodos numéricos son algoritmos, por lo que es posible implementarlos en computadores, para esta ocasión los métodos numéricos fueron implementados en el lenguaje de programación Matlab. Cabe destacar que la en las aproximaciones conseguidas depende de las características de cada método y las limitaciones del equipo en donde se efectúe el cálculo.

El presente documento tiene como objetivo el mostrar los resultados obtenidos del laboratorio N°1 de la asignatura Algoritmos Numéricos, en el laboratorio se plantearon las siguientes actividades:

1. Programar en Matlab los métodos numéricos mencionados: Bisección, Secante, Regula Falsi, Newton-Raphson y Método de Newton multivariable.
2. Usar los métodos para resolver dos ecuaciones no lineales (f1 y f2) y el método de Newton de varias variables para resolver un sistema de ecuaciones no lineales (F), comparar los mínimos errores conseguidos, el error a priori y/o posteriori, costos temporales y costos espaciales de los distintos métodos
3. Comparar 3 medidas de error al resolver el sistema de ecuaciones no lineales (F)

II. Metodología

En esta sección se presentara la metodología usada para la resolución de la experiencia de laboratorio.

II-A. *Métodos Numéricos*

Como se menciono en la sección de introducción, en esta experiencia de laboratorio se usaran métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales, los métodos a utilizar son los siguientes:

- Método de la Bisección.
- Método de la Secante.
- Método Regula Falsi.
- Método de Newton-Raphson.
- Método de Newton Multivariable.

Cabe destacar que el método de Newton Multivariable sera ocupado para la resolución del sistema de ecuaciones no lineales.

II-B. *Ecuaciones*

Las ecuaciones no lineales a resolver en esta experiencia de laboratorio, son las siguientes:

$$f_1(x) = x^2 - 60$$
$$f_2(x) = x^3 - 2x^2 + ln(2x + 1)$$

El sistema de ecuaciones no lineales a resolver con el método de Newton multivariable es:

$F(x)$:

$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$
$$X_{(0)} = (1, 1, 1)^T$$

II-C. *Error*

El error es ocupado por los algoritmos de cada método, se usa para verificar la exactitud del resultado calculado, cada método implementado tiene distintas medidas de error que serán presentadas en la sección de resultados.

II-D. *Tolerancia*

La tolerancia es el error al que se busca llegar con un método numérico, se usa dentro de los algoritmos como condición de parada y determina que tan exactos serán los resultados, con el objetivo de conseguir resultados con alta precisión esta experiencia de laboratorio fue desarrollada usando un error de 1×10^{-10}.

II-E. *Error a priori*

Como se menciono en la sección de introducción del presente documento, una de las actividades de la sesión de laboratorio consiste en la comparación de los errores a priori y/o posteriori con los mínimos errores conseguidos de los métodos, en la implementación efectuada se decidió calcular los errores a priori, de manera que se comparara el mínimo error conseguido por cada método al error a priori calculado. El error a priori sera calculado de acuerdo a las fórmulas estudiadas en las clases de la asignatura para cada método.

II-F. *Costo temporal*

El costo temporal es el tiempo que tarda en ejecutarse el método hasta entregar un resultado, con el fin de poder medir este tiempo es que en la implementación se usan las funciones *tic* y *toc* de Matlab, las cuales permiten obtener el tiempo transcurrido de ejecución de un algoritmo medido en segundos.

II-G. *Costo espacial*

El costo espacial es la cantidad de operaciones que realiza el algoritmo de un método, las operaciones que realiza un algoritmo son operaciones matemáticas como sumas y restas, comparaciones, asignaciones a variables, multiplicaciones, divisiones, llamadas a funciones, etc.
Con el fin de poder medir el Costo espacial se estableció una heurística, la cual asigna un costo a cada operación mencionada anteriormente, con el fin de que el costo espacial para cada método estará determinado por la suma de todos estos costos al fin del algoritmo. La heurística implementada establece los siguientes costos:

- Sumas y restas / Condiciones y lógica = 1 de costo.
- Multiplicaciones y divisiones = 2 de costo.
- Llamados a funciones = 5 de costo.

II-H. *Medidas de error escogidas*

Como fue mencionado en las actividades a realizar en la sección de introducción, se solicita comparar 3 medidas de error al resolver el sistema de ecuaciones no lineales (F), para esto en la implementación se decidió usar las siguientes medidas de error [2]:

1. Norma-1:
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
2. Norma euclídea:
$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$
3. Norma infinito:
$$||x||_\infty = \max_i \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

II-I. *Especificaciones técnicas del equipo*

Como se menciono en la sección de introducción del presente documento, uno de los factores que influye en los resultados en los métodos numéricos son las limitaciones que pueda presentar el equipo en el cual se efectúa el calculo, por ende no esta de más mencionar las especificaciones técnicas en la cual se desarrollo esta experiencia de laboratorio.

- CPU: Intel Core i5-6600.
- 16 GB de memoria RAM.
- Sistema Operativo: Windows 10 Pro.

