

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Informática



Modelación y Simulación
Laboratorio 2

Christofer Allup
Israel Arias
Christian Méndez

Profesor: Gonzalo Acuña
Ayudante: Tomás López

Santiago – Chile

2023

TABLA DE CONTENIDO

Índice de tablas	v
Índice de ilustraciones	vii
1 Introducción	1
2 Márco teórico	3
3 Desarrollo Primera Parte	5
3.1 Función bam	5
3.2 Función mab	8
4 Desarrollo Segunda Parte	11
5 Conclusiones	17
Bibliografía	19

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 3.1	Diagrama de bloques	5
Figura 3.2	Gráfico de comparación entre mab y feedback	9
Figura 4.1	Diagrama de vasos comunicantes	11
Figura 4.2	Respuesta del sistema frente a las diferentes entradas	14

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Nuestra realidad se encuentra está rodeada de sistemas y modelos. La definición de modelo incluye casos como los de una red eléctrica, un motor hidráulico, un organismo vivo, la economía de un país, etc. (Salgado et al., 2005). Es debido a esta característica de múltiples modelos que componen la realidad que ha llevado a la búsqueda del como poder estudiar estos modelos.

En esta segunda experiencia de laboratorio de la asignatura Modelación y Simulación, tiene como objetivo principal el complementar el aprendizaje respecto a modelos de estado, para lo cual se desarrollará una actividad dividida en dos partes, las cuales serán desarrolladas en MATLAB.

Este informe cuenta con la siguiente estructura de seis secciones: La presente introducción, en donde se realizó una contextualización del tema a tratar, la siguiente sección es un marco teórico en donde se explicarán los conceptos más relevantes para la comprensión de esta experiencia, para luego pasar al desarrollo de ambas partes de la experiencia de laboratorio, presentando procedimientos, explicaciones, resultados y figuras. En la sección de conclusiones se realizará un resumen y recuento de lo más relevante de la experiencia realizada. Finalmente, en la sección de Bibliografía se presentarán las referencias y citas utilizadas a lo largo de este informe.

CAPÍTULO 2. MÁRCO TEÓRICO

- Sistema: Conjunto de elementos que interactúan entre sí y con su entorno para cumplir una función específica. Los sistemas se utilizan para describir y analizar fenómenos complejos en distintos campos de estudio (Doebelin, 1995).
- Transformada de Laplace: Herramienta matemática que transforma una función de tiempo en una función de variable compleja, lo que permite analizar sistemas dinámicos, la resolución de ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales (Kuo, 1996.).
- Función de transferencia: Herramienta matemática que describe cómo un sistema dinámico responde a una entrada específica. También se puede entender como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada para un sistema lineal e invariante en el tiempo (Kuo, 1996.).
- Modelo de estado: Un modelo de espacio de estados es una representación matemática de un sistema físico como un conjunto de variables de entrada, salida y estado relacionadas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Las variables de estado definen los valores de las variables de salida. En tiempo continuo, un modelo de espacio de estados tiene el siguiente formato:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

En este caso, x , u e y representan los estados, las entradas y las salidas, respectivamente, mientras que A , B , C y D son las matrices de espacio de estados (MathWorks, s f).

- Conexión en serie: Método de conexión donde los componentes o subsistemas están conectados uno tras otro en una sola trayectoria. La salida de un componente se conecta a la entrada del siguiente y la señal fluye a través de cada componente en la misma dirección (Ogata, 2010).
- Conexión en paralelo: Método de conexión donde los componentes o subsistemas están conectados en diversos caminos diferentes, esto quiere decir que la señal se divide entre componentes o subsistemas y que la entrada es la misma en cada uno de ellos (Ogata, 2010).

- Lazo abierto: Sistema en el que la salida no afecta directamente a la entrada, esto quiere decir que el sistema no tiene en cuenta la salida o el estado actual del sistema para hacer ajustes o tomar decisiones (Franklin et al., 2002).
- Lazo cerrado: Sistema en el que su salida se utiliza para ajustar la entrada del sistema. A diferencia de un lazo abierto, se utiliza la salida actual para tomar decisiones y hacer ajustes continuos a la salida con el objetivo de que esta se mantenga en un rango específico (Franklin et al., 2002).
- Regla de Mason: Método que establece la transferencia entre una variable de entrada u y una salida y como el producto de sus transferencias directas dividido por la diferencia de retorno (Acuña, 2022).
La relación entre ambas variables se puede apreciar en la ecuación 2.1:

$$\text{Diferencia de retorno} = 1 + (\text{Producto transferencias del lazo}) \quad (2.1)$$

CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE

Para el diagrama de la Figura 3.1, se solicita realizar una función llamada **bam**, esta función debe recibir los valores de los coeficientes a , b , c , d , e y f y retornar las matrices correspondientes del modelo de estados. A su vez, se solicita desarrollar una función llamada **mab** que reciba como entrada la salida de la función **mab** y retorne la función de transferencia **H** del sistema.

