Sistemas de primer orden

Los sistemas de primer orden continuos son aquellos que responden a una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_0 r(t)$$

La función de transferencia es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s + a_0}$$

reacomodando términos también se puede escribir como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

donde $K = \dfrac{b_0}{a_0}$, es la ganancia en estado estable,

$\tau = \dfrac{1}{a_0}$, es la constante de tiempo del sistema.

el valor $s = -a_0 = -\dfrac{1}{\tau}$ se denomina polo.

Sistemas de primer orden

Respuesta de un sistemas de primer orden ante una entrada impulso

La salida en Laplace es

$$C(s) = \frac{b_0}{s + a_0} R(s) \qquad R(s) = 1$$

Utilizando transformada inversa de Laplace

$$c(t) = b_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s + a_0} \right\}$$

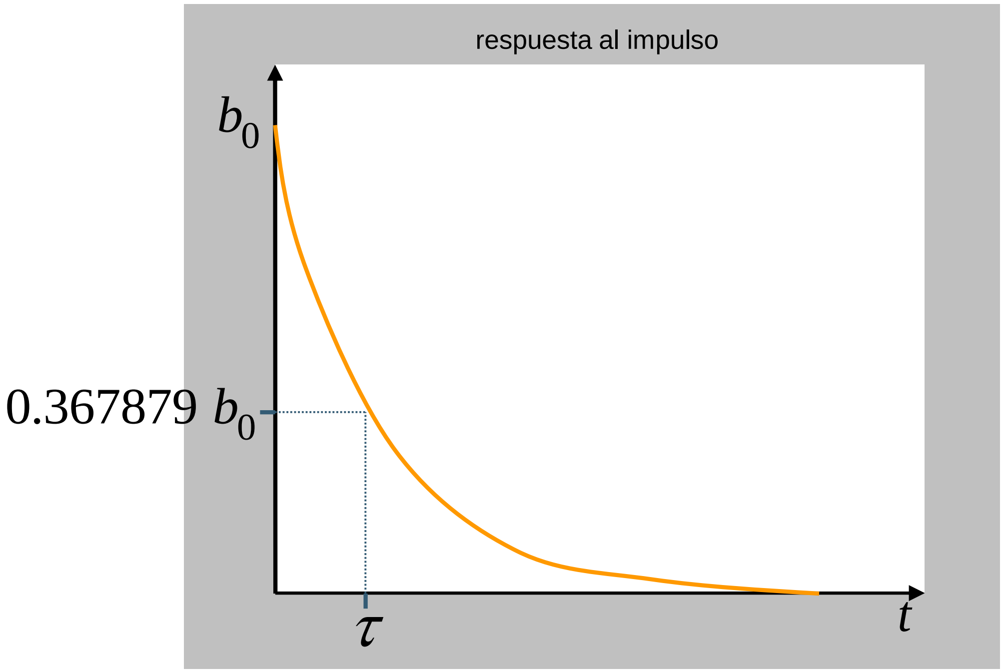
Se obtiene la salida en función del tiempo

$$c(t) = b_0 e^{-a_0 t}$$

se evalúa la ecuación anterior en tiempos múltiplos de τ

Sistemas de primer orden

t	$c(t)$
0	b_0
τ	$0.367879\, b_0$
2τ	$0.135335\, b_0$
3τ	$0.049787\, b_0$
4τ	$0.018315\, b_0$



Sistemas de primer orden

Respuesta de un sistemas de primer orden ante una entrada escalón de magnitud A

La salida en Laplace es

$$C(s) = \frac{b_0}{s + a_0} R(s) \qquad R(s) = \frac{A}{s}$$

Utilizando transformada inversa de Laplace

$$c(t) = Ab_0 L^{-1}\left\{ \frac{1}{s(s + a_0)} \right\}$$

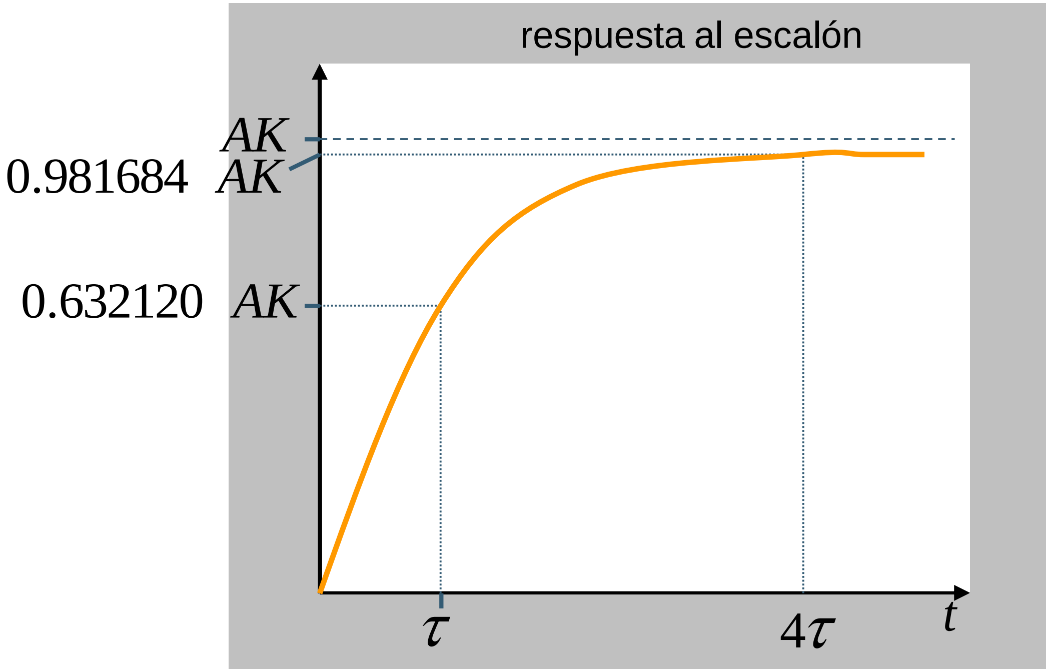
Se obtiene la salida en función del tiempo

$$c(t) = AK(1 - e^{-a_0 t})$$

Ahora se evalúa la ecuación anterior en tiempos múltiplos de τ

Sistemas de primer orden

t	$c(t)$
0	0
τ	0.632120 AK
2τ	0.864664 AK
3τ	0.950212 AK
4τ	0.981684 AK



Comentarios:

•La constante de tiempo (τ) es igual al tiempo que tarda la salida en alcanza un 63.212% del valor final.

•Matemáticamente la salida alcanza su valor final en un tiempo infinito, pero en el sistema real lo hace en tiempo finito. Para fines prácticos se considera que la salida alcanza el estado estable en cierto porcentaje del valor final. Se usan dos criterios: el del 98%(4τ) y el del 95% (5τ)

Sistemas de primer orden

Respuesta de un sistemas de primer orden ante una entrada rampa de magnitud A

La salida en Laplace es

$$C(s) = \frac{b_0}{s + a_0} R(s) \qquad R(s) = \frac{A}{s^2}$$

Utilizando transformada inversa de Laplace

$$c(t) = Ab_0 L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 (s + a_0)} \right\} \qquad r(t) = At$$

Se obtiene la salida en función del tiempo

$$c(t) = AK(t - \tau) + AK\tau\, e^{-a_0 t}$$

Sistemas de primer orden

Nota:
Es importante aclarar que la entrada es de pendiente *A*, mientras que la salida presenta pendiente *AK* desfasada τ seg.

En otras palabras siempre que la ganancia en estado estable (*K*) del sistema no sea igual a uno, existirá un error en estado estable infinito.