III. RESULTADOS

En la presente sección se presentaran los resultados obtenidos de la experiencia de laboratorio

III-A. *Resolución de ecuaciones no lineales*

En primer lugar se resuelve la ecuaciones no lineales (f1 y f2), en las cuales se obtiene en un principio sus errores mínimos, los cuales se pueden apreciar en la Tabla I

Método	**Error mínimo f1**	**Error mínimo f2**
Bisección	$5{,}231 \times 10^{-11}$	0
Secante	$7{,}105 \times 10^{-15}$	$2{,}353 \times 10^{-14}$
Regula Falsi	$3{,}446 \times 10^{-12}$	$4{,}467 \times 10^{-11}$
Newton Raphson	$7{,}105 \times 10^{-15}$	$5{,}551 \times 10^{-16}$

Tabla I: Errores mínimos para f1 y f2

También se efectúa el calculo de los errores a priori para f1 y f2 como se estableció en la sección de metodología del presente documento, los errores se pueden apreciar en la Tabla II

Método	**Error a priori f1**	**Error a priori f2**
Bisección	$7{,}276 \times 10^{-12}$	0,1
Secante	$4{,}724 \times 10^{-10}$	$-0{,}3967$
Regula Falsi	$7{,}276 \times 10^{-12}$	$9{,}536 \times 10^{-08}$
Newton Raphson	$7{,}568 \times 10^{-18}$	$1{,}320 \times 10^{-16}$

Tabla II: Errores a priori para f1 y f2

Por ultimo se presentan los costos temporales y espaciales para f1 en la Tabla III

Método	**Costo temporal [s]**	**Costo espacial**
Bisección	0,003156	2133
Secante	0,002403	199
Regula Falsi	0,002008	416
Newton Raphson	0,002516	113

Tabla III: Costos temporales y espaciales para f1

Los costos temporales y espaciales para f2 son presentados en la Tabla IV

III-B. *Resolución de sistema de ecuaciones no lineales*

El sistema de ecuaciones no lineales fue resuelto por el método de Newton Multivariable, registrando los errores seleccionados a través de las iteraciones como se planteo en la sección de metodología del presente informe, se puede ver los resultados en la imagen 1

Método	Costo temporal [s]	Costo espacial
Bisección	0,001039	117
Secante	0,0006407	275
Regula Falsi	0,0009622	1228
Newton Raphson	0,0005987	139

Tabla IV: Costos temporales y espaciales para f2

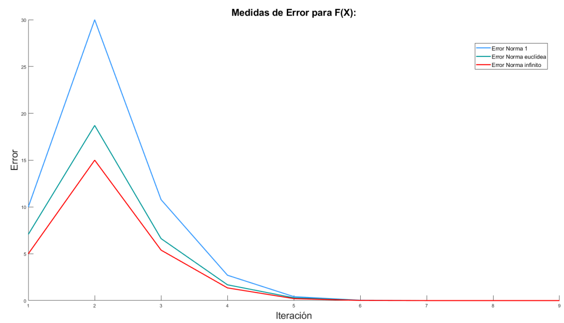

Figura 1: Comparación de las 3 medidas de error

IV. Análisis

En esta sección se efectuaran el análisis de los resultados presentados en la sección numero 3 de resultados del presente informe

IV-A. *Discusión de resultados*

Es posible observar que el método más eficaz fue el método de Newton Raphson, tanto para f1 y f2, consiguiendo los costos temporales y espaciales más bajos, a la vez que presenta los errores más bajos tanto para f1 y f2, por ende parece el método más fiable y eficaz entre todos los probados.

Para las 3 medidas de error escogidas para el caso del sistema de ecuaciones es posible notar que todas lograron llegar al resultado exacto del sistema de ecuaciones, o sea un error de cero en la misma cantidad de iteraciones, sin embargo la medida de error que presento en todo momento errores más bajos fue el Error Norma Infinito, por ende es la medida de error que arroja los resultados más confiables para el caso de la función F.

V. Conclusiones

Como conclusiones de la experiencia de laboratorio se puede destacar que para el caso de los métodos que resolvieron las ecuaciones no lineales f1 y f2, el método de Newton-Raphson fue el mejor en todos los ámbitos evaluados, por lo que se puede recomendar como prioridad para resolver este tipo de ecuaciones, debido a que es capaz de lograr mejores resultados en menor tiempo y con una baja cantidad de error.
También es posible notar que para el Método de Newton Multivariable, dentro de los 3 distintos errores probados, el más fiable fue el de Norma Infinito, es probable que existan medidas de errores que puedan mejorar los errores obtenidos por Norma Infinito, sin embargo bajo lo probado según la metodología implementada, se recomienda el error Norma Infinito para el método de Newton Raphson.
Finalmente cabe destacar que esta experiencia de laboratorio fue un exitoso primer acercamiento a trabajar con métodos numéricos y el lenguaje Matlab, lo que permitió conocer satisfactoriamente la utilidad de estos en operaciones matemáticas y a su vez dejando como desafío poder probar los métodos estudiados en otras situaciones.

Referencias

[1] R. S. Vasquez. Métodos numéricos para ingeniería. [Online]. Available: https://disi.unal.edu.co/~lctorress/MetNum/LiMetNu2.pdf
[2] F. J. C. Gavala. Apuntes de Álgebra numérica.