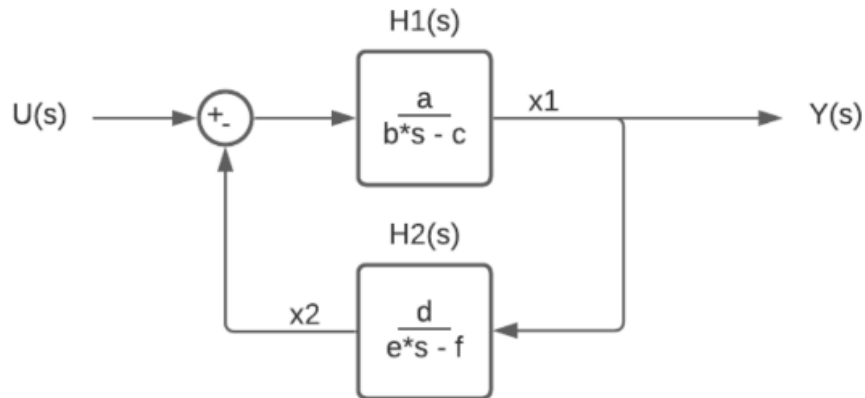


Figura 3.1: Diagrama de bloques

3.1 FUNCIÓN BAM

Para el desarrollo de la función **bam** se debe utilizar las ecuaciones propuestas por el modelo de estados para sistemas lineales invariantes, estas ecuaciones se pueden observar en la ecuación 3.1.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU\end{aligned}\tag{3.1}$$

Luego, es necesario identificar las variables de entrada, salida y de estado, por ende tomando en consideración el diagrama de la Figura 3.1 se tiene:

- Variables de entrada: U , corresponde a la variable que entra al sistema
- Variables de salida: x_1 , corresponde a lo que se desea controlar.

- Variables de estado: x_1, x_2 , corresponden a las salidas de las funciones de transferencia H_1 y H_2 respectivamente.

Con las variables de entrada, salida y de estado identificadas, es necesario realizar mediante álgebra de sistemas el despeje de las variables de estado. Para esto se desarrollan las ecuaciones que surgen a partir del diagrama de la Figura 3.1.

En primer lugar, se desarrolla la ecuación en el dominio de Laplace que se obtiene en la salida de x_1 , dada por la ecuación 3.2.

$$x_1 = (U - x_2) \cdot \frac{a}{bs - c} \quad (3.2)$$

Luego, el despeje necesario para obtener el valor de \dot{x}_1 se puede observar en la ecuación 3.3.

$$\begin{aligned} x_1 \cdot (bs - c) &= a \cdot (U - x_2) \\ bsx_1 - cx_1 &= aU - ax_2 \\ bsx_1 &= aU - ax_2 + cx_1 \\ sx_1 &= \frac{a}{b}U - \frac{a}{b}x_2 + \frac{c}{b}x_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Finalmente, se aplica transformada de Laplace inversa para volver al dominio del tiempo y obtener el valor de \dot{x}_1 , el resultado se puede observar en la ecuación 3.4.

$$\dot{x}_1 = \frac{c}{b}x_1 - \frac{a}{b}x_2 + \frac{a}{b}U \quad (3.4)$$

Análogamente, se debe realizar este procedimiento para la salida de x_2 , por ende del diagrama de la Figura 3.1, se tiene que el valor de x_2 esta dado por la ecuación 3.5.

$$x_2 = x_1 \cdot \frac{d}{es - f} \quad (3.5)$$

Luego, desarrollando la ecuación 3.5 en el dominio de Laplace se tiene las ecuaciones 3.6.

$$\begin{aligned}
 x_2(es - f) &= dx_1 \\
 esx_2 - fx_2 &= dx_1 \\
 esx_2 &= dx_1 + fx_2 \\
 sx_2 &= \frac{d}{e}x_1 + \frac{f}{e}x_2
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Finalmente, se aplica transformada de Laplace inversa para volver al dominio del tiempo y obtener el valor de \dot{x}_2 , el resultado se puede observar en la ecuación 3.7.

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{e}x_1 + \frac{f}{e}x_2 \tag{3.7}$$

Una vez obtenidos los valores \dot{x}_1 y \dot{x}_2 en las ecuaciones 3.4 y 3.7, es posible determinar las matrices necesarias para el modelo de estados (ecuación 3.1). Por lo que se tiene el siguiente modelo (ecuaciones 3.8 y 3.9):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{b} & \frac{-a}{b} \\ \frac{d}{e} & \frac{f}{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u
 \tag{3.8}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u
 \tag{3.9}$$

Al tener el modelo desarrollado es posible determinar que los valores de las matrices, A, B, D y D son:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{c}{b} & \frac{-a}{b} \\ \frac{d}{e} & \frac{f}{e} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0
 \tag{3.10}$$

Finalmente, es posible implementar la función **bam** solicitada, la función recibiría las entradas a, b, c, d, e y f, en base a los valores de entrada se calcularía la matriz A y B, dado que C y D no dependen de las entradas.

3.2 FUNCIÓN MAB

Para el desarrollo de la función **mab**, se debe operar matricialmente el modelo de la ecuación 3.1, de tal forma que se obtenga H en términos de las matrices A , B , C y D . Dado que el valor de **H** esta dado por $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, es necesario determinar el valor de X en la ecuación 3.1 llevada al dominio de Laplace para posteriormente ser reemplazada en Y , por lo que al aplicar la transformada de Laplace en la primera ecuación se tiene (ecuación 3.11):

$$\begin{aligned} sX &= AX + BU \\ sX - AX &= BU \\ (sI - A)X &= BU \\ X &= (sI - A)^{-1}BU \end{aligned} \tag{3.11}$$

Con el valor de X obtenido, es posible reemplazarlo en la ecuación 3.1 que determina el valor de Y , por lo que se tiene la ecuación 3.12:

$$Y = C((sI - A)^{-1}BU) + DU \tag{3.12}$$

Finalmente como se mencionó, el valor de **H** esta dado por $H(s) = \frac{Y}{U}$, por lo que el valor de **H** esta dado por la ecuación 3.13:

$$H = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{3.13}$$

Con el valor de H obtenido en la ecuación 3.13, se puede realizar la función **mab** solicitada, ya que permite obtener el valor de la función de transferencia **H** por medio de las matrices A , B , C y D .

A continuación, en la Figura 3.1 se puede apreciar una comparación entre los gráficos obtenidos mediante la función **mab** y **step(feedback(H1, H2))**, con las siguiente entradas:

$$a = 5$$

$$b = 3$$

$$c = 1$$

$$d = 7$$

$$e = 2$$

$$f = 4$$

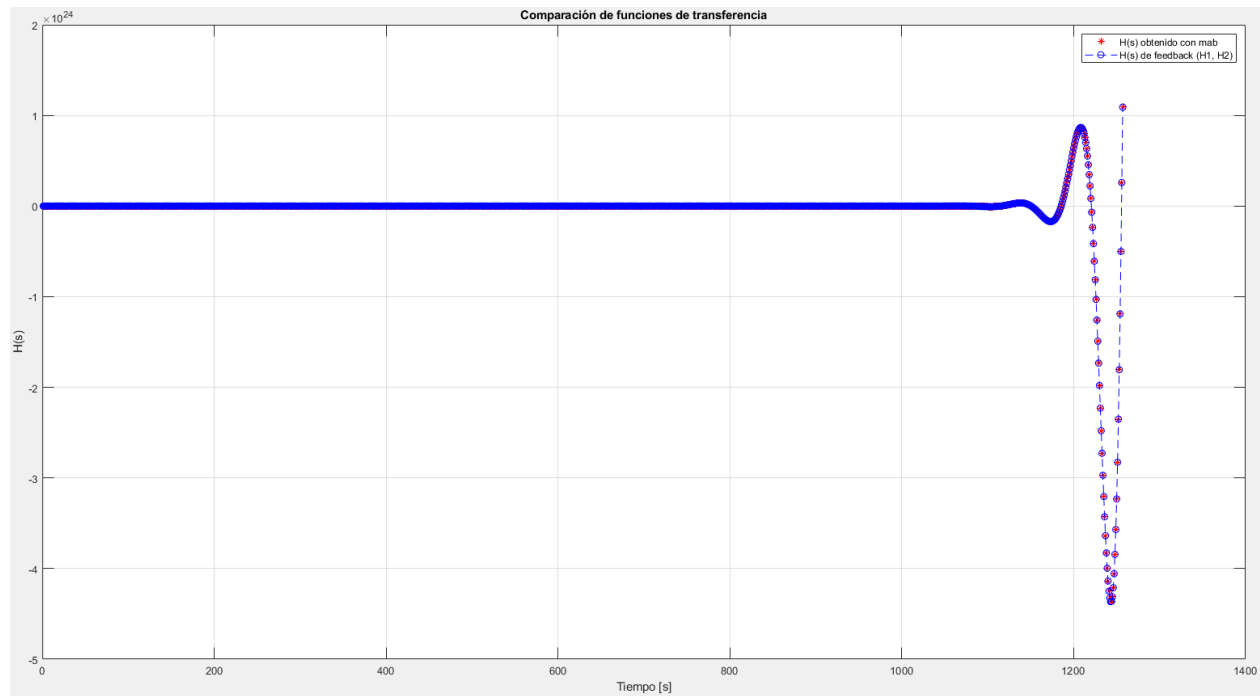


Figura 3.2: Gráfico de comparación entre mab y feedback

Como se puede apreciar en la Figura 3.2, la gráfica obtenida mediante la función **mab** es idéntica a la obtenida por **step(feedback(H1, H2))**, por ende se comprueba que la implementación de **mab** y **bam** fueron implementadas correctamente.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE

Para la segunda parte de esta experiencia se solicita obtener el modelo de estado algebraico del siguiente sistema en donde, si bien no se especifica lo que se desea estudiar, se decide supervisar el nivel de ambos vasos.

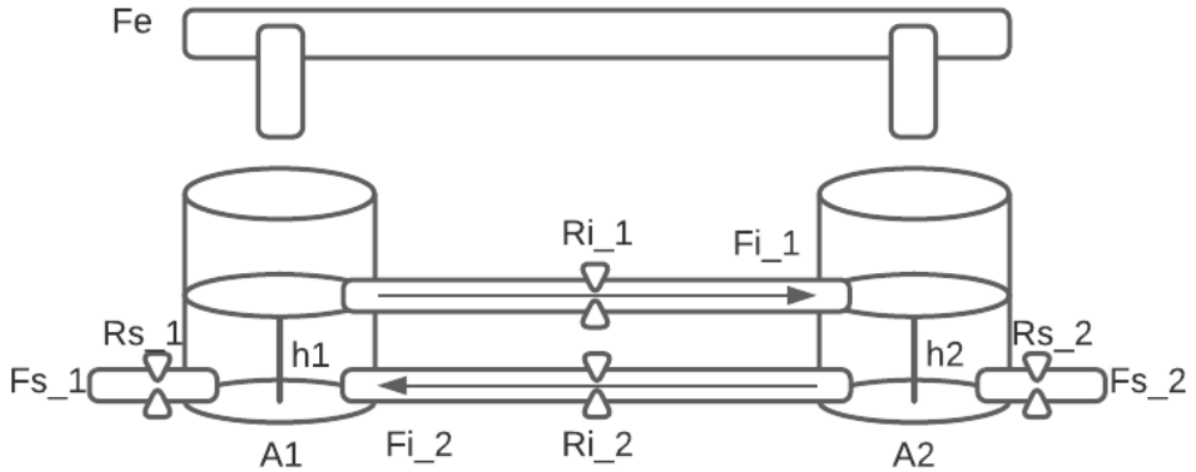


Figura 4.1: Diagrama de vasos comunicantes

Además, se establecen las siguientes ecuaciones bajo las que se rige este sistema:

$$F_{i1} = \frac{h_1 - h_2}{R_{i1}}; F_{i2} = \frac{h_2 - h_1}{R_{i2}}; F_{s1} = \frac{h_1}{R_{s1}}; F_{s2} = \frac{h_2}{R_{s2}}; \quad (4.1)$$

Para el modelo fenomenológico tenemos que las variables de entrada, variables de estado, las variables de salida y los parámetros del sistema son los siguientes:

- Variables de entrada: F_e
- Variables de estado: h_1 y h_2 , dado que son elementos acumuladores.
- Variables de salida: h_1 y h_2 . Como se mencionó anteriormente, se desea supervisar el nivel del líquido de ambos vasos.
- Parámetros del sistema:

- $A_1 = 2m^2$
- $A_2 = 4m^2$
- $R_{i1} = 0,25 \frac{s}{m^2}$
- $R_{i2} = 0,0625 \frac{s}{m^2}$
- $R_{s1} = 0,1 \frac{s}{m^2}$
- $R_{s2} = 0,1 \frac{s}{m^2}$

Ya que deseamos supervisar el nivel de ambos vasos, podemos definir las siguientes ecuaciones que representan al modelo fenomenológico sabiendo que:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = F_e + F_{i2} - F_{s1} - F_{i1} \quad (4.2)$$

Además, sabiendo que $V_1 = A_1 * h_1$ tenemos que:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{F_e + F_{i2} - F_{s1} - F_{i1}}{A_1} \quad (4.3)$$

Análogamente:

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = F_e + F_{i1} - F_{s2} - F_{i2} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{F_e + F_{i1} - F_{s2} - F_{i2}}{A_2} \quad (4.5)$$

Primero, para la variación del nivel en el primer vaso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} &= \frac{F_e + F_{i2} - F_{s1} - F_{i1}}{A_1} \\ &= \frac{F_e}{A_1} + \frac{F_{i2}}{A_1} - \frac{F_{s1}}{A_1} - \frac{F_{i1}}{A_1} \\ &= \frac{F_e}{A_1} + \frac{h_2 - h_1}{A_1 R_{i2}} - \frac{h_1}{A_1 R_{s1}} - \frac{h_1 - h_2}{A_1 R_{i1}} \\ &= -\frac{h_1}{A_1 R_{i2}} - \frac{h_1}{A_1 R_{s1}} - \frac{h_1}{A_1 R_{i1}} + \frac{h_2}{A_1 R_{i2}} + \frac{h_2}{A_1 R_{i1}} + \frac{F_e}{A_1} \\ &= -\frac{h_1}{\frac{1}{8}} - \frac{h_1}{\frac{1}{5}} - \frac{h_1}{\frac{1}{2}} + \frac{h_2}{\frac{1}{8}} + \frac{h_2}{\frac{1}{2}} + \frac{F_e}{2} \\ &= -8h_1 - 5h_1 - 2h_1 + 8h_2 + 2h_2 + \frac{F_e}{2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} &= -15h_1 + 10h_2 + \frac{1}{2}F_e \end{aligned} \quad (4.6)$$

Análogamente para el nivel del segundo vaso:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_2}{\partial t} &= \frac{F_e + F_{i1} - F_{s2} - F_{i2}}{A_2} \\
&= \frac{F_e}{A_2} + \frac{F_{i1}}{A_2} - \frac{F_{s2}}{A_2} - \frac{F_{i2}}{A_2} \\
&= \frac{F_e}{A_1} + \frac{h_1 - h_2}{A_2 R_{i1}} - \frac{h_2}{A_2 R_{s2}} - \frac{h_2 - h_1}{A_2 R_{i2}} \\
&= \frac{h_1}{A_2 R_{i1}} + \frac{h_1}{A_2 R_{i2}} - \frac{h_2}{A_2 R_{i1}} - \frac{h_2}{A_2 R_{s2}} - \frac{h_2}{A_2 R_{i2}} + \frac{F_e}{A_1} \\
&= h_1 + \frac{h_1}{\frac{1}{4}} - h_2 - \frac{h_2}{\frac{2}{5}} - \frac{h_2}{\frac{1}{4}} + \frac{F_e}{4} \\
&= h_1 + 4h_1 - h_2 - \frac{5}{2}h_2 - 4h_2 + \frac{1}{4}F_e \\
\frac{\partial h_2}{\partial t} &= 5h_1 - \frac{15}{2}h_2 + \frac{1}{4}F_e
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Habiendo desarrollado las ecuaciones 4.6 y 4.7 obtenemos las siguientes expresiones con las que construiremos el modelo de estados:

$$\dot{h}_1 = -15h_1 + 10h_2 + \frac{1}{2}F_e \tag{4.8}$$

$$\dot{h}_2 = 5h_1 - \frac{15}{2}h_2 + \frac{1}{4}F_e \tag{4.9}$$

Para obtener el modelo de entrada como el modelo de salida comenzamos desde las expresiones 4.10 y reemplazamos con los valores obtenidos en las ecuaciones 4.8 y 4.9

$$\dot{X} = AX + BU \tag{4.10}$$

$$Y = CX + DU$$

Para el modelo de entrada:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 5 & -\frac{15}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} F_e \tag{4.11}$$

A su vez, para el modelo de salida:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_e \tag{4.12}$$

De las ecuaciones 4.11 y 4.12 obtenemos las matrices A, B, C y D.

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 5 & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Habiendo obtenido las matrices que componen el modelo de estado, ahora es posible estudiar su comportamiento frente a diferentes entradas. Por esto, se estudia el comportamiento del sistema ante un escalón, un impulso y una función $u(t)$, para las cuales se obtienen 2 gráficos para cada entrada, ya que como es posible notar en las matrices B y D, el sistema posee 2 entradas y es posible observar los resultados en la Figura 4.2.

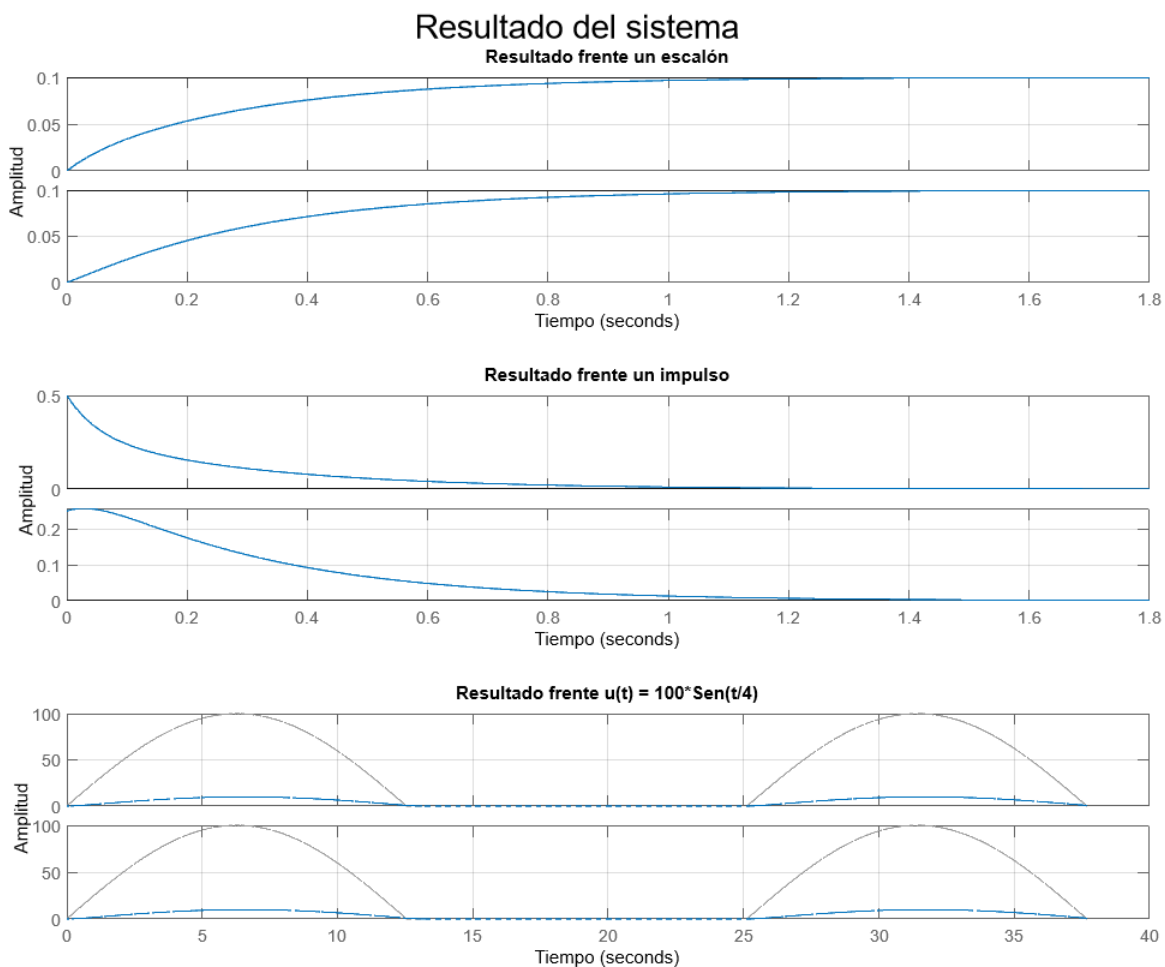


Figura 4.2: Respuesta del sistema frente a las diferentes entradas

Una vez habiendo realizado el gráfico de la respuesta del sistema ante las distintas entradas, podemos notar que la respuesta frente a un escalón y un impulso se estabiliza rápidamente en comparación a la entrada $u(t)$, ya que las primeras dos entradas se estabilizan aproximadamente en el segundo 1,

mientras que la respuesta frente a la entrada $u(t)$ tiene dos picos, uno centrado aproximadamente en el segundo 7 y el próximo en el segundo 33. Lo anterior puede deberse a las características de las entradas, esto ya que tanto el escalón como el impulso tienen un pico en su amplitud y luego se mantienen en un valor constante, mientras que la entrada $u(t)$ corresponde a un seno el cual se mantiene fluctuando indefinidamente entre ciertos valores limitados por su amplitud. Es por esto por lo que la amplitud de la respuesta aumenta cuando el seno se encuentra en la parte positiva del eje Y , y se mantiene estable de manera asintótica al eje X cuando el *seno* se encuentra en la parte negativa del eje.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En la presente experiencia de laboratorio se desarrolló una actividad dividida en dos partes, en la primera parte se implementaron las funciones **bam** y **mab**. La función **bam** que permitía recibir los valores a,b,c,d,e y f y retornar las matrices correspondientes a su modelo de estado. Por otro lado, la función **mab** recibe como entrada la salida de la función **bam** y retorna la función de transferencia H del sistema.

En la segunda parte de la experiencia se obtuvo el modelo de estado algebraico de un sistema propuesto que consistía en dos vasos conectados entre ellos. Usando el modelo se consiguieron los gráficos de respuesta del sistema a un impulso y a un escalón, además de la respuesta a una función sinusoidal.

Dentro de las dificultades que se presentaron durante el desarrollo de esta experiencia, es posible mencionar que dentro de la segunda parte al no haber especificación de lo que se deseaba monitorear o supervisar del sistema, por lo que para poder resolver la experiencia se asumió que se deseaba supervisar el nivel del líquido de ambos recipientes, también pudieron haberse escogido otras variables.

Respecto a los objetivos planteados inicialmente para experiencia, se puede concluir que fueron cumplidos en su totalidad, se logró el seguir avanzando en el aprendizaje respecto a modelos de estado a través del desarrollo de la experiencia en MATLAB, ambas partes de la experiencia fueron desarrolladas por completo, logrando el análisis y resultados esperados.

En conclusión, el desarrollo de esta experiencia permitió el afianzar el contenido que respecta a modelos de estado, logrando aplicarlos de forma práctica en un ambiente computacional gracias a MATLAB.

BIBLIOGRAFÍA

Acuña, G. (2022). Contenido teórico de modelación y simulación creado por francisco muñoz y basado en las clases del profesor gonzalo 'acuña.

Doebelin, E. (1995). *Engineering Experimentation: Planning, Execution, Reporting*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill.

URL <https://books.google.cl/books?id=SHBRAAAAMAAJ>

Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A., & Powell, J. D. (2002). *Feedback control of dynamic systems*, vol. 4. Prentice hall Upper Saddle River.

Kuo, B. C. (1996.). *Sistemas de control automático/*. México :: Pearson Educación,, primera edición ed. Incluye apéndice.

URL <https://bibliotecadigital.usm.cl/info/00565881>

MathWorks (s f). Modelo de espacio de estados. <https://la.mathworks.com/help/control/ref/ss.html>.

Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna / Katsuhiko Ogata ; traduccion, Sebastian Dormido Canto, Raquel Dormido Canto*. Madrid [etc: Pearson, 5ª ed. ed.

Salgado, M. E., Yuz, J. I., & Rojas, R. A. (2005). *Análisis de sistemas lineales*. Pearson Educación.